

الباب السادس

انتقال الحرارة بالإشعاع

Chapter Six

Heat Transfer

By

Radiation

- 6.0 مقدمة.
- 1.6 الحقائق الأساسية المنطقة بالإشعاع.
- 2.6 تبعات الإشعاع.
- 3.6 طول موجة الإشعاع.
- 4.6 إشعاع الجسم الأسود - الانبعاثية.
- 5.6 قوتين إشعاع الجسم الأسود.
- 6.6 خواص الإشعاع الحراري.
- 7.6 امتصاص الإشعاع خلال الأجسام الصلبة المعتمة (غير الشفافة).
- 8.6 قانون كيرشهوف الخاص بالإشعاع.
- 9.6 التبادل الإشعاعي بين السطوح - معاملات الشكل الإشعاعي.
- 10.6 السطوح غير السوداء.
- 11.6 الإشعاع إلى طبقات سميكة من السوائل أو الغازات أو المواد الصلبة.
- 12.6 العلاقات بين معاملات الشكل الشعاعي.
- 13.6 انتقال الحرارة المشترك بالطرق الثلاثة:التوصيل - الحمل والإشعاع.
- 14.6 تمرين في الباب السادس.

6.0 مقدمة Introduction

إن الإشعاع الذي يُعتبرُ ناقلَ للطاقةِ خلالِ الفضاءِ عندِ سرعةِ الضوءِ قَدْ يَنْشَأُ بطرقٍ مُخْتَلِفَةٍ. إن بَعْضَ أنواعِ الموادِ تَبْعَثُ الإشعاعَ عندما تَعَالَجُ بمؤثراتٍ خارجيةٍ مثلَ قصفِ الإلكترونِ أو الشحناتِ الكهربائيةِ أو الإشعاعِ الناتجِ عن أطوالِ موجيةٍ معينة. الإشعاعِ الناتجِ عن هذه التأثيراتِ سوف لَنْ يُناقشُ في هذا الباب. إن جميعِ الموادِ فوقِ درجةِ الصفرِ المطلقِ سَتَبْعَثُ الإشعاعَ الذي لا يعتمدُ على المؤثراتِ الخارجيةِ. الإشعاعِ الناتجِ عن درجةِ الحرارةِ فقط يُدعى بالإشعاعِ الحراريِّ وهذا البابُ يختصُ فقط بالإشعاعِ من هذا النوعِ.

لذلك يمكن تعريف الإشعاع الحراري بأنه عبارة عن موجات كهرومغناطيسية تنبعث من أي جسم بسبب ارتفاع درجة حرارته وأن هذا الإشعاع الحراري ينتشر بسرعة تكاد تكون مساوية لسرعة الضوء والتي تعادل 3×10^8 م/ثا. إن الموجات الكهرومغناطيسية تنقل الطاقة مباشرة خلال الفضاء. إن ضوء الشمس هو أحد أشكال الإشعاع الذي يشع خلال الفضاء إلى كوكبنا بدون مساعدة الموائع أو المواد الصلبة. إن الطاقة تُسافرُ خلال العدم والشمسُ تنقل الحرارة خلال 93 مليون ميل من الفضاء. ولعدم وجود مواد صلبة تَمَسُّ الشمسَ أو كوكبَ الأرض، فإن التوصيل ليسَ هو المسؤول عن جلب الحرارة إلى الأرض. ولعدم وجود سوائِل (مثل الهواءِ والماءِ) في الفضاءِ، فإن الحملَ ليسَ هو المسؤولُ أيضاً عن انتقال الحرارةِ وهكذا، يَجلبُ الإشعاعُ الحرارةَ إلى كوكبنا.

1.6 الحقائق الأساسية المتعلقة بالإشعاع

Fundamental Facts Concerning Radiation

إن الإشعاعِ ينتقلُ كما سبق شرحه خلالِ الفضاءِ في خطوطٍ أو أشعةٍ مستقيمةٍ و فقط الموادِ التي تكون على مرأى من الجسم المشع يُمكنها أن تَعترضَ الإشعاعَ

من ذلك الجسم. جزء الإشعاع الساقط على الجسم والذي ينعكس يُدعى بالانعكاسية ρ Reflectivity والجزء الذي يمتص منه يُدعى بالامتصاصية Absorbitivity أو α أما الجزء الذي ينتقل منه فيُدعى بالانتقالية τ transmissivity. إن مجموع هذه الأجزاء أو الكسور يجب أن يكون واحد أو:-

$$\alpha + \rho + \tau = 1 \quad (1-6)$$

إن الإشعاع في حد ذاته ليس حرارةً وعندما يتحول إلى حرارة بواسطة الإمتصاص، فإنه لن يُعَدَّ إشعاع بعد ذلك. في التطبيق العملي على أية حال الإشعاع المنعكس أو المنتقل يسقط عادة على الأجسام الممتصة الأخرى ويتحول في النهاية إلى حرارة، ربما بعد العديد من الانعكاسات المتعاقبة. إن أقصى امتصاصية ممكنة هي واحد والتي يمكن الحصول عليها فقط إذا امتص الجسم جميع الإشعاع الواقع فوقه ولا يعكس أو ينقل شئ منه. إن الجسم الذي يمتص كل الإشعاع الساقط يُدعى بالجسم الأسود Black Body.

2.6 انبعاث أو انطلاق الإشعاع Emission of Radiation

إن الإشعاع المنبعث من أي كتلة مُعطية من المادة لا يعتمد على الإشعاع المنبعث من أي مادة أخرى تكون على مرأى منه أو في تلامس معه ، إن الكتلة والطاقة الصافية المفقودة أو المكتسبة من قبل جسم هي الفرق بين الطاقة المنبعثة من الجسم والطاقة الممتصة من قبل الجسم بواسطة الإشعاع الذي يصله من الأجسام الأخرى. إن انتقال الحرارة بالتوصيل والحمل لرُبَّمَا أيضاً يحدث أيضاً بشكل غير معتمد على الإشعاع.

عندما توضع الأجسام عند درجات حرارة مختلفة على مرأى من أحدهما الآخر داخل مغلف أو حيز مغلق، تفقد الأجسام الأكثر سخونة الطاقة عن طريق الإشعاع

بشكل أسرع من استلامها الطاقة عن طريق امتصاص الإشعاع من الأجسام الأبرد وسوف تقل درجة حرارة الأجسام الأكثر سخونة. تمتص الأجسام الأكثر برودة بشكل آني الطاقة من الأجسام الساخنة بشكل أسرع من إطلاقها الطاقة وتزداد درجة حرارتها. تصل العملية إلى حد التوازن عندما تصل جميع الأجسام إلى نفس درجة الحرارة كما هو الحال في سريان الحرارة بالتوصيل والجملة. إن تحول الإشعاع إلى حرارة بالإمتصاص والمحافظة على موازنة درجة الحرارة خلال الانتقال الصافي للإشعاع يُبررُ التطبيق العادي لما يدعى بـ " حرارة الإشعاع.

إن التدفئة بالإشعاع تُعتبرُ الأكثر راحة وصحة على مدى واسع، وعملية التسخين المتوفرة الأكثر طبيعية. إن الناس يدفنون بالطريقة نفسها عند شروق الشمس في يوم بارد حيث تلغى أرضية المواقد أو البقع الباردة أو الهواء الجاف. وتنخفض مستويات الغبار والتلوث الجوي والبكتيريا والرطوبة، إن كل المشاكل المصاحبة لنظام للتدفئة القسري ستلغى من المنزل عند تصميم نظام إشعاعي بشكل صحيح.

ولكن ما هي حرارة الإشعاع؟ بوضع اليد على كأس حار من القهوة سوف نحس بالحرارة. إن الاستنتاج المثالي هو أن تلك الحرارة ترتفع، ولربما يكون من الخطأ القول " الهواء الساخن " يرتفع لكن " الحرارة " يُمكن أن تنتقل في أي إتجاه. لهذا يُمكن أن نحس بحرارة الكأس عند وضع اليد على جانب منها. إن انتقال الطاقة بالإشعاع سببه سطح دافئ معطيا حرارته إلى سطح أبرد أيضاً. أينما يكون هناك اختلاف درجة حرارة بين السطحين، كلا السطوح سيحاول التوازن. تنتقل طاقة الإشعاع خلال الفضاء دون تدفئة الفضاء نفسه حيث تتحول إلى حرارة فقط عندما تلامس سطح أبرد. إن الراحة الإنسانية تعتمد كثيراً على انتقال الحرارة الإشعاعية بقدر اعتمادها على درجة حرارة الهواء، على الرغم من أنه اعتقاد أغلبية خبراء أنظمة التدفئة والتكييف من أنها دالة لدرجة حرارة الهواء. خلال السنوات الـ 50 الماضية كان الأمريكيان يسخنون بيوتهم نموذجياً بنفخ الهواء الدافئ من السقف. وقد نجحت هذه المحاولات في توفير الدفء لأكثر من 200 يوم من السنة في

إحدى ولايات الغرب الأمريكي. باستخدام نظام الهواء القسري، فإن الهواء الدافئ يرتفع والهواء البارد ينخفض، لذلك فإن الأرض تكون دائماً أكثر برودة. إن المقاول الوسيط نادراً ما يبلغك بأن أنظمة مجاري الهواء توفر الراحة الأوطأ كلفة حيث إن كلف الطاقة الشهرية هي الأعلى لأي نظام تدفئة. يُركَّب المقاول النظام ببساطة في البيت لأنه الأقل كلفة وكنتيجة لذلك، فقد الأمريكان ميزة بحرمانهم من بيئة حية مريحة حقاً في بيوتهم وأعمالهم التجارية. بالسيطرة على كل من درجة حرارة الهواء وانتقال الحرارة الإشعاعي إلى الأجسام المجاورة ، إن الأنظمة الإشعاعية توفر الراحة التي لا نظير لها حيث يمكن تركيب أي "قناة" مشعة أو مصدر مشع بسهولة على أي سطح مستوي. إن المطلب الوحيد ذلك السطح هو كونه كبير بدرجة الكفاية. كلما كان السطح أكبر، كانت درجة حرارة السطح الفعلية المطلوبة أوطأ. إن الجدار المشع يتطلب أن تكون درجة حرارة سطحه حوالي 140°F ، بينما لا تتجاوز درجة حرارة الأرضية المسخنة التي تؤدي نفس الغرض 81°F .

3.6 طول موجة الإشعاع Wave Length of Radiation

تغطي الإشعاعات الكهرومغناطيسية المعروفة مدى هائل من الأطوال الموجية أي من أطوال موجية حوالي 10^{-11} سنتيمتر طول إلى أطوال موجية بقيمة 1000 م أو أكثر. إن الإشعاع ذو طول الموجة الواحد سوف يُدعى بالإشعاع الأحادي اللون mono chromatic. إن الحزمة الفعلية للإشعاع تتكون من العديد من حزم الأشعة اللونية. على الرغم من أن الإشعاع بغض النظر عن طوله الموجي سواء كان في الصفرة أو في المالا نهاية من حيث المبدأ ، إلا أنه قابل للتحويل إلى حرارة عند امتصاصه بالمادة، إن جزء الطيف الكهرومغناطيسي ذات العلاقة بـسريان الحرارة يقع في مدى طول موجي يتراوح بين 0.5 – 50 ميكرون. يكون الضوء المرئي ذو طول موجي عند مدى يبلغ حوالي من 0.38 إلى 0.78 ميكرون والإشعاع الحراري في درجات الحرارة الصناعية العادية له أطوال موجية في الأشعة تحت الأحمر أطول بقليل من الموجات المرئية الأطول. عند درجات حرارة أكثر من

حوالي 500 درجة مئوية يصبح الإشعاع الحراري في الطيف المرئي يُصبح هاماً، والعبارة (الحرارة الحمراء) و(الحرارة البيضاء) تُشيرُ إلى هذه الحقيقة. كلما كانت درجة حرارة الجسم المشع أعلى، كان الطول الموجي السائد للإشعاع الحراري المنبعث بواسطته أقصر.

عند درجة حرارة معينة يختلف معدل الإشعاع الحراري مع حالة التجمع في المادة. الغازات أحادية الذرة والثنائية الذرة مثل الأوكسجين والارجون والنترجين تكون ذات إشعاع ضعيف حتى عند درجات حرارة عالية. في الظروف الصناعية هذه الغازات لا تشع ولا تمتص كميات يمكن تقديرها من الإشعاع. الغازات متعددة الذرات والتي تشمل بخار الماء وثاني أوكسيد الكربون والأمونيا وثاني أوكسيد الكبريت والهيدروكربونات تشع وتمتص الإشعاع بكميات يمكن تقديرها عند درجة حرارة الموقد أو الفرن لكن فقط عند مدى حزم معين من الأطوال الموجية. المواد الصلبة والسوائل تطلق الإشعاع عبر جميع حزم الطيف الكهرومغناطيسي.

إن سرعة الإشعاع الحراري تكون مساوية إلى طوله الموجي مضروبة في التردد.

$$C = \lambda \nu \quad (2 - 6)$$

حيث أن λ يمثل الطول الموجي ، ν يمثل التردد.

إن الطاقة أحادية اللون المنبعثة من قبل سطح مشع تعتمد على درجة حرارة السطح وعلى الطول الموجي للإشعاع. عند درجة حرارة ثابتة يمكن رسم منحنى يمثل معدل طاقة الانبعاث كدالة للطول الموجي. إن المنحنيات المثالية لمثل هذا النوع موضحة في الشكل (6 - 1) ويلاحظ أن كل منحنى يتصاعد بشكل حاد ويتناقص بشكل مماثل إلى إشعاع مقداره صفر عند أطوال موجية كبيرة جداً. إن الوحدة المختارة لقياس الإشعاع أحادي اللون تعتمد على حقيقة أنه من خلال

مساحة سطح مشع صغيرة، فإن الطاقة المنبعثة تنتشر في جميع الاتجاهات خلال أي نصف كرة موضوعة في مركز مساحة الإشعاع. إن الإشعاع الأحادي اللون المنبعث بهذا الشكل من وحدة المساحة في وحدة الزمن مقسوماً على طول الموجة يدعى بقدرة الإشعاع الأحادي اللون W_λ . إن المحور الرأسي في الشكل (6 - 1) يمثل قيم W_λ . ولكامل طيف الامتصاص الكهرومغناطيسي من سطح ما، فإن القدرة الكلية للإشعاع أو W تمثل مجموع قدرات الإشعاع الأحادي اللون المنبعثة من السطح أو:-

$$W = \int_0^{\infty} W_\lambda d\lambda \quad (3 - 6)$$

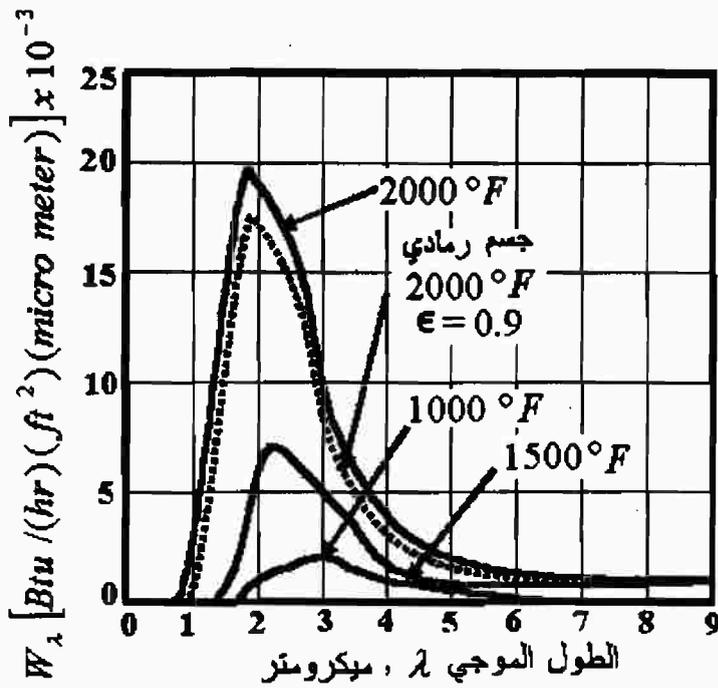
بيانياً فإن W تغطي جميع المساحة الواقعة تحت المنحنيات في الشكل (6 - 1) من طول موجي مقداره صفر إلى المالا نهائية. فيزيائياً فإن طاقة الإشعاع الكلية هي طاقة الإشعاع لجميع الأطوال الموجية المنبعثة من وحدة المساحة لوحدة الزمن في جميع الاتجاهات خلال نصف كرة موضوعة في مركز تلك المساحة.

4.6 إشعاع الجسم الأسود - الانبعاثية

Black Body Radiation - Emissivity

يعرف الجسم الأسود بأنه الجسم الذي يحقق أقصى طاقة انبعاث عند أي درجة حرارة معطاة وهو المعيار الذي تقاس على أساسه المشعات الأخرى. إن نسبة قدرة الإشعاع الكلية W لجسم إلى قدرة الإشعاع للجسم الأسود W_b تعرف بانبعائية الجسم ϵ emissivity أي أن:-

$$\epsilon = \frac{W}{W_b} \quad (4 - 6)$$



الشكل (1 - 6)

توزيع القدرة في طيف الأجسام السوداء والرمادية

إن انبعاثية اللون الأحادي ϵ_λ monochromatic emissivity هي نسبة قدرة الإشعاع الأحادي اللون إلى تلك الخاصة بالجسم الأسود عند نفس الطول الموجي:

$$\epsilon_\lambda = \frac{W_\lambda}{W_{b,\lambda}} \quad (5-6)$$

وإذا كانت انبعاثية اللون الواحد لجسم هي نفسها عند جميع الأطوال الموجية عندئذ يعرف ذلك الجسم بالرمادي (Gray Body).

5.6 قوانين إشعاع الجسم الأسود Laws of Black Body Radiation

إن العلاقة الرئيسية لإشعاع الجسم الأسود هي ما يعرف بقانون ستيفان-بولتزمان Stefan - Boltzmann والذي يبين بأن إجمالي الإشعاع المنبعث من أي جسم

يتناسب طردياً مع الأس الرابع لدرجة حرارته المطلقة وكما موضح بالمعادلة التالية والخاصة بالأجسام السوداء.

$$W_b = \sigma T^4 \quad (6-6)$$

حيث أن T = درجة الحرارة المطلقة مقاسة بالكلفن أو " ° K "

σ = ثابت ويعرف بثابت ستيفان - بولتزمان (Stefan - Boltzmann)

$$\text{وتبلغ قيمته } 5.669 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ K}$$

$$W_b = \text{الحرارة المنبعثة } W/m^2$$

إن المعادلة رقم (6 - 6) تستخدم لحساب الحرارة المنبعثة بالإشعاع لكل وحدة مساحة للأجسام السوداء.

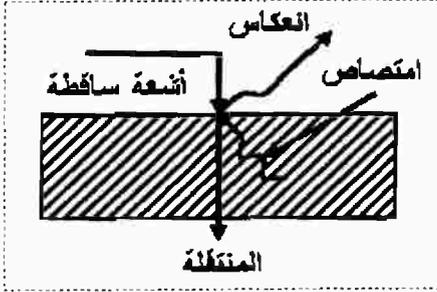
ويطلق على الجسم الأسود ذلك الأسبب امتصاصه لكل أنواع الطاقة الساقطة عليه ولذلك يظهر مثل هذا الجسم باللون الأسود وأن هذه الأجسام لا تقوم بعكس أي نوع من أنواع الطاقة.

6.6 خواص الإشعاع الحراري Properties of Thermal Radiation

لو اعتبرنا أن هناك جسم ساخن يسبح في الفضاء الخارجي (وبمعنى آخر: في فراغ مثالي تقريباً). كيف ينجز التبريد في هذه الظروف؟ فقط بواسطة آلية انتقال الحرارة التي لا تتطلب وجود وسط يتم الانتشار فيه. إن الإشعاع الكهرومغناطيسي قادر على الانتشار حتى كونه في الفراغ المطلق ويمتلك طاقة. لذلك ، السطح الساخن الذي ينبعث الإشعاع سيكون مبرداً. إن الإنبعاث الحراري للإشعاع الكهرومغناطيسي ("إشعاع حراري" لقصير) يحدث بكل الاتجاهات والموجات

الكهرومغناطيسية الناتجة تسيرُ بسرعة الضوء. مالم توزع بشكل آخر، إن الموجات الكهرومغناطيسية ستُسافرُ في خطوطٍ مستقيمةٍ من مصدرها حتى يمتصها شيء آخر.

عند اصطدام أي أشعة حرارية بسطح أي مادة فإن جزءاً من هذه الأشعة سينعكس والجزء الآخر سيمتص وجزء آخر ينفذ عبر الجسم كما يوضحه الشكل:



وإذا تم تعريف الانعكاسية بأنه كسر الطاقة المنعكسة والامتصاصية بأنها كسر الطاقة الممتصة والانتقالية بأنها كسر الطاقة التي يتم نقلها عبر المادة وهذا يعني أن:

$$\rho = \frac{\text{الطاقة المنعكسة}}{\text{الطاقة الكلية}} = \text{الانعكاسية}$$

$$\alpha = \frac{\text{الطاقة الممتصة}}{\text{الطاقة الكلية}} = \text{الامتصاصية} \quad \text{و} \quad \tau = \frac{\text{الطاقة المنقلة}}{\text{الطاقة الكلية}} = \text{الانتقالية}$$

وكما أشرنا فإن مجموع هذه الكسور الثلاثة هو واحد أي: $\alpha + \rho + \tau = 1$ بالنسبة لمعظم الأجسام الصلبة فإن عملية انتقال الطاقة عبرها تكون صعبة نوعاً ما لذلك يمكن اعتبار τ مساوية للصفر في الأجسام الصلبة أي أن $\tau = 0$ أي: $\alpha + \rho = 1$

إن توزيع القدرة في طيف الجسم يمكن معرفته بدقة ويعطى بقانون بلانك Plank

$$W_{b,\lambda} = \frac{2\pi hc^2 \lambda^{-5}}{e^{hc/k\lambda T} - 1} \quad (7-6)$$

حيث أن $W_{b,\lambda}$ = قدرة الانبعاث أحادي اللون للجسم الأسود.

$$\begin{aligned}
h &= \text{ثابت بلانك} = 6.6 \times 10^{-34} \text{ جول.ثانية} \\
c &= \text{سرعة الضوء} = 3 \times 10^8 \text{ متر/ثانية أو } 9.836 \times 10^8 \text{ قدم/ثانية.} \\
\lambda &= \text{طول موجة الإشعاع.} \\
k &= \text{ثابت بولتزمان} = 1.38 \times 10^{-23} \text{ جول / كلفن.} \\
T &= \text{درجة الحرارة المطلقة بالكلفن.}
\end{aligned}$$

يمكن كتابة المعادلة (6 - 7) بالشكل التالي:

$$W_{b,\lambda} = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1} \quad (8-6)$$

حيث أن C_1 و C_2 هي ثوابت في المعادلة أعلاه وتحسب بالشكل التالي:
 $C_1 = 3.742 \times 10^{-16}$ وات - متر مربع.
 $C_2 = 1.439 \text{ cm} \cdot \text{°K}$

إن رسم $W_{b,\lambda}$ مقابل λ المحسوبة من المعادلة (6 - 7) موضح في الشكل رقم (6 - 1) للأجسام السوداء والرمادية عند درجات حرارة مختلفة 1000 °F و 1500 °F وكذلك 2000 °F . إن الخطوط المنقطة تبين طاقة الإشعاع الأحادي اللون للأجسام الرمادية التي لها انبعاثية 0.9 عند درجة حرارة 2000 °F .

إن قانون بلانك يمكن أن يبدو متمماً لقانون ستيفان - بولتزمان ونلك بتعويض $W_{b,\lambda}$ من المعادلة (6-7) في المعادلة (6 - 3) ثم إجراء التكامل لها.

عند أي درجة حرارة معطاة، فإن قدرة الإشعاع الأحادي اللون القصوى يمكن بلوغها عند طول موجي معين هو λ_{\max} ويوضح قانون إزاحة Wien أن λ_{\max} تتناسب عكسياً مع درجة الحرارة المطلقة أو:-

$$T \lambda_{\max} = C$$

(9-6)

إن الثابت C يساوي 2890 عندما تعطى λ_{\max} بوحدات ميكرومتر و T بالكلفن و تساوي قيمته 5200 عندما تكون T بوحدات Rankin.

7.6 امتصاص الإشعاع خلال المواد الصلبة المعتمة (غير الشفافة)

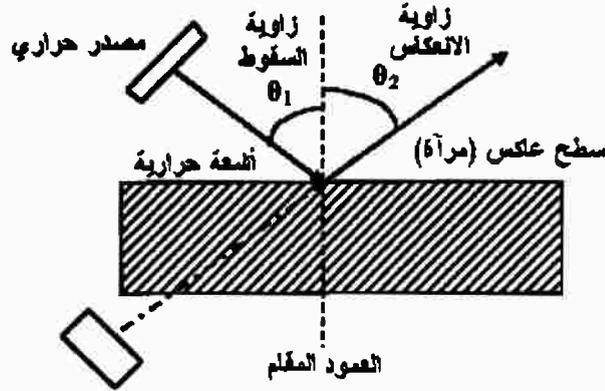
Absorption of Radiation by Opaque Solids

عندما يسقط الإشعاع على جسم صلب أشهب كما أشرنا سابقاً، فإن جزءاً معيناً منه وهو ρ قد ينعكس والجزء المتبقي $1 - \rho$ سيدخل المادة الصلبة وهذا الجزء أما يمتص أو سوف ينتقل عبر الجسم. إن معظم المواد الصلبة (عدا الزجاج وبعض المواد البلاستيكية والكوارتز وبعض المعادن) تمتص الإشعاع عند كافة الأطوال الموجية بحيث ماعدا بعض الحالات مثل الصفائح الرقيقة تكون الانتقالية صفرأً والإشعاع غير المنعكس سيمتص كلياً في طبقة السطح الرقيق للمادة الصلبة لذلك فإن امتصاص الإشعاع من قبل جسم معتم هو ظاهرة سطحية وليس ظاهرة حجمية وأن الحرارة المتولدة بالامتصاص تسري خلال الجسم بواسطة التوصيل فقط. وبشكل عام هناك نوعين من الانعكاس الأشعة التي يمكن ملاحظتها عند اصطدام أي نوع من أنواع الإشعاع ويمكن تلخيص هذين النوعين بما يلي:-

1 - إذا كانت زاوية الاصطدام مساوية لزاوية انعكاس الأشعة الحرارية فإن هذا النوع من الانعكاس بالمرآوي Unidirectional Reflection أي الشبيه بالمرآة العادية والتي تقوم بعكس الصورة أو الانعكاس الأحادي الاتجاه (الشكل 6 - 2).

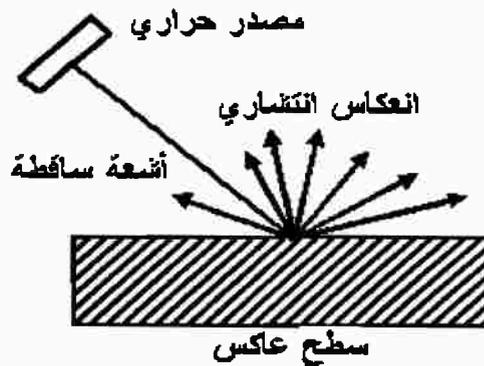
2 - أما النوع الثاني من الانعكاس فيطلق عليه بالانعكاس الانتشاري أو ما يعرف بـ Diffusion Reflection أو الانعكاس متعدد الاتجاه ويحصل هذا عند توزيع

الأشعة الساقطة على جسم وانتشارها باتجاهات مختلفة عند تركها السطح العاكس كما موضح في الشكل رقم (6 - 3).



الشكل (6 - 2) الانعكاس المرآوي

ملاحظة: إن الأجسام الحقيقية لا تعكس الإشعاع الحراري لا بالطريقة الأولى ولا الثانية وهي تقوم بعكس الحرارة بالاعتماد على خشونة السطح وليس بالضرورة أن تكون الأشعة المنعكسة بشكل نظامي ولكن بشكل عام يمكن القول أن الأسطح المصقولة صقلاً جيداً مثل الزجاج يكاد يكون انعكاسها حرارياً أما الأسطح الخشنة فغالباً ما يكون انعكاسها من النوع الانتشاري.



الشكل (6 - 3)

الانعكاس الانتشاري

إن الانعكاسية قد تتغير مع الطول الموجي للإشعاع الساقط وامتصاصية الحزمة بأجمعها وامتصاصية الجسم الرمادي مثل الانبعاثية تكون نفسها لجميع الأطوال الموجية. إذا أعطى سطح جسم رمادي إشعاع أو انعكاس انتشاري، فإن امتصاصية اللون الأحادي لا تعتمد على زاوية السقوط لحزمة الإشعاع. إن الامتصاصية الكلية تساوي امتصاصية اللون الأحادي وهي أيضاً لا تعتمد على زاوية السقوط.

8.6 قانون كيرشهوف الخاص بالإشعاع Kirchhoff 's Law

وهو قانون مهم يتعلّق إشعاع المادة ويبيّن أنه عند درجة حرارة التوازن، فإن نسبة طاقة الإشعاع الكلية لأي جسم إلى امتصاصيته تعتمد فقط على درجة حرارة الجسم. لذلك إذا اعتبرنا وجود جسمين عند درجة حرارة التوازن مع وسط محيط معروف فإن قانون كيرشهوف يبيّن أن:-

$$\frac{W_1}{\alpha_1} = \frac{W_2}{\alpha_2} \quad (10-6)$$

حيث أن W_1 و W_2 = قدرة الإشعاع الكلية للجسمين 1 و 2
 α_1 و α_2 = امتصاصية الجسمين 1 و 2 على التوالي.

وهذا القانون ينطبق على كل من الإشعاع الأحادي اللون والإشعاع الكلي. إذا كان الجسم الأول المشار إليه في المعادلة (6 - 10) جسم أسود فإن $\alpha_1 = 1$ وبذلك تصبح المعادلة (6 - 10) كما يلي:-

$$W_1 = W_b = \frac{W_2}{\alpha_2} \quad (11-6)$$

حيث أن W_b تعني قدرة الإشعاع الكلية للجسم الأسود لذلك فإن:-

$$\alpha_2 = \frac{W_2}{W_b} \quad (12-6)$$

ولكن بموجب التعريف، فإن انبعاثية الجسم الثاني ϵ_2 هي:-

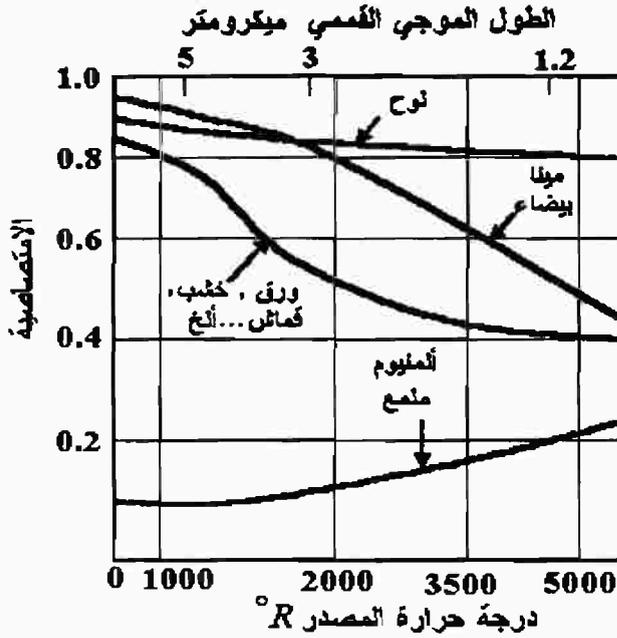
$$\epsilon_2 = \frac{W_2}{W_b} = \alpha_2 \quad (13-6)$$

لذلك عندما يكون أي جسم عند درجة حرارة التوازن مع محيطه، تتساوى كل من انبعاثيته وامتصاصيته. إن العلاقة قد تؤخذ كتعبير آخر عن قانون كيرشهورف. بصورة عامة ماعدا الأجسام السوداء أو الرمادية فإن الامتصاصية والانبعاثية لن تتساويا إذا لم يكن الجسم في حالة توازن حراري مع الوسط المحيط به. إن الامتصاصية والانبعاثية للأحادي اللون أو كليهما للجسم الأسود هي واحد. إن قانون جيب التمام Cosine Law ينطبق تماماً على الجسم الأسود لأن الانعكاسية هي صفر لجميع الأطوال الموجية وجميع زوايا السقوط. لأن توزيع الطاقة في الشعاع الساقط يعتمد على درجة الحرارة وخواص السطح المنشأ، فإن امتصاصية السطح المستلم قد تعتمد أيضاً على خواص ذلك السطح. إن معظم الأسطح الصناعية ليست رمادية وتتغير امتصاصيتها بشكل كبير مع طبيعة الشعاع الساقط. للسطوح المعدنية المطلية تزداد الامتصاصية α_2 مع زيادة درجة الحرارة المطلقة للمصدر T_1 ودرجة حرارة السطح T_2 بموجب المعادلة:-

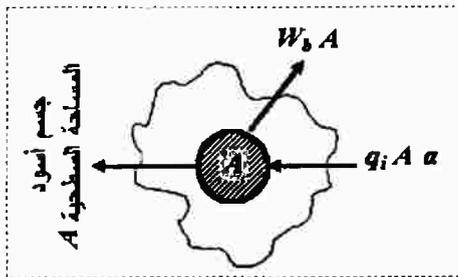
$$\alpha_2 = k_1 \sqrt{T_1 T_2} \quad (14-6)$$

حيث إن k_1 ثابت والشكل (6 - 3) يبين امتصاصية مواد صلبة مختلفة مع الطول الموجي للشعاع الساقط.

وللفهم الكامل لقانون كيرشهورف، أفرض وجود جسم محاط بالكامل من جميع الاتجاهات بمحيط أسود وكما موضح بالشكل أدناه وعلى فرض أن هذا المحيط الخارجي يقوم ببعث حرارة تتناسب مع الأس الرابع لدرجة حرارته فإن هذه الحرارة ستنتج باتجاه الجسم الأسود الصغير الموجود في داخل المحيط الأسود والذي يملك مساحة سطحية مقدارها A .



الشكل (6 - 3) امتصاصية مواد صلبة مختلفة



في حالة التوازن الحراري بين الجسم الأسود الداخل والمحيط الأسود فإن أي حرارة تسقط على الجسم الأسود من المحيط تساوي الحرارة المنبعثة من الجسم الأسود أي أن:

$$W_b \cdot A = q_i A \quad (15 - 6)$$

إذا تم استبدال الجسم الأسود الصغير بجسم مشابه له ولكنه غير أسود فإن هذا يعني أن الامتصاصية α لن تساوي الواحد، لذا في حالة التوازن الحراري سنحصل على معادلة بالشكل التالي:

$$W.A = q_i . A . \alpha \quad (16-6)$$

ومع ملاحظة أن مساحة الجسمين متساوية وبقسمة المعادلة (6 - 16) على المعادلة (6 - 15) سنحصل على:

$$\frac{W}{W_b} = \alpha = \epsilon \quad (17-6)$$

حيث أن α للجسم الأسود تساوي 1 وللجسم غير الأسود لا تساوي 1 ولذلك من المعادلة (17-6) يظهر بأن قدرة الانبعاثية للجسم العادي مقسومة على قدرة الانبعاثية للجسم الأسود ذو نفس مواصفات الجسم العادي وبنفس درجة حرارته هو مساوي للامتصاصية " α " وكذلك يطلق عليه قدرة الانبعاثية والذي يرمز له بالرمز " ϵ " ويطلق على المتطابقة رقم (6 - 17) بمتطابقة كيرشهوف فإذا كانت:

$$q = W_b, A = A \sigma T^4 \quad (18-6)$$

تصلح للجسم الأسود فإن المعادلة التالية:

$$\therefore q = W.A = \epsilon W_b, A = \epsilon . \sigma . A.T^4 \quad (19-6)$$

تصلح للأجسام غير السوداء

9.6 التبادل الإشعاعي بين السطوح - معاملات الشكل الإشعاعي

Radiation between Surfaces - The View Factors

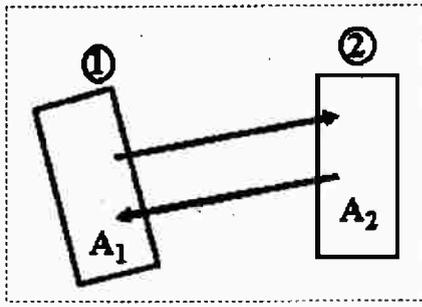
إن الإشعاع الكلي لوحدة المساحة لجسم معتم ذو مساحة A_1 وانبعائية ϵ_1 ودرجة حرارة مطلقة T_1 يحسب من المعادلة التالية:-

$$\frac{q}{A_b} = \sigma \epsilon_1 T_1^4 \quad (20 - 6)$$

على أية حال، معظم السطوح التي تبعث الإشعاع تستلمه أيضاً من السطوح الأخرى عند درجات حرارة مختلفة. بعض من هذا الإشعاع القادم سيتمص ويسمح بفحص طاقة الإشعاع. كمثال خط بخار ماء في غرفة محاطة بجدران وأرضية وسقف وكلها تشع الحرارة لأنبوب البخار وبالرغم من أن الأنبوب يفقد طاقة أكثر مما يتمص من محيطه الخارجي، لذلك فإن صافي الفقد بالإشعاع هو أقل من الذي يمكن حسابه من المعادلة (20 - 6) وحتى لو كان السطح يشع في ليلة سماؤها صافية، فإن طاقة الإشعاع ستمتص جزئياً من قبل الماء وثنائي أوكسيد الكربون في الغلاف الجوي وجزء من تلك الطاقة الممتصة يشع ثانية مرة أخرى إلى السطح.

في الأفران والأجهزة الأخرى التي تعمل بدرجات حرارة عالية حيث يكون الإشعاع مهماً، يكون الهدف الاعتيادي الحصول على معدل صافي التبادل الحراري المسيطر عليه بين سطح واحد ساخن أو أكثر وهو ما يدعى بالمصدر (Source) وواحد أو أكثر من السطوح الباردة (تدعى بالسطوح المهمدة Sinks). في العديد من الحالات يكون السطح الساخن هو لهب (flame) لكن التبادل الحراري بين السطوح واللهب هو أمر شائع ويمكن اعتباره شكل خاص لسطح شبه شفاف أو أشهب.

لنتخيل وجود سطحين أسودين في الفراغ والمطلوب اشتقاق علاقة عامة للتبادل الشعاعي بين هذين السطحين إذا كانت درجات حرارتها مختلفة كما يوضحه الشكل أدناه.



لنفرض أولاً أن:

F_{12} هو جزء الحرارة التي تنتقل من سطح رقم "1" وتصل فعلاً إلى سطح رقم "2".
 F_{21} هو جزء الحرارة التي تنتقل من سطح رقم "2" وتصل فعلاً إلى سطح رقم "1".

وبشكل عام فإن جزء الحرارة التي تنتقل من

السطح رقم "m" وتصل فعلاً إلى السطح رقم "n" هو F_{mn} وعلى هذا الأساس تسمى المعاملات F_{mn} , F_{21} , F_{12} بمعاملات الشكل الشعاعي View Factors. إن الحرارة المنتقلة من السطح رقم 1 إلى سطح رقم 2 هي:

$$q_{12} = F_{12} W_{b1} A_1 = A_1 F_{12} \sigma T_1^4 \quad (21-6)$$

أما الحرارة التي تنتقل من سطح رقم 2 إلى سطح رقم 1 فهي:

$$q_{21} = F_{21} W_{b2} A_2 = A_2 F_{21} \sigma T_2^4 \quad (22-6)$$

يمكن الحصول على صافي تبادل حراري بين سطحين بطرح المعادلة (6 - 22) من المعادلة (6 - 21) لنحصل على:

$$Q_{12} = A_1 F_{12} \sigma T_1^4 - A_2 F_{21} \sigma T_2^4 \quad (23-6)$$

صافي التبادل الحراري

وبما أن معامل الشكل الشعاعي هو خاصية من خصائص شكل الجسم فهو لا يعتمد على ظروف خاصة بالجسم لذلك فهو يتخذ قيمة ثابتة ولكل الأحوال. وإذا افترضنا أن T_1 تساوي T_2 وهذا يعني عدم وجود تبادل حراري بين السطحين أي أن $Q_{12} = 0$ ومن ذلك نستنتج أن:

$$(T_1 = T_2) \text{ حيث أن } F_{12} A_1 \sigma T_1^4 = F_{21} A_2 \sigma T_2^4$$

$$\therefore \boxed{A_1 F_{12} = A_2 F_{21}} \quad (24-6)$$

وبشكل عام فإن:

$$\therefore \boxed{A_m F_{mn} = A_n F_{nm}} \quad (25-6)$$

إن المعادلة رقم (6-25) تنطبق عند جميع درجات الحرارة وهذا يعني أنه عند اختلاف درجات الحرارة بين سطحين متشابهين، يمكن حساب صافي التبادل الحراري من المعادلة التالية:

$$Q_{12} = A_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) = A_2 F_{21} \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (26-6)$$

إن المعامل F_{12} يمكن اعتباره جزء الإشعاع الذي يترك المساحة A_1 والمستلم من قبل المساحة A_2 . إذا كان السطح A_1 يقابل السطح A_2 فقط فإن F_{12} يساوي الواحد. أما إذا كان السطح A_1 يقابل عدة أسطح فإن:

$$F_{11} + F_{12} + F_{13} + \dots = 1.0 \quad (27-6)$$

حيث أن F_{11} يغطي جزء زاوية المشاهدة أو الرؤيا Angle of Vision المقابلة للأجزاء الأخرى من الجسم A_1 . إذا لم يستطع السطح رؤية أي جزء من نفسه فإن المعامل F_{11} يساوي صفر. إن الإشعاع الصافي المصاحب للمعامل F_{11} هو بالطبع سيكون صفراً.

في بعض الحالات يمكن حساب معامل الشكل الشعاعي بشكل مبسط. كمثال نعتبر أن لدينا جسم أسود صغير بمساحة A_2 ولا يحتوي على أية انحناءات ومحاط

بسطح أسود كبير مساحته A_1 . إن المعامل F_{21} سيكون واحد وإذا المساحة A_2 لا تتمكن من رؤية أي شيء عدا المساحة A_1 فمن المعادلة (6 - 24) يتبين أن:

$$F_{12} = \frac{F_{21} A_2}{A_1} = \frac{A_2}{A_1} \quad (28-6)$$

ومن المعادلة (6 - 27) :-

$$F_{11} = 1 - F_{12} = 1 - \frac{A_2}{A_1} \quad (29-6)$$

وكمثال آخر سنعتبر قناة طويلة مقطوعها المساحي مثلث وجدرانها الثلاثة عند درجات حرارة مختلفة وليس بالضرورة أن تكون الجدران مستوية ولكنها يجب أن لا تحتوي أي انحناءات أي أن كل جدار يجب أن لا يرى أي جزء من نفسه. عند هذه الظروف فإن معاملات الشكل الشعاعي ستكون بالشكل التالي:

$$F_{12} = \frac{A_1 + A_2 - A_3}{2A_1} \quad (30-6)$$

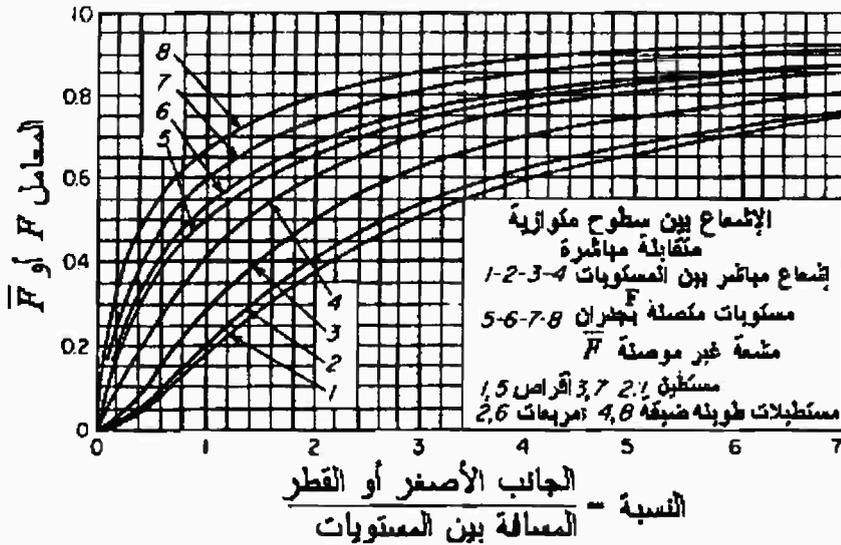
$$F_{13} = \frac{A_1 + A_3 - A_2}{2A_1} \quad (31-6)$$

$$F_{23} = \frac{A_2 + A_3 - A_1}{2A_2} \quad (32-6)$$

إن المعامل F قد تم حسابه من قبل Hottel لعدد من الحالات الخاصة المهمة. الشكل رقم (6 - 4) يبين قيم معامل F للألواح المتقابلة المتوازية المتساوية المساحة. إن الخط رقم 1 هو للألواح قرصية الشكل والخط رقم 2 للمربعات

والخط رقم 3 هو للمستطيلات التي تبلغ نسبة الطول إلى العرض فيها 1:2 والخط رقم 4 للمستطيلات الطويلة الضيقة. في جميع الحالات فإن المعامل F هو دالة لنسبة للجانب أو لقطر المستوي إلى المسافة بينهما.

الشكل (6 - 5) يبين معاملات الشكل الشعاعي للأنايبب لصفوف الأنايبب المسندة بطبقة عاكسة تمتص الطاقة من الأشعة التي تمر بين الأنايبب وتعيد إشعاع الطاقة الممتصة مرة أخرى إلى خلف تلك الأنايبب. إن المعامل المعطى في الشكل يمثل الإشعاع الممتص بواسطة الأنايبب محسوباً كجزء من ذلك الممتص من قبل مستوي متوازي ذو مساحة مساوية لمساحة الساند العاكس.



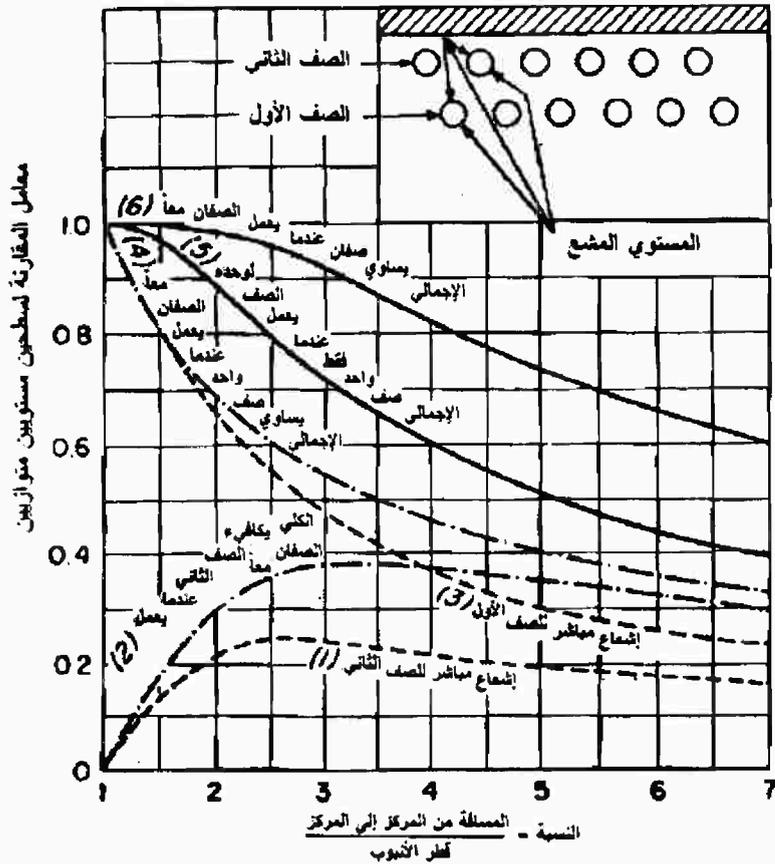
الشكل (6 - 4) معاملات الشكل الشعاعي بين السطوح المستوية

وعند ربط كل من المصدر والجسم المستلم بواسطة جدران عاكسة، فإن المعامل F يمكن استبداله بمعامل تماثلي هو معامل التبادل الداخلي Interchange factor أو \bar{F} وعندئذ يمكن كتابة المعادلات (6 - 21) و (6 - 22) لتصبح بالشكل التالي:

$$q_{12} = \sigma A_1 \bar{F}_{12} (T_1^4 - T_2^4) = \sigma A_2 \bar{F}_{21} (T_1^4 - T_2^4) \quad (33-6)$$

إن معامل التبادل الداخلي \bar{F} قد تم حسابه بدقة لبعض الحالات البسيطة. إن الخطوط من 5 إلى 8 للشكل تعطي قيم \bar{F} للمستويات المتوازية المتقابلة بشكل مباشر والمربوطة بجدران عاكسة. الخط 5 يصلح للأقراص والخط 6 للمربعات والخط رقم 7 للمستطيلات التي تكون فيها نسبة الطول إلى العرض 1:2 والخط 8 للمستطيلات الطويلة الضيقة. يمكن حساب \bar{F} بصيغة تقريبية بدلالة F وهي:

$$\bar{F}_{12} = \frac{A_2 - A_1 F_{12}^2}{A_1 + A_2 - 2 A_1 F_{12}} \quad (34-6)$$



الشكل (5 - 6)

معامل الشكل الشعاعي ومعامل التبادل الداخلي

بين مستوي متوازي وصف أنابيب

تستخدم المعادلة أعلاه عندما يكون هناك مصدر ومستلم واحد حيث يمكن أما للمساحة A_1 أو A_2 أن تقابل أي جزء من نفسها. وهو مبني على افتراض أن درجة حرارة السطح العاكس هي ثابتة. وهذا الأخير هو افتراض مبسط لأن درجة حرارة السطح العاكس الموقعية عادة ما تتغير بين درجة حرارة المصدر والجسم المستلم.

10.6 السطوح غير السوداء Non-Black Surfaces

نأخذ كمثال بسيط جسم صغير غير أسود موضوع محاط بجسم أسود كما تم توضيحه سابقا وإذا كانت المساحات هي على التوالي A_1 و A_2 وأن درجات الحرارة هي T_1 و T_2 على التوالي فإن الإشعاع من السطح A_2 الساقط على السطح A_1 هو $\sigma A_2 F_{21} T_2^4$. من هذا، فإن الجزء α_1 هو امتصاصية المساحة A_1 وإشعاع من السطح A_2 وسيمتص من A_1 . المتبقي سينعكس مرة أخرى إلى المحيط الأسود ويعاد امتصاصه بشكل تام من قبل A_2 . إن السطح A_1 يرسل الإشعاع بكمية مقدارها $\sigma A_1 \epsilon_1 T_1^4$ حيث ϵ_1 هي انبعاثية السطح. إن كل هذا الإشعاع سيمتص من قبل السطح A_2 ولا يعود قسم منه بانعكاس آخر. إن الانبعاثية ϵ_1 والامتصاصية α_1 ليسا متساويين لأن السطحين ليسا بنفس درجة الحرارة. إن صافي الفقد في الطاقة من قبل السطح A_1 لذلك سيكون:-

$$q_{12} = \sigma \epsilon_1 A_1 T_1^4 - \sigma A_2 F_{21} \alpha_1 T_2^4 \quad (35-6)$$

ولكن من المعادلة (6 - 24) فإن: $A_2 F_{21} = A_1$ وبعد حذف $A_2 F_{21}$ تصبح أعلاه على الصورة التالية:

$$q_{12} = \sigma A_1 (\epsilon_1 T_1^4 - \alpha_1 T_2^4) \quad (36-6)$$

وبصورة عامة في الأسطح الرمادية فإن المعادلات (6-21) و(6-22) يمكن أن نكتب بالشكل التالي:-

$$q_{12} = \sigma A_1 F_{12}'' (T_1^4 - T_2^4) = \sigma A_2 F_{21}'' (T_1^4 - T_2^4) \quad (37-6)$$

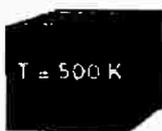
حيث أن F_{21}'' و F_{12}'' هي معاملات التبادل الداخلي الإجمالية أو الكلية وهي نوال لكل من ϵ_1 و ϵ_2 . إن قيمة σ هي $5.672 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{°K}^4$ بوحدة النظام العالمي أو $0.1713 \times 10^{-8} \text{ Btu / ft}^2 \cdot \text{hr} \cdot \text{°R}^4$ بوحدة النظام البريطاني. للمستويات المتوازية الكبيرة يمكن حساب المعاملات الإجمالية من المعادلات التالية:-

$$F_{12}'' = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} \quad (38-6)$$

ويمكن حساب الحرارة المنتقلة من المعادلة التالية:

$$q_{12} = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} \quad (39-6)$$

$$A = 50 \text{ m}^2$$



$$T = 500 \text{ K}$$

$$\epsilon = 0.8$$

$$H = \epsilon \sigma A T^4$$

$$T = 500 \text{ °K}$$

مثال 6-1: كم هي الطاقة المنتقلة بالإشعاع من الجسم الموضح في الشكل خلال 10 دقائق علماً أن ابعائية الجسم هي 0.8؟

$$t = (10)(60) = 600 \text{ seconds} \quad \text{الحل}$$

$$Q = \text{طاقة الإشعاع} = (H)(t)$$

$$H = \epsilon \sigma A T^4$$

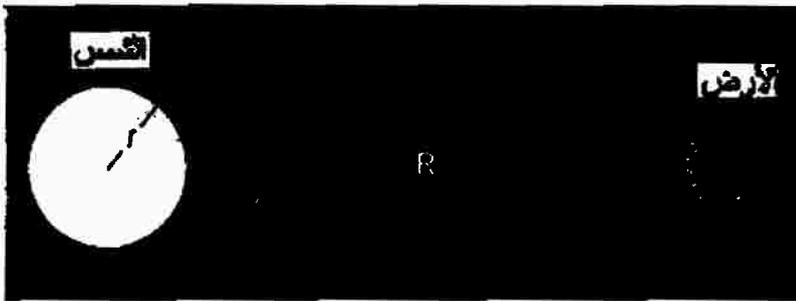
$$Q = (0.8)(5.67 \times 10^{-8})(50)(500)^4(600) = 8.5 \times 10^6 \text{ Joules}$$

مثال 6 - 2: صفيحتين سوداوين كبيرتين جداً عند درجتي حرارة 800°C و 300°C على التوالي وتتبادلان الحرارة بطريقة الإشعاع. أحسب معدل انتقال الحرارة بين الصفيحتين لوحدة المساحة.

الحل:

$$\frac{q}{A} = \sigma (T_1^4 - T_2^4) = (5.669 \times 10^{-8}) [(1073)^4 - (573)^4]$$

$$= 69.03 \text{ kW} / \text{m}^2$$



مثال 6 - 3: كم هي درجة حرارة الشمس؟ (أرض أن البعائية الشمس هي 1)

الحل: المسافة من الشمس إلى الأرض $R = 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$

مساحة الكرة ذات نصف القطر $R = 4\pi R^2$

حرارة الشمس $H = 1000 \times 4\pi R^2 = 2.83 \times 10^{26} \text{ J/s}$

نصف قطر الشمس $r = 6.9 \times 10^8 \text{ m}$

المساحة السطحية للشمس $A = 4\pi r^2 = 5.98 \times 10^{18} \text{ m}^2$

وبما أن حرارة الإشعاع $H = \sigma \epsilon T^4$

$5.672 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4 = \sigma$

$$T = \left[\frac{H}{\sigma \epsilon A} \right]^{\frac{1}{4}} = \left[\frac{2.83 \times 10^{26}}{(5.672 \times 10^{-8})(0.8)(5.98 \times 10^{18})} \right]^{\frac{1}{4}} = 5375^{\circ}\text{K}$$

مثال 6 - 4: أحسب صافي الحرارة المنتقلة بالإشعاع من جسم إنسان يقف بالخارج

ومساحته هي 1.5 m^2 وإشعاعيته 0.7 للحالتين التاليتين :-

(A) صباح أحد أيام شهر شباط (فبراير) حيث درجة حرارة الهواء 0°C .

(B) صباح أحد أيام شهر آب (أغسطس) حيث درجة حرارة الهواء 37°C .

الحل:

(A) درجة حرارة الجسم $= 37^{\circ}\text{C} = 310^{\circ}\text{K} = 273 + 37$

درجة حرارة الهواء = $0^\circ\text{C} = 273 + 0 = 273^\circ\text{K}$

صافي الحرارة المنتقلة بالإشعاع هو:-

$$Q_{net} = \epsilon \sigma A (T_1^4 - T_2^4) = (0.7)(5.67 \times 10^{-8})(310^4 - 273^4) \\ = 219 \text{ W}$$

(B) درجة حرارة الجسم = $37^\circ\text{C} = 310^\circ\text{K}$ = درجة حرارة الهواء.

صافي الحرارة المنتقلة بالإشعاع هو:-

$$Q_{net} = \epsilon \sigma A (T_1^4 - T_2^4) = (0.7)(5.67 \times 10^{-8})(310^4 - 310^4) \\ = 0$$

مثال 6 - 5: كم هي مقدار الحرارة التي تنبعث من جسم الإنسان بالإشعاع ؟



الحل :

درجة حرارة جسم الإنسان = $37^\circ\text{C} = 37 + 273 = 310^\circ\text{K}$

المساحة السطحية لجسم الإنسان = 1.5 m^2

البعثية جسم الإنسان = $\epsilon = 0.7$

ثابت ستيفان - بولتزمان = $5.672 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{K}^4$

إن الحرارة المنتقلة من جسم الإنسان بالإشعاع = $Q = \epsilon \sigma A T^4$

إن $Q = (0.70)(5.67 \times 10^{-8})(1.5 \text{ m}^2)(310)^4 = 550 \text{ watts}$

أو ما يعادل 5 مصابيح كهربائية

إن الشمس تجهز حوالي 1000 watts لكل متر مربع من سطح الأرض. حوالي 30 % يمكن من قبل جلد الإنسان وصافي الطاقة المستفيدة سيكون حوالي 700 watts للمتر المربع الواحد.

مثال 6 - 6: غرفة لتسخين رقائق الألمنيوم معالجة كبيرة مطلية بورنيش أسود

موضوعة على الجانبين. تعمل بواسطة امرار الرقائق بشكل عمودي بين صفائح حديدية عددها اثنان اثنان المسافة بينهما 150 mm. أحد الصفائح عند 300°C والآخر

معرض للجو وعند درجة حرارة 25°C .

(a) كم هي درجة حرارة الصفيحة المطلية ؟

(b) كم هي كمية الحرارة المنتقلة بين الجدران عند الوصول لحالة الاستقرار ؟

يمكن إهمال تأثيرات الحمل واعتبار أن انبعاثية الحديد هي 0.56 والرقائق 1.

الحل:

(a) افرض أن النقطة رقم 1 تشير إلى المستوي الساخن والنقطة رقم 2 تشير إلى الصفائح المطلية والنقطة رقم 3 تشير إلى المستوي البارد. وبما أن: $0.56 = \epsilon_3 = \epsilon_1$ و $1.0 = \epsilon_2$ ، $573^\circ \text{K} = T_1$ ، $298^\circ \text{K} = T_3$ ، من المعادلة (6 - 37) فإن:

$$q_{12} = \sigma A_1 F_{12}'' (T_1^4 - T_2^4)$$

$$q_{23} = \sigma A_2 F_{23}'' (T_2^4 - T_3^4)$$

وعند التوازن فإن : $q_{12} = q_{23}$ ومن المعادلة (6 - 38):

$$F_{12}'' = F_{23}'' = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{0.56} + \frac{1}{1.0} - 1} = 0.56$$

وبما أن: $A_2 = A_1$

$$\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 = \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_3}{100}\right)^4$$

إن المقدار المجهول في المعادلة أعلاه هو T_2 لذلك بالتعويض عن بقية القيم:

$$\left(\frac{573}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 = \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 - \left(\frac{298}{100}\right)^4$$

$$\therefore 5.73^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 = \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 - 2.98^4$$

$$\therefore T_2 = 490.4^\circ \text{K} = 217.4^\circ \text{C}$$

(b) من المعادلة (6 - 37) الفيض الحراري هو:

$$\begin{aligned}\frac{q_{12}}{A} &= (5.672 \times 10^{-8})(0.56)(5.73^4 - 4.904^4) \\ &= 1587 \frac{W}{m^2} (1006 \frac{Btu}{hr \cdot ft^2})\end{aligned}$$

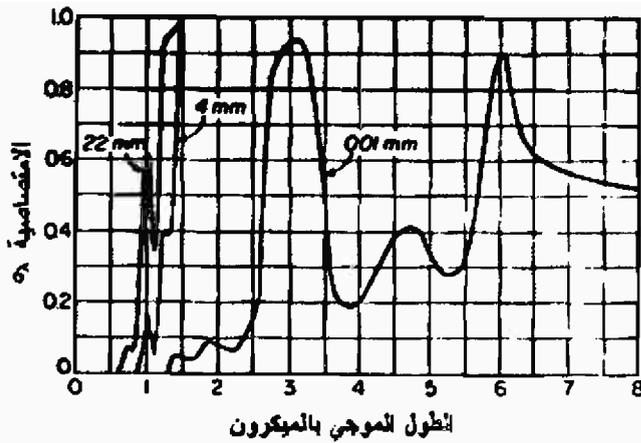
بالتنقيق:

$$\begin{aligned}\frac{q_{23}}{A} &= (5.672 \times 10^{-8})(0.56)(4.904^4 - 2.98^4) \\ &= 1587 \frac{W}{m^2} (1006 \frac{Btu}{hr \cdot ft^2})\end{aligned}$$

ملاحظة: إذا تم إزالة الصفائح المطلوبة فإن: $q_{13} = 3174 W / m^2$.

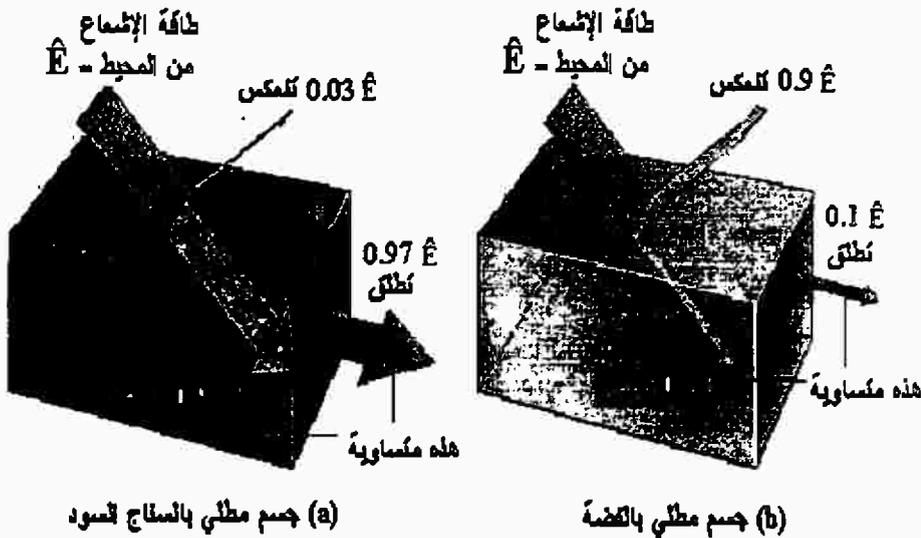
11.6 الإشعاع إلى طبقات سميكة من السوائل أو الغازات أو المواد الصلبة Radiation to Thick Layers of Liquids and Gases or Solids

في الطبقات السميكة المعتدلة تكون تقريباً جميع المواد الصلبة والسوائل مواد معتمة وتمتص كلياً الإشعاع الساقط عليها حتى المار من خلالها. على أية حال في الطبقات الرقيقة فإن معظم السوائل وبعض المواد الصلبة تمتص فقط جزء من الإشعاع المستحث وتقل الباقي اعتماداً على سمك الطبقة والطول الموجي للإشعاع. إن تغير الامتصاصية مع السمك والطول الموجي في الطبقات الرقيقة موضح في الشكل (6 - 9).



الشكل (6 - 9) التوزيع الخاص لامتصاصية طبقات الماء الرقيقة

والشكل (6 - 10) أنناه يبين مقارنة بين امتصاصية وانعكاسية وانبعائية بعض الأجسام المطلية بطبقات من طلاء أسود وفضة.



الشكل (6 - 10) الأجسام المطلية بطلاء أسود وفضة

إن الغازات أحادية الذرة والثنائية الذرة مثل الهيدروجين والأكسجين والهليوم والأرجون والنتروجين تعتبر ناقلة عملياً للأشعة الحمراء. معظم الجزيئات المعقدة متعددة الذرات ومن ضمنها بخار الماء وثنائي أكسيد الكربون والأبخرة العضوية تمتص الإشعاع بقوة خاصة الإشعاع ذو الأطوال الموجية الخاصة. جزء الإشعاع المستحث الممتص من قبل كمية معينة من غاز أو بخار يعتمد على طول مسار الأشعة وعلى عدد الجزيئات المواجهة للإشعاع خلال هذا المرور أي على كثافة الغاز أو البخار. وعلى هذا الأساس فإن امتصاصية أي غاز معين هي دالة قوية لضغطه الجزيئي ودالة ضعيفة لدرجة حرارته. إذا سخن غاز ماص للأشعة، فإنه سوف يبعث الإشعاع للوسط المحيط الأكثر برودة عند نفس الأطوال الموجية المفضلة لدى الامتصاص. إن انبعاثية الغاز هي أيضاً دالة لدرجة الحرارة والضغط وبسبب تأثير طول الممر فإن كل من الانبعاثية والامتصاصية للغازات تعرف اعتبارياً بدلالة علم هندسي خاص. نعتبر نصف كرة لغاز مشع ذات نصف قطر L مع عنصر أسود بسطح مستلم متغير هو dA_2 موضوع على قاعدة نصف الكرة عند مركزها. إن معدل الطاقة المنتقلة dq_{12} من الغاز إلى العنصر ذو المساحة المشار إليها هو:

$$\frac{d q_{12}}{d A_2} = \sigma T_G^4 \epsilon_G \quad (40 - 6)$$

حيث أن T_G = درجة حرارة الغاز المطلقة.

ϵ_G = انبعاثية الغاز.

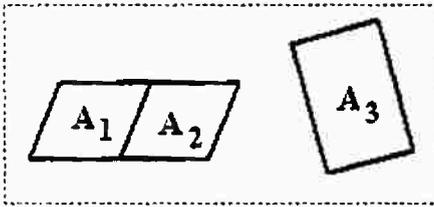
إن انبعاثية الغاز تعرف بأنها هي النسبة بين معدل الطاقة المنتقلة من الغاز إلى سطح العنصر إلى معدل الطاقة المنتقل من السطح الأسود لنصف الكرة ذو

نصف القطر L ودرجة الحرارة T_G والمساوي للمساحة السطحية للعنصر. الشكل (6 - 12) يبين تغير انبعاثية ثاني أكسيد الكربون مع نصف القطر L والضغط الجزئي للغاز \bar{P}_G . الشكل (6 - 11) يعطي معامل التصحيح C_c عند ضغوط كلية أخرى.

12.6 العلاقات بين معاملات الشكل الشعاعي

Relation between View Factors

الحالة الأولى:



الحرارة المنتقلة من المساحة رقم 3 إلى كل من المساحتين 1 و 2.

$$F_{3-1,2} = F_{31} + F_{32}$$

التبادل الحراري بين السطوح الثلاثة يكون بالشكل التالي:-

$$A_3 F_{3-1,2} = A_3 F_{31} + A_3 F_{32} \quad (41-6)$$

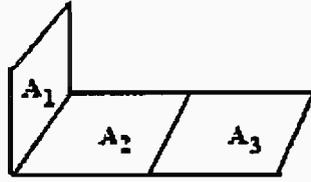
إن: $A_m F_{mn} = A_n F_{nm}$ أن:

$$A_3 F_{3-1,2} = A_{1,2} F_{1,2-3}$$

$$\therefore A_3 \cdot F_{31} = A_1 \cdot F_{13} \quad A_3 \cdot F_{32} = A_2 \cdot F_{23}$$

$$\therefore A_{1,2} F_{1,2-3} = A_1 F_{23} + A_2 F_{23} \quad (42-6)$$

الحالة الثانية:



$$F_{13} = ?$$

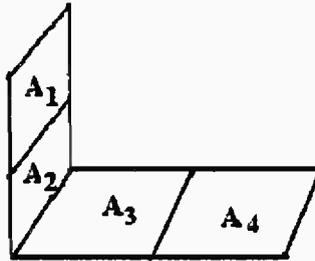
من الشكل

$$F_{1-2,3} = F_{12} + F_{13}$$

$$F_{13} \Rightarrow F_{11}^0 + F_{12} + F_{23} = 1.0$$

$$\therefore F_{12} + F_{13} = 1.0 \Rightarrow \therefore F_{13} = 1 - F_{12} \quad (43-6)$$

الحالة الثالثة:



$$F_{14} = ?$$

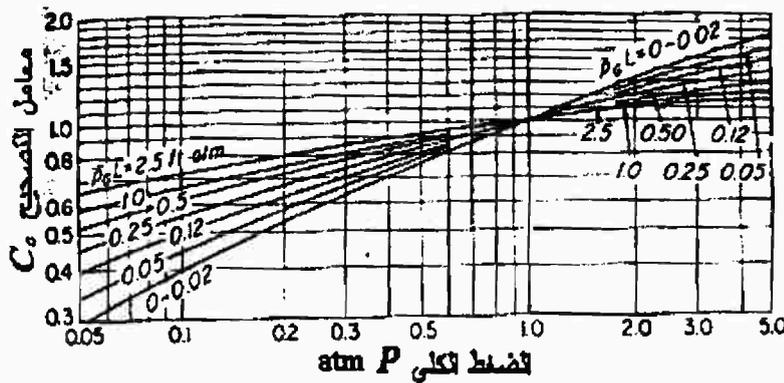
$$A_{1,2} F_{1,2-3,4} = A_1 F_{1-3,4} + A_2 F_{2-3,4} \quad \text{من الشكل}$$

$$A_1 F_{1-3,4} = A_1 F_{1,3} + A_1 F_{1,4}$$

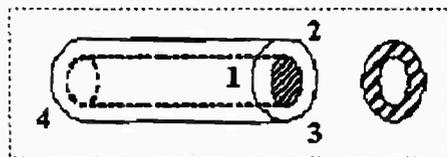
$$A_{1,2} F_{1,2-3} = A_1 F_{13} + A_2 F_{23} \quad \text{من الشكل} \quad (44-6)$$

مثال 6 - 7: أسطوانتين متحدتي المركز الأولى بقطر 10 cm والثانية بقطر هو 20 cm وكلاهما بطول 20 cm. أحسب معامل الشكل الإشعاعي بين النهايتين المفتوحتين لهذه المنظومة.

الحل:



الشكل (6 - 11) معامل التصحيح لانبعاثية CO₂ عند ضغوط أكبر من الضغط الجوي



$$\frac{L}{r_2} = \frac{20}{10} = 2, \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{5}{10} = 0.5$$

من الشكل (6 - 8) فإن $F_{32} = 0.33$ و $F_{21} = 0.43$ وبما أن:

$$A_1 F_{12} = A_2 F_{21} \quad \text{و} \quad F_{31} + F_{32} + F_{33} + F_{34} = 1$$

$$\therefore F_{13} = \frac{A_2}{A_1} F_{21} = \frac{\pi d_2 l}{\pi d_1 l} F_{21} = \frac{d_2}{d_1} F_{21} = \frac{20}{10} (0.43) = 0.86$$

من سطح الأسطوانة الداخلي: $F_{21} + F_{22} + F_{23} + F_{24} = 1$

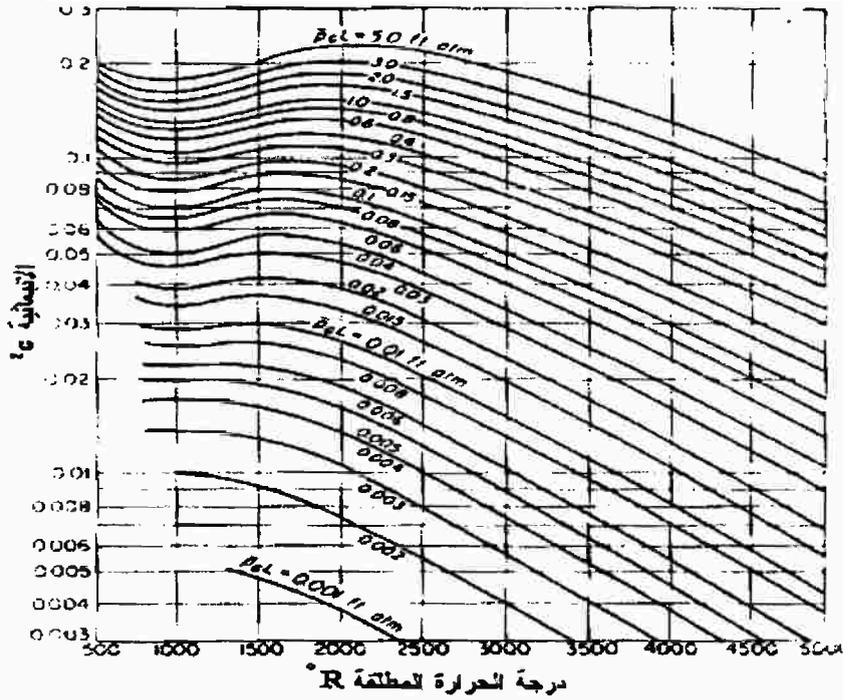
من تماثل الشكل الهندسي نستنتج أن: $F_{23} = F_{24}$ وهذا يعني أن:

$$F_{21} + F_{22} + 2 F_{24} = 1 \quad \text{أو} \quad F_{21} + F_{22} + 2 F_{23} = 1$$

$$\therefore F_{23} = \frac{1}{2} [1 - F_{21} - F_{22}] = \frac{1}{2} [1 - 0.43 - 0.33] = 0.12$$

وبما أن $A_2 F_{23} = A_3 F_{32}$ لذلك فإن:-

$$\therefore F_{32} = \frac{A_2}{A_3} F_{23} = \frac{(\pi/4)(20)^2 (0.12)}{(\pi/4)(10^2 - 5^2)} = 0.64$$



الشكل (6 - 12) انبعاثية ثاني أوكسيد الكربون عند ضغط جوي

حيث أن: $A_3 = (\pi/4)(r_2^2 - r_1^2)$

وبما أن: $F_{11} + F_{12} + F_{13} + F_{14} = 1.0$ وحيث أن $F_{11} = \text{صفر}$ نستنتج أن:-

$$F_{12} + F_{13} + F_{14} = 1.0$$

في السطح رقم 1 ومن تماثل الشكل الهندسي نستنتج أن: $F_{12} + 2F_{13} = 1.0$

$$\therefore F_{13} = F_{14} = \frac{1}{2}(1 - 0.86) = 0.07$$

وبما أن $A_1 F_{13} = A_3 F_{31}$ إذن يمكن حساب F_{31} كما يلي:-

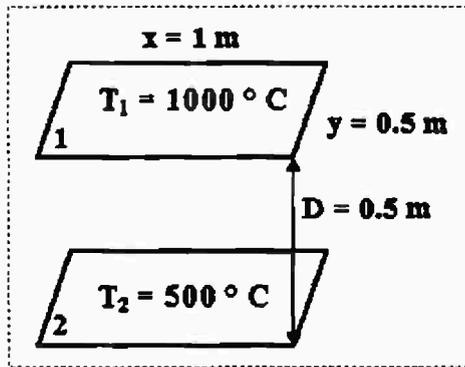
$$\therefore F_{31} = \frac{A_1}{A_3} F_{13} = \frac{\pi(10)(20)}{(\pi/4)(20^2 - 10^2)} = 0.187$$

وللسطح رقم 4 فإن $F_{31} + F_{32} + F_{33} + F_{34} = 1.0$ وبما أن $F_{33} = \text{صفر}$

$$\therefore F_{34} = 1 - 0.64 - 0.187 = 0.173$$

مثال 6 - 8: سطحين أسودين مستويين متوازيين طول كل منهما 1 m وعرض كل منهما 0.5 m فإذا علمت أن أحد السطحين كان بدرجة حرارة 1000 °C والآخر بدرجة حرارة 500 °C، أحسب صافي التبادل الحراري بين السطحين.

الحل: لحساب صافي التبادل الحراري نحتاج لحساب معامل الشكل الإشعاعي



F_{12}

$$\frac{y}{D} = \frac{0.5}{0.5} = 1.0$$

$$\frac{x}{D} = \frac{1.0}{0.5} = 2.0$$

$$\therefore F_{12} = 0.85$$

$$\begin{aligned} \therefore q_{12} &= A_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) \\ &= (0.5 \times 1.0) (5.672 \times 10^{-8}) (0.85) (1273^4 - 773^4) \\ &= 54,698 \text{ W} \approx 54.7 \text{ kW} \end{aligned}$$

13.6 انتقال الحرارة المشترك بالطرق الثلاثة: التوصيل - الحمل والإشعاع

Combined Heat Transfer by Conduction-Convection & Radiation

إن الفقد الكلي في الحرارة من جسم ساخن إلى الوسط المحيط غالباً ما يتضمن الميكانيكيات الثلاثة وهي التوصيل والحمل والإشعاع. كمثال خط أنبوب ساخن في غرفة يفقد حرارة بشكل متكافئ بالتوصيل والحمل والإشعاع وبفرض أن الوسط المحيط أسود لذلك يحسب الفقد الحراري الكلي من المعادلة التالية:-

$$\frac{q_T}{A} = \frac{q_c}{A} + \frac{q_r}{A} = h_c (T_w - T) + \sigma \epsilon_w (T_w^4 - T^4)$$

(45 - 6)

q_T/A هو الفقد الكلي الحراري و q_c الحرارة المنتقلة بالحمل q_r حرارة الإشعاع أما ϵ_w فهو انبعاثية السطح و T_w درجة حرارة السطح أما T فهي درجة حرارة الوسط المحيط. إن المعادلة (6 - 45) يمكن كتابتها في بعض الأحيان كما يلي:-

$$\frac{q_T}{A} = (h_c + h_r)(T_w - T) \quad (46 - 6)$$

حيث أن معامل انتقال الحرارة بطريقة الإشعاع ويمكن تعريفه بالشكل التالي:-

$$h_r \equiv \frac{q_r}{A(T_w - T)} \quad (47 - 6)$$

هذا المعامل يعتمد بشكل كبير على القيمة المطلقة لـ T_w وإلى حد ما على الفرق بدرجة الحرارة $T_w - T$. على أية حال ، عندما يكون الفرق بدرجة الحرارة صغيراً فإن قيمة h_r يمكن تقديرها من معادلة بسيطة باستخدام فقط درجة حرارة واحدة. بفتح الأس الرابع من الطرف الأيمن في المعادلة (6 - 45) يعطي:-

$$\frac{q_r}{A} = \sigma \epsilon_w (T_w^4 - T^4) = \sigma \epsilon_w (T_w^2 + T^2)(T_w + T)(T_w - T) \quad (48 - 6)$$

إذا كان المقدار $(T_w - T)$ صغيراً يمكن لـ T_w أن تحل محل T لتعطي:-

$$\frac{q_r}{A} \approx \sigma \epsilon_w (2T_w^2)(2T_w)(T_w - T) = \sigma \epsilon_w (4T_w^3)(T_w - T) \quad (49 - 6)$$

$$h_r \approx 4 \sigma \epsilon_w T_w^3 \quad (50 - 6) \text{ ومنها نستنتج أن:}$$

14.6 تمارين في الباب السادس

س1: جدارين كبيرين جداً متقابلين درجات حرارتهما ثابتة حيث أن درجة حرارة الجدار الأول $1000^{\circ}F$ والآخر عند درجة حرارة $800^{\circ}F$.

(a) بافتراض أن الجدارين هما أجسام سوداء، كم هي كمية التبادل الحراري

بينهما علماً أن ثابت ستيفان - بولتزمان هو: $0.173 \frac{Btu}{hr \cdot ft^2 \cdot R^4}$ ؟

(b) إذا كانت انبعاثية الجدار الأول هي 0.8 والجدار الثاني 0.6 كم ستكون كمية التبادل الحراري بينهما ؟

س2: أحسب صافي انتقال الحرارة بالإشعاع بين سطحين هما A و B بدلالة أـ

W/m^2 من المساحة B إذا كانت درجات حرارة السطحين A و B هي $500^{\circ}C$ و $200^{\circ}C$ على التوالي وكانت انبعاثيات A و B هي 0.9 و 0.25 على التوالي علماً أن كلا السطحين هو رمادي وفقاً للحالات التالية:

(a) كل من السطحين A و B مستويان منتهية متوازية البعد بينهما 3 m.
(b) السطح A غلاف كروي الشكل قطره 3m والسطح B كروي متحد المركز مع A وقطره 0.3 m.

(c) السطحين A و B مربعان متوازيان مستوية أبعادهما 2 m x 2 m وأحدهما فوق الآخر بمسافة 2 m.

(d) السطحين A و B هي أنابيب أسطوانية متحدة المركز بأقطار 300 mm و 275 mm على التوالي.

(e) السطح A هو مستوي غير منتهي والسطح B صف أنابيب منتهي قطر أنبويه الخارجي 100 mm والمسافة بين مراكز الأنايب 200 mm.

(f) نفس ما ذكر في أعلاه ما عدا أن هناك سطح آخر فوق الأنابيب متحدة المركز منتهي له انبعاثية مقدارها 0.9 ولا يقوم بنقل الطاقة المستحثة فوقه علماً أن المسافة بينه وبين الأنابيب هي 200 mm.

س3:سقف مستوي أسود لبناية ذو انبعاثية مقدارها 0.9 وامتصاصية 0.8 للإشعاع الشمسي. إن الشمس تبعث الحرارة بشدة تبلغ $300 \text{ Btu/ft}^2 \cdot \text{hr}$. إذا كانت درجة حرارة الهواء والوسط المحيط هي 68°F وإذا أهملت سرعة الرياح ولم تخرق الحرارة السقف، كم هي درجة الحرارة النهائية للسقف علماً أن معدل انتقال الحرارة بطريقتي الحمل والإشعاع يتم الحصول عليه باستعمال المعادلة $\frac{q}{A} = 0.38(\Delta T)^{1.25}$ حيث أن ΔT هو فرق درجة الحرارة بين السقف والهواء بدلالة $^\circ \text{F}$.

(b) إذا تم طلاء السقف بطبقة من الألمنيوم انبعاثيته 0.9 وقابلية امتصاص للإشعاع الشمسي 0.5، كم ستكون درجة حرارة السقف المطلي ؟
(c) كم هي الحرارة المفقودة بالإشعاع من السقف للحالتين أعلاه ؟
س4: أنبوب حديدي قطره الداخلي 3.068 in. والخارجي 3.5 in. يحمل بخار ماء عند ضغط مقداره 7 atm وطوله 70 m والخط غير معزول. درجة حرارة الهواء المحيط هي 25°C وانبعاثية جدار الأنبوب 0.70 فإذا كانت الحرارة الكامنة للبخار 1190.8 Btu / Ib ، كم هي كمية البخار المتكثف لكل ساعة ؟
وكم هي نسبة الحرارة المفقودة نتيجة الحمل والإشعاع ؟

س5: تم تركيب نظام تسخين يعمل بواسطة ميكانيكية الإشعاع لسقف لاصق لغرفة طولها 18 m وعرضها 18 m وارتفاعها 18 m. تم المحافظة على درجة حرارة أرضية الغرفة عند 65°C . بفرض عدم وجود جريان حراري خلال الجدار المغطى بطبقة من معدن عاكس وباقتراض أن درجة حرارة الهواء المار خلال الغرفة يبقى ثابتاً عند درجة حرارة 65°C وإذا كانت الحرارة المجهزة إلى أرضية الغرفة هي 3500 Btu / hr ، أحسب درجة حرارة سطح السقف. كم هو مقدار الحرارة المنتقلة للهواء بوحدات Btu / hr ؟ اشعاعية اللاصق هي 0.93 وامتصاصية الخرسانة هي 0.63 علماً بأن قيمة معامل انتقال

الحرارة بين كل من السقف والهواء المحيط يمكن تعطى بالمعادلة التالية:
$$h_c = 0.20(\Delta T)^{1/4} \text{ Btu} / \text{ft}^2 \cdot \text{hr} \cdot ^\circ\text{F}$$

س6: في إحدى الليالي الصافية، كانت درجة حرارة جسم أسود فعال في الفضاء حوالي 70°C - وكانت درجة حرارة الهواء 15°C ويحتوي على نسبة من بخار الماء عند ضغط جزئي مساوي للضغط الجزئي للجليد أو الماء السائل عند درجة حرارة 0°C . وقد تم وضع طبقة رقيقة جداً من الماء درجة حرارة 15°C في حوض مسطح قليل العمق معزول بشكل جيد في نقطة محمية من الرياح وموجهة كلياً نحو السماء. فإذا كان معامل انتقال الحرارة بالحمل يساوي $h_c = 2.6 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$ ، بيّن هل ستكون الجليد أم لا وأدعم استنتاجك بالحسابات المناسبة.

س7: يترك هواء مبادل حراري عند حوالي 35°C وضغط 1.5 atm . إن درجة الحرارة تقاس باستخدام مزوج حراري داخلي قطره الداخلي 0.622 in. والخارجي 0.84 in. موضوع بصورة طبيعية في اتجاه جريان الهواء. إذا كانت سرعة الغاز 25 ft/sec وكانت درجة حرارة الأنبوب 270°C كم هي نسبة الخطأ في قياس قراءة المزوج الحراري لدرجة الحرارة التي سببها الإشعاع؟ (أهمل انتقال الحرارة بالتوصيل عبر محور المزوج الحراري).

س8: في منزل غير معزول توجد فجوة هوائية عرضها 90 mm بين الجدار اللاصق والجدران الخارجية الخشبية. إذا كانت درجة حرارة الجدار الداخلي هي 18°C والجدار الخارجي 9°C -، كم هي الحرارة المفقودة عن طريق الإشعاع والحمل الطبيعي بأل W/m^2 ؟ وإذا تم تغطية الجدار الداخلي برقائق من مادة الألمنيوم كم هي نسبة التقليل في الفقد الحراري؟ وهل يكون من الأفضل وضع الرقائق في منتصف المسافة بين الجدارين؟ أعتبر معامل انتقال الحرارة بالحمل الطبيعي للسطوح العمودية $3.9 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$.

س9: ماء يغلي عند ضغط 1 atm يمر خارج أنبوب مصنوع من الحديد المقاوم تبلغ درجة حرارة سطحه 410°F . إن معامل انتقال الحرارة h بغياب الإشعاع هو $32 \text{ Btu} / \text{hr.ft}^2.^{\circ}\text{F}$. فإذا كانت اشعاعية الحديد المقاوم 0.8، هل سيعمل الإشعاع على زيادة الغليان بشكل واضح؟ (وهو أكثر من 5%) أفرض أن طبقة البخار هي ناقلة للإشعاع وأن السائل المغلي هو معتم.

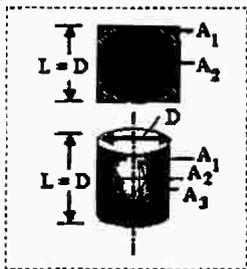
س10: أنبوب حديدي قطره الداخلي 2.067 in. يحمل بخار ماء عند درجة حرارة 325°F خلال غرفة درجة حرارتها 70°F فإذا كانت انبعاثية الحديد هي 0.736 كم هو مقدار التناقص في حرارة الإشعاع إذا تمت تغطية الأنبوب الحديدي غير المعزول بطلاء من الألمنيوم انبعاثيته 0.04؟

س11: قمع مقطوع ناقص قطره سطحه العلوي 10 cm وقطر قاعدته 20 cm وارتفاعه 10 cm. أحسب معامل الشكل الإشعاعي بين السطح العلوي والجدار الداخلي للقمع كذلك أحسب معامل الشكل الإشعاعي للجدار الداخلي نفسه علماً أن المساحة السطحية للقمع تحسب من المعادلة التالية:

$$A = \pi (r_1 + r_2) [(r_1 - r_2)^2 + L^2]^{1/2}$$

س12: أحسب الفقدان الحراري بطريقة الإشعاع من أنبوب حديدي قطره الداخلي 2.067 in. يحمل بخار ماء عند درجة حرارة 300°F ويمر خلال مركز صفيحة على شكل قناة حديدية مجلفنة أبعادها $1 \times 1 \text{ ft}^2$ درجة حرارتها 70°F لكل وحدة طول من الأنبوب علماً أن اشعاعية الحديد المجلفن 0.79 وأن القناة مطلية من الخارج بطبقة من الخارصين المؤكسد اشعاعيتها 0.276.

س13: أحسب معاملات الشكل الإشعاعي F_{21} و F_{12} للأشكال الهندسية التالية:



1 - كرة قطرها D موضوعة داخل مكعب طول ضلعه يساوي قطر الكرة أي $L = D$.

2- نهاية وجانب أنبوب دائري طوله يساوي قطره أي $L = D$.