

الفصل السابع

الجسيم والعايزة (المحيط)

Particle On A Ring

بالنسبة لهذه الخاصية لكل دوال طاقة الوضع والتي درست مسبقاً إما أن تكون ثابتة فوق خط الفترة الفاصلة أو تأخذ تغير فقط مع الإحداثيات السيني وإما لنوع العزم والذي نعتبره العزم الخطي. والتقدير للعزم الزاوي الموجود على طول الخط مهم في الأنظمة الذرية والجزئية. وأن تلك القيمة هي إعتبار مسألة الجزيء الذي يتحرك حول محيط الدائرة.

ولنأخذ جسيم له كتلة (m) بطاقة وضع ثابتة محدودة وليتحرك على محيط دائرة لنصف قطر (r). والقيمة المناسبة لطاقة الوضع التي تؤخذ يمكن إعتبارها صفر ولتلك المسألة إستبدال المحاور الديكارتية وهي x, y, z (الإحداثيات) بمحاور دائرية قطبية. والعلاقة بين هذين النوعين للمحاور قد يفسر في الشكل (1). وربما يحدد وضع الجسيم بقيمة المحاور الديكارتية x, y, z cartesian coordinate. وفيما بعد، وضع الجسيم ربما يحدد بواسطة الطول (r) للخط المرسوم إلى الجسيم من الأصل معاً بالزاويتين θ, ϕ . والزاوية θ هي الزاوية بين المحور (z) والخط المستقيم، والخط المستقيم بنقطة الأصل: وأن الزاوية ϕ هي الزاوية بين المحور (x) وخط الربط بخط الإسقاط للجسيم على السطح xy للأصل. وكما يمكن أن نرى من الشكل (1) أن:

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

ومعامل لابلاس ∇^2 Laplacian operator في جزئية الإحداثيات القطبية يمكن

أن نراها كما يلي :-

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2\partial}{r\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad -1$$

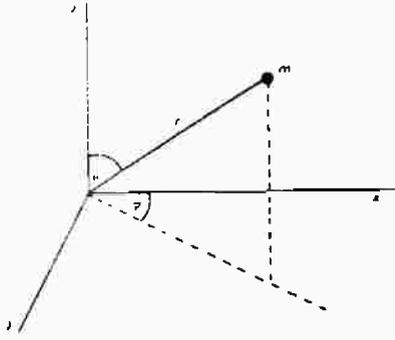


Fig. (1): Cartesian and spherical polar coordinates

في هذه المسألة التي تحت الاختيار، ربما نعتبر الدائرة واقعة على السطح (xy) ، من حيث $\cos \theta = 1$ ، $\sin \theta = \pi/2$ علاوة على ذلك مثلما المسألة تدخل الدائرة (r) لكونها ثابتة، مثلاً θ ونصف القطر (r) ثابتة لهذه المسألة. العوامل في معامل لابلاس مثل $\partial/\partial r$ ، $\partial/\partial \theta$ بصفر، ولهذا الثلاث تقاطع الأول في المعادلة (1) سوف تختصر. بوضع $\sin \theta = 1$ في الأجزاء المتبقية ولذلك يختزل معامل لابلاس إلى :-

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{d\phi^2} \quad - 2$$

متذكرين أن الثلاث محاور لمعادلة شرودنجر (المعادلة 71) في الفصل الثاني تصبح:

$$\nabla^2 \psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - V) \psi = 0 \quad - 3$$

ولإجراء تلك المسألة $V=0$ و ∇^2 يمكن إيجادها من المعادلة (2)، والشكل المناسب

لمعادلة شرودنجر لجسيم على الحلقة لتصبح :-

$$\frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Psi}{d\phi^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} E \psi = 0$$

أو

$$\frac{d^2 \Psi}{d\phi^2} + \frac{8\pi^2 m r^2}{h^2} E \psi = 0 \quad - 4$$

وبوضع

$$\frac{8\pi^2 m r^2}{h^2} E = M^2 \quad - 5$$

فإن المعادلة (4) ربما تكتب على الشكل :-

$$\frac{d^2 \Psi}{d\phi^2} + M^2 \psi = 0 \quad - 6$$

مرة أخرى، لأن تكون طاقة الوضع للنظام ثابتة. المعادلة (6) عبارة عن الشكل البسيط لمعادلة شرودنجر المعطاه بالمعادلة (74) في الفصل الثاني فإن لهذا الحل العام، وبالمثل مع المعادلة 75 في الفصل الثاني وأيضاً المعادلة 76 سوف تعطى بواسطة :-

$$\psi = A \sin M\varphi + B \cos M\varphi \quad - 7$$

$$\psi = C e^{iM\varphi} + D e^{-iM\varphi} \quad - 8$$

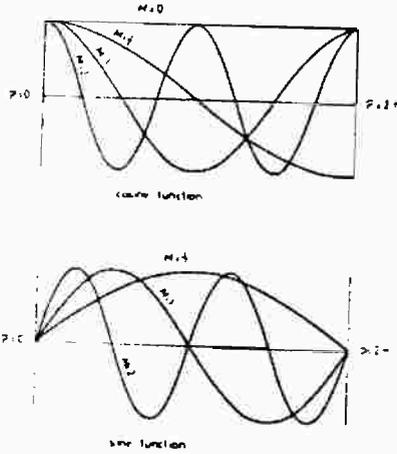
ولقد أشرنا سابقاً في الفصل الرابع أن التعبير المثلثي يعتبر الموجه القائمة والتي تنتج عن الموجات المرتحلة المتعاقبة معاً في وقت واحد وفي الإتجاهات العكسية. فلو أن الموقع للجسيم مهم في العزم الزاوي، فإن التعبير المثلثي في تلك الحالة ليس مرضياً مثلما ذلك يوافق لحركة الجسيم حول الدائرة لكلا الإتجاهات في وقت واحد. والحل الذي يعتبر أكثر إرضاءاً هو في جزئية الأس المعقد مثلما نوقش في صدر الفصل الرابع، حيث أن كل من (C)، (D) عبارة عن حركة الجسيم في أحد الإتجاهات.

ومرة ثانية نتحدث أن دالة إيجن يجب أن تكون وحيدة القيمة ولهذا فإن حاصل ضرب دالة الموجه في المقابلة لها ($\psi\psi^*$) أيضاً تأخذ قيمة واحدة عند أى نقطة على الحلقة. كذلك، دالة إيجن لها أن تأخذ نفس القيمة متى φ ستزداد بالمقدار (2π) إلى $(\varphi+2\pi)$. إضافة، يجب أن تكون دالة إيجن (ذاتية) مستمرة مثلما أيضاً لأول اشتقاق لها $d\psi/d\varphi$.

هذه المسألة ربما تدرس على إعتبار الحلقة كأنها خط مستقيم متخذ من $\varphi=0$ إلى $\varphi=2\pi$ ، وأن نتذكر أن هاتين النهايتين هما تلك النقطة على الحلقة. وفي المعادلة (7) وهي جا الزاوية وجتا الزاوية يمكن رسمهما منفصلتين ولو كل جزء يطابق للعوامل السابقة، إذا المعادلة (7) ككل سوف تكون دالة إيجن (ذاتية) للنظام. هذه الأشكال المرسومة يمكن توضيحها في شكل (2) لبعض قيم (M).

فبالنسبة للقيمة (M) التي تساوي $(\frac{1}{2})$ حيث يوجد فجوات في الدالة جيب التمام حيث لا تأخذ نفس القيم عند $\varphi=0$ ، $\varphi=2\pi$. نفس حالة دالة جيب الزاوية (جا) قيمة كل الدوال والتي تكون لنفسها عند كل نقطتين، ولكن يوجد تغير مفاجيء في المنحنى للرسم ولهذا هناك يوجد عدم إستمرارية أو فجوات في الدالة $d\psi/d\varphi$. ومن هذه الإعتبارات، إذا (M) لا تأخذ

القيمة $(\frac{1}{2})$ وأيضاً انعكاس لحظى وسوف نرى أن أى قيمة كسرية أخرى سوف تبعد بواسطة الإعتبارات المذكورة سابقاً.



وبالنسبة للقسم $M=2$ أو $M=1$ كما هو فى الشكل (2) نجد أن جا الزاوية وجتا الزاوية قيمة واحدة ومستمرة وكذلك أنه لا يوجد فراغ فى المنحنيات للخط البياني للرسم. مرة أخرى سوف نقدر أن قيم أخرى صحيحة للمقدار (M) مشتملة قيم صحيحة سالبة، وإيضاً سنفى لهذا الغرض.

Fig. (2): Consideration of the allowed values of M.

ولو كانت $M=0$. فإن جا الزاوية فى المعادلة (7) بصفر ولكن بناءً على ذلك فإن جتا الزاوية تصبح بالوحدة وأن الجزئية $B \cos M\phi$ سوف تختزل إلى B . والدالة الموجية تأخذ قيمة ثابتة للقيمة B . وسوف يعتبر هذا الحل مقبول.

ومن المناقشة السابقة، يجدر لنا أن نقول من المعادلة (7) والمعادلة (8) هما دالة إيجن (دالة ذاتية) للنظام بشرط أن :-

$$M = 0 \pm 1 \pm 2 \pm 3 \dots$$

من الروية لتلك الحقيقة أن القيم للحد (M) تكون مقيدة مثل ما سبق، وأن طاقة النظام ستكون مكتمة والعلاقة بين الطاقة (E) للنظام وعدد الكم M سوف تعين بواسطة المعادلة (5) ومن العلاقة :-

$$E = \frac{M^2 h^2}{8\pi^2 m r^2} \quad - 9$$

نلاحظ أن كلما (M) تأخذ قيمة صفر، فإن طاقة النظام أيضاً بصفر، ومن هنا لا يوجد نقطة صفرية لطاقة الدوران مثلما فى الحالة للطاقة الإهتزازية. علاوة على ذلك إذا (E)

تعتمد على (M^2)، كل مستويات الطاقة الأخرى تكون إزدواجية غير متولدة، لأن الطاقة (E) تأخذ نفس القيمة للدالة (+M) أو (-M).

وقبل أن نهمل الحل المثلثي لمعادلة الموجه. فإنها سوف تستخدم لتعادلها مثل هذه الطريقة شريطة بعض المعلومات المستخدمة للتفسير المتصلة بمدارات ذرة الإيدروجين التي سوف تشرح في آخر هذا الفصل.
وتكون الظروف للتعاقد كما يلي :-

$$\int \psi \psi^* d r = 1$$

حيث التكامل في المعادلة يشير لعملية التكامل على كل المدى حيث يوجد النظام. ففي حالة الجسيم على الحلقة، فالمتغير هي الزاوية ϕ حيث أنها تتغير من صفر وحتى 2π .
وبتسوية المعادلة (7) يمكن التعبير عنها بهذه العلاقة :

$$\int_0^{2\pi} (A \sin M\phi + B \cos M\phi)^2 d\phi = 1 \quad - 10$$

من العلاقة المثلثية في المرجع الثالث، يمكن الإستبدال يتم كالاتى :-

$$\sin^2 M\phi = \frac{1}{2} (1 - \cos 2M\phi)$$

$$2\sin M\phi \cos M\phi = \sin 2M\phi$$

$$\cos^2 M\phi = \frac{1}{2} (1 + \cos 2M\phi)$$

المعادلة (10) إذا نصبح :-

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} A^2 (1 - \cos 2M\phi) + AB \sin 2M\phi + \frac{1}{2} B^2 (1 + \cos 2M\phi) \right] d\phi = 1$$

or

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} A^2 - \frac{1}{2} A^2 \cos 2M\phi + AB \sin 2M\phi + \frac{1}{2} B^2 + \frac{1}{2} B^2 \cos 2M\phi \right) d\phi = 1 \quad - 11$$

بتكامل كل من جا وجتا الزاوية بين نهايتي صفر، 2π تعطى القيم صفر ولهذا

فالمعادلة (11) تزول إلى :-

$$A^2\pi + B^2\pi = 1 \quad - 12$$

والمعادلة (12) تعتبر وافية بواسطة العلاقة :

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos \alpha \quad \text{and} \quad B = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \alpha$$

ولهذا فإن المعادلة (7) يمكن أن تنص على :-

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos \alpha \sin M\varphi + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \alpha \cos M\varphi$$

$$\text{or} \quad \psi_S = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin (M\varphi + \alpha) \quad - 13$$

حيث الرمز (s) تعتبر ملحقة للدالة ψ وبذلك تشير إلى أن الحل في جزئية دالة جيب الزاوية.

فيما بعد. المعادلة (12) تكون وافية بالعلاقة :

$$A = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \alpha \quad \text{and} \quad B = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos \alpha$$

ويمكن أن نأخذ الشكل للمعادلة (7)

$$\psi = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \alpha \sin M\varphi + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos \alpha \cos M\varphi$$

$$\text{or} \quad \psi_C = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos (M\varphi + \alpha) \quad - 14$$

حيث (c) تعتبر ملحقة للدالة ψ ، وبذلك تشير إلى أن الحل في جزئية الدالة جتا الزاوية (جيب التمام).

والدوال ψ_S ، ψ_C في المعادلات 13، 14، يكونان متعادلان. وعلاوة على ذلك، يعتبران متعامدان مثل :-

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin (M_1 \varphi + \alpha) \right] \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos (M_2 \varphi + \alpha) \right] d\varphi = 0$$

حيث M_1 ، M_2 قيم مختلفة لعدد الكم M. والدالتين ψ_S ، ψ_C في هذه الحالة متعامدان.

والحد (α) فحسب يغير الأصل حول الحلقة بنفس السلوك تماماً مثلما شرح سابقاً في الفصل الثانی بالإرتباط بالمعادلة (23) الفصل الثانی. والزاوية (α) تأخذ أى قيمة وماتزال منفذة لشروط المعادلة (12)، ولهذا يوجد عدد لانهاى لمستقيمين متعامدين متقابلين للحل لمعادلة الموجه المعبر عنها بالمعادلة 13، المعادلة (14).

ولنا أن نلاحظ مسبقاً بالمرور لتكامل المعادلة (11)، ليست فعالة عندما $M=0$ ، لأن عملية التكامل الجزء المثلثاتى يودى للمعامل ($\frac{1}{2}$) حيث يكون لانهاى لو أن $M=0$. ولتعديل أو معادلة الحل المثلثاتى لمعادلة دالة الموجه وخصوصاً فى القيمة الخاصة عندما تكون $M=0$ ، هذه القيمة أو لا يجب أن تدخل أو تدرج فى المعادلة (7) لتعطى :-

$$\psi = B$$

حيث يمكن بعد ذلك تعادلها بكتابة الآتى :-

$$\int_0^{2\pi} B^2 d\varphi = 0$$

وهذا العمل يودى إلى :-

$$2 B^2 \pi = 0$$

$$\text{or} \quad B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

ولهذا عندما $M=0$ فإن دالة الموجه تأخذ قيمة ثابتة تعطى بواسطة

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

الهدف الأساسى والمهم فى مسألة الجسيم على الدائرة (الحلقة) هى تعبير العزم الزاوى للنظام. ولقد أشرنا إلى ذلك مسبقاً إلى أن الحل للأس المعقد لمعادلة الموجه سوف يستخدم بأكثر فى هذا لسياق الكلام مثل الأجزاء (C)، (D) فى المعادلة (8)، وكل واحد من تلك الدالات تقابل لإتجاه واحد فقط للحركة. ومن هذه النقطة لذلك المنظر يكون أفضل لتغيير هذا الإنتباه، للزمن الكائن، لقيم موجبة للدالة M . ثم فصل الجزئية وكتابته على الشكل الآتى :-

$$\psi_+ = C e^{iM\varphi} \quad - 15$$

$$\text{and} \quad \psi_- = D e^{-iM\varphi} \quad - 16$$

حيث العلامات (الرمز السفلى) لتدل على التماثلية وعدم التماثلية في الفصل الخامس.

وبالمساواة لمعادلة الموجه المعطاه فى المعادلة (15)، لربما تقرب وذلك بوضع

$$\int_0^{2\pi} \psi_+ \psi_+^* d\phi = 1 \quad , \quad \int_0^{2\pi} (C e^{iM\phi} \cdot C^* e^{-iM\phi}) d\phi = 1$$

$$CC^* \int_0^{2\pi} d\phi = 1 \quad , \quad CC^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

من حيث $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

وأيضاً لمساواة المعادلة (16) نرى أن :-

$$D = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}}$$

ولهذا فإن أشكال التساوى للمعادلات (16, 15) هي :-

$$\psi_+ = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{iM\phi} \quad - 17 \quad , \quad \psi_- = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{-iM\phi} \quad - 18$$

هذه الحلول الآن قد تكون تساوت ولكن فى النهاية متعامدة مثل الآتى :-

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{iM_1\phi} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{-iM_1\phi} \right) d\phi = 0$$

لو تصورنا الأصل ربما يتغير على الحلقة بزاوية (α) عندما المعادلة (17) كمثال التى يمكن كتابتها كما يلى :-

$$\psi_+ = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{iM(\phi+\alpha)}$$

ولإجراء التبسيط فى سرد المناقشة، (α) يجب أن توضع بصفر والآن يجب أن نقدر أن لو (M) تأخذ قيمة $(+1)$. هذا فرض فى المعادلة، ستصبح هذه المعادلة (7) متماثلة مع المعادلة (18) ومن حيث (M) تأخذ القيمة (-1) . ومن هذا المنطلق لإيجاد العزم الزاوى إذا، المعادلة (17) ، (18) يمكن إرتباطهما كما يلى :-

$$(\psi_+) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{iM\phi} \quad - 19$$

وعلى ذلك نجد أن (M) يمكن أن تأخذ إما قيمة موجبة أو سالبة تحت التقدير. والحلقة التي يتحرك عليها الجسيم المتمثل والواقع في السطح (xy) ولهذا فإن الجسيم سوف يأخذ عزم زاوى حول المحور (z). فباستخدام تعبير معادلات الموجه بواسطة المعادلة (19)، فالعزم الزاوى يجب أن يكون قيمة محددة مثل أى قيمة للحد (M) ليقابل فقط الحركة فى إتجاه واحد. إذا من الواجب إمكانية إيجاد العزم الزاوى للجسيم بواسطة العمل على ψ_{\pm} مع عامل العزم الزاوى.

وعامل العزم الزاوى حول المحور (z) قد يعطى بالإحداثيات القطبية بواسطة

$$(\hbar/2\pi i)(d/d\phi). \text{ بالعمل على الدالة } \psi_{\pm} \text{ فمع هذا العامل نجد أن :}$$

$$\begin{aligned} \frac{\hbar}{2\pi i} \cdot \frac{d}{d\phi} (\psi_{\pm}) &= \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{iM\phi} \right) \\ &= \frac{\hbar}{2\pi i} iM \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{iM\phi} \\ &= \frac{M\hbar}{2\pi} \psi_{\pm} \end{aligned}$$

هذه العملية تنتج لدينا عدد حقيقى مضروب بواسطة دالة الموجه الأصلية، لهذا فإن العدد الحقيقى يعتبر العزم الزاوى للجسيم، ونرمز للعزم الزاوى حول المحور (z) بالرمز L_z إذا : -

$$L_z = \frac{M\hbar}{2\pi}$$

نلاحظ أن العزم الزاوى حول المحور (z) مكم بالوحدة $(\hbar/2\pi)$ ، حيث أنها أحد الفروض فى نظرية بوهر لذرة الأيونين.

والعزم الزاوى للجسيم يمكن أن يكون مثلما (M) تكون صفر وعلى ذلك تكون قيمة موجبة للحد (M) وسوف يؤدي قيمة موجبه للعزم الزاوى حيث يقابل لحركة حول الحلقة فى إتجاه واحد. والعكس سيؤدي إلى إتجاه عكس الآخر.

نقطة أخرى يمكن شرحها بواسطة مسألة الجسيم على الحلقة. دالة الموجة الموضحة بواسطة المعادلة (19) قد لا يمكن رسمها لتعطي رسم بياني أو تخطيط مثلما هي تحتوى لجزء تخيلي. والدوال المثلثاتية والتي أعطيت بالمعادلات (13, 14) لا تعانى من هذا العائق. وفى الحقيقة فإن دوال الموجة المثلثاتية تعتبر خط مركب لدوال أسية.

ولنعبر المعادلة :-

$$\psi_s = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin M\phi \quad - 20$$

$$= \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} (e^{iM\phi} - e^{-iM\phi})$$

$$= \frac{1}{i\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{iM\phi} - \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{-iM\phi} \right)$$

أو

$$\psi_s = \frac{1}{i\sqrt{2}} (\psi_+ - \psi_-) \quad - 21$$

مرة أخرى باعتبار المعادلة (14)

$$\psi_c = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos M\phi \quad - 22$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} (e^{iM\phi} + \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{-iM\phi})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{iM\phi} + e^{-iM\phi} \right)$$

$$\psi_c = \frac{1}{i\sqrt{2}} (\psi_+ + \psi_-) \quad - 23$$

هذه التركيبة الخطية تشرح الصفة العامة لدوال الموجة المنتهية degenerate، التي تعتبر لأى تركيبة خطية للأطراف للمجموعات المنتهية وأيضاً تكون مقبولة وتأخذ نفس الطاقة كدالة أساسية. وفى المعادلات 21, 23 السابقتين ψ_+ , ψ_- المعطيان لقيمة للحد (M) سوف تنتهى والتركيبات الخطية لها تعطى ψ_s , ψ_c ، والتي أيضاً معروفة قبل ذلك وتكون دالة موجة مقبولة والتي تأخذ نفس لطاقة مثل ψ_+ , ψ_- كل على حدة للحد (M).