الفصل الثاني

معادلات الموجة

Wave Equations

كما ذكر سابقاً فى تطبيق ميكانيكا الموجة للمشاكل الكيميائية، فإنه من المرغوب إكتساب فهم صفات وخصائص تلك المعادلات الموجية. وهذا الفصل مكرس لوضع بعض هذه التصورات المتصلة بالمعادلات الموجية والتى قد تكون مطلوبة فيما بعد.

الحركة التوافقية البسيطة ومعادلات الموجيــة

Simple harmonic motion and wave equations

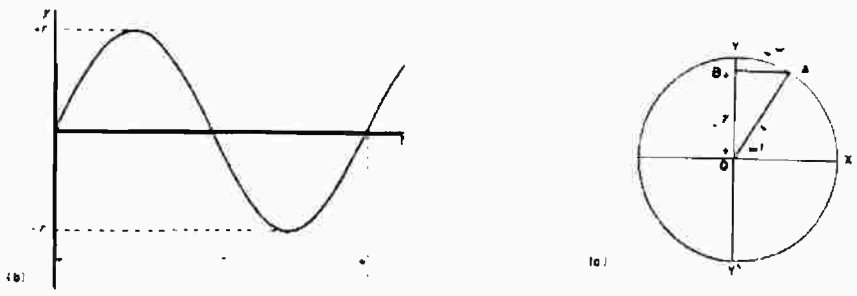
لو أخذنا جسيم يتحرك بحركة توافقية بسيطة ويتذبذب حول موضع الإتزان تحت تأثير قوة تعويضية من حيث أنها تتناسب مع الإزاحة للجسيم عن موضع الإتزان.

وكمثال لهذا النوع لتلك الحركة. وهى برهنته بواسطة حركة راسية لكتلة معلقة من زنبرك. وهذه الحركة يمكن تمثيلها كما هو مبين فى الشكل (1)، حيث النقطة (A) تتحرك حول طريق دائرى له نصف قطر (r)، وسرعة زاوية منتظمة (ω). فلو فرضنا الزمن صفر، فتكون (A) عند النقطة (x) للزمن (t). إذاً (A) سوف تتارجح بزاوية (ωt) كما فى الشكل (1a). وإسقاط (A) على نصف القطر العمودى (YOY^1) عند النقطة (B). وبالتالى يمكن تعيين الإزاحة من نقطة الأصل كما يلى:

$$y = r \sin \omega t \qquad -1$$

وترينا المعادلة أن التغير فى الإزاحة مع الزمن تمثل بواسطة زاوية لها سعة الموجة (r)، هذا التغير كما هو فى الشكل (1b).فمثلما النقطة (A) متحركة بإستمرار حول الدائرة فإن الإزاحة (B) تتغير من أحد طرفى قطر الدائرة (OY=+r) عند ($t=\pi/2\omega$) إلى الطرف الآخر عند النقطة (Y'O=-r) عند ($t=3\pi/2\omega$)، والنقطة (B) المأخوذة للحركة التوافقية البسيطة حول النقطة (O) الأصلية. والحركة للنقطة (B) المناظرة لحركة الكتلة التذبذبية على الزنبرك عند النقطة (O) الأصلية المناظرة لموضع الإتزان للكتلة. كما أن الحركة دورية بالنسبة للتردد وتتميز بدورية مؤقتة (t) كما فى الشكل (1b) والزمن المؤقت (t) هو الزمن المطلوب

لإحداث دورة كاملة للنقطة (A)، بمعنى أن الزمن اللازم لنصف القطر نحو الدفع بقوة خلال زاوية بقيمة مقدارها 2π - زاوية نصف قطرية. من هذا



1b 1a

Fig. (1) Illustrate the simple barmohnic motion

-2 $$\omega\tau = 2\pi$$

أو

-3 $$\omega\tau = 2\pi/\tau$$

التردد (ν_e) لتذبذب النقطة B حول نقطة الإتزان ببساطة تكون مقلوب الدورة الموقتة

-4 $$\nu_e = \frac{1}{\tau}$$

بالإشتراك فى المعادلة (3) نحصل على :

-5 $$\omega = 2\pi\, \nu_e$$

العلاقة بين الطاقة والسعة

Relation between energy and amplitude:

ومن المعلوم أن الطاقة الكلية لأى جسيم هى عبارة عن مجموع الطاقة الكيناتيكية (الحركية) وطاقة الوضع أى أن :

-6 $$E = T + V$$

حيث أن (T)- الطاقة الحركية، (V) - الطاقة الوضعية:

ولكن بالنسبة لتحرك الجسيم فى الحركة التوافقية البسيطة، فإن الطاقة يجب أن تكون ثابتة، لو لم يحدث تقلص للحركة (تضاؤل)، ولكن مع مرور الزمن أو تغيره فإن طاقة الوضع والحركة تتغير بناءاً على هذا التغير. فعندما يكون جسيم فى وضع إتزان ممثل فى مركز الدائرة شكل (1a) فتكون طاقة الوضع تعتبر صفر، والطاقة الحركية فى هذا الوضع تأخذ أعلى قيمة (T_m) وفى هذه الحالة تساوى الطاقة (E) أى أن :

$$E = T_{max} \qquad -7$$

$$\text{or} \qquad E = \frac{1}{2}\, m v^2 \qquad \left(KE = \frac{1}{2}\, m V^2\right) \qquad -8$$

حيث (m) كتلة الجسم، (V) سرعته عند نهاية طرف التردد، وعندما يتغير إتجاه الجسيم بناءاً على تغير السرعة وهذا تغيير لحظى وفى هذه الحالة T يجب أن تكون بصفر، وتكون سرعة الجسيم خلال موضع أو عند المرور بنقطة الإتزان فإن سرعته يجب أن تأخذ قيمة عظمى V_{max} والكيناتيكية الحركية يجب ايضا أن قيمة عظمى T_{max} حيث:

$$T_{max} = \frac{1}{2}\, m \;\; V^2{}_{max} \qquad -9$$

$$\text{or} \qquad E = \frac{1}{2}\, m \;\; V^2{}_{max} \qquad -10$$

ويكون التعبير عن (V) كما يلى :

$$V = \frac{dy}{dt} \qquad -11$$

حيث (y) يمكن تعيينها بالمعادلة (1) لهذا :

$$V = \frac{dy}{dt}\,(r \sin \omega t) \quad \text{or} \quad V = \omega\, r \cos \omega t \qquad -12$$

وتأخذ (V) قيمة عظمى عندما تكون جتا الزاوية لأن تأخذ قيمة عظمى وهذا يعنى أنها تأخذ الوحدة. إذاً

$$V_{max} = \omega r \qquad -13$$

وبالإستبدال فى المعادلة (10) بالسرعة (V)

$$E = \frac{1}{2}\, m\, \omega^2 r^2 \qquad -14$$

من تلك المعادلة نرى أن الطاقة تتناسب تناسباً طردياً لمربع سعة التردد. فهذه تعتبر نقطة مهمة كمرجع لما سيأتى فيما بعد :-

المعادلة التفاضلية العامة للحركة التوافقية البسيطة

General differential equation of simple harmonic motion

المعادلة $y = r \sin \omega t$ تظهر كما ترى من الشكل (١) وهي عندما تكون (A) عند النقطة (x) عند زمن بصفر لهذا نقول أن $y = 0$ عند $t = 0$، وهذا يعنى أن الزمن بصفر وأن النقطة (A) عند النقطة (y) تكون (y=r) أى عند (t=0)، والمعادلة المبنية للحركة سوف تصبح دالة جيب تمام (cosine) على هذه الصورة:

$$y = r \cos \omega t \qquad -15$$

من هنا نجد وجود معادلتين أى منهما متساويين جيداً للحركة التوافقية البسيطة وهما:

$$y_1 = r \sin \omega t \qquad -16$$

$$y_2 = r \cos \omega t \qquad -17$$

الرموز الملحقة هنا ببساطة للتفريق أو للتعريف بين الدالتين، والمعادلتين كلاهما لحل المعادلة التفاضلية التى تمثل الحركة التفاضلية البسيطة وهذه المعادلات يمكن تعينها كما يلى: حيث تكون المعادلة العامة لنيوتونيان (Newtonian) كما يلى:

$$F = ma \qquad -18$$

حيث (a) تمثل العجلة، والكتلة (m) الخاضعة للقوه (F). وفى هذه الحركة التفاضلية البسيطة فإن القوة تتناسب طردياً مع الإزاحة لكن المؤثر تجاه نقطة الأصل، بمعنى على عكس إتجاه نقطة الإزاحة، هكذا

$$F = - ky \qquad -19$$

حيث (k)- ثابت يعرف بثابت القوة، مثلما سرعة الجسيم تعين بالمعادلة (11) كما $v = dy/dt$ تكون العجلة للجسيم تعين بواسطة :-

$$a = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad - 20$$

وبالتعويض من المعادلة (19) والمعادلة (20) إلى المعادلة (18) نحصل على المعادلة (21)

$$m = \frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0 \qquad - 21$$

حيث تعتبر المعادلة التفاضلية للحركة التوافقية البسيطة لأى من المعادلتين 16 ، 17

المعادلـة (21) الأخيرة تعتبر معادلـة مـن الرتبة الثانية الخطية للتفاضل المتجانس. فلو كانت موجودة معادلـة من هذا النوع نستطيع كتابة حللين، بعدئذ تلك المعادلة الخطية الإتحادية لها يعتبر الحل العام. والإتحاد الخطى للمعادلتين (17, 16) يكونا على الشكل:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \qquad -22$$

حيث أن كلاً من (c_2, c_1) - ثوابت، (y) عبارة عن حل عام للمعادلة التفاضلية بدلاً من (y_2, y_1) وهذا يمكن فهمه بالتفكير ملياً للمعادلتين (17, 16) الممثلتين كحالة خاصة. إشارة إلى الشكل (1a)، حيث المعادلة الأولى تطبق عندما النقطة (A) التى تكون عند (x) لزمن صفر والمعادلـة الثانية تطبق عندما النقطة (A) لتكون عند (y) عند زمن صفر. والمعادلـة الأكثر أهمية وهى التى تطبق عندما تكون النقطة (A) فى المنطقة ما بين (y, x) عند زمن بصفر. هذه الحالة العامة توضح فى الشكل (2).

نفترض عند زمن صفر، النقطة (A) عند النقطة (z)، والزاوية (ZOX) تأخذ المقدار (α). فلو عند الزمن (t) النقطة (A) تكون عند الوضع كما هو فى الشكل 2. إذاً الإزاحة (y) يمكن إيجادها بالمعادلة الآتية:

$$y = r \sin(\omega t + \alpha) \qquad - 23$$

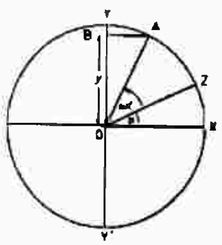


Fig. (2) The most case of simple harmonic motion

هذه المعادلة بوضوح تعتبر الحالة العامة للمسألة كما أنها تسمح كيف للنقطة (A) تكون فى أى مكان على محيط الدائرة عند زمن صفر. إضافة لذلك المعادلة (23) وهى المعادلة الخطية الإتحادية للمعادلتين (17,16) كما يمكن مفهومها بفك المعادلة (23) كما يلى:-

$$y = r (\sin \omega t \cos \alpha \cos \omega t \sin \alpha) \qquad -24$$

فمثلما تكون (α) ثابتة لأى حالة مستقلة، فإن كلاً من جا (جيب الزاوية) وجيب تمام الزاوية (co sine) أيضاً يصبحا ثابتين. وبوضع ($\cos\ \alpha$) تساوى (c_1)، ($\sin\ \alpha$) تساوى (c_2) وبالإستبدال فى المعادلة (24)

$$y = c_1\ r \sin \omega t\ c_2\ r \cos \omega t \qquad -25$$

أو ($y = c_1\ y_1 + c_2\ y_2$) أى الذى يكون الإتحاد الخطى الموضح بالمعادلة (22).

وعديد من المعادلات التفاضلية تقابل المعادلة الميكانيكية تكون لنوع المعادلة (21) وتكون مهمة لتحقق الإتحاد الخطى للمعادلة متخذة الحل العام الأكثر.

وفى المعادلة (25) الحد (r)- ثابت وهذا الحد يمكن ربطه بالثابت c_1 والثابت c_2 وكذلك. فالمعادلة ربما تكتب كما يلى:

$$y = A \sin \omega t\ +\ B \cos \omega t \qquad -26$$

والتى تعتبر الحل العام للمعادلة (21)..كما أن المعادلة (26) يمكن تفاضلها مرتين :-

$$\frac{dy}{dt} = \omega\ A \cos \omega t\ \ \omega\beta \sin \omega t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\ \omega^2\ A \sin \omega t\ \ \omega^2 B \cos \omega t$$

$$= -\ \omega^2 y$$

وبكتابة المعادلة (21) فى الشكل

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}\ y = 0 \qquad -27$$

وبالإستبدال فى المعادلة (27)

$$-\ \omega^2 y + \frac{k}{m}\ y = 0$$

هذه المعادلة ربما تحقق لو أى من ($y = 0$) أو أن :-

$$-\ \omega^2 y + \frac{k}{m}\ = 0$$

المعادلـة سـالفة الذكـر معادلـة حـل عاديـة، ويمكـن أن تكـون فقـط حقيقة عندما تكـون نبذبة الجسيم عند وضع الإتزان.

الشرط الأخير يجب أن يحقق الحالة العامة هكذا :

$$W = (k/m)^{\frac{1}{2}} \qquad -28$$

والمعادلـة (26) أو الـتى تكـون مثيلتها فـى الشكل، إلـى هـذا الحـد المعادلـة 23. تكـون الحل للمعادلة (27) شريطة أن $\omega = \sqrt{k/m}$

بالإضـافة لتعبير الحـل للمعادلـة (27) فـى الشكل المثلثى للمعادلة (26) ربما يكون الحل أيضا خصوصاً فى حد الأس المعقد.

"لـو القـارىء غير واع للأعداد المعقدة فقد أعطيناها للقـارىء فـى التذيـيله (١) قبـل الإجراء إلى الجزء الثانى":

الحلول الأخرى للمعادلة التفاضلية :

Alternative solutions of the differential equation :

فلنعتبـر المعادلـة التفاضـلية للحـركة التفاضلية البسيطة مثلما فى المعادلة (27). ولذلك بوضع $k/m=b^2$ فالمعادلة تأخذ الشكل :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + b^2y = 0 \qquad -29$$

والحل لتلك المعادلة يمكن أن تكون على الشكل:

$$y = K\, e^{qt} \qquad -30$$

حيـث كـلاً مـن q , K ثوابـت، وبتفاضـل المعادلـة 30 مرتين لتعطى

$$\frac{dy}{dt} = qK\, e^{qt} = qy \text{ and } \frac{d^2y}{dt^2} = q^2y$$

بالإستبدال فى المعادلة 29

$$(q^2 + b^2)\, y = 0 \qquad -31$$

وعندما $y = 0$ يكون الحل غير حقيقى حيث لا تحتاج لإضافة أخرى، والشكل فيما بعد من المعادلة 30 تكون:

$$q^2 + b^2 = 0 \qquad \text{من حيث} \qquad q^2 = -b^2$$

بمعنى

$$q = \pm\sqrt{(-b^2)} \qquad \text{or} \qquad q = \pm\, i\, b$$

حيث $i = \sqrt{(-1)}$ والمعادلة (30) تعتبر حل المعادلة (29) شريطة الرمز (q) يكون مساوى إما (ib) أو (- ib). كذلك يوجد حللين وهما (y_2 , y_1) حيث :-

$$y_1 = K\, e^{ibt} \qquad \text{and} \qquad y_2 = K\, e^{-ibt}$$

والحل العام الأكثر سوف يكون مرتبط خطياً لكل منهما والتى يمكن كتابته

$$y = c_1\, y_1 + c_2\, y_2$$

$$= c_1\, K\, e^{ibt} + c_2\, K\, e^{-ibt}$$

ويوضع $C_1 K = C$ ، $C_2 K = D$ فالحل يصبح:

$$y = C\, e^{ibt} + D\, e^{-ibt} \qquad -32$$

الثوابت (D , C) تامة الإحتياط، بمعنى المعادلة (32) هى حل للمعادلة (29) مهما تكن القيم لكل من (C , D). وهذه النتيجة تسود لأن المعادلة (29) تحتوى الإشتقاق الثانى (y) مع علاقة t. والحل للمعادلة التفاضلية المتضمنة للإشتقاق الأول للدالة سوف تحتوى على ثابت واحد إحتياطى، والحل للمعادلة الذى يحتوى على الإشتقاق الثانى سوف يحتوى

على إثنين من الثوابت الإحتياطية وهكذا... وهذه ببساطة مفهومة جيداً من المثال الآتى نفترض أن :

$$\frac{dy}{dx} = 2 \qquad -33$$

وهكذا

$$y = 2x + k \qquad -34$$

حيث (k)- ثابت، الذى يأخذ أى قيمة فى المعادلة (34)، والمعادلة (33) سوف تظل حقيقية، بالمثل لو : -

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3 \qquad -35$$

وهكذا $$\frac{dy}{dx} = 3x + k_1$$

وإذا $$y = \frac{3}{2}x^2 + k_1x + k_2 \qquad -36$$

فنلاحظ من المعادلة (36) للثوابت k_2 , k_1 ممكن أن يأخذا أى قيمة، وهذه المعادلة مازالت حل للمعادلة (35). وقيم هذه الثوابت يمكن فقط أن تحدد عندما نفترض بعض الإضافات المحدودة على المسألة.

وبالرجوع إلى المعادلة (32)، يظهر أن الإزاحة (y) هى عبارة عن مجموع الجزء الحقيقى والجزء التخيلى وكلاً منهما أجزاء فى المعادلة وهما أعداد معقدة (متراكبة). ومن الأفضل الوصول لعمل الحد (y) الحقيقى بعد ذلك، حيث يجب الإشارة للإزاحة الحقيقية، ثم بقدر الإستطاعة عمل هذه الحقيقة لمجموع العدد المعقد (المتراكب)، والمقارن (المقابل) لها يكون حقيقى. وهكذا مثلما (D , C) ليأخذا أى قيمة مثلاً بوضع $D = C°$ حيث $C°$ المقابل (المقارن) للثابت C حينئذ المعادلة (32) تصبح:

$$y = C\,e^{ibt} + C°\,e^{-ibt} \qquad -37$$

حيث الشق الثانى يكون المقارن للأول والآن (y) تجب أن تكون حقيقة تماماً، إضافة لذلك، بوضع :

$$C = \frac{r}{2i}\,e^{i\alpha}$$

ولهذا $$C° = -\frac{r}{2i}\,e^{-i\alpha}$$

حيث أن كلاً من (α , r) ثوابت. مثلما (C) تعتبر ثابت إحتياطى لذلك يمكن أن تأخذ أى قيمة لتكون مناسبة. وعليه فالمعادلة (37) تصبح:

$$y = \frac{r}{2i}\,e^{i\alpha}e^{ibt} - \frac{r}{2i}\,e^{-i\alpha}e^{-ibt}$$

أو

$$y = \frac{r}{2i}\,[e^{i(bt+\alpha)} - e^{-i(bt-\alpha)}] \qquad -38$$

ولنتذكر أن:

$$\text{Sin } x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \qquad \text{تذييلة (١)}$$

وربما تكتب المعادلة الأخيرة كما يلى :

$$y = r \sin (bt + \alpha) \qquad -39$$

هذه المعادلة تفيد أن الحركة عبارة عن دائرية وأن :-

$$b\tau = 2\pi \quad \text{or} \quad b = \frac{2\pi}{\tau} \qquad -40$$

وبمقارنة المعادلة (40) بالمعادلة (2) نجد أن $b = \omega$ ، ثم المعادلة (39) تصبح:

$$y = r \sin (\omega t + \alpha)$$

or

$$y = r \sin \omega t \cos \alpha + r \cos \omega t \sin \alpha$$

أو بوضع

$$r \cos \alpha = A \,,\; r \sin \alpha = B$$

$$\therefore \qquad y = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

هذه المعادلة تعتبر الحل فى حساب المثلثات (المثلثى) للمعادلة التفاضلية التى ذكرت سابقاً. هذا الشكل المثلثى، يمكن تحويله ببساطة إلى شكل أسى معقد (متراكب) بإستخدام هذه العلاقة:

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

and

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \qquad \text{تذييلة (١)}$$

وبالإستبدال فى الشكل المثلثى لهذا :-

$$y = \frac{A}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right) + \frac{B}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)$$

$$= \left(\frac{iB + A}{2i}\right) e^{i\omega t} + \left(\frac{iB - A}{2i}\right) e^{-i\omega t}$$

و بوضع

$$\left(\frac{iB+A}{2i}\right) = C \text{ and } \left(\frac{iB-A}{2i}\right) = D$$

$$y = C\ e^{+i\omega t} + D\ e^{-i\omega t}$$

ومن الواجب أن نلاحظ أو نتذكر أن الحل للمعادلة التفاضلية للشكل:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \qquad - 41$$

ربما يأخذ الشكل $y = A \sin \omega t + B \cos \omega t$ - 42

أو الشكل $y = C\, e^{+i\omega t} + D\, e^{-i\omega t}$ - 43

يكون أى الإثنين الأكثر مناسبة للمشكلة التى تحت البحث.

الموجات المتعاقبة : Progressive Waves

بأخذ واحدة من أبسط المعادلات للحركة التوافقية البسيطة وهى

$$y = r \sin \omega t$$

وبوضع $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$. فالمعادلة تصبح :

$$y = r \sin \frac{2\pi}{\tau} t \qquad - 44$$

والمعادلة (44) ترينا العلاقة بين الإزاحة والزمن، وهى معادلة متوقفة إلى حين (بمعنى على الزمن والإزاحة). لو الكتلة تتذبذب على طرف أو فى نهاية سلك زنبرك مغموسة فى سائل فإنها سوف تعود إلى أعلى الذيل (تعود لعمل سلسلة) من الموجات المتعاقبة على السطح التى سوف تكون متوقفة على الزمان والمكان (بمعنى الحيز الفراغى). فلو كانت الموجة عبارة عن صورة ضونية فى بضعة لحظات فى زمن (نفترض صفر زمنى) فإنها سوف تأخذ شكل جيب موجه، وبرسم الإزاحة (φ) مقابل المسافة (x) من المنبع ستكون على شكل منحنى جيبى كما فى الشكل (31). هذه الموجه تأخذ حيز دورى (متكرر الحدوث) (λ)، فى مثل هذه الحالة تعرف بطول الموجه.

فعـندما تتغـير الإزاحــة مــع الزمــن مــــع الدوريـــة الموقــتة τ. فالمعادلـة (44) تكـون هكـذا بالـتماثل، عندما تتغير الإزاحة مع المسافة بحيز دورى مـتكرر الحـدوث (λ) والمعادلـة المناسـبة يجـب أن تكـون عـند زمـن صفر عند مرور.

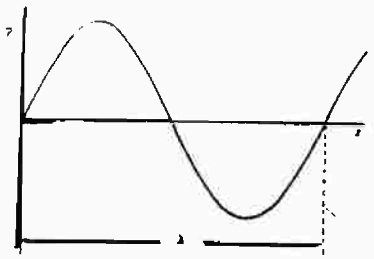


Fig. (3) progressive waves at zero time

$$\varphi = r \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \qquad - 45$$

بعـرض الوقـت (t)، الموجـه ككـل سـوف تـأخذ حـركة مـتقدمة لمسـافة (vt) حيـث (v) السرعة الموجية. والوضـع فـى هذه الحالـة يوضـح فـى الشـكل (4). الشكل للموجـه يبقـى ممثل بدالة جيب زاوية، لو المسافة (vt) قد طرحت من كل قيمة (x). فمن هنا:

$$\varphi = r \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \qquad - 46$$

تـعطى إعتمـاد الإزاحة على المسافة عند أى زمن t.

والمعادلـة (46) تعتـبر أحـد الحلـول للمعادلـة التفاضلية للحركة الموجية والـتى تطبق علـى موجـــه لأى شـكل. فلـو الشـكـل غير معلـوم، فـوق ذلك φ سـوف تكون بعض دالـة للمقدار (x - vt) أى أن :

$$\varphi = f (x - vt)$$

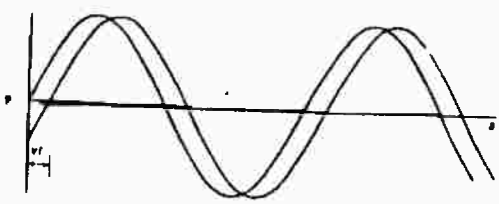


Fig. Progressive waves at time t.

الدالـة التكيفيـة ربمـا تحذف بالتفاضل مرتين مـع ثبوت كل متغير

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\chi}\right)_t = f`(x - vt) \qquad \left(\frac{\partial^2\varphi}{d\chi^2}\right)_t = f``(x - vt) \qquad - 47$$

أو

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\chi}\right)_x = - v f`(x - vt) \quad \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\chi}\right)_x = v^2 f``(x - vt) \qquad - 48$$

وبمقارنة المعادلة (47) بالمعادلة (48) نجد أن :

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\chi^2}\right) = \frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2}\right) \qquad - 49$$

وهى التى تعتبر المعادلة العامة التفاضلية لمعادلة الموجه.

الموجات القائمة

أنظر الشكل (4) للموجه التى بالمعادلة (46)، تطبق فقط على الحركة لبعد واحد والأفضل إعتبار تطبيقها لإهتزاز سلك. فلو إعتبرنا السلك معلق (مثبت) فى إحدى طرفيه، ربما تنعكس الموجه من نقطة التثبيت وترتحل للخلف أسفل السلك.مثلما تنعكس إتجاه حركته، فإن سرعة الموجه الإنعكاسية هى (-v) ومعادلته سوف تعطى بواسطة إستبدال (v) بالمقدار (-v) فى المعادلة (46) لتعطى :

$$\varphi = r \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x + vt) \qquad - 50$$

ولو أن السلك مثبت من الطرفين. فالموجات المتعاقبة تعطى بالمعادلتين (50,46) وسوف ترحل إلى أعلى ثم إلى أسفل ويكون حاصل الإزاحة للسلك من نقطته لموضع الإتزان سوف تعطى بواسطة المجموع الكلى للإزاحتين منفردين مثل:-

$$\varphi = r \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) + r \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x + vt) \qquad - 51$$

الآن، فبالنسبة لأى حركة موجه متعاقبه $v=\gamma\lambda$ ، حيث γ- سعة التردد للموجه ولهذا فالمعادلة (51) يمكن كتابتها فى الشكل :

$$\varphi = r \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x - \gamma\lambda t) + r \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x + \gamma\lambda t)$$

أو
$$\varphi = r \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \gamma t\right) + r \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + \gamma t\right) \qquad 52$$

بفك (تمديد) الأجزاء المثلثاتية في المعادلة 52

$$\varphi = r \left(\sin \frac{2\pi}{\lambda} x \cos 2\pi \gamma t \;\; \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \sin 2\pi \gamma t\right.$$

$$\left. + r \left(\sin \frac{2\pi}{\lambda} x \,.\, \cos 2\pi \gamma t + \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \sin 2\pi \gamma t\right)\right.$$

أو
$$\varphi = 2r \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \,.\, \cos 2\pi \gamma t \qquad 53$$

وبالنظر للمعادلة (53) نرى أن (φ) تصبح صفر كلما $\sin 2\pi\ (\lambda)\ x$ تكون صفر بإهمال قيمة الزمن (t). والآن

$$\sin \frac{2\pi}{\lambda} x = 0$$

كلما

$$\frac{2\pi}{\lambda} x = n\pi$$

حيث (n) عدد صحيح. هكذا يكون، كلما $x = n\ (\lambda/2)$.

مثل هذه الموجه المبينة بالمعادلة (53) ، تعرف بالموجه القائمة وأنها سوف تحقق أن تلك الموجه تكون مصاحبة طبيعيا بمجموعة لعدد صحيح. في السلك المثبت من الطرفين وسوف يفرض حد شرط على الوضع والذى حقق تلك الغرض (لحد الشرط) هو شرودنجر على طوفان لنموذج من الكواكب السيارة تستطيع إحداث أتوماتيكيا مجموعة لأعداد صحيحة (تلقائيا) أو (ذاتيا).

الحل لتلك المعادلة الموجيه المعطاه سابقاً للموجه القائمة، المعادلة (53) حصلنا عليها بإعتبار الموجه المتعاقبة مثل:

$$\varphi = r \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \qquad 46$$

ولو النقطة الإبتدائية تصبح معادلة الموجه المتعاقبة:-

$$\varphi = r \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \qquad 54$$

فيكون حل المعادلة القائمة هي: -

$$\varphi = 2r \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \,.\, \cos 2\pi \gamma t \qquad 55$$

إذاً يوجد حللين للمعادلـة القائمـة هكذا وتعطى بواسـطة المعادلـة 53 والمعادلـة 55. هاتين المعادلتين يمكن كتابتهما كما يلى:

$$\varphi_1 = 2r \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \,.\, \cos 2\pi \gamma t) \qquad -56$$

and

$$\varphi_2 = 2r \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \,.\, \cos 2\pi \gamma t) \qquad -57$$

حلـول أخرى كثيرة عامة للموجه القائمـة ناتجة عـن الإتحـاد الخطـى للمعـادلات (57,56).

$$\varphi = A \varphi_1 + B \varphi_2 \qquad -58$$

حيث أن كلاً من (A, B) ثوابت إختيارية. الإرتباط الخطى إذاً يمكن كتابته كما يلى:

$$\varphi = A.\ 2r \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \,.\, \cos 2\pi \gamma t + B\ 2r \cos \frac{2\pi}{\lambda} \cos 2\pi \gamma t$$

or $$\varphi = [\,2r \cos 2\pi \gamma t]\ [A \sin \frac{2\pi}{\lambda} x + B \cos \frac{2\pi}{\lambda} x] \qquad -59$$

هـذه المعادلة يمكن التعبير عنهـا فيما بعد في الأجزاء للأس المعقد (المتراكب) وذلك بوضع

$$A = k \sin \alpha \qquad \text{and} \qquad B = k \cos \alpha$$

بينما

$$\varphi = [\,2r \cos 2\pi \gamma t]\ [k \cos (\frac{2\pi}{\lambda} x - \alpha)]$$

$$\varphi = [\,2r \cos 2\pi \gamma t]\ [\frac{1}{2} k \exp[i (\frac{2\pi}{\lambda} x - \alpha)] + \frac{1}{2} k \exp[-i (\frac{2\pi}{\lambda} x - \alpha)]$$

$$\varphi = [\,2r \cos 2\pi \gamma t]\ [\frac{1}{2} k \exp^{-i\alpha} .\exp^{(2\pi i/\lambda)x}$$

$$+ \frac{1}{2} k \exp^{i\alpha} .\exp^{(2\pi i/\lambda)x}] \qquad -60$$

بوضـع $C= \frac{1}{2} k \exp^{(-i\alpha)}$ ، $D= \frac{1}{2} k \exp^{(i\alpha)}$ ، تصبـح المعادلة 60 كمـا يلـى:-

$$\varphi = [\,2r \cos 2\pi \gamma t]\ [C \exp (\frac{2\pi i}{\lambda} x) + D \exp (-\frac{2\pi i}{\lambda} x) \qquad -61$$

وبهذا تكون المعادلتين 59, 61 هما حينئذ حلول لمعادلة الموجه التفاضلية للموجه القائمة. وفى هاتين المعادلتين يوجد قوس الذى يصف φ كيف تتغير مع x. والجزء الفراغى والقوس الذى يصف كيف تتغير φ مع الزمن t. فى ميكانيكا الكم والجزء الزمنى يكون مهم عندما تكون الصفات المغناطيسية المصاحبة مع التحرك للإلكترونات المقيدة تحت الإعتبار، ولكن فى معظم الحالات القيمة المتوسطة للدالة (φ) المهمة تقع على الفترة المدركة للزمن، وكيف تعتمد هذه القيمة لـ (φ) على (x). تحت هذه الظروف يمكن أن تكون منطقية لإعتبار فقط الجزء الحيز الدقيق لدالة الموجة.

معادلة شرودنجر للموجه: The Schrodinger wave equation

لو أنه من الضرورى إعتبار الجزء الحيز لمعادلة الموجه، فإن الجزء الزمنى يمكن أنه يزال بالتفاضل. ولنعتبر أحد الحلول البسيطة لمعادلة الموجه التفاضلية وهى:-

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\chi^2} = \frac{1}{v^2}\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \qquad -49$$

التى تكون :

$$\varphi = 2\ r \sin \frac{2\pi}{\lambda}\ x\ .\ \cos 2\pi\ \gamma t \qquad -53$$

فبالنسبة للموجات القائمة، حيث تكتب المعادلة 53 ، كما يلى :

$$\varphi = \psi\ (x)\ .\ \cos 2\pi\ \gamma t$$

حيث $\psi\ (x)$ عبارة عن دالة لـ (x)، ثم بالتفاضل: -

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\chi} = \psi`\ (x)\ .\ \cos 2\pi\ \gamma t$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\chi^2} = \psi``\ (x)\ .\ \cos 2\pi\ \gamma t \qquad -62$$

وكذلك :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\ \psi\ (x)\ .\ 2\pi\ \gamma t$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\ \psi\ (x)\ .\ 4\pi^2\ \gamma^2 \cos 2\pi\ \gamma t \qquad -63$$

بالإستبدال من المعادلة 63, 62 إلى المعادلة 49.

$$\psi``\ (x)\ .\ \cos 2\pi\ \gamma t = \frac{1}{v^2}\ [-\ \psi\ (x).\ 4\pi^2\ \gamma^2 \cos 2\pi\ \gamma t]$$

or $$\psi''(x) = -\frac{4\pi^2\gamma^2}{v^2}\psi(x)$$ - 64

مثلما $\lambda = v/\gamma$ فإن المعادلة (64) يمكن كتابتها كما يلى : -

$$\psi''(x) = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\psi(x)$$

or $$\psi''(x) + \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\psi(x) = 0$$ - 65

فالعملية السابقة بهذا الشكل تزيل الزمن المتغير فى المعادلة 65 والتى يمكن كتابتها على الصورة الآتيـة :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\psi = 0$$ - 66

ولتطبيق هذه المعادلـة للجسيم، (λ) – يجب إستبدالها بجزء العزم بإستخدام علاقة دى بروجلى ((de Broglie relationship. وهى:

$$\lambda = h/p$$ - 67

حيث h – ثابت بلانك Planck's constant ، P- عزم الجسيـم، ومن المعادلة (67) نجد أن : -

$$\frac{1}{\lambda^2} = P^2 / h^2 = \frac{m^2v^2}{h^2}$$

بالإستبدال فى المعادلة (66)

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{4\pi^2 m^2 v^2}{h^2}\psi = 0$$ - 68

ولنتذكر أن $T = \frac{1}{2}mv^2$ ولهذا

$$v^2 = \frac{2T}{m}$$ - 69

عـلاوة عن ذلـك $T = E - V$ ولذلك فإن المعادلـة (69) يمكن كتابتهـا على الصورة $v^2 = 2/_m\,(E-V)$ ، بالإستبدال فى المعادلة 68.

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - V)\,\psi = 0 \qquad - 70$$

هذه المعادلة: يصبح الزمن المستقل لمعادلة شرودنجر فى أحد الأبعاد، بالنسبة لثلاث أبعاد فإنها تصبح : -

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-V)\,\psi = 0$$

أو أكثر إختصاراً :

$$\nabla^2 \psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-V)\,\psi = 0 \qquad - 71$$

حيث ∇^2- يعرف بمعامل لابلاس Laplacian operator ومعادلة شرودنجر هى عبارة عن معادلة تصف خواص الجسيم من ناحية الحركة الموجية.

الدوال الذاتية والقيم الذاتية Eigenfunctions and Eigen values

عندما تطبق معادلة شرودنجر على مسألة جديرة بالذكر، فإن المعادلة (17) يجب أن تحل. كما يوجد عديد من التعبيرات للدالة ψ التى تعوض معادلة شرودنجر، ولكن يوجد فقط بعض الحلول والتى تكون مقبولة للمسألة تحت البحث. والحلول المقبولة تعرف بدالة ذاتية أو إلى حد بعيد تأخذ سلوك الدوال.والمقابل للطاقة (E) تعرف بقيم إيجن للنظام، (بقيم ذاتية).

نوع العوامل التى تجعل دالة الموجة مقبولة سوف تشرح فى الفصل التالى لهذا الفصل ولكن الأساس يمكن أن يفسر هنا بالمثال البسيط. ولنعتبر المعادلة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx} = 2 \qquad - 72$$

والحل لهذه المعادلة هو :

$$y = 2x + k \qquad - 73$$

حيث k ثابت إحتياطى ويمكن أن يأخذ أى قيمة. ولا يوجد مقدار لقيمة k. كما أن تفاضل المعادلة (73) سيقودنا إلى المعادلة (72). وهكذا يوجد عدد مطلق للحلول للمعادلة (72): وكل حل يصبح خط مستقيم بميل قدره (2)، ولو على أى حال، الظروف المطروحة تدخل، إذاً الحل لتلك المعادلة (72) يجب أن تمر خلال النقطة x=1، y=5. وإننا سوف نرى أنه يوجد فقط قيمة واحدة للمقدار k والذى يفى بهذا الغرض وهذه القيمة وهى k=3. والحل المقبول فقط لتلك المعادلة (72) بناءاً على تلك الظروف المسبقة تكون إذاً.

$$y = 2x + 3$$

ففي المثال السابق واحد فقط ثابت وواحد إحتياطي، ولكن مع معادلة شرودنجر معادلة تفاعل من الرتبة الثانية، فإنه يوجد إثنين من الثوابت سوف تشملها وفي شرحنا السابق لهذا الفصل عن منظور المادة، فالمعادلة العامة لشرودنجر سوف تكتب لتلك الحالات، حيث طاقة الوضع للنظام تكون ثابتة. ولأخذ أحد المحاور فقط من معادلة شرودنجر وذلك للتبسيط.

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-V)\ \psi = 0 \qquad -70$$

فلو أن طاقة الوضع v ثابتة لحالة مستقلة للنظام، سيكون المجموع الكلي للطاقة E ثابت إذاً: -

$$\frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-V) = k^2$$

حيث k- ثابت والمعادلة (70) يمكن أن تكتب على هذه الصورة :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\ \psi = 0 \qquad -74$$

والمعادلة لهذا النوع قد حلت سابقاً لهذا الباب. والمعادلة هي المعادلة (41) والحل لهذا الجزء للدالة المثلثاتية والأس المعقد (المتراكب) أعطيتا في المعادلتين 42 , 43 على التوالي. وبالمثل ثم، الحل لمعادلة شرودنجر للثابت (V) الذى يمكن كتابتها كما يلي: -

$$\psi = A \sin kx + B \cos kx \qquad -75$$

أو

$$\psi = C e^{+ikx} + D e^{-ikx} \qquad -76$$

حيث أن D، C، B، A ثوابت إختيارية. وهذه الحلول هي دوال ذاتية (إيجن) يمكن تعيينها وذلك بغرض كحد شرط على المسائل الإعتبارية وذلك للوصول لقيم مقبولة لتلك الثوابت.

التفسير لدالة الموجة ψ: - Interpretation of ψ

عندما تحل معادلة الموجه لإيجاد دالة الموجه ψ. علماً بأن ψ ولا المقابلة لها (ψ*) لهما أي مفهوم فيزيائي. وبالتالي يكون حاصل ضرب العدد المعقد (المتراكب) والمقابل له كمية حقيقية، على أي حال، فإن حاصل ضرب ψψ* دالة حقيقية للإحداثيات وبعض المفاهيم الفيزيائية ربما تنسب إليها.

ولنا أن نتذكر أن طاقة الموجه تتناسب طردياً لمربع السعة (المدى) (أنظر المعادلة 14)، علاوة على ذلك طاقة الموجه التشويشية عبارة عن قياس لكثافتها وأن كثافتها تتناسب لمربع السعة. فلو أن الآن توسون وريد إشتغلا على إنحراف الإلكترونات (Thomson and Raid) فإننا نقول أن حزمة الأشعة الإلكترونية شتت بواسطة بللوره وسمح لها بعد ذلك بالسقوط على شاشة فلورسنسية لسوف نرى ضوء لامع كشكل ناشيء عند نقطة، حيث سيكون تركيز الإلكترون الساقط على الشاشة. ولو إفتراضنا أن واحد إلكترون هو الذى سمح له بالسقوط على الشاشة، حيث يوجد أعلى إحتمالية لسقوطه فى الجزء اللامع وستكون شدة الفلورسنس عالية. وعليه فعملية الإحتمالية لإيجاد الإلكترون عند تلك النقطة المحددة تفيد فى حد ذاتها متعلقة لشدة الفلورسنس، ثم بعد ذلك لمربع السعة للموجه المبنية على سلوك الإلكترون. فمثلما دالة الموجه لها صفة السعة فإن إحتمالية وجود الإلكترون عند أى نقطة محددة ربما يكون له إرتباط بالقيمة وهى حاصل ضرب $\psi\psi^*$ عند تلك النقطة.

وحاصل ضرب $\psi\psi^*$ عادة تفسر وكأنها تتناسب مع إحتمالية إيجاد الجسيم عند النقطة المحددة $\psi\psi^*dV$ وهكذا يشير كأنه تتناسب لإحتمالية إيجاد الجسيم فى أى عنصر لحجم dV، أو فيما بعد. أو ربما نشير لتناسب إلى شدة الجسيم فى الحجم dV.

هذا التفسير المبين من حقيقة وهو أن بعض الإلكترونات لها صفات كوصف لجسيم والبعض الآخر يتطلب وصفه بمعادلات الموجه. والمظهر الوحيد الذى يمتلك كلاًمن صفة الجسيم وصفة الموجة حيث تكون الفروض الأساسية للفيزياء الحديثة المقترحة بواسطة هيسنبر ج (Heisenberg 1927) والتى تعرف بمبدأ عدم التأكد (Uncertainty Principle) التى تنص على "التزامن الثابت الحقيقى لإيجاد العزم (أو الطاقة) لجسيم ووضعه غير ممكن". فعندما يكتسب إلكترون صفه الجسيمات يكون وضعه يمكن معرفته مع بعض التدقيقات، ولكن يوجد عدم تأكد بالإشارة إلى عزمه. وعندما هو يكتسب صفة الموجه، مثلما فى الإنحراف، فإن العزم يمكن تحديده ولكن وضعه غير مؤكد. وفى الحقيقة، إشارة إلى عدم التأكد فى العزم مثلما ΔP وعدم التأكد فى الوضع مثلما ΔX ، إذاً توجد العلاقة :-

$$\Delta P \,.\, \Delta X \simeq h$$

منذ ذلك الحين يكون وضع الإلكترون ذو الطاقة المحددة لا تستطيع معرفتها بالضبط. وكمية حاصل ضرب $\psi\psi^*$ يمكن توضيحها فى جزئيه إحتمالية وضع الإلكترون.

ولمناقشة النقاط فى هذا الفصل يمكن تفسيرها بواسطة تطبيق معادلة شرودنجر لبعض مسائل ميكانيكا الكم فى الفصل التالى.