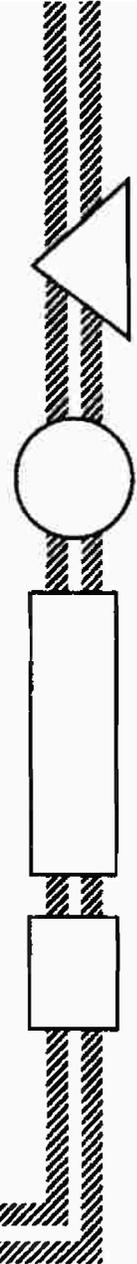


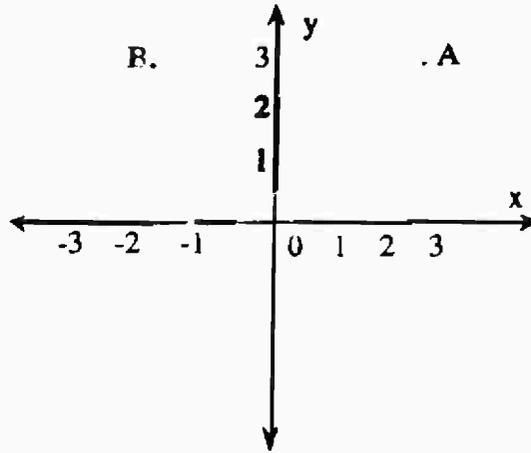
الباب الثاني

الهندسة التحليلية



نظم المحاور الكارتيديه :

تحدد المحاور الكارتيديه كما بشكل (31) من خط رأسى وخط أفقى يقسمان المستوى (ورقة الرسم) إلى أربعة أرباع. وتسمى نقطة تقاطع الخطين بنقطة الأصل ويرمز لها بالرمز "0" ويسمى الخط الأفقى بالمحور x والخط الرأسى بالمحور Y . ويدرج المحورين بوحدات مناسبة فتكون الوحدات على يمين ويسار نقطة الأصل بالوحدات الموجبه والسالبه على الترتيب للمحور x ، والوحدات أعلى وأسفل نقطة الأصل بالوحدات الموجبه والسالبه على الترتيب للمحور Y . وتتحدد أى نقطة فى هذا المستوى فى صورة أزواج من الأعداد الحقيقية وتكتب على الصورة (x, y) مثل $A(2, 3)$ أو $B(-2, 3)$ حيث يسمى العدد الأول بالإحداثى x والعدد الثانى بالإحداثى Y .



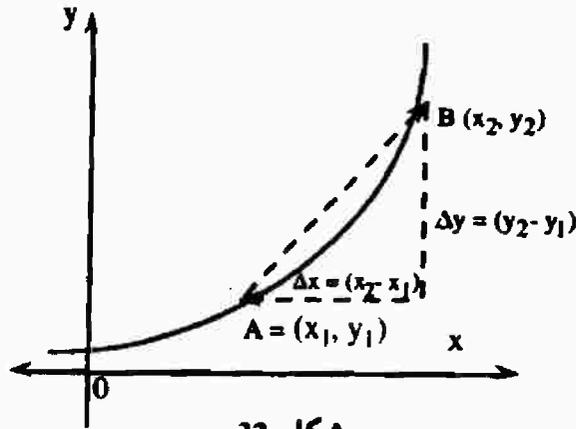
شكل 31

البعد بين نقطتين :

بأخذ محورين متعامدين يمثلان المحاور الكارتيزية $x - y$ ، وباستعمال وحدة قياسية مناسبة مدرجة عليهما يمكن تحديد الوضع الابتدائي والوضع النهائي لأي نقطة في هذا المستوى (شكل 32).

فإذا كان الوضع الابتدائي لنقطة هو : $A (x_1, y_1)$

وكان الوضع النهائي لهذه النقطة هو : $B (x_2, y_2)$



شكل 32

إن مقدار التغير في اتجاه المحور x ويرمز له بـ Δx هو :

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

ومقدار التغير في اتجاه المحور y ويرمز له بـ Δy هو :

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

وتطبيق نظرية فيثاغورث يمكن إيجاد البعد بين النقطتين \overline{AB}

$$\overline{AB} = \sqrt{\Delta(x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1)$$

مثال 1 :

إذا كانت النقطة A (-1, 2) , B (2, -2) أوجد البعد بينهما

الحل :

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 2 - (-1) = 3$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 = -2 - 2 = -4$$

∴ المسافة بين النقطتين والمعبر عنها بالطول \overline{AB} هي:

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\ &= \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = 5 \end{aligned}$$

مثال 2 :

إذا تحركت نقطة وضعها الابتدائي هو A (-2, 3) وكان التغير $\Delta x = 5$

$\Delta y = -6$ فما هو موضعها الجديد ؟

الحل :

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\therefore x_2 = \Delta x + x_1 = 5 - 2 = 3$$

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

$$y_2 = \Delta y + y_1 = -3$$

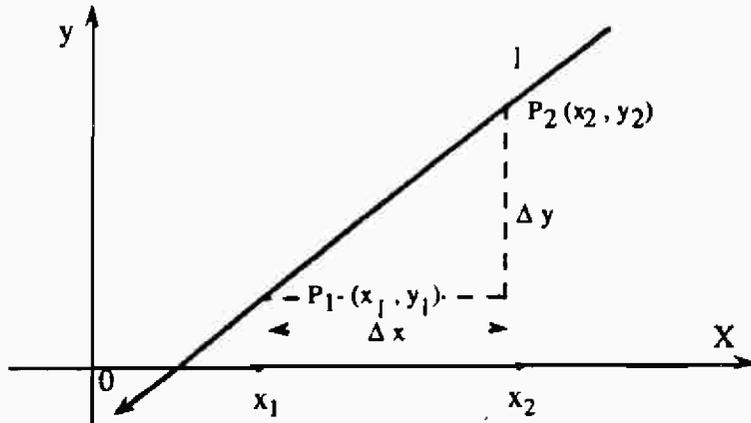
∴ الموضع الجديد للنقطة هو :

$$B (3, -3)$$

ميل الخط المستقيم :

النقطتين $P_1(x_1, y_1)$ ، $P_2(x_2, y_2)$ يمر بهما المستقيم l

شكل 33



شكل 33

نجد من الشكل أن :-

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

ويعرف ميل الخط المستقيم والذي يرمز له بـ m كالآتي:

$$m = \frac{\text{التغير في الاتجاه الرأسى}}{\text{التغير المقابل فى الاتجاه الأفقى}}$$
$$= \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (2)$$

مثال 3 :

إذا كانت $P_1(1,2)$ ، $P_2(3,8)$ نقطتين أوجد ميل المستقيم المار بهما .

الحل :

$$\begin{aligned} m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{8 - 2}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$

مثال 4 :

فى أى نقطة يقطع المستقيم 1 فى المثال 3 المحور x.

الحل :

نفرض أن نقطة التقاطع هى $P_3(x_3, 0)$

وبما أن $P_2(1, 2)$ تقع على المستقيم.

$$\begin{aligned} \therefore \Delta x &= \frac{1}{3} \Delta y \\ &= \frac{1}{3}(2 - 0) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\frac{2}{3} = 1 - x_3$$

$$\therefore x_3 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore P_3\left(\frac{1}{3}, 0\right)$$

حالات ميل الخط المستقيم:

يعرف الميل أيضا بأنه ظل الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الجزء الموجب للمحور x. أي أن :

$$m = \tan \phi$$

وعلى ذلك يوجد أربع حالات لميل الخط المستقيم ، شكل 34 :

1 - الحالة الأولى:

إذا كان المستقيم يميل في قسمه العلوى نحو اليمين كما فى شكل (4)

(a) - . حيث تزيد Δy بزيادة Δx وفى هذه الحالة تكون $0^\circ < \phi < 90^\circ$

$$\text{ويكون } \tan \phi = \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ موجباً.}$$

2- الحالة الثانية :

يكون المستقيم فى جزئه الأسفل ناحية اليمين كما فى شكل (b - 4) حيث

تقل Δy بزيادة Δx وفى هذه الحالة تكون $90^\circ < \phi < 180^\circ$

$$\text{ويكون } \tan \phi = \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ سالبا}$$

3- الحالة الثالثة :

يكون المستقيم فيها أفقيا كما فى شكل (c - 4). حيث $\Delta y = 0$ مهما

كانت قيمة Δx وبالتالي تكون $\phi = 0^\circ$

حيث :

$$\tan \phi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

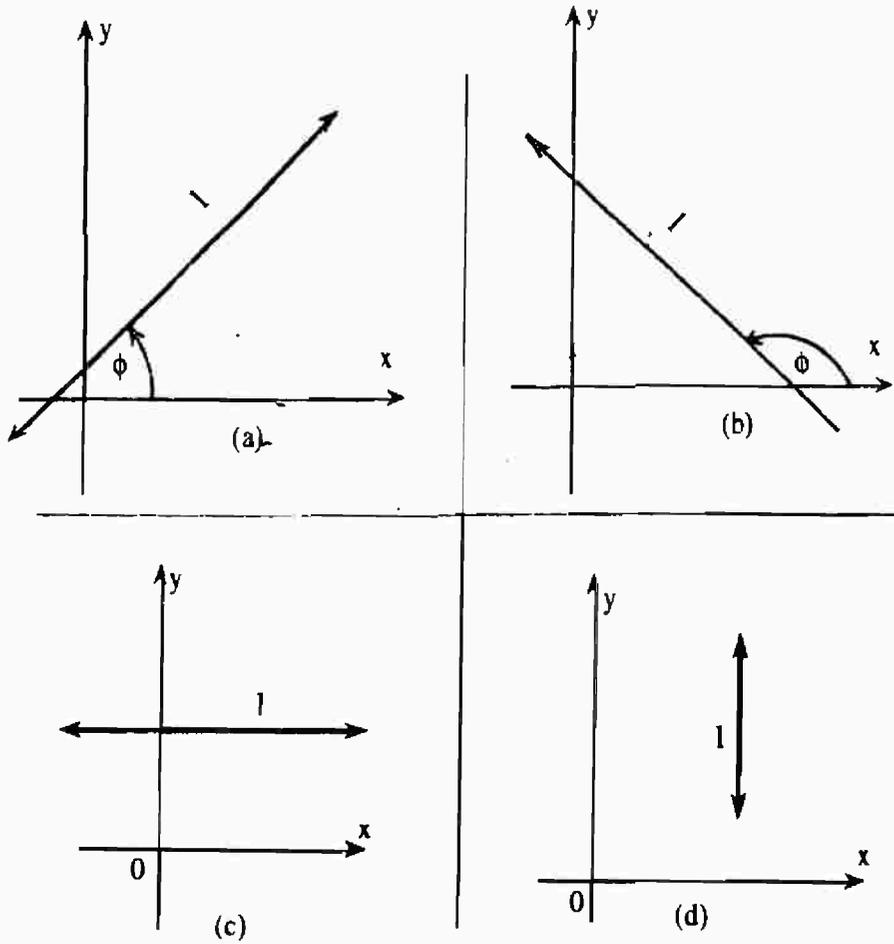
4- الحالة الرابعة :

يكون المستقيم فيها رأسيًا حيث تكون $\Delta x = 0$ مهما كانت قيمة Δy

وبالتالي فإن (شكل d - 4) :-

$$\tan \phi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{كمية غير معرفه}$$

$$\therefore \phi = 90^\circ$$



شكل 34

المستقيمان المتوازيان :

بتوازي المستقيمان إذا ساري ميل كل منهما الآخر.

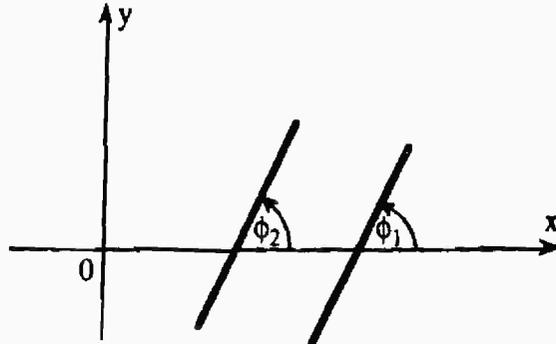
أي أن :

$$m_1 = m_2$$

$$\tan \phi_1 = \tan \phi_2$$

$$\therefore \phi_1 = \phi_2$$

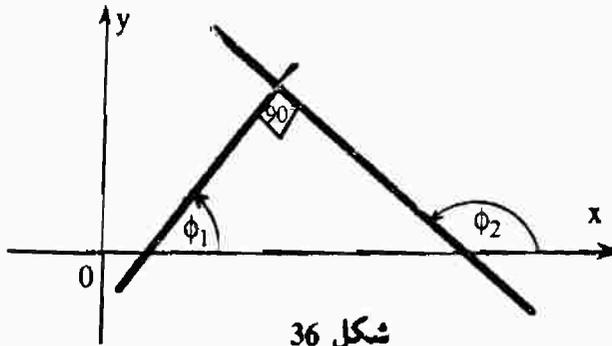
أى تتساوى زواياهما مع الجزء الموجب للمحور x كما فى شكل (35).



شكل 35

المستقيمان المتعامدان :

وبوضحها شكل (36)



شكل 36

حيث نرى من الشكل أن :-

$$\phi_2 = 90^\circ + \phi_1$$

$$\tan \phi_2 = \tan (90^\circ + \phi_1)$$

$$= - \cot \phi_1$$

$$\therefore \tan \phi_2 = - \frac{1}{\tan \phi_1}$$

$$\therefore m_2 = \frac{-1}{m_1}$$

حيث يكون شرط التعامد هو :-

$$m_2 \cdot m_1 = -1$$

(3)

تمارين (14)

- 1- ضع النقاط الآتية على المحاور الكارتيزية ثم أوجد ميل المستقيم المار بهما -
A, B فى كل حالة - وأيضاً ميل العمودى عليه :-

A	5,0	0,0	0,0	0,3	2,-1	-1,2
B	0,1	0,5	5,0	2,-3	-2,1	-2,-1

- 2- ضع النقاط الآتية على المحاور الكارتيزية وبين الحالات التى يكون فيها الشكل ABCD متوازى أضلاع والحالات التى يكون فيها الشكل مربع أو مستطيل :-

A	-1,0	-2,2	3,1	0,1
B	0,-1	1,3	2,2	1,2
C	0,-1	1,3	2,2	2,1
D	0,2	-1,-1	1,0	1,0

- 3 - لدينا النقاط $A(0, -1)$, $B(4, 0)$, $C(3, 4)$ بين أن ABC مثلث قائم الزاوية وأوجد مركز الدائرة المارة برؤوسه ونصف قطرها.
→ لتكن $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ أوجد منتصف P_1P_2 .

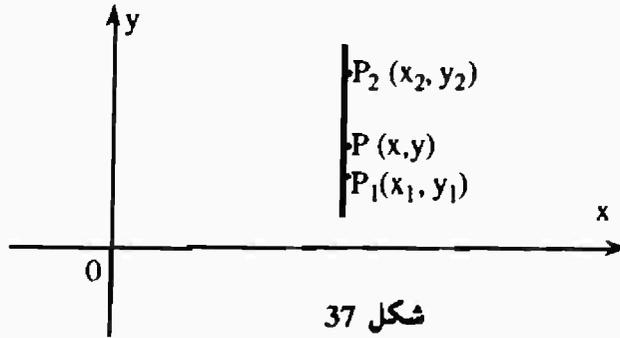
معادلات الخط المستقيم:

نفترض المستقيم I يمر بالنقطتين $P_2(x_2, y_2)$, $P_1(x_1, y_1)$ والمطلوب ربط الأحداثي x بالأحداثي y في النقطة $P(x, y)$ الواقعة على المستقيم. وعلى ذلك يجب معرفة الحالتين الآتيتين:

الحالة الأولى :

$$x_2 = x_1 \text{ (شكل 37)}$$

في هذه الحالة يكون المستقيم I رأسيًا ولجميع نقاطه لا يتغير الأحداثي x (أى يكون ثابتًا). وعلى هذا فإن $P(x, y)$ تقع على المستقيم إذا كان $x = x_1$, والأحداثي y يأخذ عدد لا نهائى من القيم.



الحالة الثانية :

$$x_2 \neq x_1 \text{ (شكل 38)}$$

نعلم أن ميل المستقيم m هو :-

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

وأن النقطة $P(x, y)$ تقع على المستقيم إذا انطبقت النقطة p على P_1 أو تساوى ميل pp_1 مع الميل P_1P_2 وفي هذه الحافة فإن:-

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$\therefore y - y_1 = m(x - x_1) \quad (4)$$

وتسمى هذه المعادلة. معادلة الخط المستقيم بدلالة ميله ونقطه يمر بها $P_1(x_1, y_1)$ شكل a - 38 حيث m, x_1, y_1 ثوابت ، x, y متغيرين.

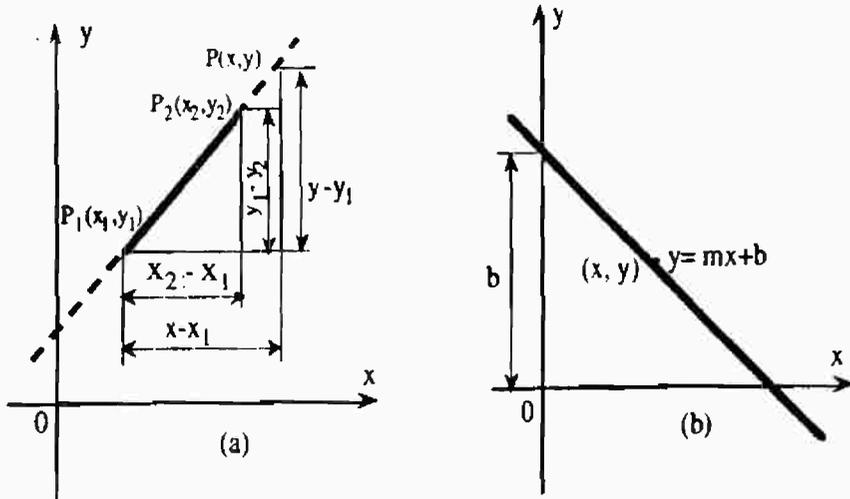
ومن الممكن كتابه المعادلة رقم (4) على الصورة :-

$$y = m x - m x_1 + y_1$$

$$\therefore y = m x + b \quad (5)$$

$$b = y_1 - m x_1$$

عند وضع $x = 0$ تصبح قيمة $y = b$ وعلى ذلك تكون النقطة $(0, b)$ واقعة على المستقيم وتقطع المحور y عند b (انزل الجزء المقطوع على المحور y يساوى b). ولذا تسمى هذه المعادلة بمعادلة الخط المستقيم بدلالة الميل والجزء المقطوع من المحور y (شكل b - 38).



شكل 38

مثال 1:

أوجد ميل المستقيم $y = 2x + 3$ وأيضا الجزء المقطوع من المحور y

الحل:

بمقارنة معادلة المستقيم بالمعادلة رقم (5)

$$\therefore m = 2$$

$$b = 3$$

\therefore ميل المستقيم = 2

الجزء المقطوع من المحور $y = 3$.

ويوجه عام يمكن وضع معادلة المستقيم على الصورة:

$$Ax + By + C = 0 \quad (6)$$

حيث A, B, C ثوابت.

ويكون أحد الثابتين A أو B على الأقل لا يساوي صفر فإذا كان :

$$1- B = 0$$

$$\therefore Ax + c = 0$$

$$\therefore x = -\frac{C}{A} \quad (7)$$

وتكون هذه المعادلة معادلة مستقيم رأسي.

$$2- B \neq 0$$

$$\therefore By = -Ax - c$$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \quad (8)$$

وبمقارنة هذه المعادلة بمعادلة رقم (5) :-

$$\therefore m = \frac{-A}{B}, \quad b = \frac{-C}{B}$$

وتعتبر المعادلة رقم (8) معادلة خطية من الدرجة الأولى.

طول العمود الساقط من النقطة $P_1(x_1, y_1)$ على المستقيم $Ax + By + c = 0$

يرمز لطول هذا العمود بالرمز d ويكون وفقاً للصيغة:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

وسوف نكتفي باستخدامها بدون إثبات لها.

مثال :

أوجد أبعاد النقط $A(-1, 0)$, $B(1, 1)$, $C(-3, 5)$ من المستقيم $2x$

$$+ 3y - 5 = 0$$

الحل :

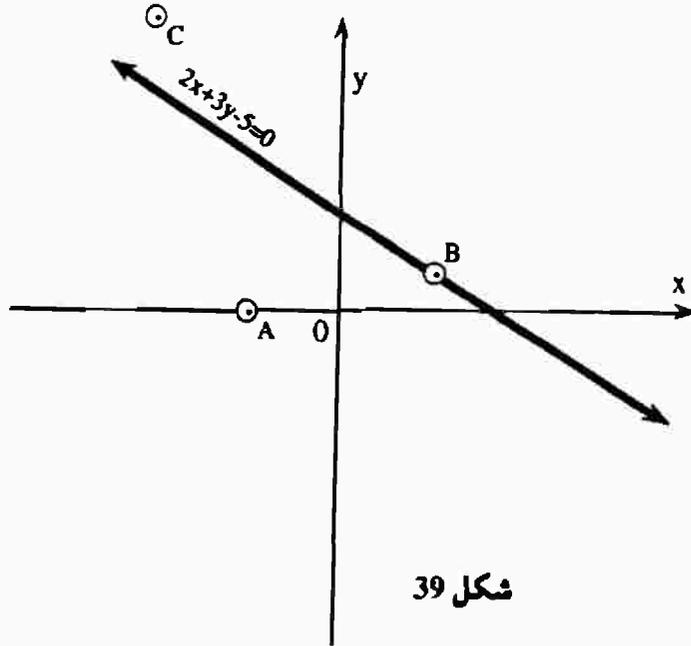
$$d_A = \frac{|2(-1) + 3(0) - 5|}{\sqrt{4+9}} = \frac{|-7|}{\sqrt{13}} = \frac{7}{\sqrt{13}}$$

$$d_B = \frac{|2(1) + 3(1) - 5|}{\sqrt{13}} = 0$$

$$d_C = \frac{|2(-3) + 3(5) - 5|}{\sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{13}}$$

فعمند تعريض الاحداثيات في $2x + 3y - 5 = 0$ وجدنا النتائج ، 0 ، + 4 ،

7 - وهذه النتائج تدلنا على أن النقطة A تحت L، عليه B، فوقه C (شكله 39).



شكل 39

تمارين (15)

1- أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة A (1, 2) ويوازي المستقيم $x + 2y = 3$.

2- أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة A (-2, 2) والعمودي على المستقيم $2x + y = 4$.

3- أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة A (1, 4) وزاوية ميله تساوي 60° .

3- ما هي زاوية ميل المستقيم $2x + y = 4$.

5 - عين إحداثي النقطة P (x, y) بحيث يكون ميل المستقيم l_1 المار بها وبنقطة الأصل مساويا $+2$ ويكون المستقيم l_2 المار بالنقطة A (-1, 0) وبالنقطة P (x, y) مساويا $+1$.

6- إثبت أن A (6, 2), B (-2, 2), C (-2, 8) هي رؤوس لمثلث قائم الزاوية ثم أوجد معادلة العمود النازل من رأس القائمة على القاعدة.

7- أوجد النقطة التي تقع على محور x بحيث يكون بعدها عن المستقيم $9x - 12y - 6 = 0$ مساويا 2 .

8- أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين $P_1(2, -1)$, $P_2(-3, 8)$.

9- أوجد معادلة المستقيم الذي ميله 5 ويقطع جزءا من محور Y قدره -3 .

10 - إذا كانت معادلة المستقيم هي :

$$2x - 5y + 11 = 0$$

فأوجد الميل والجزء المقطوع من المحور Y.

11- أوجد إحداثي نقطة تقاطع المستقيم الذي معادلته :

$$2x + 3y = 3$$

مع : -a المحور x .

-b المحور Y .

12- أثبت أن النقاط A (6, 2), B(-2, -2), C (-2, 8) هي رؤوس لمثلث

متساوي الساقين ثم أوجد معادلة العمود النازل من رأس المثلث على القاعدة.

13- أوجد طول العمود النازل من النقطة A (2, 3) على المستقيم:

$$5x - 12y + 10 = 0$$

14- أوجد طول العمود النازل من القطة A (-2, -4) على المستقيم :

$$12(x - 3) = y - 2$$

15- أوجد طول العمود في التمرين السابق بالقياس بيانياً.

16- أوجد البعد بين المستقيمين المتوازيين:

$$3x + 4y - 13 = 0 \quad , \quad 6x + 8y + 15 = 0$$

17- أوجد مساحة المثلث الذي رؤوسه هي النقاط :

$$A (2, -3) \quad , \quad B (4, -1) \quad , \quad C (8, 5)$$

18- أوجد بعد منتصف المسافة بين النقطتين A (3, 2) , B (5, 6) عن

المستقيم:

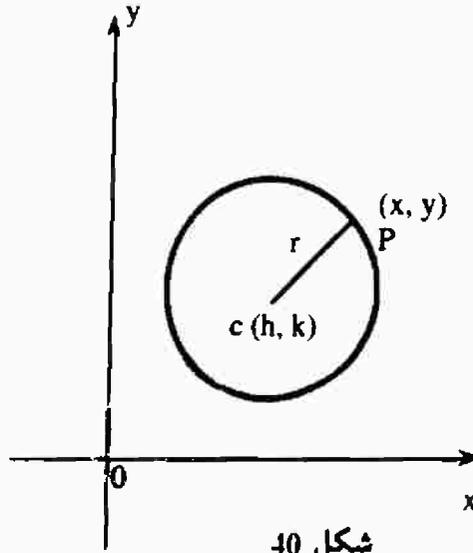
$$7x - 24y + 5 = 0$$

القَطوع المخرّوطية

The Circle - الدائرة

تعريف:

هي المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى بحيث تبعد بعدا ثابتا عن نقطة ثابتة تسمى المركز ويسمى هذا البعد الثابت نصف قطر الدائرة (شكل 40).



شكل 40

معادلة الدائرة :

تمثل النقطة $C (h, k)$ مركز الدائرة ، r نصف القطر والنقطة $P (x, y)$ أي نقطة على محيط الدائرة.

$$\begin{aligned} \therefore CP &= r \\ &= \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} \end{aligned}$$

بترتيب الطرفين:

$$\therefore (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad (1)$$

المعادلة رقم (1) تمثل معادلة دائرة بدلالة إحداثي المركز $C(h, k)$

ونصف القطر r .

مثال 1:

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها r .

الحل:

إحداثي المركز: $h = k = 0$

معادلة الدائرة هي $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

بالتعويض بإحداثي المركز في معادلة الدائرة:

$$\therefore (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 = r^2$$

مثال 2:

أوجد معادلة الدائرة التي تمر بنقطة الأصل ومركزها $c(2, 1)$

الحل:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

بالتعويض بإحداثي المركز في معادلة الدائرة:

$$\therefore (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = r^2$$

وحيث أن الدائرة تمر بنقطة الأصل

$$\therefore x = y = 0$$

$$\therefore (0 - 2)^2 + (0 - 1)^2 = r^2$$

$$4 + 1 = r^2$$

$$5 = r^2$$

∴ معادلة الدائرة هي :-

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$$

مثال 3 :

ما هو المحل الهندسي للنقط $P(x, y)$ التي تحقق احداثياتها المتباينة

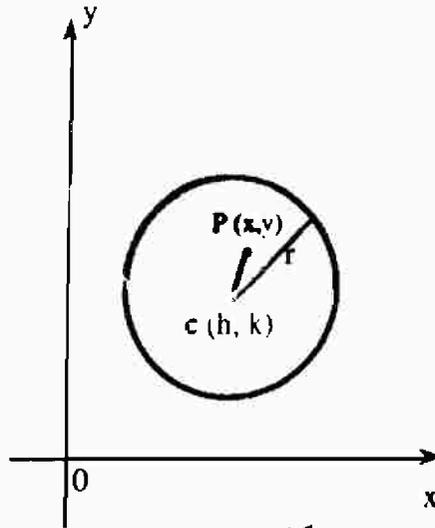
الآتية :-

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 < r^2$$

الحل :

تتحقق المتباينة عندما وفقط عندما تكون النقطة P داخل الدائرة التي

نصف قطرها r ومركزها $C(h, k)$ (شكل 41)



شكل 41

مثال 4 :

ادرس تحليليا المعادلة الآتية:

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y = 12$$

الحل :

يتم ترتيب كتابة المعادلة لتكون بهذه الصورة:

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y = 12$$

تستكمل المربعات للإحداثيات x , y جهة اليسار للمعادلة وما يتم إضافته

جهة اليسار يضاف جهة اليمين لتصبح المعادلة بهذه الصورة:

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 12 + 4 + 9$$

$$\therefore (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

تمثل هذه المعادلة معادلة دائرة مركزها $(-2, 3)$ و c ونصف قطرها $r = 5$.

معادلة الدائرة في الصورة العامة:

يمكن فك المعادلة رقم (1) لتصبح على الصورة الآتية:

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0 \quad (2)$$

وحيث أن h, k, r ثوابت

إذا يمكن كتابة المعادلة السابقة على الصورة الآتية:

$$x^2 + y^2 + c_1x + c_2y + c_3 = 0 \quad (3)$$

وهي تعبر عن معادلة الدائرة في الصورة العامة حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت يمكن

إيجادها إذا علم أي من الشروط الآتية:

1- ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة وتمر بها الدائرة.

2- ثلاث مستقيمت ليست متلاقية في نقطة وليست متوازية وتمر الدائرة بنقط

تقاطعهم.

3- تمس الدائرة مستقيمين وتمر بنقطة ليست على أي من المستقيمين.

ويلاحظ في هذه المعادلة الآتية:

1- المعادلة من الدرجة الثانية فى x, y .

2- معامل $xy =$ صفر .

3- معامل $x^2 =$ معامل y^2 .

مثال 5:

أوجد معادلة الدائرة التى تمر بالنقاط الثلاث $B(0, 1), A(1, 0), D(2, 2)$

الحل :

معادلة الدائرة هى : $x^2 + y^2 + c_1 x + c_2 y + c_3 = 0$

بالتعويض بالنقطة $A(1, 0)$ فى معادلة الدائرة:

$$\therefore 1 + 0 + c_1 + 0 + c_3 = 0$$

$$1 + c_1 + c_3 = 0 \quad \text{I}$$

بالتعويض بالنقطة $B(0, 1)$ فى معادلة الدائرة:

$$0 + 1 + 0 + c_2 + c_3 = 0$$

$$1 + c_2 + c_3 = 0 \quad \text{II}$$

بالتعويض بالنقطة $D(2, 2)$ فى معادلة الدائرة:

$$4 + 4 + 2c_1 + 2c_2 + c_3 = 0$$

$$8 + 2c_1 + 2c_2 + c_3 = 0 \quad \text{III}$$

ب طرح المعادلتين I , II

$$\therefore c_1 = c_2$$

نعوض عن قيمة c_2 فى المعادلة III

$$\therefore 8 + 4c_1 + c_3 = 0$$

IV

ب طرح المعادلتين I , IV

$$\therefore 7 + 3c_1 = 0$$

$$\therefore c_1 = -\frac{7}{3} = c_2$$

بالتعويض عن قيمة c_1 فى المعادلة IV

$$\therefore c_3 = -1 - c_1$$

$$= -1 + \frac{7}{3} = \frac{4}{3}$$

\therefore المعادلة المطلوبة هى :

$$x^2 + y^2 - \frac{7}{3}x - \frac{7}{3}y + \frac{4}{3} = 0$$

وبالضرب $3 \times$

$$\therefore 3x^2 + 3y^2 - 7x - 7y + 4 = 0$$

مثال 6 :

أوجد إحداثيى المركز ونصف قطر الدائرة فى المثال السابق.

الحل :

$$c_1 = -2h \quad \rightarrow \quad \therefore h = \frac{c_1}{-2} = \frac{7}{6}$$

$$c_2 = -2k \quad \rightarrow \quad \therefore k = \frac{c_2}{-2} = \frac{7}{6}$$

$$c_3 = h^2 + k^2 - r^2$$

$$\frac{4}{3} = \frac{49}{36} + \frac{49}{36} - r^2$$

$$\therefore r^2 = \frac{49 + 49 - 48}{36}$$

$$= \frac{50}{36}$$

$$r = \frac{5}{6} \sqrt{2}$$

∴ إحداثى المركز $c\left(\frac{7}{6}, \frac{7}{6}\right)$

ونصف القطر $\frac{5}{6} \sqrt{2}$

مثال 7 :

أوجد إحداثى المركز ونصف قطر الدائرة التى معادلتها :-

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad A \neq 0$$

الحل :

بقسمة المعادلة على A مع وضعها على الصورة :

$$x^2 + \frac{D}{A}x + y^2 + \frac{E}{A}y = \frac{-F}{A}$$

بإكمال المربع بالنسبة لـ x, y وما يضاف جهة اليسار يضاف جهة اليمين

فتصبح المعادلة على الصورة :-

$$x^2 + \frac{D}{A}x + \left(\frac{D}{2A}\right)^2 + y^2 + \frac{E}{A}y + \left(\frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{-F}{A} + \left(\frac{D}{2A}\right)^2 + \left(\frac{E}{2A}\right)^2$$

$$\therefore \left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}$$

بمقارنة المعادلة السابقة بمعادلة الدائرة رقم (1) يتضح الآتى :

$$h = \frac{-D}{2A}, \quad k = \frac{-E}{2A}$$

$$r^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4 AF}{4 A^2}$$

∴ إحداثى المركز هو $C \left(\frac{-D}{2A}, \frac{-E}{2A} \right)$ ، نصف القطر r هو :

$$r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4 AF}{4 A^2}}$$

مثال 8 :

إذا كان المستقيم الذى معادلته $2x - y + 4 = 0$ يقطع محورى الاحداثيات فى النقطتين a , b فأوجد معادلة الدائرة التى تمر بالنقط a , b , نقطة الأصل.

الحل :

لإيجاد نقطتى تقاطع المستقيم $2x - y + 4 = 0$ مع محورى الاحداثيات ، يتم التعويض $y = 0$ فى معادلة المستقيم لإيجاد نقطة تقاطعه مع المحور x كالآتى:

$$2(x) - 0 + 4 = 0$$

$$2x = -4 \quad \rightarrow \quad x = -2$$

∴ نقطة التقاطع هى $a(-2, 0)$ شكل 42

ويتم التعويض عن $x = 0$ فى معادلة المستقيم لإيجاد نقطة تقاطعه مع

المحور y كالآتى :

$$2(0) - y + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad y = 4$$

∴ نقطة التقاطع هى $b(0, 4)$ شكل 42

معادلة الدائرة هى $x^2 + y^2 + c_1 x + c_2 y + c_3 = 0$

- 162 -

حيث أن الدائرة تمر بالنقطة $(0, 0)$ فهي تحقق المعادلة :-

$$\therefore (0) + (0) + (0) + (0) + c_3 = 0$$

$$\therefore c_3 = 0$$

وحيث أن الدائرة تمر بالنقطة $b (0, 4)$ فهي تحقق المعادلة :-

$$\therefore 0 + 16 + 0 + 4c_2 = 0$$

$$\therefore c_2 = -4$$

وحيث أن الدائرة تمر بالنقطة $a (-2, 0)$ فهي تحقق المعادلة :-

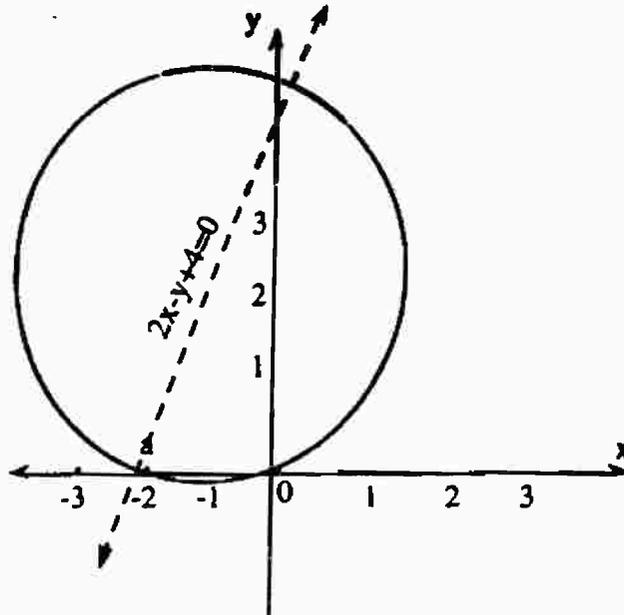
$$\therefore 4 + 0 - 2c_1 - 4(0) = 0$$

$$\therefore 2c_1 = 4$$

$$c_1 = 2$$

وبالتعويض عن قيم c_1, c_2, c_3 في معادلة الدائرة فتصبح كالآتي:

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$$



مثال 8 :

إثبت أن النقط $e(2, 3)$, $b(5, -2)$, $a(3, 2)$, $f(-13, -2)$ تكون

رؤوس شكل رباعي دائري.

الحل :

نوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقط a, b, e نعلم أن معادلة الدائرة هي:

$$x^2 + y^2 + c_1 x + c_2 y + c_3 = 0$$

وحيث أن $a(3, 2)$ تقع على محيط الدائرة فهي تحقق المعادلة :-

$$\therefore 9 + 4 + 3c_1 + 2c_2 + c_3 = 0$$

$$+ 3c_1 + 2c_2 + c_3 = -13 \quad \text{I}$$

وحيث أن $b(5, -2)$ تقع على محيط الدائرة. فهي تحقق المعادلة :-

$$\therefore 25 + 4 + 5c_1 - 2c_2 + c_3 = -0$$

$$\therefore + 5c_1 - 2c_2 + c_3 = -29 \quad \text{II}$$

وحيث أن $e(2, 3)$ تقع على محيط الدائرة فهي تحقق المعادلة :-

$$\therefore 4 + 9 + 2c_1 + 3c_2 + c_3 = 0$$

$$\therefore + 2c_1 + 3c_2 + c_3 = -13 \quad \text{III}$$

لإيجاد معادلة الدائرة التي تمر بالنقط a, b, e ، يتم حل المعادلات III,

I, II باستخدام المحددات كالآتي:-

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-2-3) - 5(2-3) + 2(2+2)$$

$$= -2$$

$$\begin{aligned}\Delta C_1 &= \begin{vmatrix} -13 & 2 & 1 \\ -29 & -2 & 1 \\ -13 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -13(-2-3) + 29(2-3) - 13(2+2) \\ &= -16\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta C_2 &= \begin{vmatrix} 3 & -13 & 1 \\ 5 & -29 & 1 \\ 2 & -13 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3(-29+13) - 5(-13+13) + 2(-13+29) \\ &= -16\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta C_3 &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & -13 \\ 5 & -2 & -29 \\ 2 & 3 & -13 \end{vmatrix} \\ &= 3(26+87) - 5(-26+39) + 2(-58-26) \\ &= 106\end{aligned}$$

$$\therefore C_1 = \frac{\Delta C_1}{\Delta} = \frac{-16}{-2} = 8$$

$$C_2 = \frac{\Delta C_2}{\Delta} = \frac{-16}{-2} = 8$$

$$C_3 = \frac{\Delta C_3}{\Delta} = \frac{106}{-2} = 53$$

نعوض عن C_1 , C_2 , C_3 في معادلة الدائرة التي تكون كالآتي:-

$$x^2 + y^2 + 8x + 8y - 53 = 0$$

- 165 -

نعوض عن النقطة الرابعة وهي $(-2, -13)$ في معادلة الدائرة فإذا حققتنا فإن الدائرة تمر بها وإن لم تحققها فإن الدائرة لا تمر بها:

$$\begin{aligned} \therefore 169 + 4 + 8(-13) + 8(-2) - 53 \\ = 0 \end{aligned}$$

\therefore النقطة $(-2, -13)$ تحقق أيضا معادلة الدائرة.

\therefore a, b, e, f تقع على دائرة واحدة، وبالتالي تكون رؤوس شكل

رباعي دائري.

تمارين (16)

1- أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (h, k) و نصف قطرها r لكل من:-

a- $r = 2$, $c (0, 2)$

b- $r = \sqrt{6}$, $c (-2, -1)$

2- أوجد مركز و نصف قطر الدائرة لكل من المعادلات الآتية:

a- $x^2 - y^2 - 2y = 3$

b- $x^2 + y^2 + 2x = 8$

c- $3x^2 + 3y^2 + 6x = 1$

d- $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$

e- $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 9 = 0$

f- $2x^2 + 2y^2 + x + y = 0$

3- أوجد معادلة الدائرة التي مركزها $c (2, 2)$ وتمر بالنقطة $A (4, 5)$

4- أوجد معادلة الدائرة التي مركزها $c (-1, 1)$ و تمس المستقيم:

$$x + 2y = 4$$

5- أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقط $B (3, 2)$, $A (2, 3)$, $E (-4, 3)$.

6- أوجد معادلة الدائرة التي تمر بنقطة الأصل و بالنقطة $A (0, 2)$ و تقع مركزها

على المستقيم الذي معادلته $2x + 7y = 14$.

7- أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقط $B (1, -4)$, $A (-1, -2)$, $E (-3, -2)$.

8 - أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين $B (6, 8)$, $A (-1, 4)$, E ويقع مركزها على المستقيم المار بالنقطتين $D (1, 2)$, $E (1, 1)$.

9 - أثبت أن النقط $A (1, 5)$, $B (4, 2)$, $D(-2, 2)$, $E (1, -1)$ تكون رؤوس شكل رباعي دائري.

10 - أوجد المحل الهندسي للنقطة $P (x, y)$ إذا كان مجموع مربعي بعديها عن النقطتين $B (1, 4)$, $A (-5, 2)$ مساويا لـ 52 بين نوع هذا المنحنى.

11 - هل النقطة $A (0.1, 3.1)$ تقع داخل الدائرة $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ أم خارجها أم عليها ولماذا ؟

12 - إذا كان بعد النقطة $P (x, y)$ عن النقطة $B (6, 0)$ هو ضعف بعدها عن النقطة $A (0, 3)$ فأثبت أن المحل الهندسي لهذه النقطة هو عبارة عن دائرة، ثم أوجد مركز هذه الدائرة ونصف قطرها.

13 - أوجد معادلة الدائرة المحاطة بمثلث أضلاعه هي :

$$4x + 3y = 24$$

$$3x - 4y = 18$$

$$4x - 3y + 32 = 0$$

(إرشاد : بعد النقطة (h, k) عن المستقيم $Ax + By + C = 0$ هو:

$$\frac{|Ah + Bk + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

14 - لتكن P نقطة خارج دائرة معينة C وليكن PT مماسا لهذه الدائرة في T فإذا قطع المستقيم PN الذي يمر بمركز C هذه الدائرة في M, N فأثبت أن:

$$PM \cdot PN = (PT)^2$$

15 - أوجد معادلة الدائرة التي تمر بنقطة الأصل وتقطع طولين موجبين من محوري الإحداثيات مقدارهما 6 , 4 على الترتيب.

16 - أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (3 , 2) c وتقطع من محور x جزءا طوله 8 وحدات .

17- أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (5 , 2) c وتمس المحور x.

2 - القطع المكافئ The parabola

تعريف:

القطع المكافئ هو المحل الهندسى لنقطة تتحرك فى مستو معلوم بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابتة فيه (البؤرة) يساوى بعدها عن مستقيم ثابت فى المستوى (الدليل).

والمستقيم المار بالبؤرة وعموديا على الدليل يسمى محور القطع كما تسمى نقطة تقاطع المحور مع القطع رأس القطع.

المعادلة الكارتيزية للقطع المكافئ:

لإيجاد المعادلة الكارتيزية للقطع المكافئ فى أبسط صورة نفرض أن البؤرة S والدليل 1.

ونعتبر المحور x هو العمودى من S على 1 الذى يقطع القطع فى النقطة

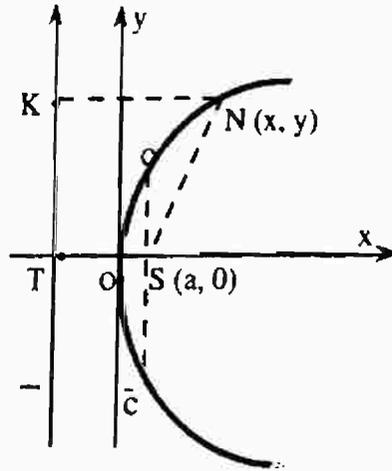
0. ومن النقطة 0 نرسم المحور Y.

نفرض أن بعد البؤرة S عن الدليل $= 2a$.

∴ من تعريف القطع يكون :

$$T0 = S0$$

إحداثى البؤرة $S(a, 0)$ شكل 43.



شكل 43

معادلة الدليل هي :

$$x = -a$$

$$x + a = 0$$

فإذا كانت $N(x, y)$ أي نقطة على القطع المكافئ فإن :

$$NS = NK$$

$$\therefore \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = x+a$$

$$(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$$

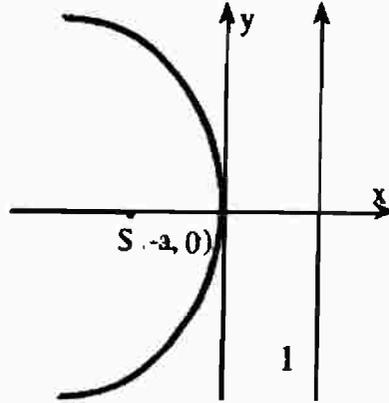
$$\therefore y^2 = 4ax \dots\dots\dots (1)$$

تسمى المعادلة (1) معادلة القطع المكافئ في أبسط صورها.

ملاحظات :

1- المنحنى متماثل بالنسبة للمحور x.

- 2- رأس القطع هي نقطة أصل المحورين (تقاطع المحورين).
- 3 - الوتر المار بالبؤرة عمودياً على محور القطع يسمى الوتر البؤري العمودي
ويساوي a .
- 4- لا وجود للمنحنى عندما تكون x سالبة.
- 5- بزيادة قيمة x تزداد قيمة y .
- 6- إذا كانت a سالبة فإن قيم x يجب أن تكون سالبة أي تكون فتحة القطع نحو
الاتجاه السالب للمحور x شكل 44.

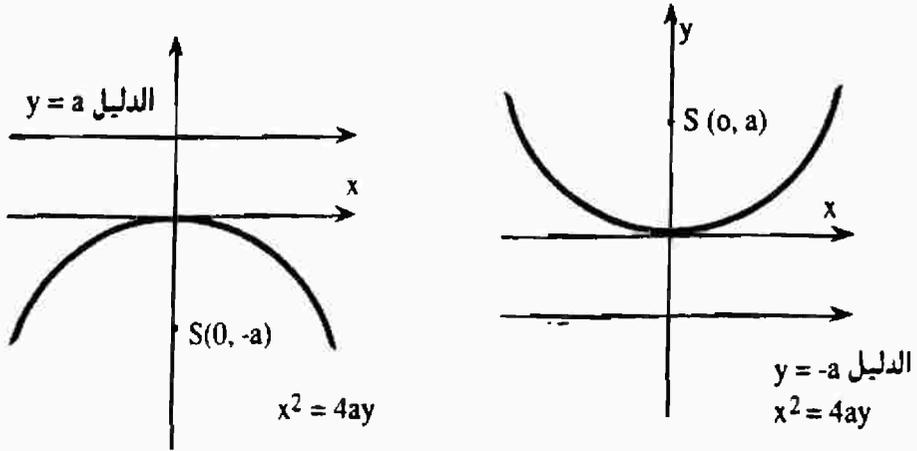


شكل 44

7 - معادلة القطع المكافئ الذي محوره رأسى هو :

$$x^2 = \pm a y$$

وذلك كون القطع مفتوحاً إلى أعلى أو إلى أسفل . شكل 45.

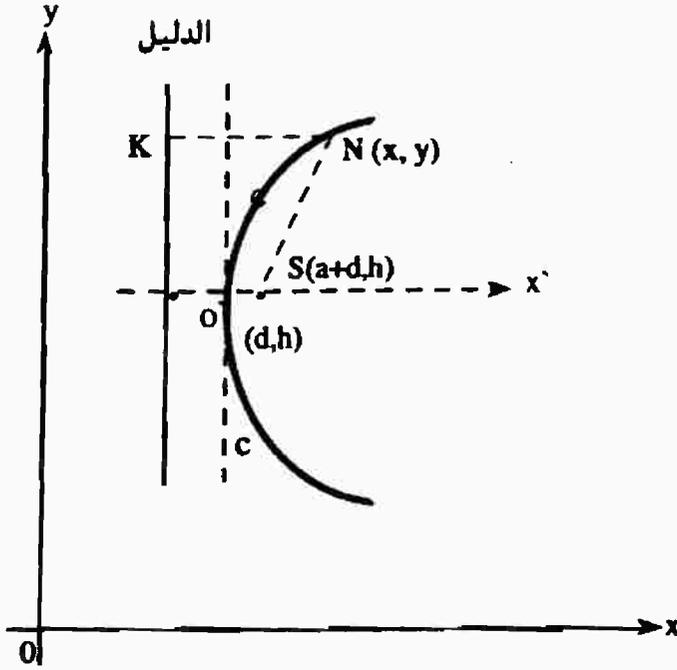


شكل 45

معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي المحور x :

إذا كانت رأس القطع هي النقطة $P(d, h)$ فينقل نقطة الأصل $O(0, 0)$

إلى النقطة $P(d, h)$ مع بقاء المحورين موازيين لوضعهما الأصلي. شكل 46



شكل 46

تصبح معادلة القطع بالنسبة للمحورين x' , y' هي:

$$y'^2 = 4a x'$$

$$\therefore x' = x - d$$

$$y' = y - h$$

$$\therefore (y - h)^2 = 4a (x - d)$$

والمعادلة الأخيرة هي معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي المحور x

ورأسه هي النقطة $O'(d, h)$ وملاحظ الآتي:-

1- رأس القطع هي النقطة $O'(d, h)$

2- إحداثيي البؤرة $S(d + a, h)$

3- معادلة محور القطع هي : $x = h$

- 174 -

4- معادلة الدليل هي : $x = d - a$

5- طول الوتر البيزى العمودى = $4a$

مثال 1 :

إذا كان : $5y^2 = 12x$ أوجد ما يأتى:

أولاً: إحداثيى البؤرة للقطع المكافئ:

ثانياً: معادلة الدليل

ثالثاً: طول الوتر البيزى العمودى

الحل :

$$5y^2 = 12x$$

$$y^2 = \frac{12}{5}x$$

$$\therefore 4a = \frac{12}{5}$$

$$\therefore a = \frac{3}{5}$$

∴ البؤرة هي النقطة $S\left(\frac{3}{5}, 0\right)$

معادلة الدليل هي :

$$x = -\frac{3}{5}$$

طول الوتر البيزى العمودى:

$$= \frac{12}{5}$$

مثال 2 :

في القطع المكافئ: $y^2 + 8x - 6y + 17 = 0$

أوجد ما يأتي:

أولاً: إحداثيي رأس القطع

ثانياً: إحداثيي البؤرة

ثالثاً: طول الوتر البؤري العمودي

رابعاً: معادلتى كل من دليل القطع ومحوره.

الحل:

$$y^2 + 8x - 6y + 17 = 0$$

بإكمال المربع في y

$$\therefore y^2 - 6y + 9 = -8x - 8$$

$$\therefore (y - 3)^2 = -8(x + 1)$$

\therefore إحداثيي رأس القطع ، $(-1, 3)$ ، 0 ، $a = -2$

إحداثيي البؤرة هما $S(-3, 3)$

طول الوتر البؤري العمودي $|a| = 4 = 8$

معادلة الدليل هي : $x = 1$

معادلة المحور هي : $y = 3$

مثال 3 :

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(0, -\frac{4}{3})$ ومعادلة دليله هي :

$$y - \frac{4}{3} = 0 \text{ ثم أوجد طول وتره البؤري العمودي.}$$

الحل:

نفرض $N(x, y)$ على القطع

∴ من تعريف القطع يكون :

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y + \frac{4}{3})^2} = y - \frac{4}{3}$$

$$\therefore x^2 + y^2 + \frac{8}{3}y + \frac{16}{9} = y^2 - \frac{8}{3}y + \frac{16}{9}$$

$$\therefore x^2 = -\frac{16}{3}y$$

وهي معادلة القطع

$$\frac{16}{3} = |4a| = \text{طول الوتر البؤري العمودي}$$

مثال 4:

أوجد معادلة القطع الذي بؤرته $S(2, 3)$ ودليله المستقيم الذي معادلته :

$$x - 4y + 3 = 0$$

الحل :

نفرض $N(x, 1)$ على القطع

$$\therefore \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 3)^2} = \frac{x - 4y + 3}{\sqrt{1 + 16}}$$

$$\therefore 17(x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9) = x^2 - 8xy + 6x + 16y^2 - 24y + 9$$

$$\therefore 16x^2 + y^2 - 74x - 78y + 8xy + 212 = 0$$

وهي معادلة القطع

مثال 5 :

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه هو النقطة $O(3, 4)$ ويؤرته هي

النقطة $S(5, 4)$

الحل :

$$\therefore a = 5 - 3 = 2$$

\therefore معادلة القطع هي :

$$(y - 4)^2 = 4(2)(x - 3)$$

$$\therefore y^2 - 8y - 8x + 40 = 0$$

وهي معادلة القطع.

تمارين (17)

1- أوجد إحداثيي البؤرة وطول الوتر البؤري العمودي ومعادلة الدليل لكل

قطع مكافئ مما يأتي:

a) $y^2 = 8x$

b) $x^2 = 8y$

c) $3y^2 = 4x$

2- أوجد معادلة كل قطع مكافئ إذا كان :

(a) إحداثيي البؤرة $S(3, 0)$ ومعادلة الدليل: $x + 3 = 0$

(b) إحداثيي البؤرة $S(0, 6)$ ودليله هو المحور x

3- أوجد طول الوتر البؤري العمودي من القطع المكافئ:

$$y^2 + 3x = 4$$

4- أوجد طول الوتر البؤري العمودي من القطع المكافئ :

$$3y^2 - x - 18y + 27 = 0$$

5- أوجد طول الوتر البؤري العمودي من القطع المكافئ:

$$x^2 - 4x - 8y - 12 = 0$$

6 - أوجد إحداثيي كل من الرأس والبؤرة وكذلك معادلة الدليل للقطع

$$y^2 = 2x + 3 \quad \text{المكافئ:}$$

7- أوجد إحداثيي كل من الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل وطول الوتر البؤري

العمودي لكل قطع مكافئ مما يأتي:

a) $y^2 - 4y + 6x - 8 = 0$

b) $3x^2 - 9x - 5y - 2 = 0$

3- القطع الناقص The ellipse

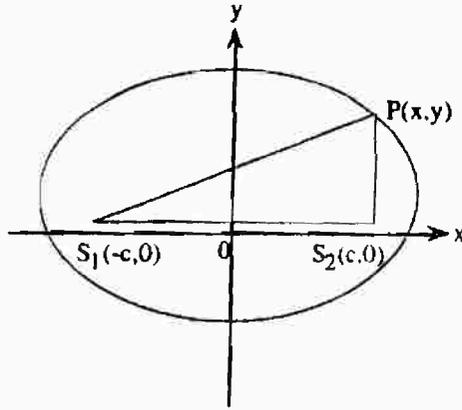
تعريف : القطع الناقص هو المحل الهندسي للنقط $P(x, y)$ التي مجموع بعدها عن نقطتين معلومتين ثابت (شكل 47).

معادلة القطع الناقص:

إذا أخذنا النقطتين المعلومتين (البؤرتين) $S_1(-c, 0)$, $S_2(c, 0)$ وكان $PS_1 + PS_2 = 2a$

فإن إحداثيات النقطة P يجب أن تحقق المعادلة الآتية :

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \text{ القطع الناقص}$$

شكل 47

$$\therefore \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

وتربيع الطرفين

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 4a(\sqrt{(x-c)^2 + y^2})$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x$$

وتربيع الطرفين

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2$$

$$x^2(1 - \frac{c^2}{a^2}) + y^2 = a^2 - c^2$$

ويقسمة الطرفين على $a^2 - c^2$

$$\therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \quad (1)$$

$$\therefore 2a = PS_1 + PS_2$$

$$\therefore 2a > 2c \quad (\text{مجموع أى ضلعين أكبر من الضلع الثالث})$$

$$\therefore a^2 - c^2 > 0$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \quad (2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

ولإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع المحور x :

$$\begin{aligned} \therefore y &= 0 \\ \therefore x^2 &= a^2 \\ x &= \pm a \end{aligned}$$

ولإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع المحور y :

$$\begin{aligned} \therefore x &= 0 \\ y^2 &= b^2 \\ y &= \pm b \end{aligned}$$

وبإجراء التفاضل للمعادلة (3)

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = - \frac{b^2 x}{a^2 y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ عندما}$$

$$\therefore x = 0 , y = \pm b$$

$$\frac{dx}{dy} = 0 \text{ عندما}$$

$$\therefore y = 0 , x = \pm a$$

∴ المنحنى يقطع المحورين على التعامد.

لقد أثبتنا أنه إذا حققت النقطة P الشرط الهندسي

$$PS_1 + PS_2 = 2a$$

فإن إحداثياتها (x , y) يحقق المعادلة (3) . وإذا حدث العكس أي إذا

حققت x, y المعادلة (3) عند $a < 0$ ، فإن :

$$\frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$
$$y^2 = (a^2 - c^2) \frac{a^2 - x^2}{a^2}$$

$$\therefore PS_1 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

$$\therefore PS_2 = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + a^2 + \left(\frac{c}{a}x\right)^2 - c^2 - x^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + 2cx + \left(\frac{c}{a}x\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2} = \left|a + \frac{c}{a}x\right| \quad \dots\dots\dots 4-a$$

وبالمثل

$$PS_2 = \sqrt{(a - c)^2 + y^2} = \left|a - \frac{c}{a}x\right| \quad \dots\dots\dots 4-b$$

حيث أن مجال x هو : $-a \leq x \leq a$

فإن قيمة $\left(\frac{c}{a}x\right)$ مجالها هو : $-c \leq \frac{c}{a}x \leq c$

وبناءً على ذلك فإن كلا من $a + \frac{c}{a}x$ ، $a - \frac{c}{a}x$ موجب وتقع

قيمتها بين $a + c$ ، $a - c$

وبذلك ينتج عن القيم المطلقة في $a - 4$ ، $b - 4$ أن :-

$$PS_1 = a + \frac{c}{a} x \quad , \quad PS_2 = a - \frac{c}{a} x$$

أي أن :

$$PS_1 + PS_2 = 2 a$$

بغض النظر عن موضع النقطة $P(x, y)$ على المنحنى.

بما أن التقدير $b^2 = a^2 - c^2$ في المعادلة (3) أقل من a^2 إذن فالمحور

الكبير للقطع الناقص هو عبارة عن القطعة المستقيمة التي طولها $2a$ والواقع بين

النقطتين $(\pm a, 0)$ ، أما المحور الصغير فهو عبارة عن القطعة المستقيمة التي

طولها $2b$ والواقعة بين النقطتين $(0, \pm b)$. وعلى ذلك يكون نصف المحور

الكبير a ، نصف المحور الصغير b .

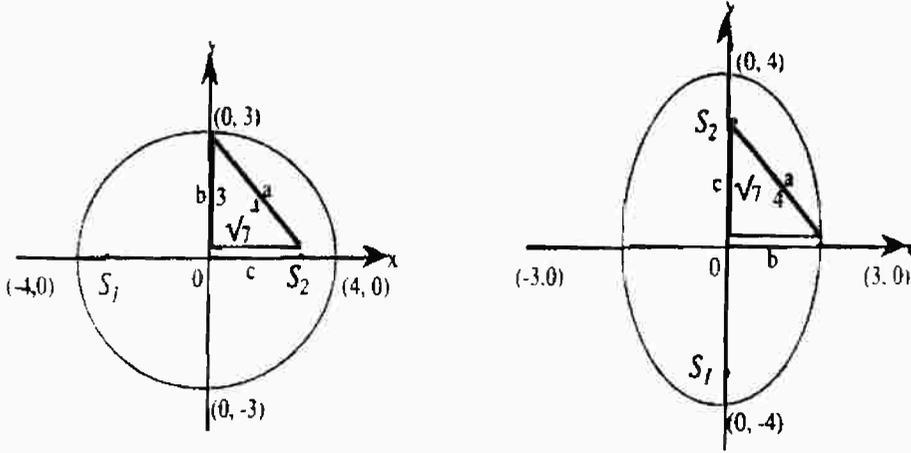
فمثلا إذا كان : $a = 4$ ، $b = 3$ فإن المعادلة (3) تصبح :-

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

وإذا تبادلا وضع المحاور فإن :

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

وفي هذه الحالة يصبح المحور الكبير رأسيا. شكل 48.



(أ) المحور الكبير لـ $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ أفقياً.

(ب) المحور الكبير لـ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ رأسياً.

شكل 48

لاحظ أن البؤرتين تقعا دائما على المحور الكبير وأن :

$$a^2 = b^2 + c^2$$

أى أن a وتر المثلث القائم وأن وضع البؤرتين فى المثال على بعد $\sqrt{7}$

من المركز.

المركز ليس عند نقطة الأصل :

يعرف مركز القطع الناقص بأنه نقطة تقاطع محورى تناظره فإذا كان المركز (h, k)

والمحوران يوازيان المحورين x, y فإنه يمكننا إقتراح إحداثيات جديدة.

$$x' = x - h \quad , \quad y' = y - k$$

حيث c هي نقطة الأصل O' للإحداثيات الجديدة فتكون المعادلة فى

الاحداثيات الجديدة هي :

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

أو

$$\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2}$$

تبعاً لوضع المحور الأكبر ويوضح ذلك المثال التالي.

مثال : حل المعادلة

$$9x^2 + 4y^2 + 36x - 8y + 4 = 0$$

الحل :

نكمل المربعات

$$9(x^2 + 4x) + 4(y^2 - 2y) = -4$$

$$\therefore 9(x^2 + 4x + 4) + 4(y^2 - 2y + 1) = -4 + 36 + 4$$

$$\therefore \frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

$$\therefore x' = x + 2 \quad , \quad y' = y - 1$$

وبذلك نرى أن نقطة الأصل الجديدة $x' = 0$, $y' = 0$ هي نفسها النقطة:

$$x = -2 \quad , \quad y = 1$$

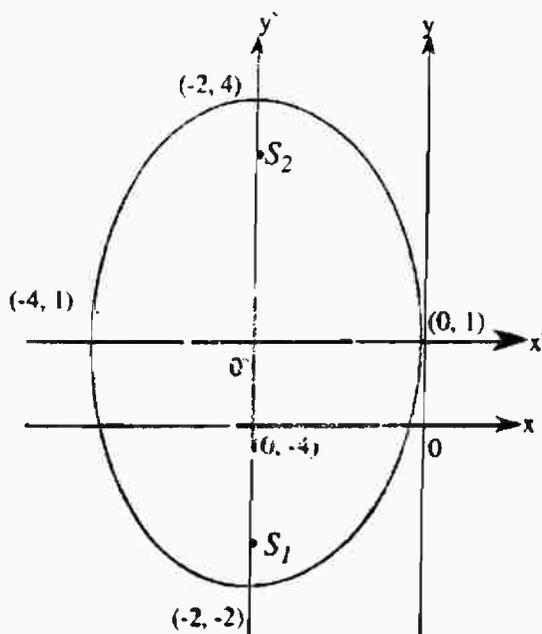
وتصبح المعادلة في المحاور الجديدة

$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{9} = 1$$

التي تمثل قطعا ناقصا يقطع المحور y في $(0, \pm 3)$, في x في $(\pm 2, 0)$ لتحديد موضع البؤرتين نستعمل العلاقة:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$
$$= \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$$

وبالتالي تقع البؤرتان على المحور y عند $(0, \pm \sqrt{5})$ أو عند $(-2, 1 \pm \sqrt{5})$ للإحداثيات الأصلية. ويوضح ذلك شكل 49.

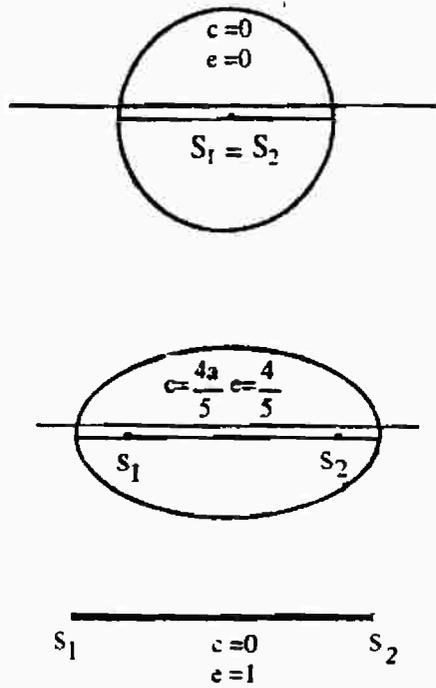


شكل 49

الاختلاف المركزي:

إذا ثبتنا a وغيرنا c في المدى $0 \leq c \leq a$ فإن القطوع الناقصة الناتجة

تختلف فى أشكالها، فهى عبارة عن دائرة عندما $c = 0$ ثم يأخذ جانبها فى الاتساع كلما زادت c إلى أن تصل إلى الحالة النهائية عندما $c = a$ حيث يؤول «القطع الناقص» عندئذ إلى القطعة المستقيمة $S_1 S_2$ الواصلة بين البؤرتين كما فى الشكل (50). تسمى النسبة $e = \frac{c}{a}$ الاختلاف المركزى والتي تأخذ قيم من 0 إلى 1 وتدل على مدى بعد المنحنى عن الشكل الدائرى.



شكل 50

من المعروف أن للقطع المكافئ بؤرة واحدة ودليل واحد بينما لكل قطع ناقص بؤرتان ودليان، ودليلا القطع الناقص هما مستقيمان عموديان على المحور

الكبير للقطع الناقص وبتعدان عن مركزه مسافة $\pm \frac{a}{e}$.

بالنسبة للقطع المكافئ العلاقة:

$$PS = PD$$

لأى نقطة P عليه حيث S البؤرة، D هي أقرب نقطة لـ P على الدليل

وأیضا فی حالة القطع الناقص يمكن إثبات أن :

$$PS_1 = e.PD_1 \quad , \quad PS_2 = e.PD_2$$

حيث e الاختلاف المركزي، P أى نقطة على القطع الناقص S_1, S_2

البؤرتان، D_1, D_2 هما أقرب نقطتين على الدليلين $x = \pm \frac{a}{e}$.

تمارين (18)

1- أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه c وبؤرتيه S ونصف محوره الكبير a وأوجد اختلافه المركزي في كل من :-

- (a) $a = 4$, $c (0, 0)$, $S (0, 2)$
(b) $a = 5$, $c (0, 0)$, $S (-3, 1)$
(c) $a = 3$, $c (0, 2)$, $S (0, 0)$
(d) $a = 4$, $c (-3, 0)$, $S (-3, -2)$
(e) $a = \sqrt{10}$, $c (2, 2)$, $S (-1, 2)$

2- أوجد مركز القطع الناقص $25x^2 + 9y^2 - 100x + 54y - 44 = 0$ ثم أوجد أيضا رأسيه وبؤرتيه.

3- رؤوس المحور الكبير والمحور الصغير لقطع ناقص هي $(1, 1)$, $(3, 4)$, $(1, 7)$, $(-1, 4)$. أوجد معادلته وبؤرتيه.

4- أوجد معادلة القطع الناقص الذي يمر بنقطة الأصل وتقع بؤرتاه في النقطتين $(1, 1)$, $(-1, 1)$.

5- أوجد الاختلاف المركزي والدليلين للقطع الناقص $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1$

6 - أوجد طول الوتر العمودي على المحور الكبير للقطع الناقص $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ويسمى هذا الوتر بالخط البؤري العمودي

للقطع الناقص).

7 - أوجد معادلة القطع الناقص الذي اختلافه المركزي هو $\frac{2}{3}$ واحد دليله هو

المستقيم $x = 9$ ونوترته المرافقه لهذا الدليل هي $(4, 0)$.

8 - أثبت أن معادلة المماس للقطع الناقص $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ عند النقطة

$P_1(x_1, y_1)$ الواقعة عليه هي :

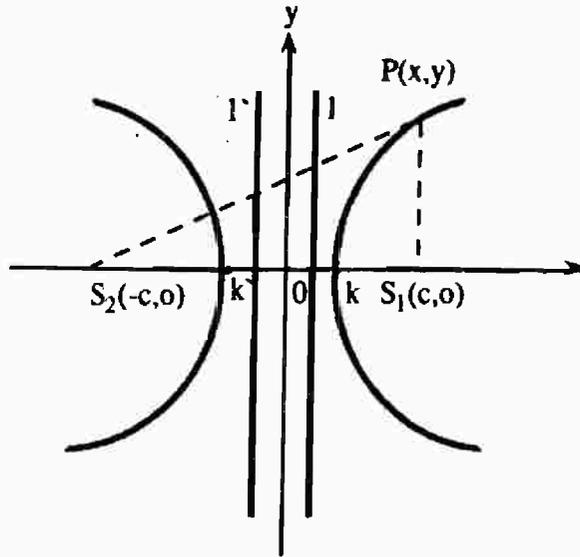
$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1$$

4- القطع الزائد The hyperbola

تعريف: القطع الزائد هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك في مستو بحيث يكون الفرق بين بعديها عن نقطتين ثابتتين فيه مقدارا ثابتا والنقطتان الشابتان تسميان بالبؤرتين.

إيجاد المعادلة الكارتيزية للقطع الزائد في الصورة القياسية:

نفرض أن النقطتين الشابتين هما : $S_1(c, 0)$, $S_2(-c, 0)$ وأن $P(x, y)$ تتحرك في مستو S_1, S_2 (شكل 51).



شكل 51

$$\therefore PS_2 - PS_1 = \text{مقدار ثابت} = 2a$$

$$\therefore a < c$$

$$\therefore \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\therefore \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

بالتربيع والاختصار ينتج أن:

$$cx - a^2 = \sqrt{a(x-c)^2 + y^2}$$

بالتربيع مرة أخرى ينتج أن :

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

ويقسم الطرفين على $a^2(c^2 - a^2)$ ينتج أن :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

$$\therefore c > a$$

$$\therefore c^2 - a^2 > 0$$

$$\therefore c^2 - a^2 = \text{ثابت} = b^2$$

$$\therefore \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

هذه هي معادلة القطع الزائد

ملاحظات :

- 1- المنحنى متماثل بالنسبة لكل من محوري الإحداثيات x , y
- 2- مركز القطع هو نقطة الأصل $(0, 0)$ وهي نقطة منتصف المسافة بين البؤرتين.

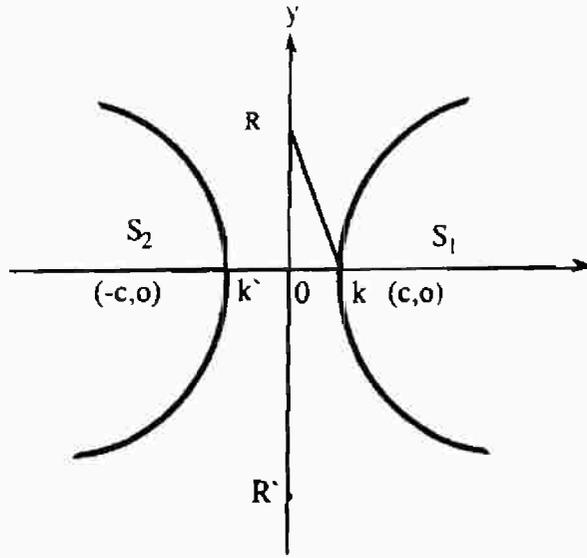
3 - المنحنى يقطع محور x فى النقطتين:

$$k(a, 0), k'(-a, 0)$$

ويسمى المحور القاطع وطوله $2a$

4 - $b = OR' = OR$ يسمى المحور المرافق ويلاحظ أنه لا يقع على القطع

(شكل 52).



شكل 52

5 - إحداثيا البؤرتين هما $S_1(c, 0)$, $S_2(-c, 0)$

6 - الاختلاف المركزى e :

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

ويلاحظ أن: $e > 1$

7 - معادلتا الدليلين: $1, 1'$ هما:

$$x = \pm \frac{a}{e}$$

8- إذا وقعت البؤرتان على محور y تكون معادلة القطع الزائد في هذه

الحالة هي :

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

تكون معادلتا الدليلين 1 , 1 هما :

$$y = \pm \frac{a}{e}$$

وتكون إحداثيات البؤرتين هما :

$$S_1 (0 , c), S_2 (0 , -c)$$

$$9 - \text{طول الوتر البؤري العمودي للقطع } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ يساوي}$$

$$= \frac{2b^2}{a}$$

10 - معادلة القطع الزائد الذي مركزه $O^*(d, h)$ ومحوره القاطع يوازي

المحور x هي:

$$\frac{(x - d)^2}{a^2} - \frac{(y - h)^2}{b^2} = 1$$

11 - معادلة القطع الزائد الذي مركزه $O^*(d, h)$ ومحوره القاطع يوازي المحور

y هي :

$$\frac{(y - d)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

12 - التمثيل البارامتري للقطع الزائد:

يتم التعويض عن الاحداثيات x, y كالآتي:

$$x = a \sec \theta$$

$$y = b \tan \theta$$

13 - معادلة المماس : عند النقطة $P_1(x_1, y_1)$ هي :

$$x x_1 / a^2 - y y_1 / b^2 = 1$$

14 - القطع الزائد القائم: هو قطع زائد محوره متساويان أي أن $a = b$ فتصبح

معادلة القطع الزائد هي :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\therefore x^2 - y^2 = a^2$$

ويلاحظ أن :

1 - طول محوره القاطع = طول محوره المرافق.

2 - اختلافه المركزي = $\sqrt{2}$.

مثال 1 :

أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره القاطع يقع على

محور الصادات ويمر بالنقطتين $P_1(4,6), P_2(1,-3)$.

الحل :

∴ المحور القاطع يقع على المحور Y

$$\therefore \text{معادلة القطع هي : } \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

بالتعويض بالنقطتين P_1, P_2 في معادلة القطع:

$$\therefore \frac{36}{a^2} - \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\therefore 36 b^2 - 16 a^2 = a^2 - b^2 \quad (1)$$

$$\therefore \frac{9}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1$$

$$\therefore 9 b^2 - a^2 = a^2 b^2 \quad (2)$$

ويحل المعادلتين (1) , (2)

$$\therefore b^2 = 4 \quad , \quad a^2 = \frac{36}{5}$$

∴ معادلة القطع هي :

$$\frac{5 y^2}{46} - \frac{x^2}{4} = 1$$

مثال 2 :

اكتب معادلة القطع الزائد : $9 x^2 - 16 y^2 = 144$ فى الصورة القياسية

ثم أوجد :

(1) إحداثي رأسيه. (2) معادلتى الدليلين.

(3) طولى محوريه القاطع والمرافق (4) الاختلاف المركزى

(5) طول وتره البؤرى العمودى (6) إحداثي بؤرتيه.

الحل:

$$\therefore \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\therefore a = 4 \quad , \quad b = 3$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$$

رأس القطع هما : $k(0, -4)$, $k(0, 4)$

البؤرتان هما : $S_2(0, -5)$, $S_1(0, -5)$

الاختلاف المركزي:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$$

طول المحور القاطع :

$$= 2a = 2(4) = 8$$

طول المحور المرافق:

$$= 2b = 2(3) = 6$$

معادلتا الدليلين هما :

$$x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{4}{5/4} = \pm \frac{16}{5}$$

طول الوتر البؤري العمودي :

$$\frac{2b^2}{a} = \frac{2(9)}{4} = \frac{9}{2}$$

مثال 3 :

أوجد معادلة القطع الزائد الذي طول محوره المرافق = 6 وطول وتره البؤري

العمودي = 2 إذا كان محوره منطبقين على محوري الأضداد.

الحل :

طول المحور المرافق = 6

$$\therefore 2b = 6$$

$$\therefore b = 3$$

طول الوتر البوري العمودي = 2

$$\therefore 2 = \frac{2b^2}{a}$$

$$a = \frac{2(9)}{2} = 9$$

∴ معادلة القطع الزائد هي :

$$\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{9} = 1$$

مثال 4 :

أوجد معادلة القطع الزائد الذي إحداثي بؤرتيه $s(0, \pm 3)$ وطول محوره

المرافق = 5

الحل :

البؤرتان تقعان على المحور y

$$\therefore \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$c = 3, \quad 2b = 5$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 = 9 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{11}{4}$$

∴ معادلة القطع هي:

$$\frac{4y^2}{11} - \frac{4x^2}{25} = 1$$

مسأل 5 :

أوجد معادلة القطع الزائد الذى مركزه نقطة الأصل ومحوره القاطع على

المحور x واختلافه المركزى $e = \frac{\sqrt{7}}{2}$ إذا علم أن طول وتره البؤرى العمودى = 6

الحل :

$$e = \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

$$7 a^2 = 4 (a^2 + b^2)$$

$$3 a^2 = 4b^2 \quad (1)$$

$$\therefore 6 = \frac{2 b^2}{a} = \frac{3 a^2}{2 a}$$

$$\therefore a^2 = 16$$

$$\therefore b^2 = \frac{3}{4} a^2 = \frac{3}{4} (16) = 12$$

∴ معادلة القطع الزائد هى:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{12} = 1$$

تمارين (19)

1 - أوجد إحداثيات كل من الرأسين والبؤرتين وكذلك الاختلاف المركزي وطول الوتر البؤري العمودي لكل من القطوع الزائدة الآتية :-

$$1- 4x^2 - 25y^2 = 180$$

$$2- 49y^2 - 16x^2 = 784$$

$$3- x^2 - y^2 = 25$$

4- أوجد معادلة القطع الزائد الذي طول محوره القاطع = 8 وبؤرتيه

$$S_1 (5, 0), S_2 (-5, 0)$$

5- أوجد معادلة القطع الزائد الذي طول محوره المرافق = 24 وبؤرتيه

$$S_1 (0, 13), S_2 (0, -13)$$

6- أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0, 0)$ وإحدى بؤرتيه $S_1 (8, 0)$

$$\text{واحدي رأسيه } k (6, 0)$$

7 - أوجد معادلة المحل الهندسي لنقطة تتحرك في مستوي بحيث يكون بعدها

$$\text{عن النقطة } A (0, 6) \text{ يساوي } \frac{3}{2} \text{ بعدها عن المستقيم } 3y = 8$$

8 - أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره القاطع على

المحور y واختلافه المركزي $e = 2\sqrt{3}$ وطول وتره البؤري العمودي

يساوي 18

9- أوجد المركز وطولى المحورين فى القطع الزائد:

$$4x^2 - 9y^2 + 24x + 36y - 36 = 0$$

10 - أوجد إحداثيات المركز والبيزتين والرأسين فى القطع الزائد:

$$9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$$

11 - أوجد معادلتى المماس والعمودى للقطع الزائد $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ عند

$$P_1 \left(5, \frac{-16}{3} \right) \text{ النقطة}$$

12 - أوجد معادلة القطع الزائد الذى بؤرتيه $S_1 (-1, 1)$ ودليله المستقيم $x +$

$$y = 2 \text{ واختلافه المركزى } = \sqrt{5}.$$