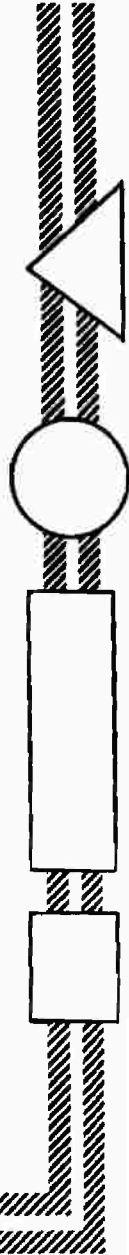


الباب الأول

الجبر



المجموعات

تعريف:

المجموعة هي تجمع من الأشياء أو العناصر المعروفة والمحددة تحديدا تاما.

أمثلة للتجمعات التي تمثل مجموعة فهي:

- 1- أعضاء هيئة التدريس الذين يدرسون بالمعهد حاليا.
 - 2- المواد الدراسية التي تدرس بالمعهد.
 - 3- أيام الأسبوع.
 - 4- شهور السنة الميلادية.
- وغيرها.

أما التجمعات التي لا تمثل مجموعة فهي:

- 1- أعضاء هيئة التدريس بالمعهد في العام القادم.
 - 2- الصفات التي تحدد الأخلاق الحميدة.
- وغيرها.

طرق كتابة المجموعات:

يتم كتابة المجموعة بين قوسين بهذا الشكل { }، وذلك بإحدى الطريقتين:

- 1- طريقة السرد أو الحصر (القائمة).
 - 2- طريقة الصفة المميزة (الأسلوب الرمزي).
- وقد أستخدم على استخدام الأحرف الكبيرة للتعبير عن المجموعات.

مثال 1:

أكتب بطريقة السرد (القائمة) والصفة المميزة (الأسلوب الرمزي):

1- أيام الأسبوع.

2- الحروف الأبجدية لكلمة معهد.

الحل:

طريقة السرد (القائمة):

1- س = { السبت والأحد والاثنين و..... ، الجمعة }

2- ص = { م و ع ، هـ ، د }

طريقة الصفة المميزة (الأسلوب الرمزي):

1- س = { س : س يوم من أيام الأسبوع }

2- ص = { ص : ص حرف من الحروف الأبجدية لكلمة معهد }

حيث س تعبر عن مجموعة أيام الأسبوع.

، ص تعبر ن الحروف الأبجدية لكلمة معهد.

: أو / بمعنى حيث أن.

ملاحظات هامة:

1 عنصر المجموعة لا يتكرر.

2- يمكن تغيير ترتيب عناصر المجموعة.

مثال 2:

عبر بطريقة السرد (القائمة) عن الأرقام المكونة للعدد 2, 3, 7.5, 2, 4, 3

الحل:

س = { 7, 5, 2, 4, 3 }

مثال 3:

عبر بطريقة الصفة المميزة (الأسلوب الرمزي) عن المجموعة:

$$S = \{ 1, 2, 3, \dots, 19 \}$$

الحل :

$$S = \{ s : s \text{ عدد صحيح موجب أقل من } 20 \}$$

أنواع المجموعات:

1- المجموعة المحددة:

هي المجموعة التي عدد عناصرها محدد مثل أيام الأسبوع.... إلخ.

2- المجموعة الغير محددة:

هي المجموعة التي عدد عناصرها غير منتهية مثل:

(أ) مجموعة الأعداد الزوجية.

(ب) مجموعة الأعداد الفردية.

3- المجموعة الجزئية:

يقال أن المجموعة X جزء من المجموعة Y عندما تكون جميع عناصر

المجموع X من ضمن عناصر المجموعة Y.

4- المجموعة الشاملة:

ويرمز لها عادة بالرمز Ω وهي المجموعة التي لا تحتوى على عدد ما من

المجموعات الجزئية.

5- المجموعة الخالية:

ويرمز لها عادة بالرمز ϕ وهي المجموعة التي لا تحتوى على أية عناصر

مثل:

- (أ) مجموعة الطلاب التي تزيد أعمارهم عن مائة عام.
 - (ب) مجموعة الأعداد الصحيحة المحصورة بين 1, 2.
 - (ج) مجموعة الطلاب التي تزيد أطوالهم عن سبعة أمتار.
- وغيرها.

المجموعات المتساوية:

تساوي مجموعتان إذا كان عدد عناصرهما متساو لهما نفس العناصر

كالآتي:

$$X = \{ 2, 4, 6, 8 \}$$

$$Y = \{ 8, 6, 2, 4 \}$$

$$X = Y$$

مثال 4:

أوجد قيمة m إذا كانت $Y = X$ حيث :

$$X = \{ 1, 3, 5, 7 \}$$

$$Y = \{ 1, 3, 7, m \}$$

الحل:

بمقارنة عناصر المجموعتين نستنتج أن :

$$m = 5$$

المجموعات المتكافئة:

تتكاافاً المجموعتان إذا كان عدد عناصرهما متساو مثل:

$$X = \{ m, n, s \}$$

$$Y = \{ 2, 5, 3 \}$$

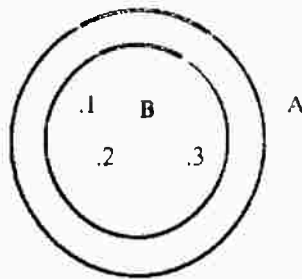
$$\therefore X \equiv Y$$

تمثيل المجموعة :

تمثل المجموعة غالباً بأشكال هندسية تسمى أشكال فن حيث تمثل المنطقة

داخل الشكل بعناصر المجموعة شكل (1) حيث المجموعة A تحتوي المجموعة B

المجموعة B تشمل العناصر 1, 2, 3 بمعنى أن العنصر 1 ينتمى إلى B, وكذلك 2, 3.



شكل (١)

العلاقة بين عنصر ومجموعة:

تكون العلاقة بين عنصر ومجموعة إما إنتماء للمجموعة أو عدم إنتماء لها

ويرمز للإتماء بالرمز $\in$ وعدم الإتماء بالرمز $\notin$ ويوضحها المثال الآتي:

مثال 5:

إذا كان

$$X = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

$$Y = \{ 2, 3, 5 \}$$

فيقال أن العنصر 4 ينتمي للمجموعة X وتكتب هكذا:

$$4 \in X$$

ويقال أن العنصر 5 لا ينتمي للمجموعة X وتكتب هكذا:

$$5 \notin X$$

العلاقة بين مجموعة وأخرى:

تكون العلاقة بين أي مجموعة وأخرى إما أن تكون جزء منها أو ليست جزء.

منها، ويرمز للجزء من بالرمز $\subset$ وليست جزء من بالرمز $\not\subset$ ويوضحها المثال الآتي:

مثال 6:

إذا كان :

$$X = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

$$Y = \{ 2, 3, 5 \}$$

$$Z = \{ 1, 2 \}$$

يقال أن المجموعة Z جزء من المجموعة X وتكتب هكذا:

$$Z \subset X$$

ويقال أن المجموعة Y ليست جزء من المجموعة X وتكتب هكذا:

$$Y \not\subset X$$

ويقال أيضا أن المجموعة X تحتوى المجموعة Z وأن المجموعة X لا تحتوى المجموعة Y وذلك فى حالة قراءة الرمز من الجبة اليمنى.

العمليات التى تتم بين المجموعات:

1- اتحاد مجموعتين:

ينتج مجموعة جديدة من الاتحاد عناصرها هى مجموع عناصر المجموعتين بدون تكرار للعناصر المتكررة. ويرمز بعملية الاتحاد بالرمز U .

مثال 7:

إذا كان :

$$X = \{ 1, 3, 5 \}$$

$$Y = \{ 5, 7, 9 \}$$

أوجد XUY

الحل :

$$XUY = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$$

قواعد خاصة بالاتحاد :

$$1- X \subset (XUY)$$

$$2- \overline{Y \subset (XUY)}$$

$$3- XUX = X$$

$$4- XU\phi = X$$

$$5- X \subset Y$$

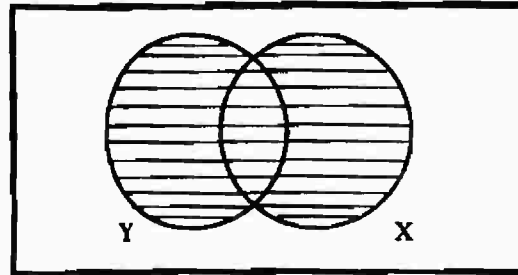
إذا كان X جزء من Y أي أن

$$\therefore XUY = Y$$

6- $XUY = YUX$

7- $XU (YUZ) = (XUY) UZ$

ملحوظة: تظلل منطقة الاتحاد وتمثل كما بشكل 2.

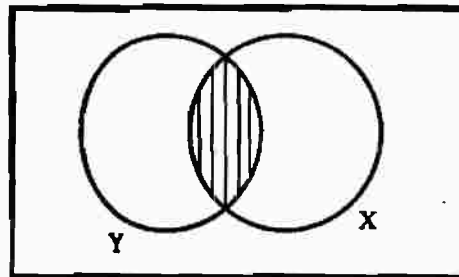


شكل (2)

XUY

II- تقاطع مجموعتين:

ينتج مجموعة جديدة من التقاطع، عناصرها هي العناصر المشتركة في المجموعتين. ويرمز لعملية التقاطع بالرمز $\cap$ ويمكن تمثيلها كما بشكل 3 حيث تظلل منطقة التقاطع.



شكل (3)

$X \cap Y$

مثال 8 :

إذا كان :

$$X = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

$$Y = \{ 2, 3, 5, 10 \}$$

أوجد : $X \cap Y$

الحل:

$$X \cap Y = \{ 2, 3 \}$$

قواعد خاصة بالتقاطع:

1- $X \cap Y \subset X$

2- $X \cap Y \subset Y$

3-

إذا كانت $X = Y$ فإن :

$$X \cap Y = X \text{ أو } Y$$

4-

إذا كانت $X \subset Y$ فإن :

$$X \cap Y = X$$

مثال 9 :

إذا كان :

$$X = \{ 2, 6 \}$$

$$Y = \{ 2, 4, 6 \}$$

أوجد : $X \cap Y$

الحل:

$$X \cap Y = \{ 2, 6 \} = X$$

5- إذا كان :

$$X \cap Y = \phi$$

فإن المجموعة X منفصلة عن المجموعة Y

$$6- X \cap Y = Y \cap X$$

مثال 10 :

إذا كان :

$$X = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

$$Y = \{ 2, 3, 5, 10 \}$$

أوجد $Y \cap X$, $X \cap Y$

الحل :

$$X \cap Y = \{ 2, 3 \}$$

$$Y \cap X = \{ 2, 3 \}$$

$$\therefore X \cap Y = Y \cap X$$

$$7- X \cap Y \subset X \cup Y$$

حيث نجد في المثال السابق أن:

$$X \cup Y = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 10 \}$$

$$\therefore X \cap Y \subset X \cup Y$$

$$8- X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

في هذه القاعدة توزع عملية التقاطع على الاتحاد

$$9- X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$$

في هذه القاعدة توزع عملية الاتحاد على التقاطع.

ملحوظة: يترك للطالب إثبات هذه القواعد حيث يمثل مجموعات Z, Y, X ويفرض لها عدة عناصر لإثبات المطلوب.

المجموعة المكملية :

إذا كانت المجموعة الشاملة هي μ وكانت X مجموعة جزئية من μ ، فإن المجموعة المكملية لـ X ويرمز لها بالرمز X^c تعرف كالآتي:

$$X^c = \{ x : x \notin X, x \in \mu \}$$

مثال 11:

إذا كان :

$$\mu = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$$

$$X = \{ 1, 5, 9 \}$$

أوجد المجموعة المكملية لـ X أو X^c .

الحل:

$$X^c = \{ 1, 5, 9 \}$$

قواعد خاصة للمجموعة المكملية :

إذا كانت μ هي المجموعة الشاملة وكانت X مجموعة جزئية منها. فإننا نلاحظ القواعد الآتية:

$$1- (X^c)^c = X$$

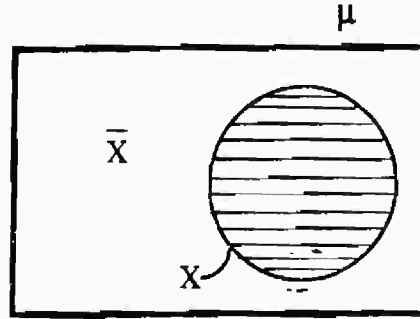
$$2- X \cap X^c = \phi$$

$$3- \mu^c = \phi$$

$$4- X \cup X^c = \mu$$

ملحوظة:

يعبر الرمز c (المتواجد فوق رمز المجموعة) عن المكمل وأحيانا يوضع بدله شرطه لتصبح $\bar{X}$ رمزاً للمجموعة المكملة لـ X ، وتمثل كما بشكل (4)



شكل (4)

يبين الشكل :

المجموعة X

المجموعة المكمل $X^c = \bar{X}$

المجموعة الشاملة μ

فرق بين مجموعتين:

يعرف فرق بين مجموعتين A , B في حالتين على النحو الآتي:

$$1- A - B = \{a : a \in A, a \notin B\}$$

الفرق في هذه الحالة يكون جميع العناصر الموجودة في المجموعة A وغير

موجودة في المجموعة B .

$$2- B - A = \{b : b \in B, b \notin A\}$$

أما الفرق في هذه الحالة فيكون جميع العناصر الموجودة في المجموعة B

وغير موجودة في المجموعة A.

مثال 12 :

إذا كان :

$$A = \{ 1, 3, 5, 9 \}$$

$$B = \{ 2, 5, 7, 9 \}$$

أوجد :

$$1- A - B$$

$$2- B - A$$

الحل :

$$A - B = \{ 1, 3 \}$$

$$B - A = \{ 2, 7 \}$$

قواعد خاصة بالفرق بين مجموعتين :

$$1- A - B \neq B - A$$

$$2- A - B \cap B - A = \phi$$

$$3- \text{إذا كانت المجموعة } A \text{ جزء من المجموعة } B$$

$$\therefore A - B = \phi$$

مثال 13 :

إذا كانت μ هي المجموعة الشاملة، A، B مجموعات جزئية منها بحيث

أن:-

$$\mu = \{ 1, 2, 3, \dots, 9, 10 \}$$

$$A = \{ 1, 3, 4, 5, 8 \}$$

$$B = \{ 2, 4, 6, 8, 9 \}$$

أوجد :

$$A \cap B, A \cup B, B^c, A^c$$

$$(A \cap B)^c, (A \cup B)^c, A^c \cap B^c, A^c \cup B^c$$

الحل:

$$A^c = \{2, 6, 7, 9, 10\}$$

$$B^c = \{1, 3, 5, 7, 10\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$$

$$A \cap B = \{4, 8\}$$

$$(A \cup B)^c = \{7, 10\}$$

$$A^c \cup B^c = \{2, 6, 7, 9, 10, 1, 3, 5\}$$

$$A^c \cap B^c = \{7, 10\}$$

$$(A \cap B)^c = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10\}$$

من هذا المثال نلاحظ الآتي:

$$1- (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$2- (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

وهو ما يعرف بقانوني مورجان.

ضرب مجموعتين:

أولاً: إذا كانت :

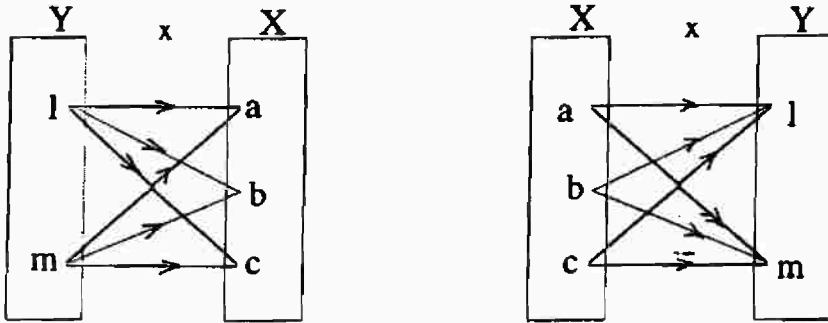
$$X = \{a, b, c\}$$

$$Y = \{l, m\}$$

$$\therefore X \times Y = \{(a, l), (a, m), (b, l), (b, m), (c, l), (c, m),\}$$

$$, Y \times X = \{(l, a), (l, b), (l, c), (m, a), (m, b), (m, c)\}$$

يعرف الضرب السابق بالضرب الكارتيبي ويمكن تمثيله بالاسهم بشكل 5.



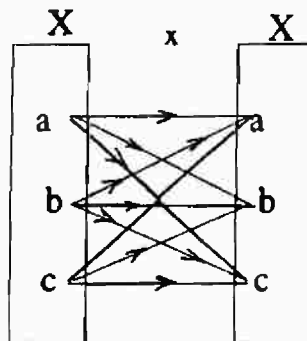
شكل (5)

ثانياً: إذا كانت :

$$X = \{a, b, c\}$$

$$\therefore X \times X = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$$

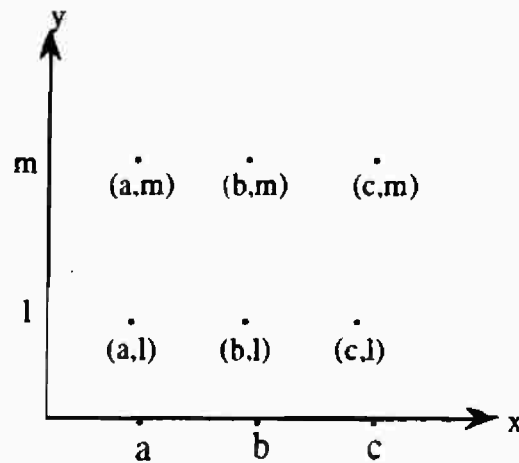
ويمكن تمثيل حاصل الضرب الكارتيبي بالاسهم كما بشكل 6



شكل (6)

تمثيل الضرب الكارتيزي بيانيا:

يمكن تمثيل الضرب الكارتيزي بيانيا حيث عناصر المجموعة X تمثل على المحور x وعناصر المجموعة Y تمثل على المحور y كما بالشكل 7



شكل 7 يبين حاصل الضرب $X \times Y$

حيث :

$$X = \{a, b, c\}$$

$$Y = \{l, m\}$$

ملحوظة هامة :

حاصل الضرب يعتبر مجموعة من الأزواج المرتبة حيث :

$$X \times Y \neq Y \times X$$

مثال 14:

إذا كان :

$$A = \{ 1, 3 \}$$

$$B = \{ x, y, z \}$$

أوجد :

a- $A \times B$ b- $B \times A$

الحل :

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (1, z), (3, x), (3, y), (3, z)\}$$

$$B \times A = \{(x, 1), (x, 3), (y, 1), (y, 3), (z, 1), (z, 3)\}$$

تمارين (1)

1- ما هي المجموعة الشاملة لكل مما يأتي:

- a- $A = \{3, 7, 11, 19\}$
- b- $B = \{\text{فرنسا , ألمانيا , إنجلترا , إيطاليا}\}$
- c- $C = \{\text{سرت , بنى غازى , طرابلس}\}$
- d- $D = \{\text{السويس والقليوبية , الاسكندرية , القاهرة}\}$

2- إذا كانت μ هي مجموعة الأعداد الطبيعية فما هي المجموعة المكملّة

للمجموعة A حيث :

$$A = \{1, 3, 5, \dots\}$$

3- اكتب مجموعة الأعداد الطبيعية A حيث:

$$A = \{x : x \text{ مجموعة الأعداد التي تقبل القسمة على } 5\}$$

بطريقة القائمة.

4 - بيّن أي من العلاقات الآتية صحيحة وأي منها خطأ:

$$a- D \in A$$

$$b- 1 \subset A$$

$$c- \{1\} \subset A$$

$$d- \{1\} \in A$$

$$e- 5 \in A$$

$$f- 2 \in A$$

حيث:

$$A = \{1, 3, 5, 7\}$$

$$B = \{3, 5\}$$

$$C = \{2\}$$

$$D = \{5, 7, 9\}$$

5- إذا كانت :

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$C = \{2, 3, 4, 5\}$$

$$D = \{3, 4\}$$

ضع الرمز المناسب (المناسب) $\in, \subseteq, \subset, \supset, \ni$ في كل مما يأتي:

a) $3 \dots A$

b) $2 \dots D$

c) $C \dots D$

d) $C \dots B$

e) $\phi \dots A$

f) $A \cap B \dots C$

6- إذا كانت μ هي المجموعة الشاملة حيث :

$$\mu = \{x : 0 < x < 10\}$$

$$P, K, F \subset \mu$$

$$P = \{x : 1 < x < 4\}$$

$$K = \{1, 3, 5\}$$

$$F = \{2, 4, 6\}$$

أوجد الآتي:

a) $P \cup K$

b) $P \cap K$

c) P^c

d) $P - K$

e) $K - P$

f) $P \cap (K \cup F)$

g) $(P \cup K) \cap F$

h) $(P \cup F) \cap (K \cup F)$

7- إذا كانت μ هي المجموعة الشاملة حيث :

$$\mu = \{-10, -9, -8, \dots, \dots, 9, 10\}$$

وكان $A \geq -4$, $B > -8$, $C \leq 8$ مجموعات جزئية من μ فأوجد:

$$A^c, (A \cup B)^c, A \cap B, A \cap C$$

8- إذا كانت μ تمثل المجموعة الشاملة حيث:

$$\mu = \{x : -2 < x \leq 8\}, A, B, C, \subseteq \mu$$

$$A = \{1, 3, 5, 7\}$$

$$B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$C = \{0\}$$

أ- حدد عناصر المجموعة الشاملة μ

ب- أوجد كل من :

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $A - C$

d) $(A \cap C)^c$

9- إذا كانت :

$$X = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$Y = \{4, 8, 12, 16\}$$

$$Z = \{12, 18, 14\}$$

أوجد حاصل ضرب الآتي:

a) $X \times Y$

b) $X \times Z$

c) $Z \times Z$

d) $(X - Y) \times Z$

e) $(X \cap Y) \times Z$

10- إذا كانت :

$$X = \{1, 2, 3, 4\}$$

ارسم الشبكة البيانية ($X \times X$) وأوجد عليها الآتى:

- (a) L : مجموعة أزواج مرتبة مجموع عنصرها أقل من 6.
- (b) M : مجموعة أزواج مرتبة والعنصر الأول أكبر من العنصر الثانى.
- (c) $L \cap M$.

الأعداد الحقيقية

من المجموعات الهامة في الرياضيات ويرمز لها بالرمز R وتشمل :-

1- مجموعة الأعداد الصحيحة:

ويرمز لها بالرمز Z وتشمل :

أ- العنصر المحايد:

وهما الصفر والواحد.

ب - الأعداد الطبيعية N :

وهي مجموعة الأعداد الناتجة من الاضافة المتكرره للعدد واحد.

$$N = \{ 1, 2, 3, \dots, \dots \}$$

ج - الأعداد الصحيحة السالبة $-N$:

وتسمى مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة.

أي أن الأعداد الصحيحة Z يمكن كتابتها على الصورة:-

$$Z = \{-N\} \cup \{N\} \cup \{0\}$$

$$= 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm \dots$$

2- مجموعة الأعداد النسبية Q :

ويمكن التعبير عنها بالمجموعة :

$$Q = \{x : x = \frac{a}{b}, a, b \in Z, b \neq 0\}$$

مثال لذلك : $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \dots$

وبالتالى يمكن وضع العلاقة الآتية بين المجموعات:

$$R \supset Q \supset Z \supset N$$

3- مجموعة الأعداد الغير نسبيه I:

ومثال لذلك : $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \pi, \sqrt{3} + \sqrt{5}$

ويمكن التعبير عنها بالمجموعة I كالآتي:

$$I = \{ y : y = \frac{c}{d}, c \text{ or } d \notin \mathbb{Z}, d \neq 0 \}$$

واتحاد مجموعة الأعداد النسبية Q مع الأعداد الغير نسبيه I يكون

مجموعة الأعداد الحقيقية أي أن :

$$R = Q \cup I, \quad Q \cap I = \emptyset$$

وميزة الأعداد الحقيقية إنه يمكن تمييزها على خط مستقيم (خط الأعداد)

وإيضاح المجالات (الفترة) عليه.

بعض خواص الأعداد الحقيقية:

من الأهمية معرفة خواص الأعداد الحقيقية نذكر منها الآتي:

بفرض أن x, y, z أعداد حقيقية فإن:

1- $x + z = y + z \Rightarrow x = y$ (خاصية الحذف للجمع)

2- $x.z = y.z, z \neq 0 \Rightarrow x = y$ (خاصية الحذف للضرب)

3- $x.y = 0 \Rightarrow x=0 \text{ أو } y = 0$ (قاعدة عوامل الصفر)

إذا كان $a \in R, b \in R$ فإن :-

4- $a.0 = 0$

5- $(-1).a = -a$

6- $-(-a) = a$

7- $-(a+b) = (-a) + (-b)$

$$8- (-a) b = a(-b) = -ab$$

$$9- (-a) (-b) = ab$$

$$10- \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}, b \neq 0$$

$$11- \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}, b \neq 0$$

وبفرض أن جميع مقامات هذه الكسور لا تساوي صفرا فإن :

$$12- b \left(\frac{a}{b} \right) = a$$

$$13- \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}$$

$$14- \frac{1}{\frac{1}{a}} = a$$

$$15- \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$$

$$16- \frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$$

$$17- \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$18- \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$19- \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$20- \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

المجال (الفترات) :

يمكن للمتغير x أن يأخذ قيمة من مجموعة أعداد معينة تسمى حيز x أو مجال x وهذا المجال ينقسم إلى قسمين:

1- مجال محدود 2- مجال غير محدود

1- المجال المحدود:

ينقسم بدوره إلى أربعة أقسام كالآتي:

أ- مجال مفتوح:

وفية يأخذ المتغير جميع الأعداد الحقيقية بين عددين ثابتين a, b حيث يعبر عنه بصورة مجموعة كالآتي:

$$X = \{ x : a < x < b \}$$

والرمز المختصر لهذا المجال هو :

(a, b)

مثال 1 :

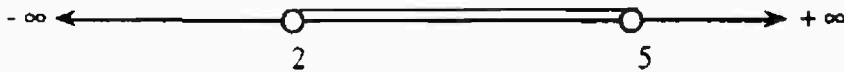
ضع المجموعة الآتية على خط الأعداد:

$$X = \{ x : 2 < x < 5 \}$$

الحل:

نضع دائرة مفتوحة على العدد 5 وأخرى على العدد 2 على خط الأعداد كما

بشكل 8.



شكل 8

أي أن المتغير x يأخذ جميع القيم بين العددين 2 , 5 ولا يشمل كلا

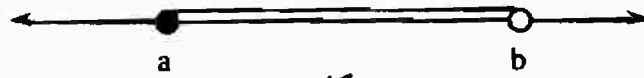
العددين ويعبر عن ذلك بالرمز : (2, 5)

ب- مجال نصف مفتوح:

يرمز له بالرمز (a,b] حيث يحتوى المجال جميع الأعداد ابتداء من a وحتى الأصغر من b وتكتب بشكل مجموعة أعداد كالآتي:

$$X = \{x : a \leq x < b\}$$

ويمكن تمثيلها على خط الأعداد كما هو واضح بشكل 9.



شكل 9

حيث:

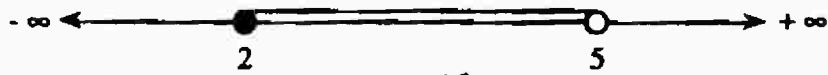
الدائرة المغلقة تعنى أن العدد ضمن المجال.

الدائرة المفتوحة تعنى أن العدد ليس ضمن المجال.

مثال 2:

عبر عن المجال [2,5) على خط الأعداد وفي صورة مجموعة أعداد.

الحل: المجال على خط الأعداد كما بشكل 10.



شكل 10

المجال على صورة مجموعة :-

$$X = \{x : 2 \leq x < 5\}$$

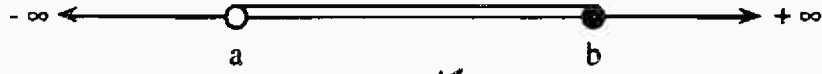
ج - مجال نصف مفتوح:

ويرمز له بالرمز (a,b] حيث يحتوى المجال على جميع الأعداد الأكبر من a

وحتى العدد b ويعبر عنه بشكل مجموعة كالآتي:

$$X = \{ x : a < x \leq b \}$$

وعلى خط الأعداد كما بشكل 11.



شكل 11

د- مجال مغلق:

يرمز له بالرمز $[a, b]$ حيث يحتوى المجال على جميع الأعداد الحقيقية

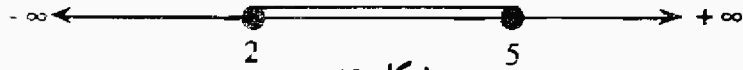
من a إلى b ويعبر عنه بشكل مجموعة كالآتي:

$$X = \{ x : a \leq x \leq b \}$$

مثال 3:

عبر عن المجال $[2, 5]$ على خط الأعداد.

الحل: كما هو واضح بشكل 12.



شكل 12

ملحوظة:

يتم التفريق بين المجال المفتوح (a, b) وإحداثي النقطة التي إحداثيها

الأول a والثاني b من خلال المقصود في التعبير إذا كان مجال مفتوح أو نقطة.

2 - مجال غير محدود:

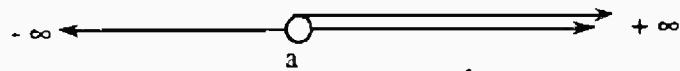
إذا كانت a نقطة معلومة فيكون حيز المتغير وفقا للآتي:

أ - (a, ∞) :

ويعبر عنه بصورة مجموعة كالآتي:

$$X = \{x : x > a\}$$

وعلى خط الأعداد كما بشكل 13.



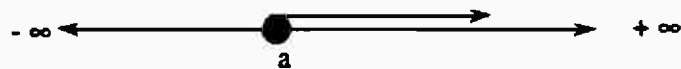
شكل 13

ب - $[a, \infty)$:

ويعبر عنه بصورة مجموعة كالآتي:

$$X = \{x : x \geq a\}$$

ويعبر عن ذلك على خط الأعداد كما بشكل 14.



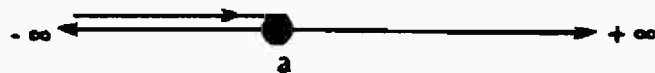
شكل 14

ج - $(-\infty, a]$:

ويعبر عنه بصورة مجموعة كالآتي:

$$X = \{x : x \leq a\}$$

ويعبر عن ذلك على خط الأعداد كما بشكل 15



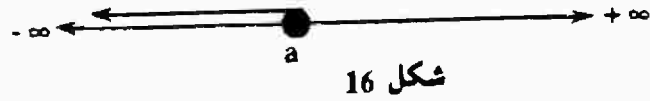
شكل 15

د - $(-\infty, a)$.

ويعبر عن ذلك بصورة مجموعة كالآتي:

$$X = \{ x : x < a \}$$

ويعبر عن ذلك على خط الأعداد كما بشكل : 16



يمكن تلخيص ما سبق في الجدول الآتي بصورة مبسطة :

الفترة	تعبير عن الفترة بصورة مجموعة	تمثيل الهندسي
(a, b)	$\{ x : a < x < b \}$	
$[, b)$	$\{ x : a \leq x < b \}$	
$(a, b]$	$\{ x : a < x \leq b \}$	
$[a, b]$	$\{ x : a \leq x \leq b \}$	
(a, ∞)	$\{ x : x > a \}$	
$[a, \infty)$	$\{ x : x \geq a \}$	
$(-\infty, a)$	$\{ x : x < a \}$	
$(-\infty, a]$	$\{ x : x \leq a \}$	
$(-\infty, \infty)$	$\{ x : -\infty < x < \infty \}$	

تمارين (2)

1- مثل بيانيا كلا من المجموعات أو الفترات الآتية:

- (a) $\{x : 3 \leq x < 6\}$
- (b) $[-3, 2]$
- (c) $(4, 7)$
- (d) $\{x : x < 2\}$
- (e) $\{x : -4 \leq x \leq 6\}$

2- أكتب الفترات الآتية في صورة تكوين مجموعة :

- | | | | |
|-----|------------|-----|-----------|
| (a) | $[-3, 5)$ | (b) | $(3, 9)$ |
| (c) | $(-7, -3)$ | (d) | $(-1, 4)$ |

3- إذا كانت :

$$a = [-3, 5]$$

$$b = [-1, 2]$$

مثل بيانيا a , b على خط الأعداد . ثم أوجد الآتي:

$$a \cup b, \quad a \cap b, \quad a - b$$

التحليل :

نعتبر الأعداد :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,,

أعدادا أولية حيث لا يوجد تحليل لهذه الأعداد إلى عوامل حاصل ضرب

سوى نفس هذه الأعداد والعدد 1 فمثلا :

$$2 = 2 \times 1$$

$$3 = 3 \times 1$$

$$5 = 5 \times 1$$

وهكذا.....

أما الأعداد الأخرى فتسمى أعدادا مركبة حيث يمكن تحليلها إلى عوامل

خاص ضرب أعداد أولية أو قوى للأعداد الأولية السابق ذكرها فمثلا:

$$12 = 2 \times 2 \times 3$$

$$= 2^2 \times 3$$

$$15 = 3 \times 5$$

$$20 = 2 \times 2 \times 5$$

$$= 2^2 \times 5$$

وهكذا.....

أن يتم تحليل الأعداد المركبة إلى أعداد أولية أو قوى للأعداد الأولية.

وينفس الطريقة تتناول تحليل كثيرات الحدود معاملاته أعداد صحيحة الى

كثيرات حدود معاملاته أيضا أعداد صحيحة فمثلا:

$$1- x^2 - 2 = (x - \sqrt{2}) (x + \sqrt{2})$$

$$2- x^2 - 4 = (x - 2) (x + 2)$$

ففى المثال الأول نجد أن العدد 2 لا يمكن تحليله إلى أعداد صحيحة،
وبالتالى نقول أن المقدار $x^2 - 2$ لا يمكن تحليله إلى مقادير أو عوامل أولية
وبالتالى يعتبر هذا المقدار كثير حدود أولى. أما المثال الثانى فيمكن تحليل
المقدار إلى عاملين $(x - 2) x (x + 2)$ أوليين حيث لا يمكن تحليلهما ثانية.
وبالتالى يقال أن كثير الحدود $x^2 - 4$ أمكن تحليله إلى $(x - 2)$ ، $(x + 2)$ ،
كثيرات حدود أولية، ولذلك يسمى المقدار $x^2 - 4$ كثير حدود مركب.

الصيغ الهامة المستخدمة بكثرة فى كثير من التحليلات :

اسم التحليل	التحليل إلى عوامل أولية	كثيرة حدود
1- مربع كامل	$(x + y)^2$	$x^2 + 2xy + y^2$
2- مربع كامل	$(x - y)^2$	$x^2 - 2xy + y^2$
3- فرق بين مربعين	$(x - y) (x + y)$	$x^2 - y^2$
4- مجموع مكعبين	$(x + y)(x^2 - xy + y^2)$	$x^3 + y^3$
5- فرق بين مكعبين	$(x - y)(x^2 + xy + y^2)$	$x^3 - y^3$

تمارين (3)

1- حلل كثيرات الحدود :

a) $4a^2 - 2a^2b^2 + 25b^2$

b) $a^4 + 6a^2 + 9$

2- حلل كثيرات الحدود :

a) $8a^3 + 27b^3$

b) $a^3 - 64b^3$

c) $a^6 - b^6$

3- حلل كل كثير الحدود ولو أمكن:

a) $2xy + 4x$

b) $(x+y) + 2(x+y)$

c) $(x^2 - y^2) - (x + y)$

d) $x^3 - 125y^3$

e) $x^2 - 3x + 2$

f) $x^2 + 2x - 8$

g) $x^2 + 3x - 10$

h) $x^2 + 11x + 24$

l) $(x + y)^3 - 1$

m) $x^4 + 1$

4 - حلل الآتى :

$$6x^2 - xy - 2y^2$$

$$2x^2 + 7x + 6$$

$$x^2 - 6x + 8$$

$$x(x + 2y) + 3y(x + 2y)$$

5- أكتب الحد الأوسط فى كل مما يأتى:-

(a) $(a + 2b)(a + 5b)$

(b) $(x + 3)(x - 4)$

(c) $(a - 7)(a + 5)$

(d) $(x - 4)(x - 6)$

(e) $(2a + 3b)(a + 4b)$

(f) $(3x + 4y)(2x - y)$

(g) $(5x - 2)(3x + 1)$

(h) $(7a - 3b)(4a - 2b)$

6- أوجد ناتج المقادير الآتية:

(a) $(a + 7)(a + 3)$

(b) $(x + 5)(x - 3)$

(c) $(L - 8)(L + 1)$

(d) $(a - 6)(a - 5)$

(e) $(x^2 - 2y^2)(3x^2 - 4y^2)$

(f) $(ab - 2cd)(3ab - 4cd)$

(g) $(4Lm - h)(2Lm - 3h)$

(h) $(2x - 5y)(3y - Zx)$

7- أكتب الحد الناقص للمقادير الآتية:

(a) $(2x + 5)(3x - \dots) = \dots + \dots - 10$

(b) $(3a - 2b)(\dots - 4b) = 15a^2 - \dots + \dots$

(c) $(4x + \dots)(\dots - 5) = 8x^2 - \dots - \dots$

(d) $(\dots - 7)(5a + \dots) = 10a^2 - 19a - \dots$

8- ضع الآتي في صورة مختصرة:

(a) $2(3x - 5)(2x + 1) - 3(4x + 1)(x - 7)$

(b) $2a^2 - (a + 4)(3a - 7) + 2(a - 4)(a - 1) - 36$

(c) $10a^2 - 2[3a^2 - (2a - 1)(a + 5) + 2(a + 2)(2a - 1) - 1]$

المعادلات

تعريف :

المعادلة هي صيغة تعبر عن علاقة التساوى لمتغير (أو عدة متغيرات) وقد يسمى المتغير مجهولا وحل المعادلة معناه إيجاد قيمة المجهول.

أولا : المعادلات الخطية:

هي معادلات من الدرجة الأولى أى أكبر قوى للمتغير (المجهول) فيها يساوى واحد صحيح فهي إما أن تكون:-

I - معادلة من الدرجة الأولى فى مجهول واحد x

II - معادلتين من الدرجة الأولى فى مجهولين x, y (معادلتين أنيتين).

III - ثلاث معادلات من الدرجة الأولى فى ثلاث مجاهيل x, y, z .

I - معادلات الدرجة الأولى فى مجهول واحد x :

نعتبر المعادلات الآتية:

$$(1) \frac{5x}{2} = 0$$

$$(2) x + 7 = 4$$

$$(3) 2x + 5 = 0$$

$$(4) 2x = 8$$

$$(5) \frac{2}{x} = \frac{1}{x}$$

وكلها معادلات تحترى على مجهول واحد x ومن الدرجة الأولى لأنها

مرفوعة للأس واحد وحل هذه المعادلات يكتب على هيئة مجموعات كالآتى:

$$(1) \quad \frac{5x}{2} = 0$$

بضرب طرفي المعادلة $\times \frac{2}{5}$

$$\frac{2}{5} \left(\frac{5x}{2} \right) = 0$$

$$x = 0$$

مجموعة الحل لهذه المعادلة هي:

$$x = \{0\}$$

$$(2) \quad -x + 7 = 4$$

بجمع -7 للطرفين:

$$\begin{aligned} x - 7 + 7 &= 4 - 7 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

$\therefore$ مجموعة الحل لهذه المعادلة هي :-

$$x = \{-3\}$$

$$(3) \quad 2x + 5 = 0$$

بجمع -5 للطرفين

$$\begin{aligned} -5 + 2x + 5 &= -5 \\ 2x &= -5 \end{aligned}$$

ضرب الطرفين $\times \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} (2x) = \frac{1}{2} (-5)$$

$$x = -\frac{5}{2}$$

$\therefore$ مجموعة الحل لهذه المعادلة هي:

$$x = \left\{ -\frac{5}{2} \right\}$$

$$(4) \quad 2x = 8$$

بضرب الطرفين $\frac{1}{2} x$

$$\frac{1}{2} (2x) = \frac{1}{2} (8)$$

$$x = 4$$

∴ مجموعة الحل لهذه المعادلة هي :-

$$x = \{ 4 \}$$

نلاحظ أن حل هذه المعادلات تم باستخدام خاصيتي الجمع والضرب بعدد لا يساوي صفراً. حيث تحولت المعادلة الخطية إلى معادلة مكافئة:

$$(5) \quad \frac{2}{x} = \frac{1}{x}$$

بضرب طرفي المعادلة $x^2 \times$

$$x^2 \left(\frac{2}{x} \right) = x^2 \left(\frac{1}{x} \right)$$

$$2x = x$$

$$2x - x = 0$$

$$x = 0$$

وبالتعويض عن المعادلة الأصلية عن قيمة x

$$\therefore \frac{2}{0} = \frac{1}{0}$$

وهذه الكميات $\left(\frac{2}{0}, \frac{1}{0} \right)$ كميات غير معرفة وبالتالي لا تتساوى فمن

المستحيل أن تتساوى الكميات الغير مُعرَّفة وبالتالي فإن $x = 0$ يعتبر حل مرفوض للمعادلة.

وعلى ذلك فإن المعادلتين:

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{x}, \quad x = 0$$

غير متكافئتين وبالتالي لا يوجد حل للمعادلة الأصلية. ويقال في هذه الحالة أن مجموعة الحل هي المجموعة الخالية ϕ وتكتب :

$$x = \phi$$

ومثال آخر للمعادلتين الغير متكافئتين هو :

$$(6) \quad x^2 = 4$$

$$x = -2$$

تعتبر معادلتين غير متكافئتين لأن مجموعة الحل للمعادلة الأولى هي:

$$x = \{-2, 2\}$$

، مجموعة الحل للمعادلة الثانية هي:

$$x = \{-2\}$$

وهما غير متساويتان وبالتالي نستطيع أن نصل إلى هذه القاعدة:-

المعادلات التي لها نفس مجموعة الحلول تسمى معادلات متكافئة والتي

تختلف فيها مجموعة الحلول تسمى معادلات غير متكافئة.

أمثلة متنوعة :

مثال 7 :

حل المعادلة الآتية :

$$\frac{2x}{3} = 5 - \frac{x}{2}$$

الحل :

المضاعف المشترك البسيط هو 6

بضرب طرفي المعادلة $6 \times$

$$\therefore 6 \left(\frac{2x}{3} \right) = 6 \left(5 - \frac{x}{2} \right)$$

$$4x = 30 - 3x$$

يجمع $3x$ للطرفين

$$3x + 4x = 30 - 3x + 3x$$

$$7x = 30$$

بضرب طرفي المعادلة $\frac{1}{7} \times$

$$\frac{1}{7} (7x) = \frac{1}{7} (30)$$

$$x = \frac{30}{7}$$

$\therefore$ مجموعة الحل هي :

$$x = \left\{ \frac{30}{7} \right\}$$

مثال 8 :

أوجد قيمة x في المعادلة الآتية:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{3} = \frac{3}{4x} = \frac{1}{2}$$

الحل:

المضاعف المشترك البسيط للمقامات هو $12x$

- 48 -

∴ بضرب طرفي المعادلة $12x$ X

$$\therefore 12x \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3} \right) = 12x \left(\frac{3}{4x} + \frac{1}{2} \right)$$

$$12 + 4x = 9 + 6x$$

$$-4 + 12 + 4x = -4x + 9 + 6x$$

$$12 = 9 + 2x$$

$$-9 + 12 = -9 + 9 + 2x$$

$$3 = 2x$$

بضرب طرفي المعادلة $\frac{1}{2}$ X

$$\frac{1}{2} (3) = \frac{1}{2} (2x)$$

$$x = \frac{3}{2}$$

∴ مجموعة الحل هي :

$$x = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

مثال 9 :

أوجد حل المعادلة الآتية:

$$\frac{1}{x-4} - \frac{5}{x+4} = \frac{8}{x^2-16}$$

الحل:

بضرب طرفي المعادلة $(x^2 - 16) \times$

$$(x^2 - 16) \left[\frac{1}{x - 4} - \frac{5}{x + 4} \right] = (x^2 - 16) \frac{8}{x^2 - 16}$$

$$x + 4 - 5(x - 4) = 8$$

$$x + 4 - 5x + 20 = 8$$

$$-4x + 24 = 8$$

$$-4 = -16$$

$$\therefore x = \frac{-16}{-4} = 4$$

وبالتعويض عن قيمة $x = 4$ في المعادلة الأصلية

$$\therefore \frac{1}{4 - 4} - \frac{5}{4 + 4} = \frac{8}{16 - 16}$$

$$\frac{1}{0} - \frac{5}{8} = \frac{8}{0}$$

وبما أن القسمة على صفر غير معرفة وبالتالي $x = 4$ حل مفروض

للمعادلة.

$\therefore$ مجموعة الحل للمعادلة هي:

$$x = \phi$$

تمارين (4)

1- أى زوج من المعادلات الآتية متكافئة:

1) $2x - 3 = 5$

2) $y = -2$

$2x = 8$

$y^2 = 4$

3) $\frac{2}{x} = \frac{7}{x}$

4) $3x - 2 = 5$

$2x = 7x$

$7x + \frac{2}{3} = 17$

II- أوجد مجموعة حلول المعادلات الآتية:

1- $4x + 3 = 11$

2- $3x - 2 = 7$

3- $2y - 5 = 7 - 3y$

4- $\frac{2}{x} - 3 = \frac{5}{x}$

5- $2(3x - 4) = 5(1 - 3x) + 8$

6- $\frac{1}{3} - 2x = -x + \frac{2}{3}$

7- $\frac{2 - 3x}{4} - \frac{1 - 3x}{6} = \frac{1}{12} + \frac{x - 2}{3}$

8- $\frac{2}{x - 1} = \frac{3}{x + 1}$

9- $\frac{x}{x - 2} = -\frac{2}{3}$

10- $\frac{1}{3 - x} + \frac{7}{2x + 3} = 0$

II- المعادلتين الآتيتين:

هما معادلتين من الدرجة الأولى فى مجهولين ويتم التعامل معهما فى أن

- 51 -

واحد لإيجاد قيمة كل مجهول على حده.

فكر الحل:

يتم توحيد معاملات المجهول الأول وباستخدام خواص المعادلات (الجمع والطرح) يمكن إيجاد قيمة المجهول الثاني والعكس صحيح.

مثال 1 :

حل المعادلتين الآتيتين: -

$$4x + 5y = 3 \quad (1)$$

$$x + y = 1 \quad (2)$$

الحل :

لايجاد قيمة x يتم ضرب المعادلة (2) $5x$ وتبقى المعادلة (1) كما هي :

$$4x + 5y = 3 \quad (1)$$

$$5x + 5y = 5 \quad (3)$$

بطرح المعادلتين (1) من (3)

$$\therefore x + 0 = 2 \quad (4)$$

لايجاد قيمة y يتم ضرب المعادلة (2) $4x$ وتبقى المعادلة (1) كما هي :

$$4x + 5y = 3 \quad (1)$$

$$4x + 4y = 4 \quad (5)$$

بطرح المعادلتين (5) من (1).

$$\therefore y = -1$$

$$\therefore x = 2$$

$$y = -1$$

والطريقة العامة التي تكتب بها المعادلات السابقة:-

$$a_1 x + b_1 y = c_1 \quad (1)$$

$$a_2 x + b_2 y = c_2 \quad (2)$$

بضرب المعادلة (2) $b_1 \times$

، المعادلة (1) $b_2 \times$

$$\therefore a_1 b_2 x + b_2 b_1 = c_1 b_2$$

$$a_2 b_1 x + b_2 b_1 y = c_2 b_1$$

بطرح المعادلتين (نلاحظ أن معاملات y واحدة في المعادلتين)

$$\therefore x (a_1 b_2 - a_2 b_1) = c_1 b_2 - c_2 b_1$$

$$\therefore x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)} \quad (6)$$

بضرب المعادلة (2) $a_1 \times$

والمعادلة (1) $a_2 \times$

$$a_1 a_2 x + b_1 a_2 y = c_1 a_2 \quad (7)$$

$$a_2 a_1 x + a_1 b_2 y = c_2 a_1 \quad (8)$$

بطرح المعادلتين (نلاحظ أن معاملات x واحدة في المعادلتين)

$$\therefore y (a_1 b_2 - a_2 b_1) = a_1 c_2 - a_2 c_1$$

$$\therefore y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad (9)$$

بشرط أن $a_1 b_2 \neq a_2 b_1$ فتكونا قيمتي y , x هما المعادلتين 6 , 9

فإذا وضعنا المعادلتين (1), (2) في صورة مصفوفة :-

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

نجد أن محدد المصفوفة ΔA يساوي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

فلإيجاد قيمة Δx نقرم بإلغاء معاملي x (a_1, a_2)، نكتب بدلا لهما c_1

c_2 كالآتي:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - b_1 c_2$$

ولإيجاد قيمة Δy نقرم بإلغاء معاملي y (b_1, b_2) ونكتب بدلا لهما c_1

c_2 ، كالآتي:

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - c_1 a_2$$

$$\therefore x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}$$

$$, y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{a_1 c_2 - c_1 a_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}$$

ولحل المثال السابق بواسطة المحددات نجد أن:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4(1) - 5(1) = -1$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(1) - 5(1) = -2$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4(1) - 3(1) = 1$$

$$\therefore x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = -1$$

II المعادلات الخطية في ثلاث مجاهيل x, y, z :

بنفس الطريقة السابقة يمكن حل المعادلات الخطية في ثلاث مجاهيل

بمعلومية ثلاث معادلات مستقلة

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3$$

وقد وجد أن مفكوك المحدد هو:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}[(a_{22} \cdot a_{33}) - (a_{32} \cdot a_{23})] - a_{21}[(a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{13})]$$

$$+ a_{31}[(a_{12} \cdot a_{23}) - (a_{22} \cdot a_{13})]$$

قاعدة كرامر:

تستخدم قاعدة كرامر في حل هذا النوع من المعادلات حتى رتبة n من

المعادلات في n من المجاهيل ونصها كالآتي:

إذا كان المحدد Δ لمعاملات النظام الخطي المكون من المعادلات بـ n من المتغيرات يختلف عن الصفر، فالنظام الخطي حل واحد فقط يمكن التعبير فيه عن قيمة كل مجهول لكسر مقامه هو المحدد Δ وسطه محدد نحصل عليه من المحدد Δ باستبدال العمود المكون من معاملات ذلك المجهول بالأعداد:

$$c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$$

وسوف نستخدم في دراستنا هنا ثلثا مجاهيل z, y, x

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta x}{\Delta}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{12} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{12} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{23} & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

والمحدد الثنائي لـ a_{11} يسمى محدد ويرمز له بالرمز Δ_{11}

والمحدد الثنائي لـ a_{21} يسمى محدد ويرمز له بالرمز Δ_{21}

والمحدد الثنائي لـ a_{31} يسمى محدد ويرمز له بالرمز Δ_{31}

وفي الحالة العامة فإن المحدد Δ_{ij} مرافق للعنصر a_{ji} وإشارته تكون:

سالبة إذا كان $i + j$ عدداً فردياً

موجبة إذا كان $i + j$ عدداً زوجياً

ويمكن فك المحدد السابق بالطريقة التالية حيث الاسهم العليا تكون حاصل

ضرب الثلاث عناصر مع عكس إشارتها والاسهم السفلى حاصل الضرب بنفس الإشارة

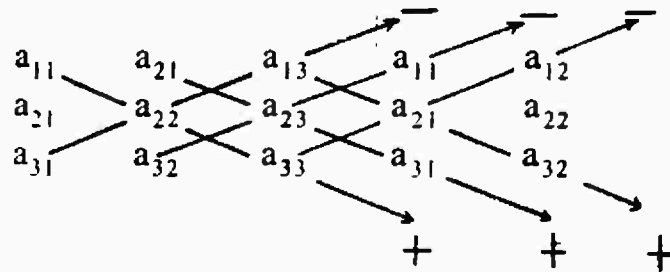
بعد تكرار العمود الأول والعمود الثاني.

وتسمى هذه الطريقة بطريقة سارس لفك محدد المرتبة الثالثة وهو كما

بشكل (17) يكون قيمة المحدد Δ هي:

$$\Delta = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}) + (a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}) + (a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32})$$

$$- (a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}) - (a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}) - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31})$$



شكل 17

مثال 1 :

استخدم قاعدة كرامر لحل المعادلات الآتية:

$$4x + 5y + z = 6$$

$$x + y + 2z = 7$$

$$2x - y + 3z = 14$$

الحل:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4[(1(3) - (-1(2)))] - 1 [(5(3) - (-1)(1))]$$

$$+ 2 [(5(2) - (1)(1))]$$

$$= 20 - 16 + 18 = 22$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \\ 14 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 6(-5) - 7(-16) + 2(-9)$$

$$= 44$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 14 & 3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 4(7) - 1(-4) + 2(-5)$$

$$= -22$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 14 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 14 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 14 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 4 (-21) - 1 (-76) + 2 (-29) \\ = 66$$

$$\therefore x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{44}{22} = 2$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-22}{22} = -1$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{66}{22} = 3$$

مثال 2:

أوجد حل المثال السابق بطريقة سارس لفك محدد الرتبة الثالثة:

الحل :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ = -2 + 8 - 15 + 12 + 20 - 1 = 22$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \\ 14 & -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 1 \\ 14 & -1 \end{vmatrix} \\ = -14 + 12 - 105 + 18 + 140 - 1 = 44$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 14 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 7 \\ 2 & 14 \end{vmatrix}$$
$$= -14 - 112 - 18 + 84 + 24 + 14 = -22$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 14 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= -12 + 28 - 70 + 56 + 70 - 6 = 66$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{44}{22} = 2$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-22}{22} = -1$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{66}{22} = 3$$

تمارين (5)

أوجد حل منظومة المعادلات الآتية باستخدام قاعدة كرامر:

$$\begin{aligned} 1- \quad & x + y + z = 3 \\ & x - y + z = 1 \\ & x + y - z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2- \quad & 3x - y + z = 0 \\ & -x + 2y - z = 0 \\ & 2x + 4z = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3- \quad & x - y + 2z = -5 \\ & -2x + y + z = 4 \\ & 3x - 4z + 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4- \quad & x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1 - x_3 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5- \quad & 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 5 \\ & 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 11 \\ & -x_1 + x_2 - x_3 = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6- \quad & x + 3y + 2z = 1 \\ & x + z = -2 \\ & x - 3y = 3 \end{aligned}$$

خواص المحددات :

الخاصية الأولى:

لا تتغير قيمة المحدد إذا تبادل الوضع بين الصفوف والأعمدة:

Ex:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ونفك المصفوفة بالنسبة إلى العمود الأول وإيجاد قيمة محددها.

$$|A| = a_{11}\Delta_{11} - a_{21}\Delta_{21} + a_{31}\Delta_{31} \quad (1)$$

وبإيجاد قيمة محدّد المصفوفة A'

$$|A'| = a_{11}\Delta_{11} - a_{21}\Delta_{21} + a_{31}\Delta_{31} \quad (2)$$

من (1) , (2) ينتج أن :-

$$A = A'$$

الخاصية الثانية:

إذا كان أحد الأعمدة أو أحد الصفوف مؤلفا من عناصر كلها أصفار فإن المقادير الستة كل منها في حاصل ضرب عناصرها على الصفر، بالتالي يكون المحدد مساويا للصفر.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \Delta_{11} - a_{12} \Delta_{12} + a_{13} \Delta_{13}$$

$$= (a_{11} a_{22} a_{33}) - a_{11} a_{32} a_{23} - (a_{12} a_{21} a_{33})$$

$$+ (a_{12} a_{31} a_{23}) + (a_{13} a_{21} a_{32}) - (a_{13} a_{31} a_{22})$$

وبالنظر للمفكوك نجد أن يتكون المجموع الجبري لستة مقادير كل مقدار

منها هو عبارة عن حاصل ضرب ثلاثة عناصر من المحدد.

نجد أن كل مقدار يتكون من عناصر مأخوذة من الصفوف الثلاثة والأعمدة

الثلاثة التي يتكون منها المحدد. وبالتالي إذا كان أحد الأعمدة أو أحد الصفوف

مؤلفا من عناصر كلها أصفار فإن المقادير الستة تحتوى كل منها فى حاصل ضرب

عناصرها على الصفر. ولذلك يكون المحدد مساويا للصفر.

$$\text{Ex (1)} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3 (0) + 1 (0) + 2 (0) = 0$$

$$\text{Ex (2)} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 5 \\ x+y & -3x+15 & y+5 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

فأوجد قيمة x, y

$$\therefore |A| = 0$$

$$\therefore x + y = 0 \quad (1)$$

$$, \quad y + 5 = 0 \quad (2)$$

$$, \quad -3x + 15 = 0 \quad (3)$$

$$\text{من (2) : } y = -5$$

$$\text{من (3) : } x = 5$$

وهذا يحقق المعادلة (1) : -

$$x + y = 0$$

$$5 + (-5) = 0$$

الخاصية الثالثة:

تتغير إشارة المحدد إذا تبادلت أعمدة صفان. وتتغير إشارة المحدد إذا تبادلت

الوضع عمودان.

فإذا كان :

$$A_1 = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \\ N_1 & N_2 & N_3 \\ R_1 & R_2 & R_3 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} M_1 & M_3 & M_2 \\ N_1 & N_3 & N_2 \\ R_1 & R_3 & R_2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A_1 = -A_2$$

على الطالب إثبات هذه الخاصية عن طريق فك المحددين

الخاصية الرابعة :

إذا ضربت عناصر صف واحد فقط أو عناصر عمود واحد فقط من مصفوفة مربعة بعدد فإنه يجب ضرب محددها السابق في هذا العدد.
فإذا كان :

$$A_1 = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \\ N_1 & N_2 & N_3 \\ R_1 & R_2 & R_3 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & KM_3 \\ N_1 & N_2 & KN_3 \\ R_1 & R_2 & KR_3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |A_2| = K |A_1|$$

الإثبات:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

بالنسبة للعمود الأخير

$$\therefore |A_1| = a_{13}\Delta_{13} - a_{23}\Delta_{23} + a_{33}\Delta_{33}$$

ويضرب أي صف أو أي عمود $k \times$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & k a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A_2| &= k a_{13} \Delta_{13} - k a_{23} \Delta_{23} + k a_{33} \Delta_{33} \\ &= k (a_{13} \Delta_{13} - a_{23} \Delta_{23} + a_{33} \Delta_{33}) = k |A_1| \end{aligned}$$

الخاصية الخامسة:

تكون قيمة المحدد مساوية للصفر إذا وجد فيه صفان متساويان أو عمودان متساويان.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

يفرض أن عناصر الصف الأول = عناصر الصف الثاني

$$a_{11} = a_{21}, \quad a_{12} = a_{22}, \quad a_{13} = a_{23}$$

وبفك المحدد ينتج المطلوب.

الخاصية السادسة:

إذا كانت في المحدد النسبة بين العناصر المتناظرة في أي صفين أو أي

عمودين مقداراً ثابتاً فإن قيمة هذا المحدد = صفر.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

يفرض أن :-

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}} = k$$

فإن هذا المحدد = صفر

الاثبات :

$$a_{11} = k a_{21} , \quad a_{12} = k a_{22} , \quad a_{13} = k a_{23}$$

وبالتعويض نجد أن :

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} k a_{11} & a_{12} & k a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= k \begin{vmatrix} a_{21} & a_{12} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= k (0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

الخاصية السابعة :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

فإذا كان:

$$a_{11} = x_1 + x_2 + x_3$$

$$a_{12} = y_1 + y_2 + y_3$$

$$a_{13} = z_1 = z_2 + z_2$$

$$\therefore |A| = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

الخاصية الثامنة:

إذا كان :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

واستخدمت التحويلة:

$$i_2 = ki_1 + i_2$$

$$\therefore |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} + a_{21} & ka_{12} + a_{22} & ka_{13} + a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

وبالمثل :

$$j_2 = kJ_1 + J_2$$

حيث $i \equiv$ الصف ، $J \equiv$ العمود

أمثلة متنوعة :

مثال 1 :

إذا كان :-

$$A = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 2 & 4 & 8 \\ -3 & 9 & -27 \end{vmatrix} = 0$$

أوجد قيمة x

الحل :

"* المحدد = 0"

∴ الاحتمال الأول $i_1 = 0$ (جميع عناصر الصف الأول = 0)

$$\therefore x = 0, \quad x^2 = 0, \quad x^3 = 0$$

الاحتمال الثاني هو أن :-

عناصر الصف الأول = عناصر الصف الثاني

$$\therefore x = 2, \quad x^2 = 4, \quad x = 8 \rightarrow x = 2$$

الاحتمال الثالث هو أن:

عناصر الصف الأول = عناصر الصف الثالث

$$\therefore x = -3, \quad x^2 = 9, \quad x^3 = -27 \rightarrow x = -3$$

∴ قيم x التي تجعل المحدد = 0 هي :

$$x = \{ 0, 2, -3 \}$$

مثال :

أوجد قيمة محدد المصفوفة :

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1+1 & 2+1 & 3+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

تمارين (6)

1- أوجد قيم المحددات الآتية:

$$a - \begin{vmatrix} -4 & 3 & 5 \\ -7 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$b - \begin{vmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 5 & 10 & 40 \\ -6 & 9 & 13 \end{vmatrix}$$

$$c - \begin{vmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -7 & -8 & 6 \\ 15 & 11 & 9 \end{vmatrix}$$

$$d - \begin{vmatrix} -8 & -12 & 0 & -2 \\ 6 & -2 & 0 & 1 \\ -4 & -6 & 0 & -1 \\ 5 & 7 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

2- إثبت أن :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

3- إثبت أن :

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$$

4 - إثبت أن :

$$\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4a bc$$

5- إثبت أن معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين $Q(x_2, y_2)$

$P(x_1, y_1)$ هي:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

6- استخدم المسألة السابقة لإيجاد معادلة المستقيم المار بالنقاط:

a) p (3, 4) , Q (-2, 7)

b) p (1, -5) , Q(3, -8)

7- أوجد قيمة x التي تجعل المحدد = 0 في كل من :

a) $\begin{vmatrix} x & x^2-1 & 2x \\ 3 & 8 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ x & 4 & 3 \end{vmatrix}$

8- أوجد الشروط الواجب توافرها في الثلاث نقاط:

P (x₁ , y₁) , Q (x₂, y₂) , R (x₃ , y₃)

حتى تقع على خط مستقيم.

9- استخدم نتيجة المسألة (8) لإثبات أن :

P (3, 5), Q (1, 1), R (-2, -5)

تقع على إستقامة واحدة

ثانياً: معادلات الدرجة الثانية في مجهول واحد:

يوجد ثلاث طرق على الترتيب نوجزها فيما يلي:-

I- طريقة التحليل إلى عوامل (التحليل إلى أقواس):

مثال 1 :

أوجد حل المعادلة الآتية :

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

الحل :

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$(x + 1)(x + 2) = 0$$

∴ حاصل ضرب قوسين = 0

$$\therefore (x + 1) = 0$$

$$x = -1$$

$$, (x + 2) = 0$$

$$\therefore x = -2$$

مثال 2 :

أوجد حل المعادلة الآتية:

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

الحل:

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$(x - 2)(x - 5) = 0$$

$$\therefore x - 2 = 0$$

$$\therefore x = 2$$

$$, x - 5 = 0$$

$$\therefore x = 5$$

II طريقة إكمال المربع:

في حالة عدم إمكانية الحل بالطريقة السابقة يتم تحويل المعادلة إلى

$$(x + a)^2 = b \quad \text{معادلة مكافئة على الصورة}$$

حيث a, b ثوابت

مثال 3 :

أوجد حل المعادلة:

$$x^2 + 6x + 1 = 0$$

الحل :

نضع المعادلة على الصورة :

$$x^2 + 6x = -1$$

لإكمال المربع يتم إضافة الحد الأخير في الطرف الأيسر وأيضا في الطرف

الأيمن لتبقى المعادلة كما هي.

$$\left(\frac{\text{معامل } x}{2}\right)^2 = x \text{ مربع نصف معامل } x = \text{الحد الأخير}$$

$$9 = \left(\frac{6}{2}\right)^2$$

∴ يضاف العدد 9 لكلا الطرفين بهذه الصورة:

$$x^2 + 6x + 9 = -1 + 9$$

$$(x + 3)^2 = 8$$

$$\therefore x + 3 = \pm \sqrt{8}$$

$$\therefore x = -3 + \sqrt{8}$$

$$, \quad x = -3 - \sqrt{8}$$

ملحوظة :

جميع معادلات الدرجة الثانية فى مجهول واحد لها حلين.

III- طريقة القانون العام :

إذا تعذر الحل بالطريقتين السابقتين يتم استخدام القانون العام لحل

معادلات الدرجة الثانية فى مجهول واحد. حيث توضع المعادلة على الصورة الآتية:

$$ax^2 + b x + c = 0$$

a , b , c ثوابت ، $a \neq 0$

ويستخدم القانون الآتى لإيجاد جبرى x (قيمتى x) :-

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ويرمز بالمقدر تحت الجذر $b^2 - 4ac$ بالرمز Δ هو مميز المعادلة وتتوقف

نوعية جذور المعادلة على إشارة هذا المميز فإذا كان :

1) $\Delta > 0$

يكونا الجذران حقيقيان ومختلفان

2) $\Delta = 0$

يكون الجذران حقيقيان ومتساويان

3) $\Delta < 0$

يكون الجذران تخيلان

وفرض أن جذور المعادلة هما m , I (أى قيمتى x) فإن :

$$I + m = \frac{-b}{a}$$

$$Im = \frac{c}{a}$$

- 75 -

يمكن كتابة المعادلة على الصورة :

$$x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 - (1 + m) x + lm = 0$$

مثال 4:

أوجد حل المعادلة الآتية:

$$2x^2 + 5x + 1 = 0$$

الحل:

$$a = 2 , b = 5 , c = 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2(2)}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(2)(1)}}{2(2)}$$

∴ مجموعة الحل هي :

$$\left\{ \frac{-5 + \sqrt{17}}{4} , \frac{-5 - \sqrt{17}}{4} \right\}$$

تمارين (7)

أوجد حل المعادلات الآتية:

$$1- \quad \frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} =$$

$$2- \quad x^3 - x^2 - 12x = 0$$

$$3- \quad x^2 + 1 = 8x$$

$$4- \quad 3x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$5- \quad 1 - \frac{1}{9}x^2 = 0$$

$$6- \quad 4x^2 + 12x + 9 = 0$$

$$7- \quad \frac{2x-1}{x} + 1 = \frac{x+1}{x-2}$$

$$8- \quad x^2 + 6x + 4 = 0$$

$$9- \quad 3x^2 - 2x + 5 = 2x + 3$$

$$10- \quad \frac{2x-1}{x} + 1 = \frac{1}{x+2}$$

11- $x(x + 6) + 11 = -2(2x + 5)$

12- $x^3 + 6x + 5 = 0$

13- $\frac{x}{x-2} - \frac{1}{x+2} = 2$

14- $x^3 - 1 = 0$

15- $2x^2 + 3x + 6 = 0$

16- $\frac{1+x}{1-x} + \frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{1-x^2}$

أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية (مجموعة الحل

الحقيقية): -

1- $x^3 - 3x^2 - 6x - 8 = 0$

2- $2x^3 + 5x^2 - 2x - 5 = 0$

3- $x^3 = 1$

4- $x^3 = -1$

5- $x^3 = 8$

6 - $x^3 = 64$

الأسس :

أولاً: الأسس الصحيحة:

إذا كانت x عدد حقيقي ، m ، n عدد صحيح فإنه يمكن إستخدام التعريف

الآتى:

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_n$$

حيث مكررة لعدد n من المرات. وتسمى x أساس القوة، n تسمى الأسس.

فمثلا

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

كما يمكن وضع قوانين الأسس الآتية والتي يمكن إستنتاجها من التعريف

السابق.

$$1- x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$

$$2- (x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$$

$$3- (x^n)^m = x^{n \cdot m}$$

$$4- \frac{x^m}{x^n} = \begin{cases} x^{m-n} & m > n \\ 1 & m = n \\ \frac{1}{x^{n-m}} & m < n \end{cases}$$

$$5- \left(\frac{y}{x}\right)^n = \frac{y^n}{x^n} \quad , x \neq 0$$

أمثلة عددية :

$$1- \quad 3^2 \cdot 3^3 = 3^5$$

$$2- \quad (\sqrt{3})^5 \cdot (\sqrt{3})^{-3} = (\sqrt{3})^{5-3} = (\sqrt{3})^2 = 3$$

$$3- \quad ((2) \cdot (7))^3 = (2)^3 \cdot (7)^3$$

$$4- \quad (2^3)^2 = 2^{3 \times 2} = 2^6$$

فإذا تم وضع $m = 0$ في القوانين السابقة نجد أن القانون رقم (1)

بعد التعويض فيه يصبح :

$$x^n \cdot x^0 = x^n$$

$$x^0 = \frac{x^2}{x^n} = 1, \quad x \neq 0$$

أما في حالة استخدام الأس السالب. فيكون بفرض أن $m = -n$ في القانون

رقم (1) الذي يصبح :

$$x^n \cdot x^{-n} = x^{n-n} = x^0 = 1$$

$$\therefore x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

وعلى ذلك يمكننا الآن تعميم القوانين السابقة ليكون الأس موجبا أو صفرا

أو سالبا (في القوانين الأسية الخمسة) إذا عرفنا أن:-

$$1- \quad x^0 = 1$$

$$2- \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

مع الوضع في الاعتبار أن (0^0) كمية غير معرفة.

ويمكن أيضا استنتاج القواعد الآتية:

$$I \quad x^a \cdot x^b \cdot x^c = x^{a+b+c}$$

$$II \quad \frac{x^a \cdot x^b \cdot x^c}{x^L \cdot x^m \cdot x^n} = x^{a+b+c-L-m-n}$$

$$III \quad \left(\frac{a \times b \times c}{x \times L \times y} \right)^n = \frac{a^n \cdot b^n \cdot c^n}{x^n \cdot L^n \cdot y^n}$$

أمثلة :

$$1- \quad x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

$$\therefore 3^{-3} = \frac{1}{3^3}$$

$$2- \quad \frac{3^5 \cdot 3^{-2} \cdot 3^7}{3^9 \cdot 3^{-6} \cdot 3^{-4}} = 3^{5-2+7-9+6+4} = 3^3 = 27$$

ثانيا : الأسس الكسرية:

إذا كانت x عددا حقيقيا موجبا:

1- وكانت n عدد صحيح < 1 فإن :

$$L = (x)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

وتسمى L الجذر النوني للعدد x

2 - وكانت m, n أعداد صحيحة فإن:

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

أمثلة :

$$1- \quad 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \quad , \quad 5^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{5}$$

$$2- \quad (9)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{9^3} = (\sqrt{9})^3 = 3^3 = 27$$

$$3- \quad (8)^{\frac{-2}{3}} = \sqrt[3]{8^{-2}} = (\sqrt[3]{8})^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

ملحوظة :

$$\sqrt[n]{x^m} \equiv \sqrt[n \cdot L]{x^{m \cdot L}}$$

أى أن إذا ضرب كل من دليل الجذر والأس المرفوع فوق x فى نفس العدد

L فى نفس العدد L لا يغير من قيمة العدد. فمثلا :-

$$\sqrt[3]{5^4} \equiv \sqrt[6]{5^8}$$

تمارين (8)

1- ضع الآتي في أبسط صورة :

(a) $2a^3 \cdot a^{-5}$

(b) $a^{m+n} \cdot a^{m-n}$

(c) $3a^{-3} \cdot 2a^{-2}$

(d) $\frac{a^2 b^4 c^3}{a b^2 c^2}$

(e) $\frac{a^8 \cdot a^4}{a^3 \cdot a^5}$

(f) $\frac{12a^6 \cdot 3a^{-3}}{4a^{-4} \cdot 5a^2}$

(g) $(21)^3 + (14)^2$

(h) $(32)^{\frac{2}{5}} \cdot 8^{\frac{2}{3}}$

(k) $\frac{(2^5 3^5 8^5)^6 \cdot (24)^3}{(48)^{28}}$

(l) $\frac{(25)^{x-3} \cdot 3^{x+3}}{125^{x-4} 15^{6-4} 9^{x-1}}$

2 - إثبت أن :

(a) $\frac{4^{3x-1} \cdot 9^{2x} \cdot (0.5)^3}{6^{4x-2} \sqrt[3]{8^{2x-5}}} = 36$

(b) $\frac{8^{x-\frac{1}{3}} \cdot 3^{x+3}}{16^{x-1} \cdot 6^{5-x} \cdot 9^{x-1}} = \frac{1}{4}$

المتباينات

تعريف :

لكل عددين حقيقيين a , b نقول أن a أكبر من b وتكتب $(a > b)$ إذا كان فقط إذا كان $a - b$ موجبا ونقول أن a أصغر من b وتكتب $(a < b)$ إذا كان فقط إذا كان $a - b$ سالبا.

ويراها الدارس على شكل علاقة بين متغير (أو أكثر) وثابت (أو عدة ثوابت) - كالمعادلة - مع تبديل علامة = الموجودة في المعادلة بعلامة من علامات المتباينة.

علامات المتباينة:

$\geq$ أكبر من أو يساوى

$>$ أكبر من

$\leq$ أصغر من أو يساوى

$<$ أصغر من

فمثلا $9 > 5$ تقرأ 9 أكبر من 5.

الخواص الهامة للمتباينات:

1- لكل زوج من الأعداد الحقيقية a , b إحدى العلامات الآتية:-

$$a < b \quad (3)$$

$$a = b \quad (2)$$

$$a > b \quad (1)$$

2 - إذا كان $a > b$, فإن $b > c$ فإن $a > c$.

3 - إذا كان $a > b$ فإن $a + c > b + c$.

4- إذا كان $a > b$, $c > 0$ فإن $ac > bc$.

5- إذا كان $a > b$, $c < 0$ فإن $ac < bc$.

وسوف نثبت الخاصية رقم (4) ونفس الطريقة يمكن إثبات بقية الخواص.

برهان الخاصية رقم (4):

نفرض أن a, b, c أعداد حقيقية

وأن $a > b$, $c > 0$

$$\therefore a - b > 0 .$$

و $\therefore$ حاصل ضرب عددين موجبين $(a-b)$, c عددا موجبا.

$$\therefore (a - b) c > 0 .$$

$$\therefore ac > bc \text{ حسب قانون التوزيع}$$

المتباينة الخطية في مجهود واحد:

تعلمنا كيف نحل معادله خطيه في مجهول واحد وسوف نستخدم نفس

الأسلوب في حل المتباينة الخطية والتي تبينها الدراسة الآتية:

$$\text{نعرف أن } 9 > 5$$

فعند إضافة أى عدد موجب وليكن 2 لكلا الطرفين

$$2 + 9 \stackrel{?}{>} 2 + 5$$

$$11 > 7$$

أى العدد 11 أكبر من العدد 7.

حيث تعنى العلامة $\stackrel{?}{>}$ هل وضع العلامة في هذه الحالة صحيح وعند إضافة

- 85 -

أى عدد سالب وليكن 2- لكلا الطرفين.

$$-2 + 9 \stackrel{?}{>} -2 + 5$$

$$7 > 3$$

والمتباينة فى هذه الحالة أيضا صحيحة وعلى ذلك يمكننا أن نستنتج أن :

إضافة أى عدد موجب أو سالب لا يغير إتجاه المتباينة.

مثال 1 :

أوجد حل المتباينة:

$$x - 10 \geq 2$$

الحل :

بإضافة 10 + لكلا الطرفين.

$$x - 10 + 10 \geq 2 + 10$$

$$x \geq 12$$

مجموعة الحل هي:

$$\{x : x \geq 12\}$$

مثال 2 :

أوجد حل المتباينة الآتية:

$$x + 6 > -8$$

الحل :

بإضافة 6- لكلا الطرفين

$$x + 6 - 6 > -8 - 6$$

$$x > -14$$

مجموعة الحل هي:-

$$\{x : x > -14\}$$

مثال 3

أوجد حل المتباينة الأنسب في صورة فترة ثم كتابه الحل في صورة مجموعة وتوضيع الحل على خط الأعداد

$$x + 8 > 3$$

الحل

بإضافة 8- لكلا الطرفين

$$x + 8 - 8 > 3 - 8$$

$$x > -5$$

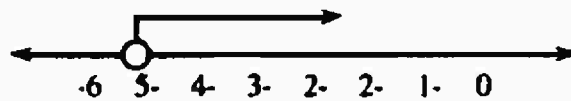
الحل في صورة فترة :-

$$(-5, \infty)$$

مجموعة الحل هي:

$$\{ x : x > -5 \}$$

تمثيل الحل على خط الأعداد كما هو موضح بشكل 18



شكل 18

ولحل المتباينات من الدرجة الأولى يجب معرفة الحالتين الآتيتين:

1- الحالة الأولى:

إذا ضربنا أو قسمنا طرفي المتباينة في أو على كمية موجبة :

$$14 > 6$$

أ - إذا ضربنا كلا الطرفين $\times 2 +$

$$14 \times 2 > 6 \times 2$$

$$28 > 12$$

- 87 -

نظل المتباينة في نفس الاتجاه.

ب - إذا قسمنا كلا الطرفين $\div 2 +$

$$14 + 2 \stackrel{?}{>} 6 + 2$$
$$7 > 3$$

نظل المتباينة في نفس الاتجاه.

2- الحالة الثانية:

إذا ضربنا أو قسمنا طرفي المتباينة في $\div$ أو على كمية سالبة:

أ- إذا ضربنا كلا الطرفين $\times -2$

$$14 \times -2 \stackrel{?}{>} 6 \times -2$$
$$-28 < -12$$

تم عكس اتجاه المتباينة حتى تكون المتباينة صحيحة.

ب- إذا قسمنا كلا الطرفين $\div -2$

$$14 \div -2 \stackrel{?}{>} 6 \div -2$$
$$-7 < -3$$

تم عكس اتجاه المتباينة حتى تكون المتباينة صحيحة.

الاستنتاج:

نستنتج أن إذا ضربنا أو قسمنا طرفي (المتباينة في أو على كمية موجبة

فإن علامة المتباينة لا تتغير، ولكن إذا ضربنا أو قسمنا طرفي المتباينة في أو على

كمية سالبة فإن علامة المتباينة تتغير إلى العكس.

مثال 4

حل المتباينة الآتية

$$4x > 20$$

الحل:

بقسم طرفي المتباينة على 4 +

$$x > 5$$

مثال 5 :

حل المتباينة الآتية:

$$-4x \geq 20$$

الحل :

بقسم طرفي المتباينة على -4

$$x \leq -5$$

مثال 6 :

حل المتباينة الآتية

$$7x > -14$$

الحل:

بقسم طرفي المتباينة على 7

$$x > -2$$

مثال 7 :

حل المتباينة الآتية:

$$-2x \geq -3$$

الحل

بقسمة طرفى المتباينة على 2

$$x \leq \frac{3}{2}$$

مثال 8 :

حل المتباينة الآتية:

$$\frac{x}{5} \geq -3$$

الحل :

بضرب طرفى المتباينة 5 x

$$x > -15$$

مثال 9 :

حل المتباينة الآتية:-

$$\frac{2x - 9}{3} > 5$$

الحل:

بضرب طرفى المتباينة 3 X

$$2x - 9 > 15$$

بإضافة +9 للطرفين

$$2x > 15 + 9$$

$$2x > 24$$

- 90 -

بالقسم 2 ÷

$$x > 12$$

مثال 10:

حل المتباينة الآتية:

$$7x - (x + 5) \leq 3x + 2$$

الحل:

$$7x - (x + 5) \leq 3x + 2$$

$$7x - x - 5 \leq x + 2$$

بإضافة $-3x$ لكلا الطرفين

$$6x - 5 - 3x \leq 3x + 2 - 3x$$

$$3x - 5 \leq 2$$

بإضافة 5 لكلا الطرفين

$$3x \leq 7$$

$$x \leq \frac{7}{3}$$

المتباينة المتكونة من جزئين :

المثال الآتي يبين طريقة حل هذا النوع من المسائل:

مثال

حل المتباينة الآتية:

$$\{ x : (3x - 1) < 2 \} \cap \{ x : 2(5-x) \leq 16 \}$$

موضعا الحل:

(أ) على صورة مجموعة.

(ب) على صورة فترة

(ج) على خط الأعداد.

الحل :

المثال يتضمن تقاطع مجموعتين كل مجموعة تمثلها متباينة ولذلك نوجد

حل كل متباينة على حدة.

$$3x - 1 < 2$$

بإضافة 1 + للطرفين

$$3x < 3$$

$$x < 1$$

المتباينة الثانية:

$$2(5 - x) \leq 16$$

$$5 - x \leq 8$$

بإضافة -5 للطرفين:

$$5 - x - 5 \leq 8 - 5$$

$$-x \leq 3$$

$$x \geq -3$$

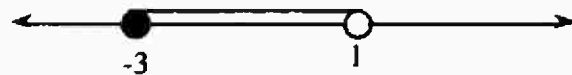
(أ) الحل على صورة مجموعة :

$$\{ x : -3 \leq x < 1 \}$$

(ب) الحل على صورة فترة:

$$[-3, 1)$$

(ج) تمثيل الحل على خط الأعداد كما هو موضح بشكل 19



شكل 19

متباينات يكون المقام فيها متغير:

مثال : أوجد حل المتباينة الآتية:

$$\frac{3}{x-5} \leq 2$$

الحل :

الحالة الأولى :

$$x - 5 > 0$$

$$\therefore x > 5$$

(لاحظ شكل 20) (1) ..

بضرب طرفي المتباينة في $(x - 5)$ وفي هذه الحالة لا تتغير علامات

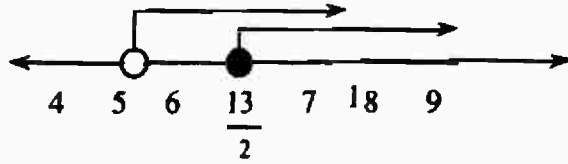
المتباينة.

$$3 \leq 2(x - 5)$$

$$3 \leq 2x - 10$$

$$\therefore x \geq \frac{13}{2}$$

(لاحظ شكل 20) (2)



شكل 20

لاحظ أن الشرط رقم (2) في هذه الحالة يحقق الشرط رقم (1)

$$\therefore x \geq \frac{13}{2} \quad \text{I}$$

الحالة الثانية:

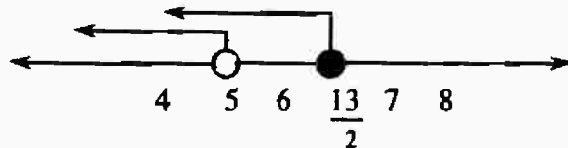
$$x - 5 < 0$$

$$\therefore x > 5 \quad \text{.. (3) (لاحظ شكل 21)}$$

بضرب المتباينة في $(x - 5)$ وفي هذه الحالة تنعكس علامة المتباينة

$$\therefore 3 \geq 2x - 10$$

$$\therefore x \leq \frac{13}{2} \quad \text{.. (4) (لاحظ شكل 21)}$$



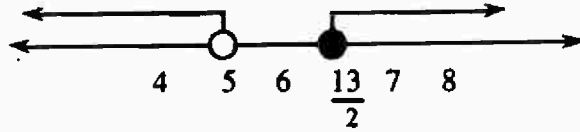
شكل 21

لاحظ أن الشرط رقم (3) يحقق الشرط رقم (4)

$$\therefore x < 5 \quad \text{II}$$

∴ مجموعة الحل هي كلا الشرطين I, II معا وتكتب:

$$\{ x : x \geq \frac{13}{2} \cup x < 5 \} \quad \text{..... (لاحظ شكل 22)}$$



شكل 22

ملحوظة :

يمكن حل نفس المثال بطريقة النقاط الحرجة في متباينات الدرجة الثانية والتي سيأتى ذكرها فيما بعد.

المتباينات المتكونة من ثلاثة أجزاء:

مثال :

حل المتباينة الآتية:

$$7 > 2x + 1 > -3$$

الحل:

يمكن حل المتباينة بتقسيمها إلى متباينتين هما :

$$7 > 2x + 1 , 2x + 1 > -3$$

وحيث إنه يتم على كل منهما نقتي الإجراء. فيتم في الإجراء الأول إضافة:

-1 إلى كل منهما لتصبحا :

$$6 > 2x , 2x > -4$$

ويتم في الإجراء الثاني القسمة على 2 لتكونا:

$$3 > x , x > -2$$

لذا يتم التعامل مع المتباينة كلها مرة واحدة بنفس الاجراءات وهي:

$$7 > 2x + 1 > -3$$

بإضافة -1 :

$$6 > 2x > -4$$

القسمة على 2 :

$$3 > x > -2$$

وتكون مجموعة الحل هي :

$$\{ x : 3 > x > -2 \}$$

تمارين (9)

أوجد حل المتباينات الآتية وكتابة الفترة في كل منها والرسم على الأعداد :

1- $x - 10 \geq 2$

2- $x + 4 > 1$

3- $x - 6 \geq -3$

4- $x + 4 < -2$

5- $2x > 10$

6- $-2x \leq -3$

7- $4x + 2 \geq 2x + 6$

8- $6(x - 4) \geq 6$

9- $8x - 7 \geq -15$

10- $\frac{2 - 3x}{x - 3} \leq -2$

11- $5(x + 1) - x \leq 1 - 2x$

12- $9x - (2x + 3) \leq x + 8$

13- $\left\{x : \frac{x - 3}{2} < 2\right\} \cap \left\{x : 3(2 - x) + 5 \leq 17\right\}$

14- $A = \{x : -1 < x < 1\}$

إذا كان

$B = \{x : -3 \leq x \leq -1\}$

أوجد:

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A - B$$

$$B - A, \quad A \cup B \cap \phi.$$

15 - أوجد حل المتباينة :

$$3 \leq 4x - 7 < 9$$

16 - أوجد حل المتباينة :

$$6 \geq 2 - 4x \geq 10$$

حل المتباينات الآتية وارسمها بيانيا ثم اكتب الحل في صورة مجموعة:

$$17- \quad \left\{ x : \frac{x-8}{5} < 2-x \right\} \cup \left\{ x : \frac{x}{4} + 3 < 7 \right\}$$

$$18- \quad \left\{ x : \frac{x-8}{4} \leq -4 \right\} \cap \left\{ x : 6(3-x) < -18 \right\}$$

$$19- \quad \left\{ x : \frac{2x-8}{4} < 3-x \right\} \cup \left\{ x : 6(3-x) < -18 \right\}$$

$$20- \quad \left\{ x : 2x - 1 \leq 2-x \right\} \cup \left\{ x : 3x + 4 \leq 2x + 1 \right\}$$

$$21- \quad -5 \leq \frac{2x-1}{3} < 3$$

$$22- \quad 0 \leq 3(5-x) - 9 < 6$$

$$23- \quad -2 \leq \frac{3x-2}{4} < 1$$

$$24- \quad 0 \leq 4(-x-3) - 8 \leq 4$$

متباينات من الدرجة الثانية في مجهول واحد :

يوضح حل هذا النوع من المتباينات الأمثلة الآتية:-

مثال :

أوجد حل المتباينة الآتية:

$$x^2 + 3x - 10 > 0$$

الحل :

$$x^2 + 3x - 10 > 0$$

يمكن تحليلها إلى أقواس على الصورة التالية:

$$(x + 5)(x - 2) > 0$$

يوجد احتمالين للحل :

1- إشارة كل من القوسين موجبة ليكون حاصل ضرب القوسين أكبر من الصفر.

1- إشارة كل من القوسين سالبة ليكون حاصل ضرب القوسين أكبر من الصفر الاحتمال الأول.

1- إشارة كل من القوسين موجبة :

وهذا معناه أن كل قوسين على حده أكبر من الصفر وبالتالي:

$$\begin{array}{l} x + 5 > 0 \quad , \quad x - 2 > 0 \\ \therefore x > -5 \quad \quad \quad \therefore x > 2 \end{array}$$

ويمكن اعتبار أن $x > 2$ هو حل لهذا الاحتمال لأنه يكون أيضا محققا

للشرط الآخر $x > -5$ وهذا يتضح بعد التمثيل على خط لأعداد كما هو موضح بشكل 23.

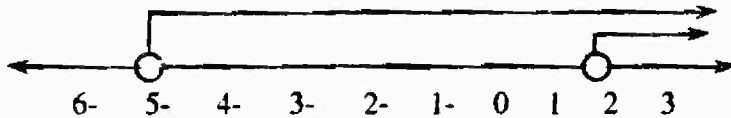
وللتحقق من الحل:

نضع $x = 3$ في المتباينة

$$\therefore (3)^2 + 3(3) - 10 > 0$$

$$18 - 10 \stackrel{?}{>} 0$$

$$8 > 0$$



شكل 23

$\therefore x > 2$ يكون حلا للاحتمال الأول.

إشارة كل من القوسين سالبة:

وهذا معناه أن كل قوس على حده صفر من الصفر وبالتالي:-

$$x + 5 > 0 \quad , \quad x - 2 < 0$$

$$x < -5 \quad \therefore x < 2$$

ويمكن إعتبار أن $x < -5$ هو حل لهذا الاحتمال لأنه يكون أيضا محققا

للشرط الآخر $x < 2$ كما هو موضح بشكل 24.

وللتحقق من الحل:

نضع $x = -6$ في المتباينة

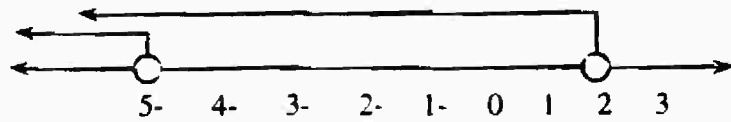
$$\therefore (-6)^2 + 3(-6) - 10 \stackrel{?}{>} 0$$

$$36 - 28 \stackrel{?}{>} 0$$

$$8 > 0$$

$\therefore x < -5$ يكون حلا للاحتمال الثاني

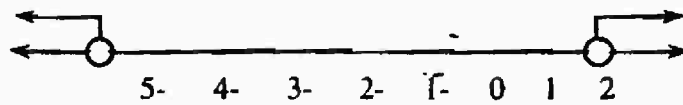
- 100 -



شكل 24

وبالتالى تكون مجموعة الحل هي :

$X = \{ x : -5 < x < 2 \}$ (لاحظ شكل 25)



شكل 25

مثال :

حل المتباينة الآتية:

$$2x^2 - 2x \leq 24$$

الحل:

$$2x^2 - 2x - 24 \leq 0$$

بقسمة المتباينة على 2

$$x^2 - x - 12 \leq 0$$

$$(x + 3)(x - 4) \leq 0$$

يوجد احتمالين للحل :

1 - اشارة أحد القوسين موجب والآخر سالب ليكون حاصل ضرب القوسين

سالبا أى أقل من الصفر.

2 - عكس الحالة الأولى أى القوس الذى كان موجبا يكون سالبا والقوس

الذى، ان سالبا يكون موجبا ليكون حاصل ضرب القوسين سالبا أى أقل من الصفر.

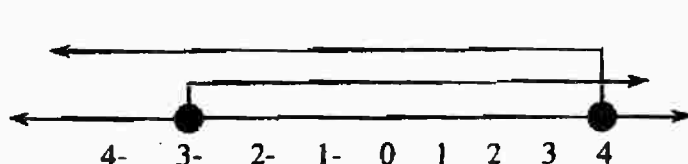
الاحتمال الأول. الذى يوضحه شكل 26:

$$x + 3 \geq 0$$

$$x \geq -3$$

$$x - 4 \leq 0$$

$$x \leq 4$$



شكل 26

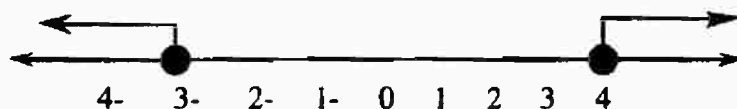
الاحتمال الثانى: الذى يوضحه شكل 27 :

$$x + 3 \leq 0$$

$$x \leq -3$$

$$x - 4 \geq 0$$

$$x \geq 4$$



شكل 27

نجد أن كل من الحلين مخالف للحل الآخر وبالتالى نلجأ للتحقق منهما.

للتحقق من حل الاحتمال الأول

نضع $x = 0$ فى المتباينة لأنها تحقق شرطى هذا الاحتمال وهما $x \leq 4$.

$$\therefore (0)^2 - (0) - 12 \stackrel{?}{\leq} 0$$

$$-12 \leq 0$$

$\therefore$ حل الاحتمال الأول يحقق المتباينة.

يمكن أيضا التحقق من حل الاحتمال الثانى.

نضع $5 =$ فى المتباينة

$$\therefore (5)^2 - 5 - 12 \stackrel{?}{\leq} 0$$

$$25 - 17 \stackrel{?}{\leq} 0$$

$$8 \geq 0$$

$\therefore$ لا تتحقق المتباينة عند $5 =$ وبالتالي حل الاحتمال الثانى مرفوض.

ملحوظة: يكتفى بالتحقق من صحة المتباينة بوضع $x = 5$ والتي بينت

أن المتباينة لا تتحقق بهذا الحل ولا داعى للتحقق من الشرط الثانى لهذا الاحتمال

أى بوضع $x = -4$ فى المتباينة لأن رفض حل الشرط الأول ($x \geq 4$) يلغى حل

الشرط الثانى ($x \leq -3$) حتى ولو كان صحيحا، لأنه بالضرورة تحقق الشرطين.

استخدام النقاط الحرجة لحل متباينات الدرجة الثانية:

يمكننا حل مثال 1 باستخدام النقاط الحرجة كالآتى:

$$x^2 + 3x - 10 > 0$$

$$(x + 5)(x - 2) > 0$$

لإيجاد النقاط الحرجة:

$$(x + 5)(x - 2) = 0$$

$$\therefore (x + 5) = 0$$

$$x = -5$$

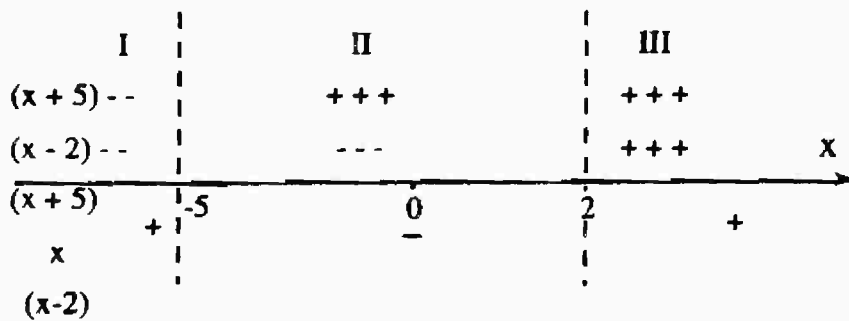
أو

$$(x - 2) = 0$$

$$x = 2$$

نوقع النقطتين $x = -5$ ، $x = 2$ على خط الأعداد ليقسما مجموعة

الأعداد الحقيقية إلى ثلاثة مناطق كما بالشكل 28 ونحدد إشارة كل قوس في المناطق الثلاثة I, II, III.



شكل 28

في المنطقة I:

ضع $x = -6$ ممثلة للمنطقة I نجد أن إشارة القوس $(x+5)$ سالبة وإشارة القوس $(x-2)$ أيضا سالبة كما بالشكل

في المنطقة II:

ضع $x = 0$ ممثلة للمنطقة II نجد أن إشارة القوس $(x+5)$ موجبة وإشارة القوس $(x-2)$ سالبة.

في المنطقة III:

ضع $x = 3$ ممثلة لهذه المنطقة نجد أن إشارة القوس $(x+5)$ موجبة

وإشارة القوس $(x - 2)$ سالبة.

نوجد حاصل ضرب اشارتى القوسين $(x - 2) \times (x + 5)$ أسفل خط الأعداد كما هو واضح بالشكل نجد أن :

المنطقة I، والمنطقة III حاصل ضرب اشارتى القوسين موجبا. أما المنطقة II فيكون حاصل ضرب إشارتى القوسين سالبا.

وعلى ذلك نجد أن الحل المطلوب لتحقيق المتباينة تحققه المنطقة I والمنطقة III حيث يكون حاصل ضرب اشارتى القوسين موجبا. ويكون الحل العام على الصورة التالية:

$$X = \{ x : x \leq 5 \} \cup \{ x : x \geq 2 \}$$

وهو نفس الحل السابق بالطريقة الأولى.

مثال 2 :

أوجد حل المتباينة الآتية :

$$\frac{3}{x - 5} \leq 2$$

الحل :

من الممكن أن يكون $x - 5 > 0$ كحالة أولى

وأیضا $x - 5 < 0$ كحالة ثانية (وهى كمية سالبة)

وبالتالى فإن : $(x - 5)^2 > 0$

∴ بضرب طرفى المتباينة $x (x - 5)^2$ لا یغیر من إتجاه المتباينة.

$$\therefore (x - 5)^2 \frac{3}{x - 5} \leq 2 (x - 5)^2$$

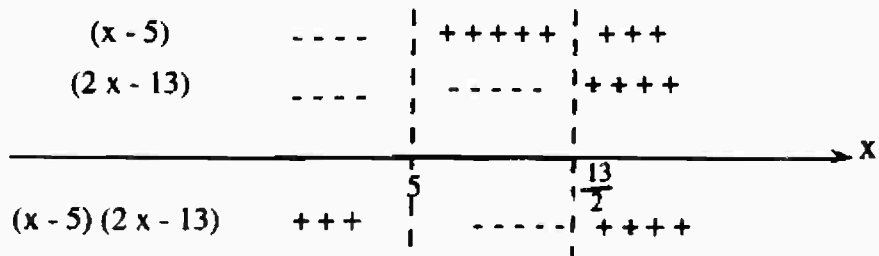
$$3x - 15 \leq 2x^2 - 20x + 50$$

$$0 \leq 2x^2 - 23x + 65$$

$$0 \leq (2x - 13)(x - 5)$$

∴ النقاط الحرجة هي: $x = \frac{13}{2}$, $x = 5$

بتوزيع النقاط الحرجة على خط الأعداد ينقسم إلى ثلاث مناطق شكل 29



شكل 29

∴ مجموعة الحل التي تحقق المتباينة هي:

$$X = \left\{ x : x < 5 \cup x \geq \frac{13}{2} \right\}$$

تمارين (10)

أوجد حل المتباينات الآتية :

1- $\frac{x}{x-3} < 4$

2- $(x-4)(x+2) \leq 0$

3- $x^2 - 1 > 0$

4- $x^2 - 1 < 0$

5- $x^2 - 7x + 10 > 0$

6- $x^2 - 25 < 0$

7- $x^2 - 25 > 0$

8- $2x^2 + 11x - 21 \geq 0$

9- $x^2 - 3x + 2 \leq 0$

10- $x^2 - 9 \leq 0$

11- $x^2 - 9 \geq 0$

12- $\frac{\frac{1}{2}x - 3}{x+4} > 0$

13- $3x^2 - 2 < 0$

14- $x^2 + 3x - 10 \leq 0$

15- $\frac{2}{x} < \frac{3}{x-4}$

القيمة المطلقة :

لأى عدد حقيقي x قيمة مطلقة يرمز لها بالرمز $|x|$. والتي تعرف على النحو التالي:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

فمثلا :

$$|-5| = 5, |7 - 9| + |-2| = 2$$

$$|-\sqrt{2}| = \sqrt{2}, \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

مثال 1 :

إذا كانت $x = 2$, $y = 3$ أوجد :

$$|x|, |y|, |x+y|, |x|+|y|$$

الحل :

$$|x| = |2| = 2$$

$$|y| = |3| = 3$$

$$|x+y| = |2+3| = |5| = 5$$

$$|x|+|y| = 2+3 = 5$$

$$\therefore |x+y| = |x|+|y|$$

مثال 2 :

إذا كانت $x = -2$, $y = -3$ أوجد :

$$|x|, |y|, |x+y|, |x|+|y|$$

الحل:

$$|x| = |-2| = 2$$

$$|y| = |-3| = 3$$

$$|x + y| = |-2 - 3| = |-5| = 5$$

$$|x| + |y| = 2 + 3 = 5$$

$$\therefore |x + y| = |x| + |y|$$

مثال 3:

إذا كانت $x = -2$, $y = 3$ أوجد :-

$$|x| , |y| , |x + y| , |x| + |y|$$

الحل :

$$|x| = |-2| = 2$$

$$|y| = |3| = 3$$

$$|x + y| = |-2 + 3| = |1| = 1$$

$$|x| + |y| = 2 + 3 = 5$$

$$\therefore |x + y| < |x| + |y|$$

مثال 4 :

إذا كانت $x = 2$, $y = -3$ أوجد :

$$|x| , |y| , |x + y| , |x| + |y|$$

الحل:

$$|x| = |2| = 2$$

$$|y| = |-3| = 3$$

$$|x + y| = |2 + (-3)| = |-1| = 1$$

$$|x| + |y| = 2 + 3 = 5$$

$$\therefore |x + y| < |x| + |y|$$

الاستنتاج العام :

نستنتج من الأمثلة السابقة أن :

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

فإذا كان كل من x , y عدد حقيقيا فإنه يمكن استنتاج الخواص التالية:-

$$1- \quad |x| \geq 0 \quad , \quad -|x| \leq x \leq |x|$$

$$2- \quad |x| = 0 \rightarrow x = 0$$

$$3- \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$4- \quad |x - y| = |y - x|$$

$$5- \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad , \quad y \neq 0$$

وتستخدم القواعد الآتية في حل المتباينات:

$$I \quad |x| < A \rightarrow -A < x < A \rightarrow x \in (-A, A)$$

$$II \quad |x| \leq A \rightarrow -A \leq x \leq A \rightarrow x \in (-A, A]$$

$$III \quad |x| > A \rightarrow x > A \text{ أو } x < -A$$

$$IV \quad |x| \geq A \rightarrow x \geq A \text{ أو } x \leq -A$$

حيث A عدد حقيقى ، x تعبر عن فترة المتباينة وجميع الخواص والقواعد

السابقة مشتقة من التعريف للقيمة المطلقة.

مثال 5 :

حل المعادلة الآتية :

$$|2 - x| = 3$$

الحل :

$$2 - x = \pm 3$$

$$2 - x = 3$$

$$\therefore x = -1$$

$$, 2 - x = -3$$

$$\therefore x = 5$$

مجموعة الحل هي :

$$\{ -1, 5 \}$$

مثال 6 :

حل المعادلة الآتية :-

$$|2x - 1| = |1 - x|$$

الحل :

$$(2x - 1)^2 = (1 - x)^2$$

$$(2x - 1)^2 = (1 - x)^2$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 1 - 2x + x^2$$

$$3x^2 - 2x = 0$$

$$x(3x - 2) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ I}$$

$$, (3x - 2) = 0$$

$$\therefore x = \frac{2}{3} \text{ II}$$

$\therefore$ مجموعة الحل هي :

$$x = \left\{ 0, \frac{2}{3} \right\}$$

لاحظ أن تربيع القيمة المطلقة للطرفين في المعادلة تلغى علامة المقياس.

مثال 7 :

حل المتباينة الآتية :-

$$\left| \frac{2x+5}{7} \right| < 3$$

الحل :

$$-3 < \frac{2x+5}{7} < 3$$

$$-21 < 2x + 5 < 21$$

$$-26 < 2x < 16$$

$$-13 < x < 8$$

مثال 8 :

حل المتباينة الآتية :-

$$|1-x| > |2x-1|$$

الحل :

بتربيع الطرفين :

$$\therefore (1-x)^2 > (2x-1)^2$$

$$1 - 2x + x^2 > 4x^2 - 4x + 1$$

$$0 > 3x^2 - 2x$$

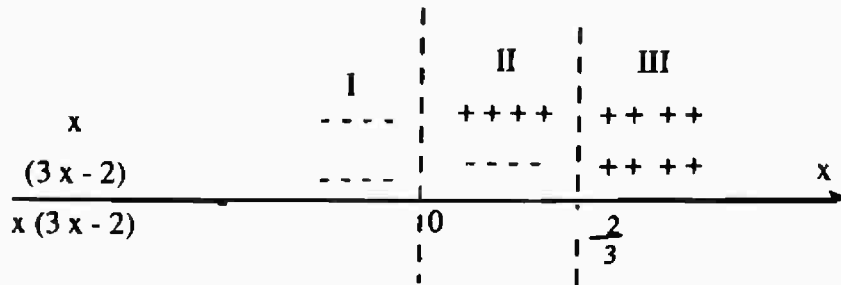
$$0 > x(3x-2)$$

النقاط الحرجة هي:

$$x = 0 , \quad x = \frac{2}{3}$$

بوضع قيم x الحرجة على خط الأعداد وإيجاد إشارتي x , $(3x - 2)$ في

الثلاث مناطق شكل 30.



شكل 30

∴ مجموعة الحل هي : $x = \left\{ 0 , \frac{2}{3} \right\}$

تمارين (11)

١- عبر عن كل مما يأتي:

(a) $|17|$

(b) $|-26|$

(c) $\left| -\frac{2}{3} \right|$

(d) $\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right|$

(e) $\left| \frac{2}{3} \right| + \left| -\frac{1}{2} \right|$

(f) $|\sqrt{2} - 2|$

(g) $|\pi - 4|$

2 - عبر عن كل مجموعة مما يأتي بشكل فترة أو مجموعة فترات :

(a) $\{x : |x - 1| > 2\}$

(b) $\{x : |x - 1| < 4\}$

(c) $\{x : |x - 2| \geq 5\}$

3- أوجد مجموعة الحل للمتباينات الآتية :

(a) $|x - 3| \leq 4$

(e) $|x + 2| > 3$

(b) $|2x - 5| < 1$

(f) $|3x - 1| \geq |5x + 2|$

(c) $|3x - 7| < 5$

(g) $|3x - 2| \geq 6$

(d) $\left| \frac{3 - x}{5} \right| \geq 1$

(h) $\left| 2x - \frac{1}{3} \right| \leq \frac{3}{2}$

4- أوجد مجموعة الحل للمتباينات الآتية:

(a) $\frac{x}{x-1} \geq 0$

(c) $\frac{x+1}{2-x} \leq 3$

(b) $\frac{x}{x-2} \geq 2$

(d) $\frac{1}{x} \geq 4$

5- إذا كانت :

$$I_1 = \{x : |x-1| \leq 5\}$$

$$I_2 = \{x : |2x+1| > 2\}$$

أكتب كل من I_1 , I_2 على شكل فترات ثم أوجد :

$$I_1 \cap I_2 , I_1 \cup I_2 , I_1 , - I_2$$

6- أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية :

(a) $|6x-2| = 7$

b- $|6x-7| = |3+2x|$

(c) $|9x-11| = x$

d - $\left| \frac{x+5}{2-x} \right| = 6$

الكسور الجزئية

المتطابقة :

هى عبارة عن معادلة متساوية لجميع قيم المتغير. فمثلا:-

$$3x - 1 = A_1(x - 1) + A_2(x - 2)$$

تعبّر عن متطابقة تحتوى على الثوابت A_2, A_1

طرق تعيين الثوابت:

الطريقة الأولى:-

نعرض عن قيم للمتغير x بحيث تلغى أقواسا فتقل عدد الثوابت (عدد المجاهيل) ليصبح ثابتا واحدا عن كل تعويض يمكن إيجاد قيمته بسهولة. كالآتي:-

بوضع $x = 1$ فى طرفى المتطابقة :-

$$3(1) - 1 = A_1(1 - 1) + A_2(1 - 2)$$

$$2 = 0 - A_2$$

$$\therefore A_2 = -2$$

بوضع $x = 2$ فى طرفى المتطابقة :-

$$3(2) - 1 = A_1(2 - 1) + A_2(2 - 2)$$

$$5 = A_1$$

$$\therefore A_1 = 5$$

الطريقة الثانية :-

بمساواة معاملات x فى الطرفين لجميع قوى x المختلفة :

$$\begin{aligned} 3x - 1 &= A_1 x - A_1 + A_2 x - 2 A_2 \\ &= (A_1 + A_2) x - A_1 - 2 A_2 \end{aligned}$$

$$\therefore 3 = A_1 + A_2 \quad (1)$$

$$-1 = -A_1 - 2 A_2 \quad (2)$$

بجمع المعادلتين (1) , (2)

$$\therefore - A_2 = 2$$

$$\therefore A_2 = -2$$

بالتعويض عن قيمة A_2 فى المعادلة (1)

$$\begin{aligned} A_1 &= 3 - A_2 \\ &= 3 - (-2) = 5 \end{aligned}$$

مثال 2 :

أوجد قيم الثوابت فى المتطابقة الآتية:

$$x^2 + 2x + 1 = A_1 (x + 1) + A_2 (x - 2)$$

الحل :

ضع $x = -1$ فى الطرفين :-

$$(-1)^2 + 2(-1) + 1 = A_1 (-1 + 1) + A_2 (-1 - 2)$$

$$0 = -3 A_2$$

$$\therefore A_2 = 0$$

ضع $x = 2$ فى الطرفين :

$$(2)^2 + 2(2) + 1 = A_1 (2+1) + A_2 (2-2)$$

$$9 = 3A_1$$

$$\therefore A_1 = 3$$

مثال 3 :

أوجد قيم الثوابت في المتطابقة :-

$$5x - 1 = A_1 (x - 1) (x - 2) + A_2 (x - 2) (x + 3) + A_3 (x - 1) (x + 3)$$

الحل :

ضع $x = 1$ في الطرفين

$$5(1) - 1 = A_1(1-1)(1-2) + A_2(1-2)(1+3) + A_3(1-1)(1+3)$$

$$5 - 1 = 0 + A_2(-1)(4) + 0$$

$$4 = -4A_2$$

$$\therefore A_2 = -1$$

ضع $x = 2$ في الطرفين :-

$$5(2) - 1 = A_1(2-1)(2-2) + A_2(2-2)(2+3) + A_3(2-1)(2+3)$$

$$10 - 1 = 0 + 0 + A_3(1)(5)$$

$$9 = 5A_3$$

$$A_3 = \frac{9}{5}$$

ضع $x = -3$ في الطرفين :-

$$5(-3) - 1 = A_1(-3-1)(-3-2) + A_2(-3-2)(-3+3) + A_3(-3-1)(-3+3)$$

$$-15 - 1 = A_1(-4)(-5) + 0 + 0$$

$$-16 = A_1(20)$$

$$A_1 = \frac{-16}{20} = \frac{-4}{5}$$

الكسور الجزئية :

تعرف الكسور الجزئية على إنها خارج قسمة كثيرتى الحدود. ويسمى الكسر بالكسر الحقيقي إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام، ويسمى بالكسر الغير حقيقى عندما يكون درجة البسط أكبر من أو يساوى درجة المقام. ويمكن كتابة الكسر الغير حقيقى على صورة حاصل جمع كثيرة الحدود بالاضافة الى كسر حقيقى. ومثال ذلك:

$$\frac{x^2 + 3x + 5}{x + 2} = (x + 1) + \frac{3}{x + 2}$$

كسر حقيقى + كثيرة الحدود = كسر غير حقيقى

ويمكن جمع اثنين أو أكثر من الكسور الحقيقية للحصول على كسر حقيقى واحد. بإيجاد المقام المشترك ثم يتم الجمع كالاتى:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x + 2} + \frac{2}{3x + 2} &= \frac{3x + 2 + 2(x + 2)}{(x + 2)(3x + 2)} \\ &= \frac{5x + 6}{(x + 2)(3x + 2)} \end{aligned}$$

وموضوعنا الحالى هو عكس هذه العملية (عكس هذا الاجراء) أى تجزئة الكسر الحقيقي الى كسور حقيقة. ويتم ذلك كالاتى:

الحالة الأولى:

حالة جميع عوامل المقام من الدرجة الأولى حقيقية ومختلفة:

$$F(x) / \phi(x) = \text{الكسر}$$

نفرض أن الكسر = $F(x) / \phi(x)$ حيث المقام كثيرة الحدود من الدرجة n والتي يمكن تحليلها إلى n من

العوامل الأولية الحقيقية من الدرجة الأولى على الصورة:

$$\phi(x) = (x - x_1)(x - x_2)$$

حيث يمكن كتابة الكسر على الصورة :-

$$\frac{F(x)}{\phi(x)} = \frac{F(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\dots\dots(x-x_n)}$$

ويمكن وضعها على صورة مجموع كسور حقيقية :

$$\frac{F(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\dots\dots(x-x_n)} = \frac{A_1}{(x-x_1)} + \frac{A_2}{(x-x_2)} + \dots + \frac{A_n}{(x-x_n)}$$

وبعد ذلك يتم توحيد المقام في الطرف الأيمن ومساواة البسط في الطرف

الأيمن بالبسط في الطرف الأيسر. نحصل على:

$$\begin{aligned} F(x) &= A_1(x-x_2)(x-x_3)\dots\dots(x-x_n) \\ &+ A_2(x-x_1)(x-x_3)\dots\dots(x-x_n) \\ &+ A_3(\quad)(\quad)(\quad) \\ &+ A_n(x-x_1)(x-x_2)\dots\dots(x-x_n) \end{aligned}$$

وبمساواة قوى x المختلفة في الطرفين نحصل على n من المعادلات

والتي يحلها نحصل على الثوابت $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$

ويمكن الحصول على هذه القيم بطريقة أخرى. وذلك بوضع $x = x_1$ في

المتطابقة السابقة يتم الحصول على :

$$F(x_1) = A_1(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\dots\dots(x_1 - x_n)$$

$$A_1 = \frac{F(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\dots\dots(x_1 - x_n)}$$

وبالمثل بوضع $x = x_2$ يمكن تعيين : A_2 :-

$$A_2 = \frac{F(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\dots\dots(x_2 - x_n)}$$

وهكذا يمكن تعيين الثوابت (A) وسوف نوضح هذا في المثال الآتي.

مثال 1

حلل الكسر :

$$\frac{5x + 2}{(x + 2)(3x - 2)}$$

إلى كسوره الجزئية

الحل :

$$\begin{aligned} \frac{5x + 2}{(x + 2)(3x - 2)} &= \frac{A_1}{(x + 2)} + \frac{A_2}{(3x - 2)} \quad (1) \\ &= \frac{A_1(3x - 2) + A_2(x + 2)}{(x + 2)(3x - 2)} \end{aligned}$$

∴ بسط الطرف الأيمن = بسط الطرف الأيسر

$$\therefore 5x + 2 = A_1(3x - 2) + A_2(x + 2)$$

ضع $x = -2$ في الطرفين

$$5(-2) + 2 = A_1(3(-2) - 2) + 0$$

$$-8 = -8A_1$$

$$A_1 = \frac{-8}{-8} = 1$$

ضع $x = \frac{2}{3}$ في الطرفين

$$5\left(\frac{2}{3}\right) + 2 = A_1\left(3\left(\frac{2}{3}\right) - 2\right) + A_2\left(\frac{2}{3} + 2\right)$$

$$\frac{10 + 6}{3} = 0 + A_2\left(\frac{2 + 6}{3}\right)$$

$$A_2 = \frac{16}{8} = 2$$

بالتعويض فى المعادلة (1)

$$\therefore \frac{5x+2}{(x+2)(3x-2)} = \frac{1}{x+2} + \frac{2}{(3x-2)}$$

مثال 2 :

حلل الكسر

$$\frac{2x+3}{(x-1)(x+1)(x-2)}$$

الى كسور الجزئية :

الحل :

$$\frac{2x+3}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x+1)} + \frac{A_3}{(x-2)} \quad (1)$$

$$= \frac{A_1(x+1)(x-2) + A_2(x-1)(x-2) + A_3(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x-2)}$$

$$\therefore 2x+3 = A_1(x+1)(x-2) + A_2(x-1)(x-2) + A_3(x-1)(x+1)$$

ضع $x = -1$ فى الطرفين

$$2(-1)+3 = A_1(-1+1)(-1-2) + A_2(-1-1)(-1-2) + A_3(-1-1)(-1+1)$$

$$\therefore 1 = 0 + 6A_2 + 0$$

$$A_2 = \frac{1}{6}$$

ضع $x = 1$

$$\therefore 2(1)+3 = A_1(1+1)(1-2) + 0 + 0$$

$$5 = -2A_1$$

$$A_1 = -\frac{5}{2}$$

ضع $x = 2$

$$2(2) + 3 = A_1 (2+1) (2-2) + A_2 (2-1) (2-2) + A_3 (2-1) (2+1)$$

$$7 = 0 + 0 + 3A_3$$

وبالتعويض في المعادلة (1)

$$\therefore \frac{2x+3}{(x-1)(x+1)(x-2)} = -\frac{5}{2(x-1)} + \frac{1}{6(x+1)} + \frac{7}{3(x-2)}$$

حل آخر :

لايجاد قيمة A_1 نعوض عن $x = 1$ في الطرف الأيسر ما عدا

المقدار $(x-1)$:

$$\therefore A_1 = \left[\frac{2x+3}{(x+1)(x-2)} \right]_{x=1}$$

$$= \left[\frac{2(1)+3}{(1+1)(1-2)} \right] = -\frac{5}{2}$$

لايجاد قيمة A_2 نعوض عن $x = -1$ في الطرف الأيسر ما عدا

المقدار $(x+1)$:-

$$A_2 = \left[\frac{2x+3}{(x-1)(x-2)} \right]_{x=-1}$$

$$= \left[\frac{2(-1) + 3}{(-1-1)(-1-2)} \right] = \frac{1}{(-2)(-3)} = \frac{1}{6}$$

لايجاد قيمة A_3 نعوض عن $x = 2$ فى الطرف الأيسر ما عدا

المقدار $(x-2)$:-

$$A_3 = \left[\frac{2x + 3}{(x - 1)(x + 1)} \right]_{x=2}$$

$$= \left[\frac{2(2) + 3}{(2-1)(2+1)} \right] = \frac{7}{(1)(3)} = \frac{7}{3}$$

بالتعويض فى المعادلة (1)

$$\therefore \frac{2x + 3}{(x - 1)(x + 1)(x - 2)} = \frac{-5}{2(x-1)} + \frac{1}{6(x+1)} + \frac{7}{3(x-2)}$$

وعلى الطالب تطبيق هذه الطريقة على الأمثلة السابقة.

الحالة الثانية :

بعض عوامل المقام من الدرجة الأولى ولكنها متساوية -

مثال ذلك كسر حقيقى على الصورة :-

$$\frac{x^2 + x + 2}{(x - 1)^3 (x - 2)}$$

نضع العامل المكرر $y = x - 1$

نحول الكسر من داله فى x إلى داله فى y كالآتى :-

$$\begin{aligned}\frac{x^2 + x + 2}{(x - 1)^3 (x - 2)} &= \frac{(y + 1)^2 + y + 1 + 2}{y^3 (y - 1)} \\&= \frac{y^2 + 2y + 1 + y + 1 + 2}{y^3 (y - 1)} \\&= \frac{4 + 3y + y^2}{y^3 (y - 1)}\end{aligned}$$

بقسمة البسط $(4 + 3y + y^2)$ على $(y - 1)$ ونستمر في عملية القسمة حتى نحصل على باقى يحتوى على y مرفوع لأس يساوى درجة العامل المكرر وهو 3 ليكون الكسر على هذه الصورة:-

$$\begin{aligned}\frac{4 + 3y + y^2}{y^3 (y - 1)} &= \frac{1}{y^3} \left[-4 - 7y - 8y^2 + \frac{8y^3}{-1 + y} \right] \\&= \frac{-4}{y^3} - \frac{7}{y^2} - \frac{8}{y} + \frac{8}{-1 + y}\end{aligned}$$

وبإرجاع قيم مرة ثانية نجد أن الكسر يساوى :

$$\frac{4 + 3y + y^2}{y^3 (y - 1)} = \frac{-4}{(x - 1)^3} - \frac{7}{(x - 1)^2} - \frac{8}{(x - 1)} + \frac{8}{(x - 2)}$$

أى أن العامل المكرر $(x - 1)^3$ فى المقام بناظره ثلاثة كسور جزئية على

الصورة :-

$$\frac{A_1}{(x - 1)^3} + \frac{A_2}{(x - 1)^2} + \frac{A_3}{x - 1}$$

- 125 -

وبوجه عام فإن لدينا القاعدة الآتية :-

كل عامل في المقام على الصورة $(x - A)^r$ يقابله r من الكسور الجزئية

على الصورة :-

$$\frac{A_1}{(x - A)^r} + \frac{A_2}{(x - A)^{r-1}} + \dots + \frac{A_r}{(x - A)}$$

ويتضح هذا من المثال الآتى:

مثال :

حلل الكسر :-

$$\frac{2x + 1}{(x + 1)(x^2 - 3x - 4)}$$

إلى كسوره الجزئية

الحل:

$$\frac{2x + 1}{(x + 1)(x^2 - 3x - 4)} = \frac{2x + 1}{(x + 1)(x + 1)(x - 4)}$$

$$= \frac{2x + 1}{(x + 1)^2 (x - 4)}$$

$$\therefore \frac{2x + 1}{(x + 1)^2 (x - 4)} = \frac{A_1}{(x + 1)^2} + \frac{A_2}{x + 1} + \frac{A_3}{x - 4} \quad (1)$$

ضرب الطرفين $(x + 1)^2 (x - 4)$

$$\therefore 2x + 1 = A_1 (x - 4) + A_2 (x + 1)(x - 4) + A_3 (x + 1)^2$$

ضع $x = -1$ فى الطرفين :

$$2(-1) + 1 = A_1(-1 - 4) + A_2(-1 + 1)(-1 - 4) + A_3(-1 + 1)^2$$
$$-1 = -5A_1 + 0 + 0$$

$$A_1 = \frac{1}{5}$$

ضع $x = 4$ فى الطرفين :-

$$2(4) + 1 = A_1(4 - 4) + A_2(4 + 1)(4 - 4) + A_3(4 + 1)^2$$
$$9 = 0 + 0 + 25A_3$$

$$A_3 = \frac{9}{25}$$

ضع $x = 0$ مع التعويض عن قيم A_3 , A_1 :-

$$2(0) + 1 = A_1(0 - 4) + A_2(0 + 1)(0 - 4) + A_3(0 + 1)^2$$
$$1 = -4A_1 - 4A_2 + A_3$$

$$1 = -4\left(\frac{1}{5}\right) - 4A_2 + \frac{9}{25}$$

$$4A_2 = \frac{9 - 20}{25} = -\frac{11}{25}$$

$$\therefore A_2 = -0.11$$

بالتعويض عن قيم A_3 , A_2 , A_1 فى المعادلة (1) :-

$$\therefore \frac{2x + 1}{(x + 1)^2(x - 4)} = \frac{1}{5(x + 1)^2} - \frac{0.11}{(x + 1)} + \frac{9}{25(x - 4)}$$

تمارين (12)

حل كل من الكسور الآتية إلى كسور جزئية: -

1- $\frac{2}{(x+1)(x-1)}$

2- $\frac{x}{x(x+2)}$

3- $\frac{2}{(x-1)(x-2)}$

4- $\frac{2x+1}{x^2+10x+21}$

5- $\frac{x+1}{(x-1)(x+2)}$

6- $\frac{2x}{x^2-x-12}$

7- $\frac{2x+3}{(x+1)(x+2)}$

8- $\frac{2x+1}{x^2-4}$

9- $\frac{x-4}{x(x-2)}$

10- $\frac{x-1}{x+1}$

11- $\frac{x+4}{x(x+2)}$

12- $\frac{x+2}{x^2-x-6}$

13- $\frac{2x+2}{x^2-x-12}$

14- $\frac{x^2+1}{x^2-5x+6}$

15- $\frac{6x}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

16- $\frac{x-1}{(3x-5)(x+2)}$

$$17- \frac{6x^2}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$18- \frac{3x^2 + 2x + 5}{x^2 - 1}$$

$$19- \frac{x^2 + 1}{x(x-1)(x+2)}$$

$$20- \frac{4x^2 + 5x + 3}{(x+1)(x-2)}$$

$$21- \frac{x+3}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$22- \frac{x^3 + 4x^4 + 3x}{x^2 + 3x + 2}$$

$$23- \frac{2x+3}{(x+2)^2(x+1)}$$

$$24- \frac{2x^3 - 3x^2 - 4x + 10}{2x^2 + x - 6}$$

الحالة الثالثة :

المقدار يحتوى على عوامل من الدرجة الثانية لا يمكن تحليلها إلى عوامل حقيقية.

فى هذه الحالة يمكن تحليل العامل إلى عاملين تخيلين فمثلا المقدار

$$(x - a)^2 + b^2 \text{ يمكن تحليله إلى عاملين تخيلين على الصورة}$$

$$[x - a + ib] [(x-a) - ib] \text{ حيث } i = \sqrt{-1}$$

أى يمكن أن يناظره كسران جزئيان على الصورة:

$$\therefore \frac{A}{(x - a) + i b} + \frac{B}{(x - a) - i b} = \frac{cx + D}{(x - a)^2 + b^2}$$

أى أن كل عامل من الدرجة الثانية لا يمكن تحليله الى عوامل حقيقيه من

الدرجة الأولى فإننا نفرض له كسر بسطه من الدرجة الأولى ومقامه نفس المقام.

مثال :

حلل الكسر الآتى :

$$\frac{2}{(x - 1) (x^2 + x - 4)}$$

إلى كسوره الجزئيه

الحل :

$$\frac{2}{(x - 1) (x^2 + x - 4)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B x + C}{(x^2 + x - 4)}$$

$$\therefore 2 = A (x^2 + x - 4) + (B x + c) (x - 1)$$

بمساواه قوى x فى الطرفين نجد أن :

- 130 -

$$0 = A + B \quad \text{معامل } x^2 \text{ يعطى}$$

$$0 = A + C - B \quad \text{معامل } x \text{ يعطى}$$

$$2 = -4A - C \quad \text{معامل } x^0 \text{ يعطى}$$

ويحل هذه المعادلات الثلاث نحصل على :-

$$A = -1, B = 1, C = 2$$

$$\therefore \frac{2}{(x-1)(x^2+x-4)} = \frac{(x+2)}{(x^2+x-4)} - \frac{1}{(x-1)}$$

تمارين (13)

حلل كل من الكسور الآتية إلى كسوره الجزئيه :

1- $\frac{2x + 2}{x^2 - x - 12}$

2- $\frac{x + 3}{(x - 1)^2 (x + 1)}$

3- $\frac{2 + x}{1 - x^3}$

4- $\frac{x^3 - x + 4}{(x - 1)(x + 1)(1 + x^2)}$

5- $\frac{2x^3 + x^2 - x - 3}{x(x - 1)(2x + 3)}$

6- $\frac{3 + x^2}{(1 - x)^2 (1 + x^2)}$