

الفصل الثاني
Chapter Two

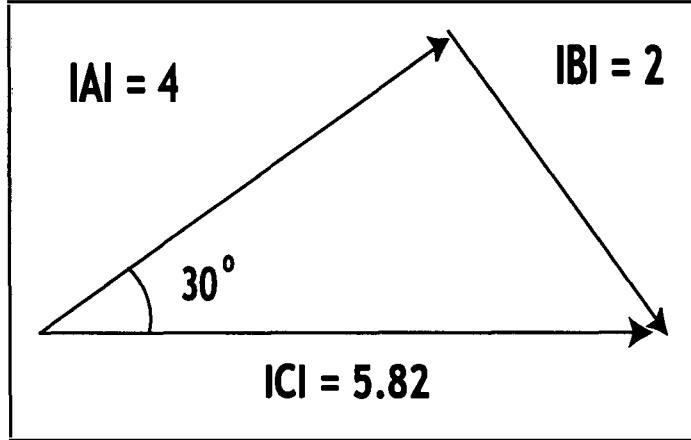
الكميات العددية والكميات الاتجاهية
Vectors and Scalars

مسألة (2.1) Problem

باستخدام قانون الجيب تمام أوجد محصلة المتجهين $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$ ، المبيين بالشكل (2.1).

الحل Solution

$$\begin{aligned} C^2 &= A^2 + B^2 + 2AB \cos(\theta) \\ &= (4)^2 + (2)^2 + 2(4)(2) \cos(30^\circ) \\ &= 33.86 \\ |C| &= 5.82 \end{aligned}$$



شكل (2.1)، المسألة (2.1)

مسألة (2.2) Problem

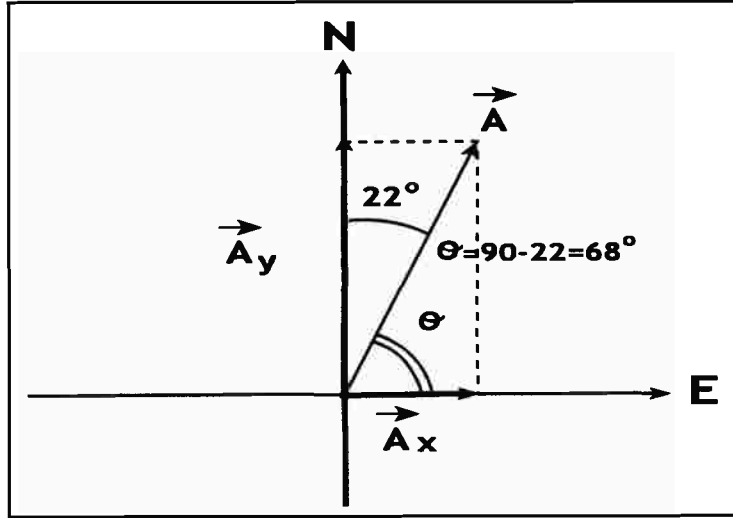
غادرت أرض المطار طائرة صغيرة في يوم ملبد بالغيوم، وبعد ذلك أعطت إشارة أنها على بعد (215 km) وباتجاه يصنع زاوية (22°) مع الشمال الشرقي. كم تبعد الطائرة عن أرض المطار في الاتجاهين شرقاً وشمالاً؟ انظر الشكل (2.2).

الحل Solution

المتجه يمثل بعد الطائرة عن نقطة الأصل $(0,0)$ ، أي أن : $A = 215 \text{ km}$

بعد الطائرة شرقاً :

$$\begin{aligned} A_x &= A \cos(\theta) \\ &= 215 \cos(68) = 81 \text{ km} \end{aligned}$$



شكل (2.2)، المسألة (2.2)

بعد الطائرة غرباً :

$$\begin{aligned} A_y &= A \sin(\theta) \\ &= 215 \sin(68) = 199 \text{ km} \end{aligned}$$

مسألة (2.3) Problem

تأمل المتجه الآتي :

$$\vec{A} = 4\hat{i} - 5\hat{j} + 3\hat{k} \quad \text{ثم مثله باستخدام المحاور الثلاثة المتعامدة.}$$

الحل Solution

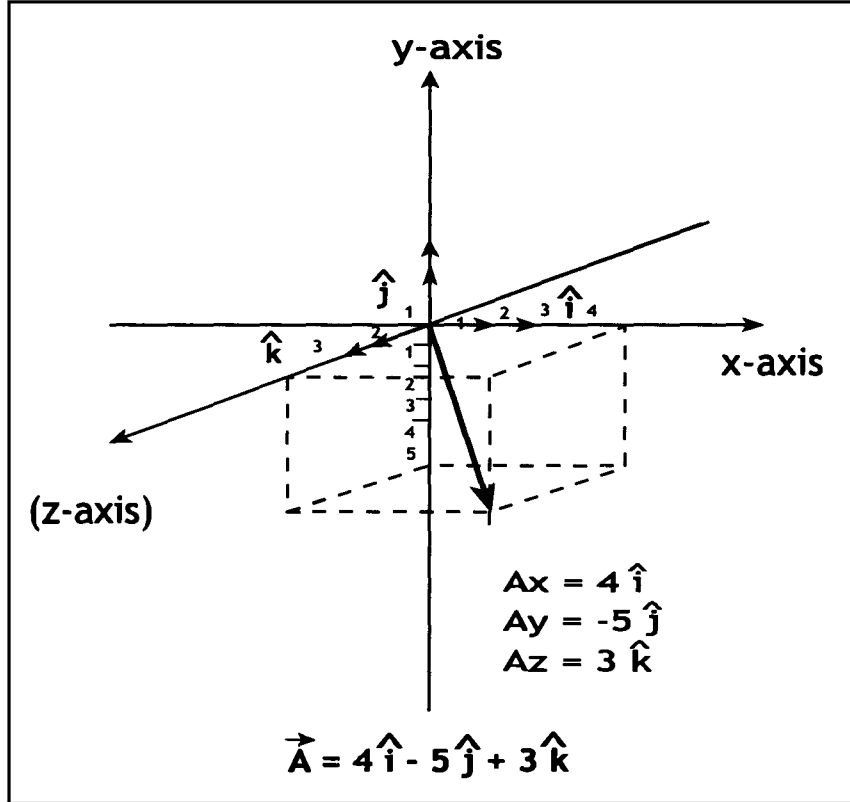
نجد أن المركبات الثلاثة الاتجاهية هي :

$$+4\hat{i}, -5\hat{j}, 3\hat{k}$$

كما نجد أن مركباتها العددية :

$$+4, -5, +3$$

ومن الممكن تمثيل ذلك على المحاور المتعامدة، انظر الشكل (2.3) :



شكل (2.3)، المسألة (2.3)

مسألة (2.4) Problem (2.4)

أوجد المتجه الذي يمثل حاصل جمع المتجهات الآتية :

$$\vec{A} = 4\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\vec{B} = -3\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$$

$$\vec{C} = \hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$$

الحل Solution

$$R_x = 4 - 3 + 1 = 2$$

$$R_y = 6 + 3 - 4 = 5$$

$$R_z = 2 - 1 + 2 = 3$$

وهكذا نجد أن :

$$\vec{R} = 2\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}$$

مسألة (2.5) Problem

أوجد قيمة الزاوية (Φ) بين المتجهين ($\vec{A}$ و $\vec{B}$) المعرفين على النحو الآتي:

$$\vec{A} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$$

$$\vec{B} = -2\hat{i} + 3\hat{k}$$

الحل Solution

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\Phi)$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = 5$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = 3.6$$

من ناحية أخرى :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j})(B_x \hat{i} + B_y \hat{j})$$

$$= (3\hat{i} - 4\hat{j})(-2\hat{i} + 3\hat{k})$$

$$= (3\hat{i}) \cdot (-2\hat{i}) + (3\hat{i}) \cdot (3\hat{k}) + (-4\hat{j}) \cdot (-2\hat{i}) + (-4\hat{j}) \cdot (3\hat{k})$$

$$= (-6)(1) + (9)(0) + 8(0) - (12)(0) = -6$$

وهكذا وبالتعويض نجد أن :

$$\cos(\Phi) = \frac{-6}{18} = -0.333$$

$$\Phi = \cos^{-1}(-0.333) = 110^\circ$$

الزاوية بين المتجهين ($\vec{B}$ و $\vec{A}$) هي ($\Phi = 110^\circ$).

مسألة (2.6) Problem

لديك المتجهان المعرفان على النحو التالي :

$$\vec{A} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$$

$$\vec{B} = -2\hat{i} + 3\hat{k}$$

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

أوجد المتجه الجديد.

الحل Solution

$$\begin{aligned}\vec{C} &= \vec{A} \times \vec{B} = (3\hat{i} - 4\hat{j}) \times (-2\hat{i} + 3\hat{k}) \\ &= (3\hat{i} \times -2\hat{i}) + (3\hat{i} \times 3\hat{k}) + (4\hat{j} \times 2\hat{i}) - (4\hat{j} \times 3\hat{k}) \\ &= 0 + 9(-\hat{j}) + 8(-\hat{k}) - 12(\hat{i}) \\ &= -12\hat{i} - 9\hat{j} - 8\hat{k}\end{aligned}$$

الملاحظات الهامة جداً في هذه المسألة هي الآتي :

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k}$$

$$\hat{i} \times \hat{i} = |1| |1| \sin(0) = 0 \quad \text{ذلك أن :}$$

مسألة (2.7) Problem

إذا كانت كمية المتجه ($\vec{A}$) تساوي (7) وحدات قياسية، ويصنع زاوية مقدارها (250°) باتجاه عقارب الساعة بدءاً من الاتجاه الموجب للمحور السيني، أوجد المركبتين السينية والصادية للمتجه ($\vec{A}$).

الحل Solution

$$A_x = 7 \cos 250^\circ = -2.394$$

$$A_y = 7 \sin 250^\circ = -6.577$$

وبملاحظة أن المتجه يقع في الربع الثالث، أي أنه يصنع زاوية مقدارها (70°) تحت المحور (y) السالب، يمكننا أن نجد كلا من A_x , A_y على النحو الآتي :

$$A_x = -7 \cos 70^\circ = -2.394$$

$$A_y = -7 \sin 70^\circ = -6.577$$

مسألة (2.8) Problem

إذا كانت المركبتان السينية والصادية للمتجه $(\vec{A})$ هما :

$$x = -25$$

$$y = 40$$

1 - أوجد كمية المتجه $(\vec{A})$ العددية.

2 - أوجد الزاوية بين المتجه $(\vec{A})$ والمحور السيني الموجب .

الحل Solution

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(-25)^2 + (40)^2} = 47.2 \text{ units}$$

وهي القيمة (الكمية) العددية للمتجه A .

$$\tan \theta = \frac{A_y}{A_x} = \frac{(40)}{(-25)} = -1.6$$

$$\theta = \tan^{-1}(1.6) = -58^\circ$$

هذه هي القيمة الأولى، كما يمكن أن تكون

$$-58^\circ + 180^\circ = 122^\circ$$

$$\tan(122^\circ) = -1.6$$

الزاوية الأولى : (-58°)

$$\cos(-58^\circ) = 0.523$$

موجب

$$\sin(-58^\circ) = -0.848$$

سالـب

الزاوية الثانية : (122°)

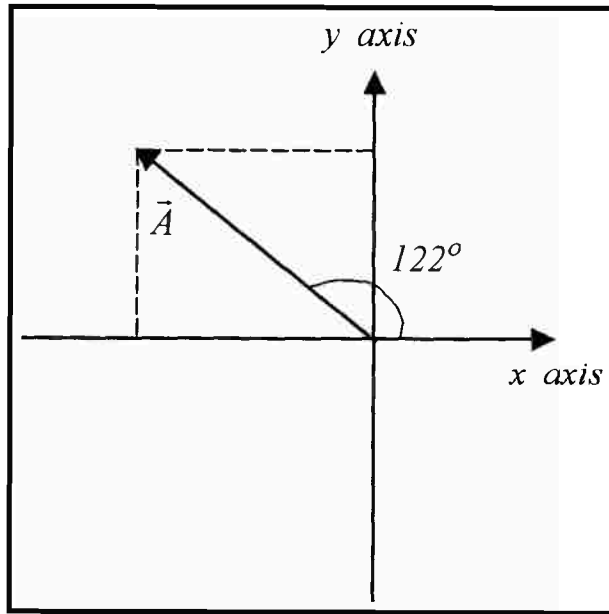
$$\cos(122^\circ) = -0.523$$

سالـب

$$\sin(122^\circ) = 0.848$$

موجب

وهي صحيحة للمتجه الذي بين أيدينا، لأن مركبة السينية سالبة ومركبة الصادية موجبة. فالزاوية إذا (122°) . انظر الشكل (2.4).

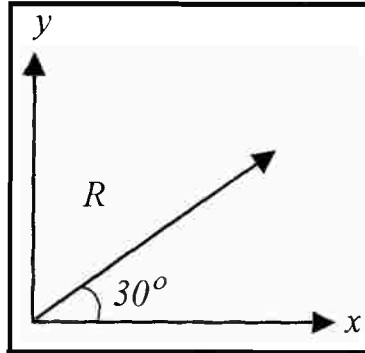


شكل (2.4)، المسألة (2.8)

مسألة (2.9) Problem

يبلغ طول متجه الإزاحة لجسم متحرك $(\vec{R})$ (15.0 m) ويصنع زاوية (30°) مع المحور السيني الموجب، أوجد مركبته السينية والصادية. انظر الشكل (2.5).

الحل Solution



شكل (2.5)، المسألة (2.9)

$$\begin{aligned} R_x &= R \cos(30) \\ &= (15 \text{ m})(0.866) = 13 \text{ m} . \end{aligned}$$

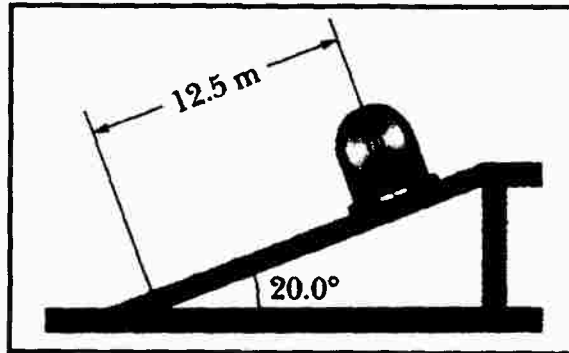
$$\begin{aligned} R_y &= R \sin(30) \\ &= (15 \text{ m})(0.5) = 7.5 \text{ m} . \end{aligned}$$

مسألة (2.10) Problem

قطعة معدنية ثقيلة على شكل آلة، دفعت على سطح مائل إلى الأعلى، حيث تبلغ زاوية الميل (20°)، انظر الشكل (2.6).

1 - احسب المسافة التي تم رفع القطعة خلالها إلى الأعلى.

2 - احسب المسافة التي تحركت خلالها القطعة أفقياً.



شكل (2.6)، المسألة (2.10)

Solution الحل

1- أقصى ارتفاع تصل الآلة إلى الأعلى فوق مستوى سطح الأرض هو :

$$h = (12.5 \text{ m}) \sin 20^\circ = 4.275 \text{ m}$$

2- المسافة التي تحركتها الآلة أفقياً هي :

$$D = (12.5 \text{ m}) \cos 20^\circ = 11.7 \text{ m}$$

مسألة (2.11) Problem

لديك متجه الإزاحة ($\vec{C}$) و ($\vec{D}$) لهما المركبات الآتية مقاسة بالمتر :

$$C_x = 7.4 , C_y = -3.8 , C_z = -6.1$$

$$D_x = 4.4 , D_y = 2.0 , D_z = 0$$

أوجد مركبات المتجه ($\vec{R}$) الذي يمثل حاصل جمع المتجهين.

Solution الحل

المركبة الأولى للمتجه ($\vec{R}$) هي :

$$\begin{aligned} R_x &= C_x + D_x \\ &= 7.4 + 4.4 = 11.8 \end{aligned}$$

المركبة الثانية للمتجه ($\vec{R}$) هي :

$$\begin{aligned} R_y &= C_y + D_y \\ &= -3.8 - 2 = -5.8 \end{aligned}$$

المركبة الثالثة للمتجه ($\vec{R}$) هي :

$$\begin{aligned} R_z &= C_z + D_z \\ &= -6.1 + 0 = -6.1 \end{aligned}$$

مسألة (2.12) Problem

لديك المتجهان $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$ المعرفان على الشكل الآتي :

$$\vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$$

$$\vec{B} = -13\hat{i} + 7\hat{j}$$

1 - أوجد حاصل جمع المتجهين باستخدام متجهات الوحدة $(\hat{i})$ و $(\hat{j})$.

2 - أوجد مقدار واتجاه المحصلة $(\vec{R})$ التي تمثل $(\vec{A} + \vec{B})$.

الحل Solution

1- افرض أن: $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$

هذا يؤدي إلى :

$$\begin{aligned} R_x &= A_x + B_x \\ &= 4 + (-13) = -9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_y &= A_y + B_y \\ &= 3 + 7 = 10 \end{aligned}$$

إذا :

$$\vec{R} = -9\hat{i} + 10\hat{j}$$

2- مقدار المتجه $(\vec{R})$ الذي يمثل المحصلة هو :

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \\ &= \sqrt{(-9)^2 + (10)^2} = 13 \end{aligned}$$

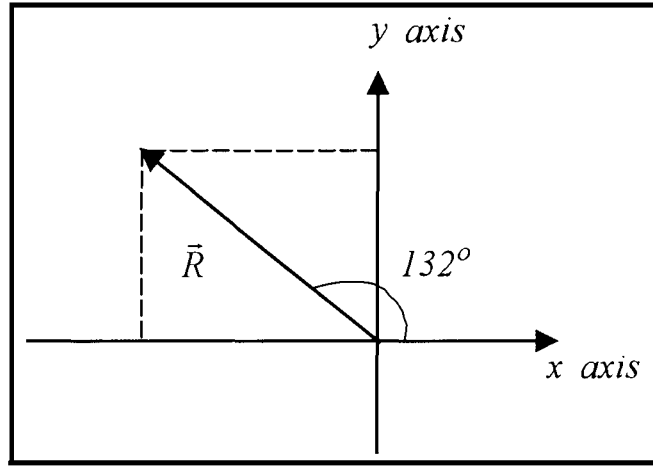
الزاوية بين قيمة المحصلة (R) والمحور السيني الموجب هي :

$$\tan \theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{-10}{9} = -1.1$$

$$\theta = \tan^{-1}(-1.1) = -48^\circ$$

$$\theta = 132^\circ \quad \text{أو :}$$

وهكذا نجد أن الزاوية هي (132°) ذلك أن المركبة السينية للمحصلة سالبة (-9) والمركبة الصادية موجبة (10). انظر الشكل (2.7).



شكل (2.7)، المسألة (2.12).

مسألة (2.13) Problem

لديك المتجهان ($\vec{A}$) و ($\vec{B}$) معرفان على الشكل الآتي :

$$\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$$

$$\vec{B} = 5\hat{i} - \hat{j}$$

أوجد المركبتان السينية والصادية، ثم احسب مقدار واتجاه كل من :

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$\vec{R} = \vec{B} - \vec{A}$$

Solution الحل

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \vec{A} + \vec{B} = (3\hat{i} + 4\hat{j}) + (5\hat{i} - \hat{j}) \\ &= 8\hat{i} + 3\hat{j}\end{aligned}\quad -1$$

إذا المركبة السينية : $R_x = 8$

والمركبة الصادية : $R_y = 3$

$$|A + B| = \sqrt{(8)^2 + (3)^2} = 8.54 \quad \text{أما مقدار } (A + B) \text{ فهو :}$$

وتكون زاوية متجه المحصلة مع المحور السيني الموجب فهي :

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) \\ &= \tan^{-1}\left(\frac{3}{8}\right) = 20.55^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \vec{B} - \vec{A} = (5\hat{i} - \hat{j}) - (3\hat{i} + 4\hat{j}) \\ &= 2\hat{i} - 5\hat{j}\end{aligned}\quad -2$$

إذا المركبة السينية : $R_x = 2$

والمركبة الصادية : $R_y = -5$

$$\begin{aligned}|A + B| &= \sqrt{(A)^2 + (B)^2} \\ &= \sqrt{(2)^2 + (-5)^2} = 5.38\end{aligned}$$

أما مقدار :

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{-5}{2}\right) = \tan^{-1}(-2.5)$$

$$= -68.2^\circ$$

وهي الزاوية التي تصنعها المحصلة مع المحور السيني الموجب

مسألة (2.14) Problem

لديك المتجهان $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$ معرفان على الشكل الآتي :

$$\vec{A} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{B} = -\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$$

أوجد : 1- $(\vec{A} + \vec{B})$

2- $(\vec{A} - \vec{B})$

3- عرف المتجه الجديد $(\vec{C})$ ، حيث إن : $\vec{A} - \vec{B} + \vec{C} = \mathbf{0}$

الحل Solution

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} , R_x = A_x + B_x = 4 - 1 = 3 \quad -1$$

$$R_y = A_y + B_y = -3 + 1 = -2$$

$$R_z = A_z + B_z = 1 + 4 = 5$$

$$\vec{R} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k} \quad \text{إذا :}$$

$$\vec{R} = \vec{A} - \vec{B} , R_x = A_x - B_x = 4 + 1 = 5 \quad -2$$

$$R_y = A_y - B_y = -3 - 1 = -4$$

$$R_z = A_z - B_z = 1 - 4 = -3$$

$$\vec{R} = 5\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k} \quad \text{إذا :}$$

$$\vec{A} - \vec{B} + \vec{C} = 0 \Rightarrow \vec{C} = \vec{B} - \vec{A} \quad -3$$

$$= (-1 - 4)\hat{i} + (1 + 3)\hat{j} + (4 - 1)\hat{k}$$

$$= -5\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$$

مسألة (2.15) Problem

لديك المتجهات الثلاثة $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$ و $(\vec{C})$ حيث :

$$\vec{A} - \vec{B} = 2\vec{C}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = 4\vec{C}$$

$$\vec{C} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$$

عرف المتجهين $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$.

الحل Solution

$$\vec{A} - \vec{B} = 2\vec{C} \quad \dots (1)$$

$$\vec{A} + \vec{B} = 4\vec{C} \quad \dots (2)$$

نجمع المعادلتين (1) و (2) :

$$2\vec{A} = 6\vec{C}$$

$$\vec{A} = 3\vec{C} \quad \dots (3)$$

$$\vec{A} = 3(3\hat{i} + 4\hat{j}) = 9\hat{i} + 12\hat{j}$$

من المعادلتين (1) و (3) نجد أن :

$$3\vec{C} - \vec{B} = 2\vec{C}$$

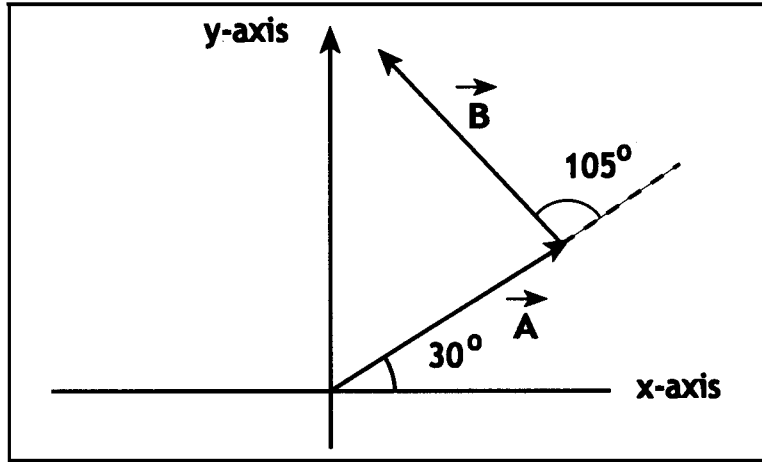
$$3\vec{C} - 2\vec{C} = \vec{B}$$

$$\vec{C} = \vec{B}$$

$$\vec{B} = 3\hat{i} + 4\hat{j} \quad \text{أي أن :}$$

مسألة (2.16) Problem

المتجهان $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$ والموضحان في الشكل (2.8) لهما نفس الكمية (10.0) وحدات، ولهما الاتجاهان المبينان بالشكل الموضح،



شكل (2.8)، المسألة (2.16)

- 1 -- أوجد المتجه $(\vec{R})$ الذي يمثل حاصل جمع المتجهين.
- 2 -- أوجد المركبتان السينية والصادية للمتجه $(\vec{R})$.
- 3 -- أوجد مقدار الزاوية بين المتجه $(\vec{R})$ والمحور السيني الموجب.

الحل Solution

1- مركبات المتجه (A) السينية والصادية هي :

$$A_x = 10 \cos 30^\circ = 8.67$$

$$A_y = 10 \sin 30^\circ = 5.0$$

بينما المتجه (B) يصنع زاوية مقدارها 135° ، إذا مركباته هي :

$$B_x = 10 \cos 135^\circ = -7.07$$

$$B_y = 10 \sin 135^\circ = 7.07$$

أما مركبات المحصلة فهي :

$$R_x = A_x + B_x = 8.67 - 7.07 = 1.6$$

$$R_y = A_y + B_y = 5.0 + 7.07 = 12.1$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(1.6)^2 + (12.1)^2} = 12.2 \quad -2$$

$$\tan \theta = R_y / R_x = (12.1 / 1.6) = 7.56 \quad -3$$

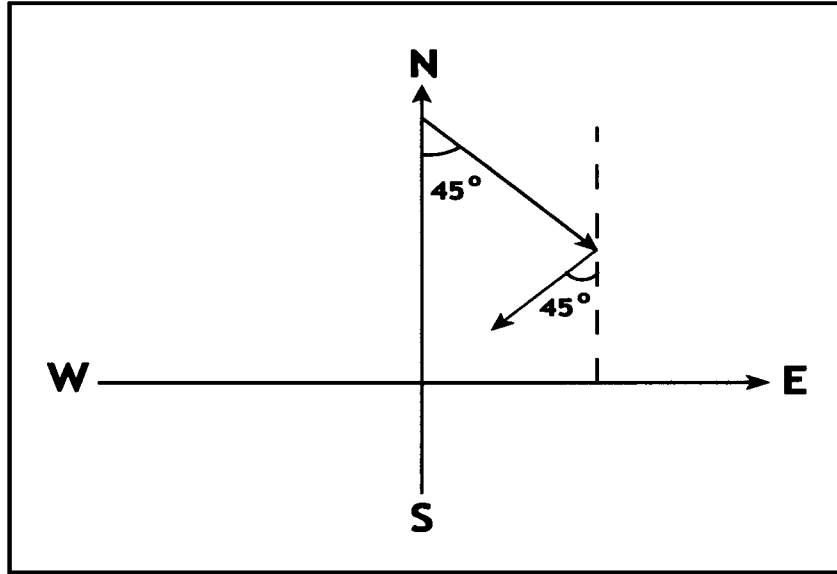
$$\theta = \tan^{-1}(7.56) = 82.5^\circ$$

$$180 + 82.5^\circ = 262.5^\circ \quad \text{أو}$$

والزاوية الأولى هي الزاوية الصحيحة؛ لأن كلا نسبتيها المثلثية الجيب والجيب تمام موجبتان وهذا ما تؤكد المسألة.

مسألة (2.17) Problem

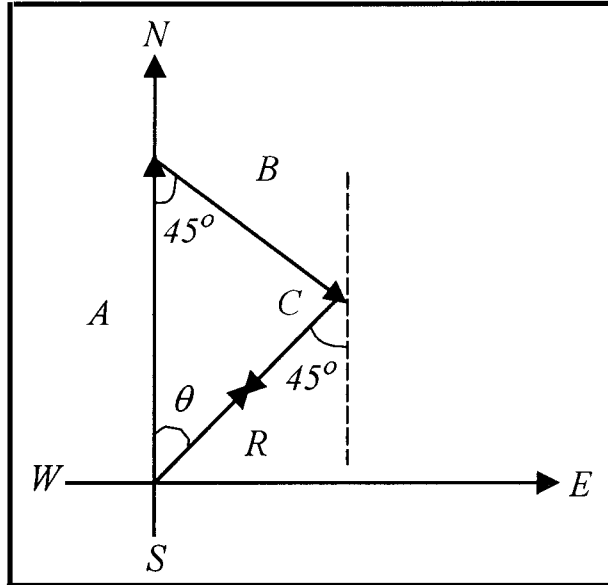
لاعب غولف احتاج إلى ثلاث محاولات لإدخال الكرة في الحفرة المخصصة لها. كانت المحاولة الأولى على مسافة (12.0 m) شمالا، والمحاولة الثانية (6.0 m) شمال شرق، والمحاولة الثالثة (3.0 m) جنوب غرب، ما هي المسافة المطلوبة لإدخال الكرة في موضعها الصحيح بمحاولة واحدة ؟ انظر الشكل (2.9).



شكل (2.9)، المسألة (2.17)

الحل Solution

افرض أن الإزاحات الثلاثة لكرة الغولف هي : (A, B, C) على التوالي، وبالرجوع إلى الشكل (2.10) نستطيع أن نعبر عن المتجهات الثلاثة على النحو الآتي :



شكل (2.10)، المسألة (2.17)

$$\vec{A} = A \hat{j}$$

$$\vec{B} = (B \cos 45^\circ) \hat{i} - (B \sin 45^\circ) \hat{j}$$

$$\vec{C} = -(C \sin 45^\circ) \hat{i} - (C \cos 45^\circ) \hat{j}$$

$$A = 12 \text{ ft}, B = 6.0 \text{ ft}, C = 3.0 \text{ ft}$$

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$

$$= A \hat{j} + (B \cos 45^\circ) \hat{i} - (B \sin 45^\circ) \hat{j} - (C \sin 45^\circ) \hat{i} - (C \cos 45^\circ) \hat{j}$$

$$= \left(\frac{6.0\sqrt{2}}{2} - \frac{3.0\sqrt{2}}{2} \right) \hat{i} + \left(12 - \frac{6.0\sqrt{2}}{2} - \frac{3.0\sqrt{2}}{2} \right) \hat{j}$$

$$= 2.12 \hat{i} + 5.64 \hat{j}$$

$$R = \sqrt{(2.12)^2 + (5.64)^2} = 6.0 \text{ ft}$$

$$\tan \theta = \frac{R_x}{R_y} = \frac{2.12}{5.64} = 0.3758$$

$$\theta = \tan^{-1}(0.3758) = 20.6^\circ \quad \text{شرقاً}$$

ملاحظة :

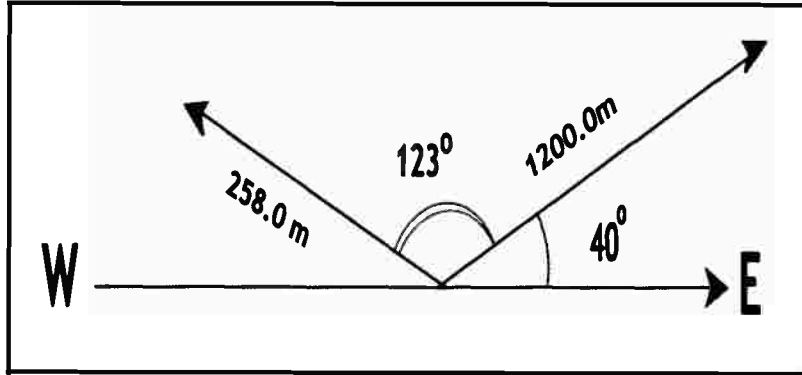
انظر الشكل كي تتأكد أن ظل الزاوية هو المركبة السينية مقسومة على المركبة الصادية على عكس ما تعودنا عليه بسبب وجود الزاوية إلى الشرق من جهة الشمال.

مسألة (2.18) Problem

رصدت محطة رادار طائرة قادمة من جهة الشرق مباشرة خلال موقعين، وذلك على النحو الآتي :

1 - على بعد (1200.0 m) وبزاوية مقدارها (40°).

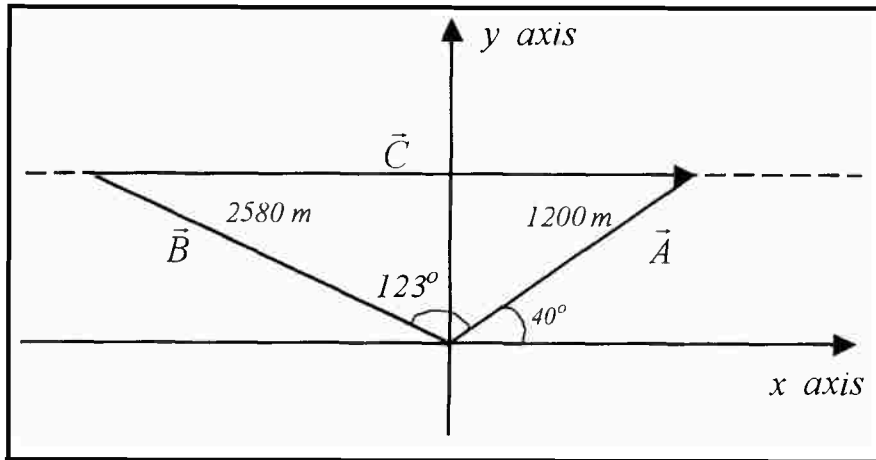
2 - استمر الرادار بالرصد وبعد زاوية قدرها (123°) من نقطة الرصد الأولى سجل بعداً قدره (258.0 m) ، انظر الشكل (2.11)، أوجد المسافة التي قطعها الطائرة بين نقطتي الرصد.



شكل (2.11)، المسألة (2.18)

الحل Solution

انظر الشكل (2.12).



شكل (2.12)، المسألة (2.18)

أفرض أن المتجه الأول : $\vec{A} = |1200\text{ m}|$

المتجه الثاني : $\vec{B} = |2580\text{ m}|$ ، المتجه الثالث : $\vec{C} = ?$

$$A_x = 1200 \cos 40^\circ = 919.3 \hat{i}$$

$$A_y = 1200 \sin 40^\circ = 771.3 \hat{j}$$

$$B_x = 2580 \cos 163^\circ = -2467.3 \hat{i}$$

$$B_y = 2580 \sin 163^\circ = 754.3 \hat{j}$$

انظر الشكل (2.12) مرة أخرى تجد أن :

$$\begin{aligned} \vec{C} &= \vec{B} - \vec{A} = (B_x - A_x)\hat{i} - (B_y - A_y)\hat{j} \\ &= (-3387 \hat{i} - 17 \hat{j})m \end{aligned}$$

$$|C| = \sqrt{(-3387)^2 + (-17)^2} = 3390 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{-17}{-3387}\right) = \tan^{-1}(5 \times 10^{-3}) \\ &= 0.287^\circ \end{aligned}$$

وهذا ما يشير قطعاً إلى أن الطائرة تسير على خط مستقيم.

مسألة (2.19) Problem

باستخدام قاعدة اليد اليمنى وعلى نظام محاور ثلاثي (xyz) متعامد، أثبت أن :

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \quad -1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0 \quad -2$$

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0 \quad -3$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \quad , \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \quad , \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \quad -4$$

Solution الحل

$$\begin{aligned}\hat{i} \cdot \hat{i} &= |\hat{i}| |\hat{i}| \cos \theta \\ &= (1)(1)(1) = 1\end{aligned}\quad -1$$

$$\hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \quad \text{وبنفس الطريقة نجد أن :}$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = |\hat{i}| |\hat{j}| \cos \theta \quad -2$$

الزاوية في هذه الحالة ($\theta = 90^\circ$)

$$\cos 90^\circ = 0$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = (1)(1)(0) = 0 \quad \text{وهكذا نجد أن :}$$

$$\hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0 \quad \text{وبنفس الطريقة نجد أن :}$$

$$\begin{aligned}\hat{i} \times \hat{i} &= |\hat{i}| |\hat{i}| \sin \theta \\ &= (1)(1)(0) = 0\end{aligned}\quad -3$$

ذلك أن الزاوية بين متجه الوحدة ($\hat{i}$) وذاته تساوي الصفر وبنفس الطريقة نجد أن :

$$\hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = |\hat{i}| |\hat{j}| \sin \theta = \hat{k} \quad -4$$

ذلك أن الزاوية بين متجهي الوحدة ($\hat{i}$) و ($\hat{j}$) تساوي (90°) وهكذا :

$$\left. \begin{aligned} \hat{i} \times \hat{j} &= \hat{k} \\ \hat{k} \times \hat{i} &= \hat{j} \\ \hat{j} \times \hat{k} &= \hat{i} \end{aligned} \right\}$$

وكل من $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ عمودية على المستوى الذي يحتوي باقي متجهي الوحدة الآخرين.

مسألة (2.20) Problem

- إذا كانت القيمة العددية للمتجه $(\vec{A})$ تساوي (10.0) و Φ ، والقيمة العددية للمتجه $(\vec{B})$ تساوي (6.0) وحدات، بينهما أوية مقدارها (60°) ، أوجد :
- 1 - حاصل الضرب العددي للمتجهين $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$.
 - 2 - مقدار حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$.

الحل Solution

- 1- حاصل الضرب العددي للمتجهين $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$ هو :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |A| |B| \cos \Phi$$

$$|A| = 10$$

$$|B| = 6$$

$$\Phi = 60^\circ$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (10)(6) \cos 60^\circ = 30.0$$

- 2- مقدار حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين هو عبارة عن :

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |A| |B| \sin \Phi$$

$$= (10)(6) = 51.96$$

و هي بطبيعة الحال تمثل مقدار المتجه العمودي على المستوي الذي يحتوي المتجهين $\vec{A}$, $\vec{B}$.

مسألة (2.21) Problem

لديك المتجهان $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$ المعرفان على الشكل الآتي :

$$\vec{A} = 3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$$

استخدم كلا من :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\Phi)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

وذلك لحساب الزاوية المحصورة بينهما.

الحل Solution

$$|\vec{A}| = \sqrt{(3)^2 + (3)^2 + (3)^2} = 5.2$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (3)^2} = 3.74$$

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \\ &= 6 + 3 + 9 = 18\end{aligned}$$

وهكذا نجد أن :

$$\begin{aligned}\cos \Phi &= \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} = \frac{18}{(5.2)(3.74)} \\ &= 0.9255\end{aligned}$$

$$\Phi = \cos^{-1}(0.9255) = 22.25^\circ$$

مسألة (2.22) Problem

لديك المتجهان $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$ المعرفان على النحو التالي :

$$\vec{A} = 3\hat{i} + 5\hat{j}$$

$$\vec{B} = 2\hat{i} + 4\hat{j}$$

أوجد كلا من :

$$\vec{A} \times \vec{B} , \vec{A} \cdot \vec{B} , (\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{B}$$

الحل Solution

$$\vec{A} \times \vec{B} = (3\hat{i} + 5\hat{j}) \times (2\hat{i} + 4\hat{j})$$

استخدم الخاصية التوزيعية في الضرب الاتجاهي لمتجهين :

$$\vec{A} \times \vec{B} = (3)(2)\hat{i} \times \hat{i} + (3)(4)\hat{i} \times \hat{j} + (5)(2)\hat{j} \times \hat{i} + (5)(4)\hat{j} \times \hat{j}$$

معلوم لدينا أن :

$$\hat{i} \times \hat{i} = 0$$

$$\hat{j} \times \hat{j} = 0$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$$

$$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$$

إذاً :

$$\vec{A} \times \vec{B} = 12\hat{k} - 10\hat{k} = 2\hat{k}$$

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \\ &= 6 + 20 = 26\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{A} + \vec{B} &= (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} \\ &= 5\hat{i} + 9\hat{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(5\hat{i} + 9\hat{j}) \cdot (2\hat{i} + 4\hat{j}) &= (\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{B} \\ 10 + 36 &= 46\end{aligned}$$

مسألة (2.23) Problem

لديك المتجهات الثلاثة $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$ و $(\vec{C})$ المعرفة على النحو الآتي :

$$\vec{A} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\vec{B} = -\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\vec{C} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$$

أوجد كلا من :

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) , \vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) , \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$$

الحل Solution

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= (3\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) \cdot [(-\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}) \times (2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})] \quad -1 \\ &= (3\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) \cdot (-8\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}) \\ &= -21\end{aligned}$$

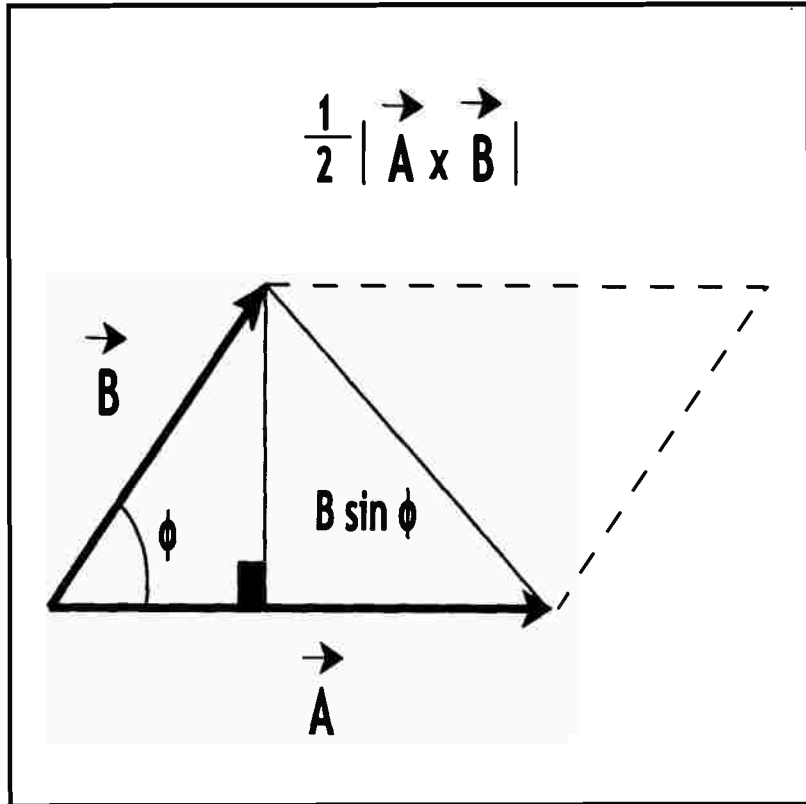
$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) &= (3\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) \cdot [(-\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}) + (2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})] \quad -2 \\ &= (3\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) \cdot (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) \\ &= -9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) &= (3\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) \times [(-\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}) + (2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})] \quad -3 \\
&= (3\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) \cdot (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) \\
&= 5\hat{i} - 11\hat{j} - 9\hat{k}
\end{aligned}$$

مسألة (2.24) Problem

أثبت أن مساحة المثلث الواقع بين المتجهين $(\vec{A})$ و $(\vec{B})$ في الشكل (2.13) تساوي :

$$\frac{1}{2} |\vec{A} \times \vec{B}|$$



شكل (2.13)، المسألة (2.24)

Solution الحل

إن مساحة المثلث abc يمكن إيجادها من القانون المعروف

$$Area = \frac{1}{2} A h \quad \dots (1)$$

حيث إن (h) هو ارتفاع المثلث abc .

ومن المثلث القائم abc نجد أن :

$$\sin \Phi = \frac{h}{B}$$

أي أن :

$$h = \sin \Phi B \quad \dots (2)$$

بتعويض المعادلة رقم (2) في المعادلة رقم (1) نجد أن :

$$Area = \frac{1}{2} A B \sin \Phi$$

ولكن المقدار :

هو عبارة عن $(\vec{A} \times \vec{B})$ إذا :

$$Area = \frac{1}{2} |A \times B|$$