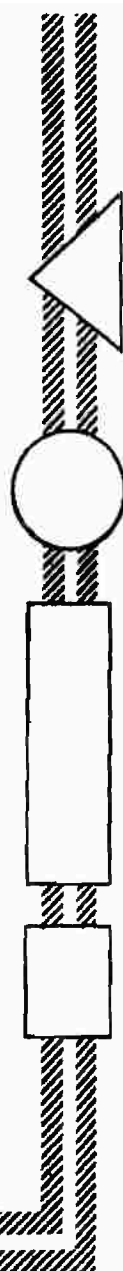


الباب الثالث

الدالة والنهايات



مقدمة :

يعتبر مفهوم الدالة حجر الأساس فى دراسة التحليل الرياضى فعن طريق هذا المفهوم حلت كثير من المشاكل التى واجهت الباحثين فى التحليل الرياضى. وتجدر الاشارة هنا إلى أن لمفهوم الدالة أهمية قصوى فى دراسة معظم موضوعات الرياضيات إن لم يكن جميعها. ويعتبر التفاضل والتكامل من أبرز موضوعات الرياضيات التى تعتمد على مفهوم الدالة.

وكلمة دالة تعبر عن مفهوم أن كمية ما تعتمد على أو تتوقف على أو تتعين بواسطة كمية أخرى:

أ - فمثلا مساحة المربع تعتمد على طول ضلعه حيث يمكن حساب مساحة المربع إذا علم طول ضلعه.

ب - حجم الكرة يعتمد على نصف قطرها.

ج - متوسط انتاج الفدان من المحاصيل يتوقف على كمية السماد المستخدم.

د - متوسط ارتفاع نوع معين من أنواع النباتات يتوقف على سن النبات.

هـ - متوسط دخل الفرد تتوقف على كمية الانتاج.

وهكذا.

وعلى ذلك يكون من الضروري الاهتمام بهذه الدراسة فى هذا الباب والتي سوف تتناول :

1 - الدالة وأنواعها.

2 - العمليات على الدوال.

3 - المجال والمدى للدوال المقررة فى هذا المنهج.

4 - الدوال السامية .

5- النمط التى تكتب بها الدوال (صريحة أو ضمنية)

الدالة الحقيقية

مثال تمهيدى:

إذا كان X , Y مجموعتين جزئيتين من الأعداد الحقيقية حيث:

$$X = \{ -2, -1, 0, 1, 2 \}$$

$$Y = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$$

وأعطيت العلاقة Z بينهما من X إلى Y بالقانون :

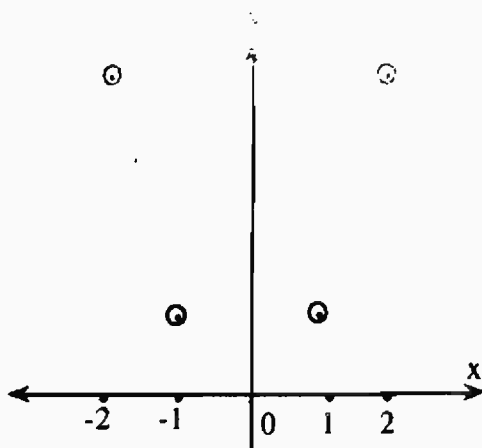
$$y = x^2 \quad : x \in X, y \in Y$$

فإن بيان هذه العلاقة هو الأزواج المرتبة :

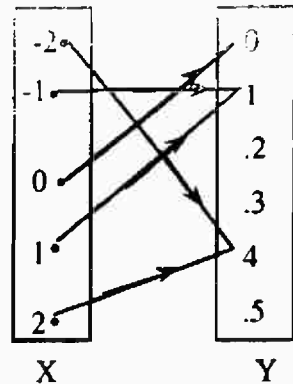
$$Z = (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)$$

بتمثيل هذه العلاقة بالمخطط السهمى وكذلك بالمخطط البيانى شكل

(53) شكل (54) على الترتيب.



شكل 54



شكل 53

في بيان هذه العلاقة : نلاحظ أن كل عنصر في X يرتبط بعنصر واحد فقط من عناصر Y .

في المخطط السهمي : نلاحظ أن سهم واحد فقط يخرج من كل عنصر من عناصر X .

والعلاقة Z المعطاه في هذا المثال تسمى دالة حقيقية F وأن :

المجموعة X تسمى مجال الدالة F ويرمز لها بالرمز D_F حيث :

$$D_F = \{ -2, -1, 0, 1, 2 \}$$

المجموعة Y تسمى المجال المقابل للدالة ويساوي:

$$Y = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$$

ومجموعة قيم Y المناظرة لجميع قيم x تسمى مدى الدالة ويرمز له بالرمز

R_F يساوي :-

$$R_F = \{ 0, 1, 4 \}$$

القانون $y = x^2$ يسمى قاعدة الدالة، y تسمى صورة x أو قيمة الدالة للمتغير المستقل x .

مفهوم الدالة الحقيقية:

إذا كانت X ، Y مجموعتين جزئيتين من الأعداد الحقيقية فإن العلاقة Z من X إلى Y تسمى دالة حقيقية إذا كان :

كل عنصر من المجموعة X يرتبط بعنصر واحد فقط من عناصر المجموعة Y ويعبر عن هذه العلاقة بالصورة:

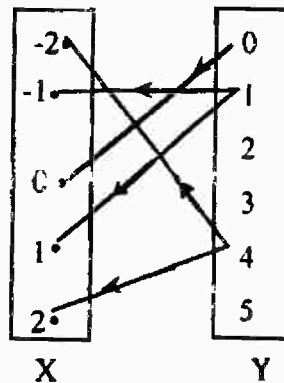
$$F : X \rightarrow Y$$

وتقرأ F دالة من X إلى Y .

أما معكوس الدالة السابقة أى بعكس الأزواج المرتبة السابقة والتي تكون على الصورة :

$$F^{-1} = \{ (4, -2), (1, -1), (0, 0), (1, 1), (4, 2) \}$$

إنها لا تكون دالة لأنها تتعارض مع المفهوم فالعنصر 4 من المجموعة Y ارتبط بعنصرين من عناصر المجموعة X (-2, 2) شكل 55.



شكل 55

مثال 1 :

أي من العلاقتين التاليتين تعتبر دالة ؟

(a) $G = \{ (-1, 2), (2, 2), (3, 5), (6, 1) \}$

(b) $H = \{ (0, 7), (1, 5), (1, 2), (3, -4) \}$

الحل:

(a) G تعتبر دالة لأن لكل قيمة للمتغير x توجد قيمة واحدة للمتغير y .

ريتمضج ذلك من الألى :

x	y
-1	2
2	2
3	5
6	1

(b) H ليست دالة لوجود قيمتين للمتغير y مناظرتين للقيمة $x = 1$:

x	y
0	7
1	5
1	2
3	-4

وإنا ما بتعارض مع مفهوم الدالة.

تمثيل العلاقة بين متغيرين x , y بيانياً :

- (1) نعوض عن x ببعض القيم التي تنتمي إلى مجال العلاقة X ونوجد قيم y المناظرة لنحصل على بعض الأزواج المرتبة التي تنتمي إلى هذه العلاقة.
- (2) ننشئ نظام إحداثي مناسب للأزواج التي حصلنا عليها.
- (3) نعين على مستوى الاحداثيات النقاط التي تمثل هذه الأزواج.
- (4) فقط إذا كانت العلاقة بين x , y من الأعداد الحقيقية نرسم منحنى بياني مار بهذه النقاط ليمثل العلاقة المعطاة.

مثال 2 :

إرسم الخط المستقيم الذي تمثله كل مجموعة :

$$F = \{ (x, y) : 2x - y = 6 \}$$

$$G = \{ (x, y) : 2x + 2y = 5 \}$$

الحل :

نعوض عن x ببعض القيم ونوجد قيم y المناظرة في الدالة F :

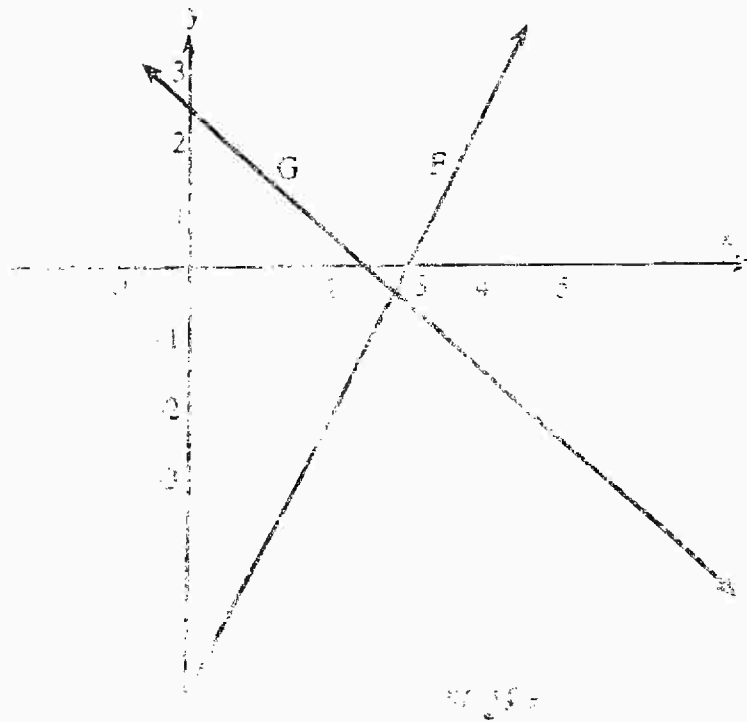
x	1	2	3	4
y	-4	-2	0	2

الرسم البياني يوضحه شكل (56)

نعوض عن x ببعض القيم ونوجد قيم y المناظرة في الدالة G :

x	0	1	2	3
y	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

الرسم البياني يوضحه شكل (56)



مثال ٢ :

لكل من العلاقات التالية بين المجال والمدى ووضح بالرسم البياني :

$$G = \{ (-2, 0), (-1, -2), (1, 2), (0, -1) \}$$

$$H = \{ (x, y) : -1 \leq x \leq 2, -3 \leq y \leq 4 \}$$

الحل :

مجال G يساوي :

$$D_G = \{ -2, -1, 1, 0 \}$$

مجال H يساوي :

$$D_H = \{ x : -1 \leq x \leq 2 \}$$

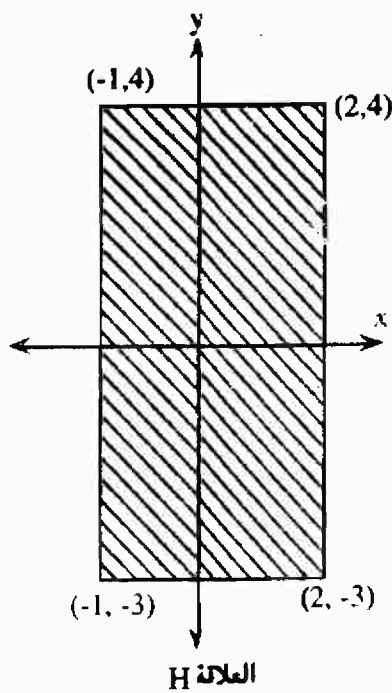
مدى G يساوي :

$$R_G = \{ 0, -2, 2, -1 \}$$

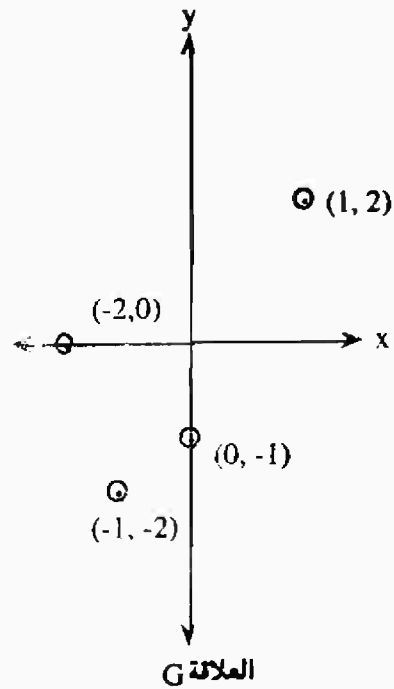
مدى H يساوي :

$$R_H = \{ y : -3 \leq y \leq 4 \}$$

العلاقة H تبينها المنطقة المظلمة شكل (a - 57)



- a -

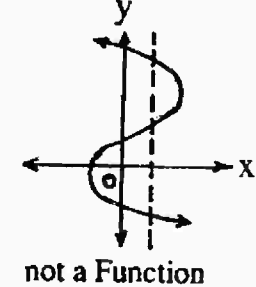
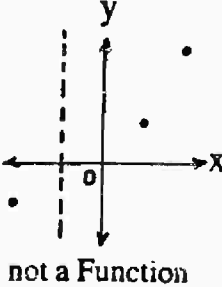
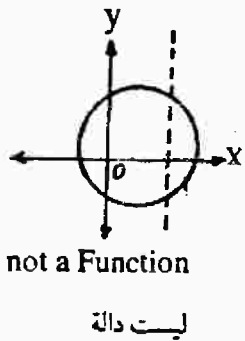
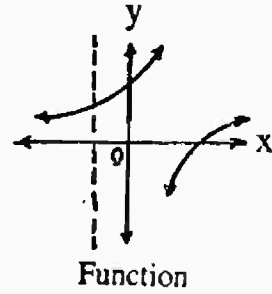
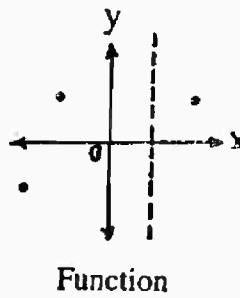
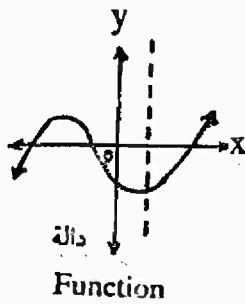


- b -

شكل 57

استخدام الخط العمودي للكشف عن الدوال :

يتم استخدام اختبار الخط العمودي لمعرفة ما إذا كانت العلاقة الجبرية تمثل دالة أو لا تمثل دالة. فإذا قطع الخط العمودي الموازي لمحور y المنحنى في أكثر من نقطة فإن المنحنى لا يمثل دالة وإذا قطعه في نقطة واحدة فقط فإن المنحنى يمثل دالة ويبين شكل 58 أمثلة وغير الدوال.



شكل (58)

تمارين (20)

1 - أذكر مجال ومدى كل من العلاقات الآتية مع الرسم:

- (a) $F = \{ (1, 1), (2, 2), (4, 4), (9, 9) \}$
(b) $F = \{ (1, -3), (2, -1), (3, 1), (4, 3), (5, 5) \}$
(c) $F = \{ (5, 0), (0, 1), (0, 7) \}$
(d) $F = \{ (-7, 2), (-3, 0), (5, -1), (-3, 6) \}$
(f) $F = \{ (-3, 1), (-1, 1), (0, 0), (4, 1) \}$

2 - أى من العلاقات السابقة تمثل دالة.

3 - إذا كانت :-

$$F(x) = \sqrt{x+5}, \quad x \geq -5$$

أوجد قيمة $F(-5)$, $F(5)$, $F(0)$

4 - إذا كانت :

$$F(x) = \frac{7x-1}{x+5}, \quad x \neq -5$$

أوجد قيمة $F(-1)$, $F(1)$, $F(5)$

ثم أوجد المجال

5 - إذا كانت :

$$F(x) = 5x^2$$

أوجد قيمة :-

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

العمليات على الدوال :

(أولاً) الجمع والطرح:

إذا كانت F, G دالتين مجالهما D_F, D_G فإن :-

$$(F \pm G)(x) = F(x) \pm G(x)$$

مجالهما هو :-

$$D_{(F \pm G)}(x) = D_F \cap D_G$$

أي بحالهما هو تقاطع المجالين.

· (ثانياً) الضرب والقسمة:-

حاصل ضربهما :

$$D_{(F \cdot G)}(x) = F(x) \cdot G(x)$$

ومجالهما هو :-

$$D_{(F \cdot G)}(x) = D_F \cap D_G$$

أي مجالهما هو تقاطع المجالين

خارج قسمتهما :-

$$\frac{F}{G}(x) = \frac{F(x)}{G(x)}, \quad G(x) \neq 0$$

ومجالهما هو :

$$D_{\frac{F}{G}}(x) = D_F \cap D_G - \{ \text{أصفار المقام} \}$$

مثال 1 :

إذا كان :-

$$F(x) = x^2 - 3x + 9 \quad , \quad D_F = [-5, 2]$$

$$G(x) = 4 - 7x \quad , \quad D_G = [-3, 7]$$

أوجد:

$$F(x) + G(x) \quad , \quad F(x) - G(x)$$

$$D_{(F(x) + G(x))}$$

الحل :

$$F(x) + G(x) = (x^2 - 3x + 9) + (4 - 7x)$$

$$F(x) - G(x) = (x^2 - 3x + 9) - (4 - 7x)$$

$$D_{F \pm G} = D_F \cap D_G$$

$$= [-3, 2]$$

مثال 2 :

إذا كانت :

$$F(x) = x^2 + 9 \quad , \quad D_F = [-4, 5]$$

$$G(x) = x^2 - 2x - 3 \quad , \quad D_G = [-2, 7]$$

أوجد :

$$(F \cdot G), (F / G) \quad , \quad D(F \cdot G), D(F / G)$$

الحل :

$$(F \cdot G) = (x^2 + 9) \cdot (x^2 - 2x - 3)$$

$$(F / G) = (x^2 + 9) / (x^2 - 2x - 3)$$

$$D_{(F.G)} = D_F \cap D_G$$

$$= [-2, 5]$$

$$D_{(F/G)} = D_F \cap D_G - \{\text{أصفار المقام}\}$$

$$\therefore x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$$

$$\{\text{أصفار المقام}\} = \{-1, 3\}$$

$$D_{(F/G)} = [-2, 5] - \{-1, 3\}$$

تمارين (21)

1 - إذا كانت :-

$$F(x) = 2x - 1, \quad G(x) = \frac{1}{3x + 1}$$

أوجد :

$$F \pm G, \quad \frac{G}{F}, \quad \frac{F}{G}, \quad F \cdot G$$

2 - إذا كانت :-

$$F(x) = x^2, \quad G(x) = 2x - 3$$

أوجد :

$$F \pm G, \quad F \cdot G, \quad F / G$$

3 - إذا كانت :-

$$F(x) = \sqrt{x}, \quad G(x) = \sqrt{4 - x}$$

أوجد :

$$F \pm G, \quad F \cdot G, \quad F / G, \quad G / F$$

والمجالات الخاصة بكل دالة.

4 - إذا كانت :

$$F(x) = \frac{1}{x + 1}, \quad G(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$$

أوجد :

$$F \cdot G, \quad F / G, \quad G / F$$

5 - إذا كانت :

$$F(x) = \sqrt{7 - 2x} \quad , \quad G(x) = \frac{1}{x - 2}$$

أوجد :

$$D_{F,G} \quad , \quad D_F \quad , \quad D_G$$

مثال 3 :

أوجد المجال والمدى لكل من الدوال الآتية:-

$$(a) \quad F(x) = \sqrt{x - 1}$$

$$(b) \quad F(x) = x^2 - 1$$

$$(c) \quad F(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

الحل :

$$(a) \quad F(x) = \sqrt{x - 1}$$

المقادير تحت الجذر التربيعي يجب أن تكون ≥ 0 صفر

$$\therefore x - 1 \geq 0$$

$$x \geq 1$$

$$\therefore D_F = [1, \infty)$$

أقل قيمة لـ $x = 1$ عندها $F(x) = 0$ وتزيد بعد ذلك $F(x)$ بزيادة x

$$\therefore R_F = [0, \infty)$$

$$(b) \quad F(x) = x^2 - 1$$

$$D_F = \mathbb{R}$$

$R_F :$

x	0	-1	-2	-3	1	2
F(x)	-1	0	3	8	0	3

واضح من الجدول أن أقل قيمة للدالة $F(x)$ تساوي -1 وتزداد بزيادة x

$$\therefore R_F = [-1, \infty)$$

$$(c) \quad F(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad x \neq 2$$

$$D_F = \mathbb{R} - \{2\}$$

$R_F :$

$$F(x) = x + 2$$

$$R_F = \mathbb{R} - \{4\}$$

مثال 4 :

أوجد المجال والمدى للدالة :

$$F(x) = \frac{2x + 3}{x - 4}$$

الحل :

يكون مجال خارج قسمة دالتين هو تقاطع مجاليهما ما عدا أصفار دالة

المقام أي أن :

$$D_F = \mathbb{R} - \{4\}$$

لاحظ أن المتغير x متغير مستقل ، $F(x)$ أو y متغير تابع ولإيجاد المدى بدون رسم بياني لهذا النوع من الدوال نجعل المتغير y متغير مستقل والمتغير x متغير تابع كالآتي:

$$y = \frac{2x + 3}{x - 4}$$

بضرب الطرفين في $(x - 4)$

$$y(x - 4) = 2x + 3$$

$$yx - 4y = 2x + 3$$

$$yx - 2x = 4y + 3$$

$$x(y - 2) = 4y + 3$$

$$x = \frac{4y + 3}{y - 2}$$

لاحظ أن المتغير y في هذه الصورة متغير مستقل ويمكن أن يأخذ الأعداد الحقيقية ما عدا العدد 2 وبالتالي يكون المدى :

$$R_F = R - \{2\}$$

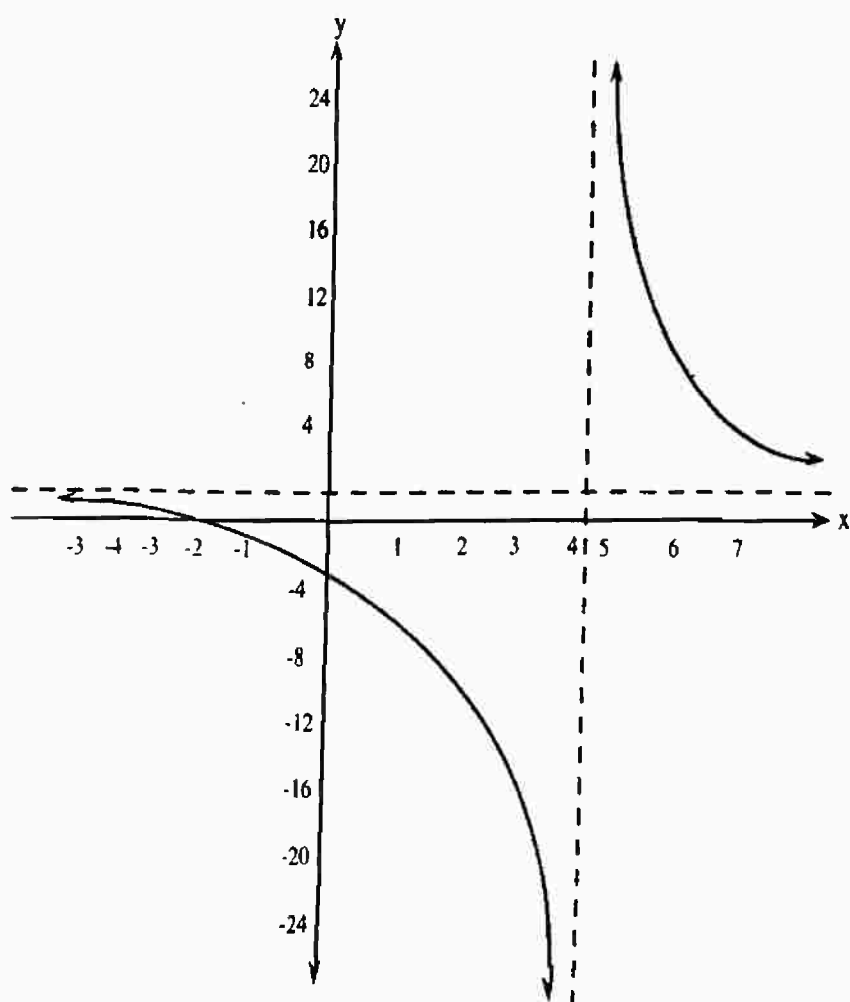
مثال 5 :

حل المثال السابق بالرسم البياني وأوجد المدى بهذه الطريقة والمجال.

الحل :

يتم عمل الجدول ثم الرسم البياني شكل 59

x	-4	-3	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	0	1	2	3	$3\frac{1}{2}$	4	$4\frac{1}{2}$	5
f(x)	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{4}$	$-1\frac{2}{3}$	$-3\frac{1}{2}$	-9	-20	∞	24	13



شكل 59

نلاحظ من الرسم البياني شكل (59) الآتي بـ

١- عند الاقتراب من $x = 4$ تقترب قيم الدالة من ما لا نهاية ولذلك يكون

المجال:-

$$D_F = \mathbb{R} - \{4\}$$

2- تأخذ قيم قيم لا نهائية عند $y = 2$ ولذلك يكون المدى:-

$$R_F = \mathbb{R} - \{2\}$$

تمارين (22)

أوجد المجال والمدى لكل من الدوال الآتية :

1- $F(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$

2- $F(x) = \frac{x + 2}{x - 3}$

3- $F(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

4- $F(x) = \frac{5x - 3}{x - 1}$

5- $F(x) = 2$

6- $F(x) = \sqrt{x}$

7- $F(x) = x^2 - 1$

8- $F(x) = x^2 + 1$

9- $F(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

10- $F(x) = \sqrt{1 - x^2}$

11- $F(x) = 2x + 3$

12 - $F(x) = x + x^2$

13- $F(x) = x^2 + 4x - 5$

14- $F(x) = x^2 - 6x + 9$

15- $F(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$

16- $F(x) = \sqrt[3]{x - 2}$

17- $F(x) = \frac{x}{x + 1}$

18 - أوجد مجال كل من المعرفتين بالمعادلتين:

(a) $F(x) = \frac{2x + 1}{x^2 - 3x + 2}$

(b) $F(x) = \frac{2x - 1}{2x^2 + 7x - 7}$

بعض أنواع الدوال الحقيقية :

تصنف الدوال الحقيقية حسب شكل قواعدها الجبرية ومنها :

(أولا) الدوال كثيرات الحدود

(ثانيا) الدوال القياسية

(ثالثا) الدوال المتسامية:-

1- الدوال المثلثية

1-الدوال الأسية

3- الدوال اللوغاريتمية

(رابعاً) دوال غير قياسية

(أولا) الدوال كثيرات الحدود :

هى دوال حقيقية على الصورة :

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

$$a_n \neq 0$$

$$a_0, a_1, a_2, \dots$$

$$a_n \in \mathbb{R}$$

$$n \in \mathbb{N}$$

قاعدة كثيرة الحدود عبارة عن المجموع الجبرى لعدة حدود كل منهما على

الصورة:-

$$a_r x^r, r \in \mathbb{N}$$

وهى على سبيل المثال مثل :-

$$(a) \quad F(x) = 7 \quad (\text{دالة ثابتة})$$

$$(b) \quad F(x) = -3 \quad (\text{دالة ثابتة})$$

(c) $F(x) = 2x + 5$ (دالة خطية)

(d) $F(x) = 2x^2 + 5x + 6$ (دالة تربيعية)

وتكون درجة دالة كثيرة الحدود هي أكبر أس للمتغير x ، ويكون الحد المطلق هو الحد الخالي من x .

مجال هذه الدوال هو مجموعة الأعداد الحقيقية أما المدى فيشتق على شكل الدالة أو الرسم البياني لها وهذا ما توضحه الأمثلة الآتية:
مثال 1 :

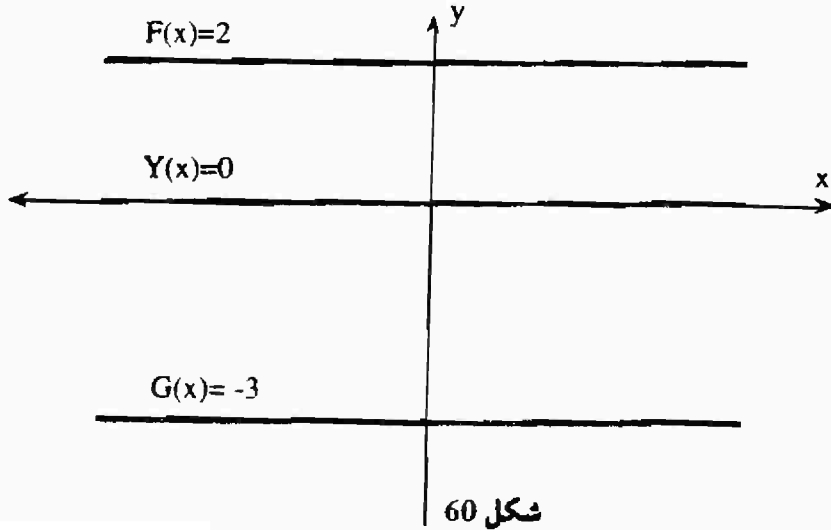
ارسم الشكل البياني لكل من المداول الآتية :-

I- $F(x) = 2$ II- $G(x) = -3$ III- $Y(x) = 0$

مع إيجاد المجال والمدى لكل دالة.

الحل :

رسم الدوال شكل 60



I- $F(0) = 2$, $F(1) = 2$, $F(2) = 2$, $F(\infty) = 2$
 $F(-1) = 2$, $F(-2) = 2$, $F(-3)=2$, $F(-\infty)=2$
 $\therefore D_F = \mathbb{R}$
 $R_F = 2$

II- $G(0) = -3$, $G(1) = -3$, $G(2) = -3$, $G(\infty) = -3$
 $G(-1) = -3$, $G(-2) = -3$, $G(-3) = -3$, $G(-\infty) = -3$
 $\therefore D_G = \mathbb{R}$
 $R_G = -3$

III- $Y(0) = 0$, $Y(1) = 0$, $Y(2) = 0$, $Y(\infty) = 0$
 $Y(-1) = 0$, $Y(-2) = 0$, $Y(-3) = 0$, $Y(-\infty) = 0$
 $\therefore D_Y = \mathbb{R}$
 $R_Y = 0$

مثال 2 :

إذا علم أن :-

$$f(x) = 2x + 3$$

(أ) أوجد :-

$$F(-2) , F(-1), F(0), F(2)$$

(ب) ارسم $F(x)$

الحل:

$$F(-2) = 2(-2) + 3 = -1 \quad (\text{أ})$$

$$F(-1) = 2(-1) + 3 = -1$$

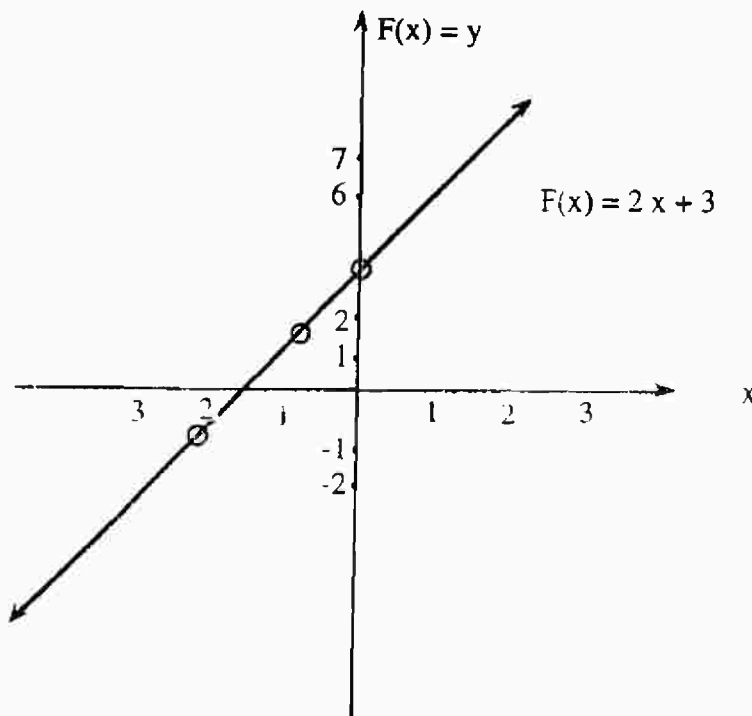
$$F(0) = 2(0) + 3 = -3$$

$$F(2) = 2(2) + 3 = -7$$

(ب) ارسم من الجزء (أ) لدينا النقاط الآتية:

$(-2, -1), (-1, 1), (0, 3), (2, 7)$

يتم توقيعتها على الرسم البياني وتوصيلها (شكل 61)



شكل 61

مثال 3:

أوجد المجال والمدى للدالة :-

$$F(x) = 2x + 3$$

الحل:

الدالة كثيرة الحدود من الدرجة الأولى . مجالها جميع الأعداد الحقيقية

$$\therefore D_F = \mathbb{R}$$

من الرسم البياني في المثال السابق نجد أن الدالة عبارة عن خط مستقيم ممتد إلى ما لا نهاية من جهتيه أي عندما x تقترب من ما لا نهاية فإن y تقترب من ما لا نهاية وعندما x تقترب من سالب ما لا نهاية فإن y تقترب من سالب ما لا نهاية أي أن المدى لهذه الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية بمعنى :-

$$R_F = \mathbb{R}$$

الدالة متعددة القواعد:

يقال للدالة $F(x)$ إنها متعددة القواعد إذا كان مجالها مقسما إلى فترات ولكل فترة قاعدة خاصة بها كما في المثال التالي:

مثال :

إذا كانت :

$$F(x) = \begin{cases} 2x - 3 & , x < 0 \\ 2x + 3 & , x > 0 \end{cases}$$

أوجد كل من :

$F(1)$, $F(0)$, $F(-1)$ إذا كان لها

وجود ثم عين مجال ومدى هذه الدالة

الحل :

مجال هذه الدالة مقسم إلى فترتين هما :

1- $(-\infty, 0)$, $F(x) = 2x - 3$

2- $(0, \infty)$, $F(x) = 2x + 3$

كما أن العدد صفر لا ينتمى لأى من الفترتين

غير معرف $\rightarrow F(0)$ $\therefore$

$$\therefore D_F = \{ \mathbb{R} - \{0\} \}$$

أى أن مجال هذه الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا $x = 0$

$$\therefore -1 \in (-\infty, 0)$$

$$\therefore F(-1) = 2(-1) - 3 = -5$$

$$\therefore 1 \in (0, \infty)$$

$$\therefore F(1) = 2(1) + 3 = 5$$

وعند $x < 0$ يكون :

$$2x < 0$$

$$\therefore 2x - 3 < -3$$

$$\therefore F(x) \in (-\infty, -3) \quad \text{I}$$

$$2x > 0 \quad \text{وعند } x > 0 \text{ يكون :-}$$

$$2x + 3 > 3$$

$$\therefore F(x) \in (3, \infty) \quad \text{II}$$

من I , II يكون مدى هذه الدالة هو :-

$$R_F = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$$

$$= \{ x : \mathbb{R} - [-3, 3] \}$$

أى أن مدى هذه الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا الفترة :

$$[-3, 3]$$

تمارين (23)

1- ارسم الشكل البياني لكل من الدالتين :

$$(a) \quad F(x) = \frac{4x^2 - 9}{2x - 3}, \quad x \neq \frac{3}{2}$$

$$(b) \quad G(x) = \begin{cases} \frac{4x^2 - 9}{2x - 3} & , \quad x \neq \frac{3}{2} \\ 6 & , \quad x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

ثم عين مجال ومدى كل منهما وهل هما متساويتان ؟

2 - ارسم الشكل البياني لكل من الدوال الآتية مبينا مجال ومدى كل منهم:

$$(a) \quad F(x) = \begin{cases} 2 - 3x & , \quad 0 \geq x \geq -2 \\ 2 & , \quad 3 \geq x > 0 \end{cases}$$

$$(b) \quad F(x) = \begin{cases} 2x + 3 & , \quad x < -1 \\ 2 & , \quad x \geq -1 \end{cases}$$

$$(c) \quad F(x) = \begin{cases} -1 & , \quad 1 > x \geq -2 \\ 2 & , \quad 3 \geq x \geq 1 \end{cases}$$

دالة المقياس:

درسنا في الباب الأول القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي x والخواص الأساسية لها.

ونعرف دالة المقياس على نفس النمط كالآتي:

$$F(x) = |x| \begin{cases} -x & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ x & , x > 0 \end{cases}$$

أي أن مقياس (صفر) = صفر

ومقياس (أي عدد بخلاف الصفر) = عدد موجب

أي أن مجال دالة المقياس هو جميع الأعداد الحقيقية R

ويكون مدى دالة المقياس هو جميع الأعداد الحقيقية الموجبة R^+

بالإضافة إلى الصفر، تكتب كالآتي كل من المجال والمدى :-

$$D_F = R$$

$$R_F = [0, \infty)$$

مثال 1 :

إرسم بيانيا الدالة الآتية:

$$F(x) = |x|$$

الحل :

يتم عمل جدول من سالب مالا نهاية وحتى الصفر للدالة :

$$F(x) = -x \quad , \quad (-\infty, 0]$$

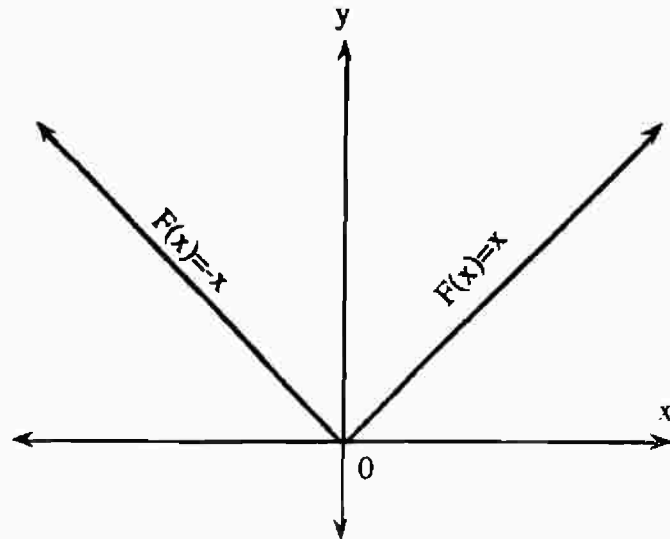
x	-3	-2	-1
y	3	2	1

ثم عمل جدول من صفر إلى موجب ما لانهاية للدالة :-

$$F(x) = x, [0, \infty)$$

x	0	1	2
y	0	1	2

الرسم البياني يوضحه شكل 62



شكل 62

: ومن الشكل البياني نستنتج أن

- 1- $D_F = \mathbb{R}$
- 2- $R_F = [0, \infty)$
- 3- $F(x) = F(-x)$

∴ الدالة زوجية

مثال 2 : ارسم بيانيا الدالة الآتية:

$$F(x) = |x - 3|$$

ثم أوجد مجال ومدى هذه الدالة

الحل:

$$x - 3 = 0$$

عندما

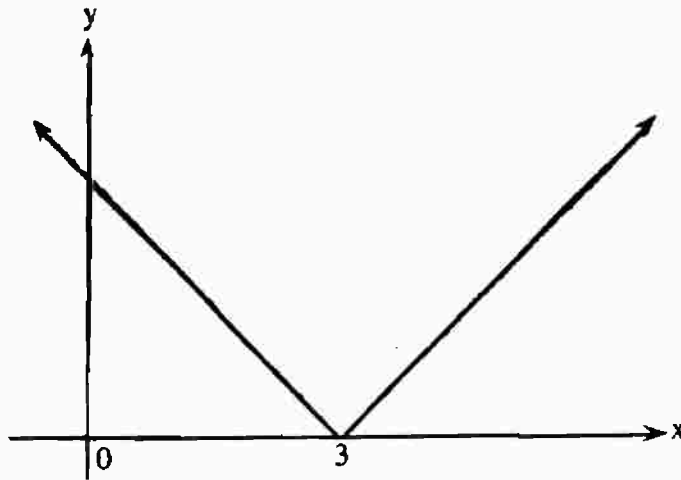
$$\therefore x = 3$$

$$\therefore (x) = \begin{cases} 3 - x & , x < 3 \\ x - 3 & , x \geq 3 \end{cases}$$

ويتم عمل الجدول حيث لكل قاعدة مجال كالآتي:

الفترة	$(-\infty, 3)$			$[3, \infty)$			
القاعدة	$3 - x$			$x - 3$			
x	0	1	2	3	4	5	6
y	3	2	1	0	1	2	3

نوقع النقاط بالجدول على الرسم البياني كما هو موضح بشكل 63



شكل 63

نلاحظ من الشكل البياني (شكل 63) الآتي:

1 - الدالة بأكملها تقع فوق المحور x

2 - مجال هذه الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية ومداها من صفر حتى

مالانهاية وتكتب بالأسلوب الرياضى كالتالى :-

$$D_F = \mathbb{R}$$

$$R_F = [0, \infty)$$

تمارين (24)

I - إرسم الدوال الآتية مع إيجاد المجال وال المدى :-

1- $F(x) = x + |x|$

2- $F(x) = |2x - 3|$

3- $F(x) = x + |x^2 - 6x|$

4- $F(x) = -x + |x^2 - 6x|$

5- $F(x) = x - |x|$

6- $F(x) = -x + |x|$

II - أوجد مجال الدوال :

1- $F(x) = \frac{|2x - 3|}{x - 3}$

2- $F(x) = \frac{x - 1}{|x - 2|}$

3- $F(x) = \frac{-x + |x|}{x - 2}$

4- $F(x) = \frac{|2x^2 + 3 + 5|}{\sqrt{x^2 - 1}}$

الدوال السامية

تعرف كل دالة ليست جبرية بأنها دالة

سامية وأشهر هذه الدوال هي:

الدوال الأسية

الدوال اللوغاريتمية

الدوال المثلثية

الدالة الأسية:

إذا كان a عدد حقيقي موجب ، $a \neq 1$ فإن الدالة الأسية للأساس a هي F
(x) تعرف كالآتي:

$$F(x) = a^x$$

حيث x أى عدد حقيقى.

ومن القواعد المعروفة فى الدوال العكسية تكون هذه الدالة أحادية وبالتالى
فإن لها معكوس هو $F^{-1}(x)$.

مثال تمهيدى:

إرسم الرسم البيانى للدوال الآتية:

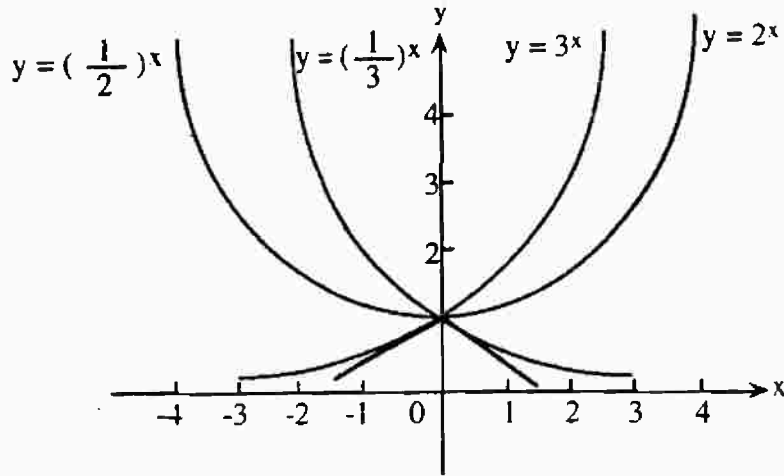
$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & y = 2^x \\ \text{(b)} & y = 3^x \\ \text{(c)} & y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \\ \text{(d)} & y = \left(\frac{1}{3}\right)^x \end{array}$$

الحل :

يتم عمل الجدول البيانى الآتى للـ $y = a^x$ إلى السابقة:-

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
3^x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$

ثم توضع هذه النقاط بيانيا ومثلها شكل 64



شكل 64

نلاحظ من الجدول والرسم البياني الآتي:

- 1 - الدوال (a) ، (b) تزايدية حيث الأساس $1 < a$
 - 2 - الدوال (c) ، (d) تناقصية حيث الأساس $1 > a$
 - 3 - مجال جميع الدوال هو مجموعة الأعداد الحقيقية.
 - 4 - مدى جميع الدوال هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.
 - 5 - جميع الدوال تمر بالنقطة $A(0, 1)$.
- وعلى ذلك تكون الدالتين (a) ، (b) ممثلة للدوال الأسية التي يزيد فيها الأساس a عن الواحد ($1 < a$) وهي في هذه الحالة تزايدية والدالتين (c) ، (d) ممثلة للدوال الأسية التي يقل فيها الأساس a عن الواحد ($1 > a$) وهي في هذه الحالة تناقصية.

مثال 1:

أوجد قيم a للدوال $y = a^x$ التي تحتوى النقاط الآتية:

B (2, 49) , E (3, 8) , T (2, 64)

الحل :

بالنسبة للنقطة B (2, 49) نعوض في معادلة الدالة $y = a^x$

$$\therefore 49 = a^2$$

$$7^2 = a^2$$

$$\therefore a = 7$$

بالنسبة للنقطة E (3, 8) نعوض في معادلة الدالة $y = a^x$:

$$\therefore 8 = a^3$$

$$2^3 = a^3$$

$$\therefore a = 2$$

بالنسبة للنقطة T (2, 64) نعوض في معادلة الدالة $x = a^x$

$$\therefore 64 = a^2$$

$$8^2 = a^2$$

$$\therefore a = 8$$

مثال 2 :

أوجد جميع الأعداد الحقيقية التي تحقق المعادلة :

$$5^{x(x-3)} = 625$$

الحل:

يتم تحليل الطرف الأيمن وبالتالي تكتب المعادلة على الصورة:

$$5^{x(x-3)} = 5^4$$

$$\therefore x(x-3) = 4$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x - 4)(x + 1) = 0$$

$$\therefore x = 4 \quad \text{I}$$

أو

$$x = -1 \quad \text{II}$$

مثال 3 :

أوجد قيمة x في المعادلة

$$5^{x-3} + 5^{2-x} = \frac{6}{5}$$

الحل :

يتم فك الطرف الأيسر حسب قواعد الأس وتصبح المعادلة كالآتي:

$$5^x \cdot 5^{-3} + 5^2 \cdot 5^{-x} = \frac{6}{5}$$

$$5^x \left(\frac{1}{125}\right) + 25 \left(\frac{1}{5^x}\right) = \frac{6}{5}$$

$$\text{ضع } y = 5^x$$

$$\therefore \frac{y}{125} + \frac{25}{y} = \frac{6}{5}$$

بضرب الطرفين في y 125

$$\therefore y^2 + 25(125) = 150y$$

$$y^2 - 150y + 3125 = 0$$

$$(y - 125)(y - 25) = 0$$

$$\therefore y = 125 \quad \text{I}$$

$$\therefore 5^x = 125$$

$$5^x = 5^3$$

$$\therefore x = 3$$

$$, y = 25$$

$$5^x = 25$$

$$5^x = 5^2$$

$$5^x = 5^2$$

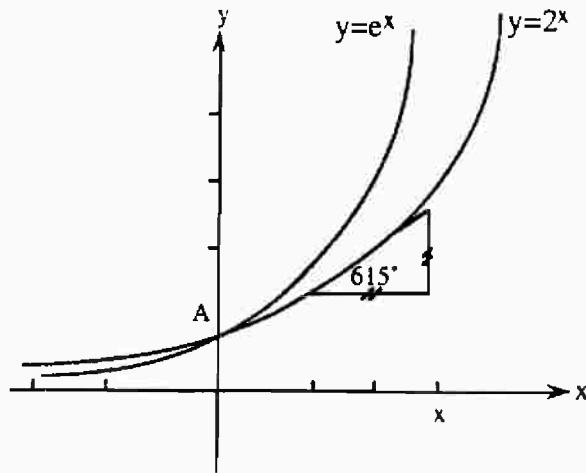
$$\therefore x = 2$$

∴ مجموعة الحل للمعادلة هي:-

$$X = \{ 3 , 2 \}$$

الدالة الأسية الطبيعية e^x

عرفنا مما سبق أن جميع الدوال الأسية تمر بالنقطة $A(0, 1)$ وعند رسم مستقيم يمر بهذه النقطة وميله $1 +$ يكون هذا المستقيم مماسا لمنحنى دالة واحدة $x = a^x$ ويكون ثابت هذا المنحنى مساويا لـ 2.718281 حيث يكون ميل هذا المماس هو نفس المنحنى - أى المشتقة الأولى للمنحنى تساوى نفس المنحنى - وقد تغير رمز ثابت هذا المنحنى من a ليصبح e (Euler number) ويكون أساسا للوغاريتم الطبيعي ($e = 2.718281828$) شكل 65.



شكل 65

ومن هذا التعريف يمكن تقديم النظرية الآتية :

نظرية:

إذا كانت $f(x) = e^x$

فإن : $f'(x) = e^x$

تمارين (25)

1 - باستخدام قواعد الأسس أكتب المقادير الآتية بطريقة مبسطة:

(a) $2^{\sqrt{8}} \cdot 2^{\sqrt{32}}$

(b) $2^{\sqrt{27}} \cdot 2^{\sqrt{12}}$

(c) $2^{\sqrt{7}} \cdot 2^{\sqrt{28}}$

(d) $3^{5\sqrt{3}} \cdot 2^{\sqrt{3}} \cdot 3^{\sqrt{3}}$

2- حدد في كل مما يأتي الدالة التزايدية والدالة التناقصية مع ذكر السبب:

(a) $F(x) = 3^{-x}$

(b) $F(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

(c) $F(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

(d) $F(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

3 - إذا كانت :-

$$F(x) = 3^x + 3^{-x}$$

$$G(x) = 3^x - 3^{3-x}$$

أوجد :

(a) $F(x) + G(x)$

(b) $F(x) - G(x)$

(c) $F(x^2) + G(x^2)$

(a) $2^{x-5} = 8$

(b) $2^{x-3} = 1$

(c) $3^{x-1} = \frac{1}{3}$

(d) $3^{x-2} = 27$

(e) $4^{x-1} = 1$

(f) $2^x = (4^2)^{x+1}$

(g) $3^x = 9^{x-1} \cdot 27$

(h) $3^x = 9^{x-1} \cdot 27^{1-3x}$

(i) $2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$

(k) $4(2^x + 2^{-x}) = 17$

الدوال اللوغاريتمية:

الدالة اللوغاريتمية هي معكوس الدالة الأسية ويرمز لها بالرمز $F^{-1}(x)$

حيث:

$$F^{-1}(x) = \log_a x$$

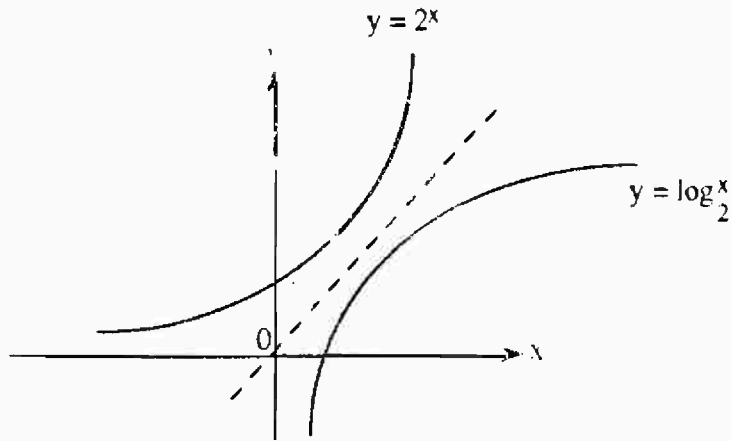
وتقرأ لوغاريتم العدد x للأساس a

ويمكن رسم الدالة اللوغاريتمية بطريقة خط المرآة العاكس ($y = x$) للدالة

الأسية (راجع الدوال العكسية) في الحالتين:

الحالة الأولى:

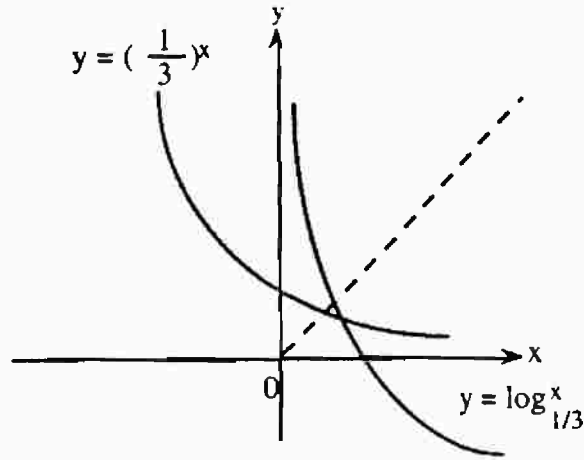
الأساس $a > 1$ شكل 66



شكل 66

الحالة الثانية :-

$0 < a < 1$ شكل 67



شكل 67

نلاحظ من الرسم البياني للحالتين الآتى :-

الحالة الأولى : $a > 1$	الحالة الثانية : $0 < a < 1$
1 - الدالة تزايدية	الدالة تناقصية
2 - عند $x < 1$ يكون $\log_a x$ موجب	عند $x < 1$ يكون $\log_a x$ سالب
عند $x = 1$ يكون $\log_a x = 0$	عند $x = 1$ يكون $\log_a x = 0$
عند $0 < x < 1$ يكون $\log_a x$ سالب	عند $0 < x < 1$ يكون $\log_a x$ موجب

وحيث أن الدالة اللوغاريتمية هي معكوس للدالة الأسية يكون:

- I - 1 - مجال الدالة اللوغاريتمية هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.
 - 2 - مدى الدالة اللوغاريتمية هو مجموعة الأعداد الحقيقية.
 - II - خصائص الدالة اللوغاريتمية يمكن إستنتاجها من خواص الدالة الأسية.
- وتكون كالآتى:

$$1 \quad \log_a M = \log_a N$$

عندما يكون

$$M = N$$

$$2- \log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

$$3- \log_a M/N = \log_a M - \log_a N$$

$$4- \log_a M^k = k \log_a M$$

$$5- \log_a 1 = 0$$

$$6- \log_a a = 1$$

$$7- a^{\log_a M} = M$$

حيث M, N, a عدد حقيقيا موجبا $a \neq 1$

مثال 1 :

استعمل التعريف لإيجاد قيمة x في كل مما يأتي:-

$$(a) \quad \log_3 x = \frac{1}{2}$$

$$(b) \quad \log_x 8 = 3$$

$$(c) \quad \log_2 16 = x$$

$$(d) \quad \log_3 (x + 3) = 2$$

الحل :

باستخدام التعريف يكون :

$$(a) \quad x = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$(b) \quad 8 = x^3$$

$$2^3 = x^3$$

وحيث أن الاس للطرف الأيمن = الأس في الطرف الأيسر
الأساس للطرف الأيمن = الأساس في الطرف الأيسر

$$\therefore x = 2$$

$$(c) \quad 16 = 2^x \\ 2^4 = 2^x$$

وحيث أن الأساس للطرف الأيمن = الأساس في الطرف الأيسر
 $\therefore$ الأس للطرف الأيمن = الأس في الطرف الأيسر

$$\therefore x = 4$$

$$(d) \quad x + 3 = 3^2 \\ x = 9 - 3 \\ x = 6$$

مسألة 2 :

حل كل من المعادلات الآتية :

$$(a) \quad \log_2 (x - 3) + \log_2 (x - 4) = 1$$

$$(b) \quad \log_6 (x + 6) - \log_6 x = \log_6 (x - 4)$$

الحل :

$$(a) \quad \log_2 (x - 3) (x - 4) = 1$$

وباستخدام تعريف اللوغاريتم :-

$$\therefore (x - 3) (x - 4) = 2^1$$

$$x^2 - 7x + 12 = 2$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$(x - 2) (x - 5) = 0$$

$$\text{أما } (x - 2) = 0 \rightarrow x = 2$$

$$\text{أو } (x - 5) = 0 \rightarrow x = 5$$

مجموعة الحل للمعادلة هي :-

$$X = \{ 2, 5 \}$$

b- باستخدام تعريف اللوغاريتم :

$$\therefore \frac{x+6}{x} = x - 4$$

$$x + 6 = x(x - 4)$$

$$= x^2 - 4x$$

$$\therefore x^2 - 4x - x - 6 = 0$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$(x - 6)(x + 1) = 0$$

$$\text{أما } (x - 6) = 0 \rightarrow x = 6$$

$$\text{أو } (x + 1) = 0 \rightarrow x = -1$$

$\therefore$ مجموعة الحل للمعادلة هي :

$$X = \{ 6, -1 \}$$

مثال 3 :

إذا كان :

$$\log_a 2 = 0.21$$

$$, \log_a 3 = 0.27$$

أوجد قيمة كل مما يأتي:-

$$(a) \log_a 6$$

$$(d) \log_a 72$$

$$(c) \log_a \sqrt{3}$$

$$(d) \log_a \sqrt{2}$$

الحل :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \log_a 6 &= \log_a 2 + \log_a 3 \\ &= 0.21 + 0.27 = 0.48 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \log_a 72 &= \log_a 8 + \log_a 9 \\ &= \log_a 2^3 + \log_a 3^2 \\ &= 3 \log_a 2 + 2 \log_a 3 \\ &= 3 (0.21) + 2 (0.27) = 1.17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad \log_a \sqrt{3} &= \log_a 3^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \log_a 3 \\ &= \frac{1}{2} (0.27) = 0.135 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(d)} \quad \log_a \sqrt{2} &= \log_a 2^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \log_a 2 \\ &= \frac{1}{2} (0.21) = 0.105 \end{aligned}$$

مثال 4 :

إذا كان :

$$\frac{\log_a x}{2} = \frac{\log_a y}{3} = \frac{\log_a z}{5}$$

إثبت أن :

$$x^3 y^2 = z^5$$

الحل :

بتطبيق قواعد النسب والتناسب :-

$$\therefore \frac{\log_a x + \log_a y}{2 + 3} = \text{إحدى النسب}$$
$$= \frac{\log_a z}{5}$$

$$\therefore \frac{\log_a x y}{5} = \frac{\log_a z}{5}$$
$$\log_a xy = \log_a z$$

وتطبيق الخاصية رقم (1) فى اللوغاريتمات .

$$\therefore x y \equiv z$$

حل آخر :

نضع كل من هذه النسب k

$$\therefore \frac{\log_a x}{2} = \frac{\log_a y}{3} = \frac{\log_a z}{5} = k$$

$$\therefore \log_a x = 2k \quad \rightarrow x = a^{2k}$$

$$\therefore \log_a y = 3k \quad \rightarrow y = a^{3k}$$

$$\log_a z = 5k \quad \rightarrow z = a^{5k}$$

بإيجاد قيمة الطرف الأيسر :-

$$x \cdot y = a^{2k} \cdot a^{3k}$$
$$= a^{5k}$$
$$= z$$

$$\therefore x y = z$$

اللوغاريتم الطبيعي :

يسمى اللوغاريتم للأساس e باللوغاريتم الطبيعي ويرمز له بالرمز $\ln$

حيث :-

$$\log_e x = \ln x$$

يستخدم اللوغاريتم الطبيعي في التفاضل والتكامل والعلوم علما بأن e

عدد غير نسبي ويساوى تقريبا $\ln e = 1$, 2.71828

اللوغاريتم الاعتيادي :

يسمى اللوغاريتم للأساس 10 باللوغاريتم الاعتيادي ويرمز له بالرمز $\log$

حيث :-

$$\log_{10} x = \log x$$

يستخدم عادة في الحسابات ومن خواصه :

$$\log 10 = 1$$

$$\log 100 = \log 10^2 = 2 \log 10 = 2$$

$$\log 1000 = \log 10^3 = 3 \log 10 = 3$$

$$\log \frac{1}{10} = \log 10^{-1} = - \log 10 = -1$$

$$\log \frac{1}{100} = \log 10^{-2} = -2 \log 10 = -2$$

العلاقة بين اللوغاريتم الطبيعي واللوغاريتم الاعتيادي:

$$y = e^x \quad (1) \quad \text{بفرض أن :}$$

بأخذ اللوغاريتم الاعتيادي للطرفين للمعادلة (1)

$$\therefore \log y = x \log e$$

$$\therefore x = \log y / \log e \quad (2)$$

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للمعادلة (1)

$$\therefore \ln y = x \ln e = x$$

$$x = \ln y \quad (3)$$

من (2) ، (3) نستنتج أن :-

$$\ln y = \log y / \log e$$

$$= 2.3 \log y$$

مثال :

إذا علمت أن : $\log 100 = 2$ فأوجد $\ln 100$

الحل :

$$\ln 100 = 2.3 \log 100$$

$$\ln 100 = 2.3 (2)$$

$$\therefore \ln 100 = 4.6$$

تمارين (26)

1 - ضع المعادلات الآتية فى الصيغة اللوغاريتمية :-

(a) $2^4 = 16$

(b) $3^4 = 81$

(c) $(\frac{1}{2})^3 = 8^{-1}$

(d) $(\frac{1}{2})^{-3} = 8$

(e) $(64)^{\frac{2}{3}} = 16$

(f) $a^x = y$

(g) $e^x = 5$

(h) $e^{x^2} = y$

2 - ضع المعادلات الآتية فى الصيغة الأسية :-

(a) $\log_{16} 10 = 1$

(b) $\log_5 625 = 4$

(c) $\log_a x = 2$

(d) $\log_a 4 = 2$

(e) $\log_a 3 = 0.49$

(f) $\log_a 1 = 0$

(g) $\ln 25 = x$

(h) $\ln x = y$

3 - عبر عن اللوغريتمات التالية بدلالة اللوغاريتمين :-

$\ln 2 = a$

$\ln 3 = b$

(a) $\ln 16$

(b) $\ln 2\sqrt{2} \cdot 3$

(c) $\ln 0.25$

(d) $\ln \frac{4}{9}$

(e) $\ln 12$

(f) $\ln 4.5$

(g) $\ln \frac{4.5}{9}$

(h) $\ln \sqrt{13.5}$

4- حل المعادلات الآتية :

- (a) $\log_4 (x - 2) - \log_4 (x + 2) = 1$
- (b) $\log_2 (7 - x) - \log_2 (x + 2) = 2$
- (c) $\log_7 3x + \log_7 (2x - 1) = \log_7 (16x - 10)$
- (d) $\ln x (x + 2) = 4$

5- أوجد مجال الدالة ثم إرسم الرسم البياني لها لكل من :

- (a) $F(x) = \log_2 (x - 1)$
- (b) $F(x) = \log_3 (-x)$
- (c) $F(x) = \log_{\frac{1}{2}} (2x - 1)$
- (d) $F(x) = \log_{\frac{1}{3}} (-x)$

6 - أكتب التعبيرات الآتية على صورة لوغاريتم عدد واحد :

- (a) $\log_5 \frac{21}{4} - \log_5 \frac{7}{2} + \log_5 \frac{8}{9}$
- (b) $3 \log_4 10 - 2 \log_4 5$
- (c) $3 \log_6 12 - 4 \log_6 9 + \frac{3}{2} \log_6 4$

7 - إثبت أن :

$$\log_{10} \frac{a^2}{bc} + \log_{10} \frac{b^2}{ca} + \log_{10} \frac{c^2}{ab} = 0$$

8 - إذا كان :-

$$\log_6 \frac{x+y}{7} = \frac{1}{2} (\log x + \log y)$$

إثبت أن :-

$$x^2 + y^2 = 47xy$$

9 - إذا كان :-

$$\frac{\log_{10} x}{2} = \frac{\log_{10} y}{3} = \frac{\log_{10} z}{5}$$

إثبت أن :

$$(a) \ x y = z$$

$$(b) \ y^2 z^2 = x^8$$

10 - إذا كان

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$

إثبت أن :

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

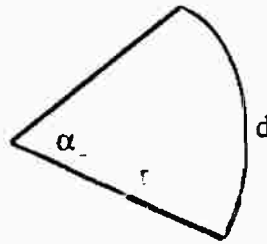
الدوال المثلثية

القياسات الدائرية والقياسات الزاوية:

أولاً: القياسات الدائرية (Circular measure):

هو النسبة بين المسافة (d) مقاسة على المحيط إلى نصف القطر (r) وتكون وحداتها هي النصف قطرية (radian) والتي ليس لها أبعاد شكل 68.

$$\alpha = \frac{d}{r} \text{ rad}$$



شكل 68

ثانياً : القياسات الزاوية (Angular measure) :

حيث تقسم الزاوية المتواجدة في مركز الدائرة إلى 360 قسم يعرف كل قسم بالدرجة وتكون وحدات هذه القياسات الدرجة °.

العلاقة بين القياس الدائري والقياس الزاوي:

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

$$\therefore 1 \text{ rad} = 57.3^\circ$$

النسب المثلثية للمثلث القائم الزاوية بشكل 69 كما يلي:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\csc \alpha = \frac{c}{a}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\sec \alpha = \frac{c}{b}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}$$

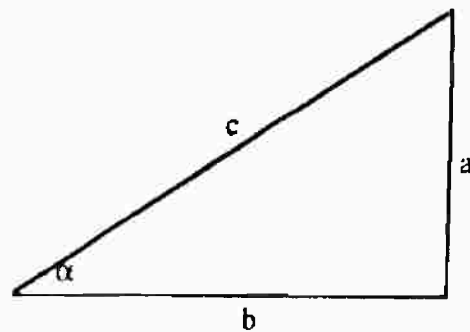
$$\cotan \alpha = \frac{b}{a}$$

$$= \frac{C \sin \alpha}{C \cos \alpha}$$

$$= \frac{C \cos \alpha}{C \sin \alpha}$$

$$= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$



شكل 69

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\tan^2 \alpha + 1 = 1/\cos^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

$$1 + \cot^2 \alpha = 1/\sin^2 \alpha = \csc^2 \alpha$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

مجموع وفرق الزوايا :

$$\sin (\alpha \pm B) = \sin \alpha \cos B \pm \cos \alpha \sin B$$

$$\cos (\alpha \pm B) = \cos \alpha \cos B \mp \sin \alpha \sin B$$

$$\sin \alpha + \sin B = 2 \sin \frac{\alpha + B}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - B}{2}$$

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

الدوال المثلثية لبعض الزوايا الهامة :

يبين شكل (70) بند 10 النسب المثلثية للزوايا الهامة.

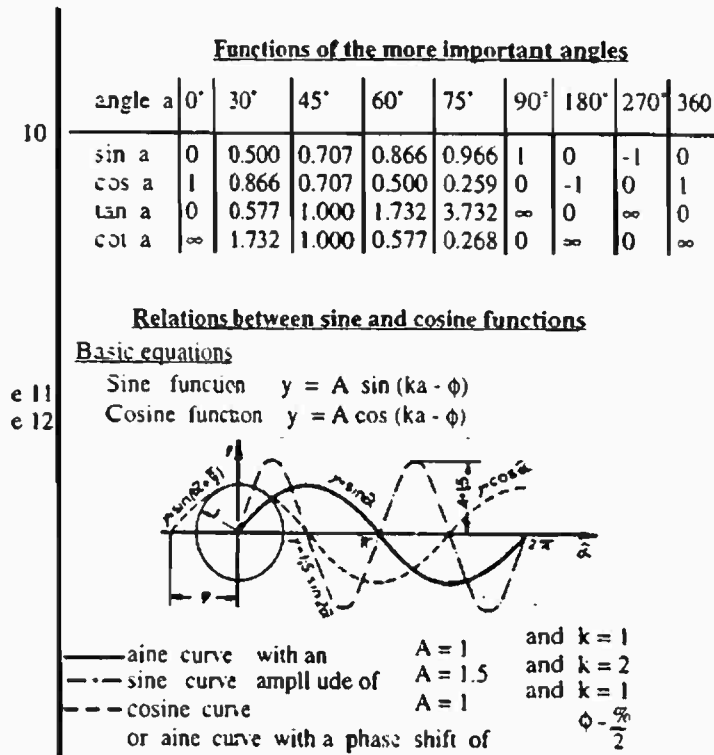
العلاقة بين دالة الجيب ودالة جيب التمام (Sine & Cosine):

يبين هذه العلاقة شكل رقم (70) البندين e11 , e12 عندما تكون $K = 1$

$A = 1$. وأيضاً شكل العلاقة بالنسبة للجيب (Sine α) عندما تكون $A = 1.5$, $A = 2$

كما يظهر في نفس الشكل أن منحنى جيب التمام (Cosine) هو نفسه منحنى

الجيب (Sine) مع إزاحة مقدارها $-\frac{\pi}{2}$

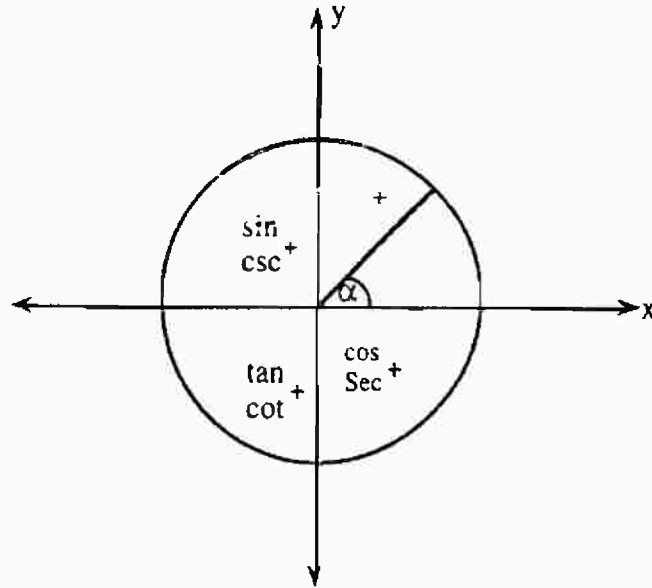


شكل 70

الدوال المثلثية للزوايا المختلفة:

أى زاوية ممكن أن تكون فى ربع واحد من الأربعة أرباع. وتشوقف إشارة النسبة المثلثية على هذا الربع كالتالى شكل (71).

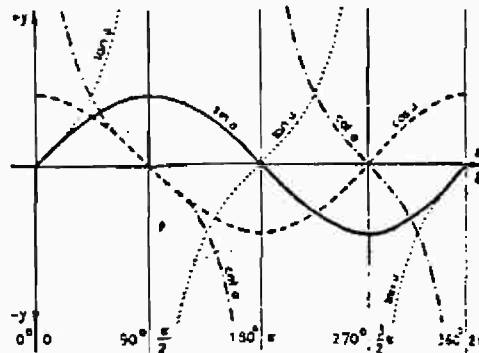
- 1- فإذا كانت الزاوية فى الربع الأول تكون جميع النسب المثلثية موجبة.
- 2 - إذا كانت الزاوية فى الربع الثانى تكون النسب المثلثية الموجبة هى Csc , Sine وبقية النسب المثلثية سالبة.
- 3 - إذا كانت الزاوية فى الربع الثالث تكون النسب المثلثية الموجبة هى Cot , Tan وبقية النسب المثلثية سالبة.
- 4- إذا كانت الزاوية فى الربع الرابع تكون النسبة المثلثية الموجبة هى Sec , Cos وبقية النسب المثلثية سالبة.



شكل 71

وتكون النسبة المثلثية في شكل (72) وفي جزئه العلوي يبين قيمة الدوال في حالة ما إذا كانت الزاوية محصورة بين الصفر 90° أو 90° , 180° أو 180° , 270° أو 270° , 360° . وأيضا في حالة تكرار الزاوية 360° .
كما يبين الشكل في جزئه السفلي الشكل البياني للدوال المختلفة (cost, sine, cot, tan للزاوية α في كل الأرباع أي ابتداء من الصفر وحتى 360° .

FUNCTIONS OF A CIRCLE				E3	
Quadrants					
$\sin (90^\circ - a)$	+	=	$\cos a$	$\sin (90^\circ + a)$	= - $\cos a$
$\cos (90^\circ - a)$	+	=	$\sin a$	$\cos (90^\circ + a)$	= - $\sin a$
$\tan (90^\circ - a)$	+	=	$\cot a$	$\tan (90^\circ + a)$	= - $\cot a$
$\cot (90^\circ - a)$	+	=	$\tan a$	$\cot (90^\circ + a)$	= - $\tan a$
$\sin (180^\circ - a)$	+	=	$\sin a$	$\sin (180^\circ + a)$	= - $\sin a$
$\cos (180^\circ - a)$	-	=	$\cos a$	$\cos (180^\circ + a)$	= - $\cos a$
$\tan (180^\circ - a)$	-	=	$\tan a$	$\tan (180^\circ + a)$	= $\tan a$
$\cot (180^\circ - a)$	-	=	$\cot a$	$\cot (180^\circ + a)$	= $\cot a$
$\sin (270^\circ - a)$	-	=	$\cos a$	$\sin (270^\circ + a)$	= - $\cos a$
$\cos (270^\circ - a)$	-	=	$\sin a$	$\cos (270^\circ + a)$	= $\sin a$
$\tan (270^\circ - a)$	+	=	$\cot a$	$\tan (270^\circ + a)$	= - $\cot a$
$\cot (270^\circ - a)$	+	=	$\tan a$	$\cot (270^\circ + a)$	= - $\tan a$
$\sin (360^\circ - a)$	-	=	$\sin a$	$\sin (360^\circ + a)$	= $\sin a$
$\cos (360^\circ - a)$	+	=	$\cos a$	$\cos (360^\circ + a)$	= $\cos a$
$\tan (360^\circ - a)$	-	=	$\tan a$	$\tan (360^\circ + a)$	= $\tan a$
$\cot (360^\circ - a)$	-	=	$\cot a$	$\cot (360^\circ + a)$	= $\cot a$
$\sin (-a)$	-	=	$\sin a$	$\sin (a \pm n \times 360^\circ)$	= $\sin a$
$\cos (-a)$	+	=	$\cos a$	$\cos (a \pm n \times 360^\circ)$	= $\cos a$
$\tan (-a)$	-	=	$\tan a$	$\tan (a \pm n \times 180^\circ)$	= - $\tan a$
$\cot (-a)$	-	=	$\cot a$	$\cot (a \pm n \times 180^\circ)$	= - $\cot a$



شكل 72

المجال (D_F) والمدى (R_F) لبعض الدوال المثلثية :

نجد من شكل (72) في الشكل البياني الآتي:

$$1 - F(a) = \sin a$$

$$\therefore D_F = \mathbb{R}$$

$$, R_F = [-1, 1]$$

$$2 - F(a) = \cos a$$

$$\therefore D_F = \mathbb{R}$$

$$, R_F = [-1, 1]$$

$$3 - F(a) = \tan a$$

$$= \frac{\sin a}{\cos a}$$

$$\therefore D_F = \{ \mathbb{R} - \{\text{أصفار المقام}\} \}$$

أي أن الزاوية تخضع للعلاقة :

$$a = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$\mathbb{Z}$ جميع الأعداد الصحيحة .

$$, R_F = \mathbb{R}$$

حيث $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية.

تمارين (27)

1 - إرسم الدوال الآتية :

(a) $\sin x$

(b) $\cos x$

(c) $\tan x$

في الفترة $[0, 2\pi]$

2- أوجد قيمة كل من الدوال الآتية :-

$\sin 15$

$\sin 95$

$\sin 200$

$\cos 15$

$\cos 59$

$\cos 200$

$\tan 15$

$\tan 95$

$\tan 20$

3 - أوجد قيمة الزوايا بالقياسات الدائرية والقياسات الزاوية لكل من :

(a) $r = 15$

(c) $r = 90$

وطول القوس 25

وطول القوس 250

(b) $r = 30$

(d) $r = 120$

وطول القوس 50

وطول القوس 720

ملحوظة: وحدة الأطوال تؤخذ بالمليمتر

4 - أوجد المجال لكل من الدوال الآتية:

(a) $F(x) = \sin x + \cos x$

(b) $F(x) = \tan x$

$$(c) \quad F(x) = \sin^2 x$$

$$(d) \quad F(x) = \ln(\sin x)$$

$$(e) \quad F(x) = \frac{\sin x}{\ln x}$$

$$(f) \quad F(x) = \frac{|\sin x|}{\sin x}$$

$$(g) \quad F(x) = \frac{\ln x}{\sin x}$$

$$(h) \quad F(x) = \frac{\tan x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$$

تحصيل الدوال (الدالة التركيبية)

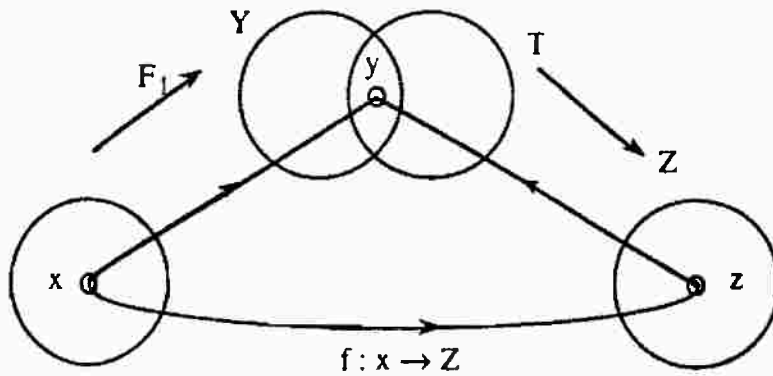
إذا كانت $f_1(x)$ ، $f_2(x)$ دالتين حقيقيتين وكان :

1 - مدى $f_1(x) \cap \text{مجال } f_2(x) \neq \emptyset$ فإنه يمكن

تحصيل الدالتين $F_1(x)$ لإيجاد الدالة المحصلة أو الدالة التركيبية (شكل 73) :

$$f = f_2(x) \circ f_1(x)$$

$$= f_2(f_1(x))$$



شكل 73

من الشكل يتضح أن :

$$F_1(x) = y , \quad F_2(y) = z$$

$$\begin{aligned} F_2(x) \circ (F_1(x)) &= F_2(F_1(x)) \\ &= F_2(y) \\ &= z \end{aligned}$$

2 - مدى $f_2(x) \cap \text{مجال } F_1(x) \neq \emptyset$ فإنه يمكن

إيجاد أيضا :-

$$F_1 \circ F_2 (x) = F_1 (f_2(x))$$

وينتج من التعريف أن :-

$$D_{f_1 \circ f_2} = \{ x : x \in D_{F_2} , f_2 (x) \in D_{f_1} \}$$

مثال 1 :

إذا كانت $F_1 (x)$, $F_2 (x)$ دالتين معرفتين على المجموعة X

$$X = \{ a , b , c \}$$

$$F_1 = (a , b) , (b , c) , (c ,)$$

$$F_2 = (a, a) , (b , a) , (a , b)$$

فأوجد الآتى :

$$(a) \quad F_2 \circ F_1$$

$$(b) \quad F_1 \circ F_2$$

$$(c) \quad R_{f_2 \circ f_1}$$

$$(d) \quad R_{f_1 \circ f_2}$$

الحل :

$$(a) \quad F_2 \circ F_1 = f_2 (f_1)$$

$$= (a , a) , (b , a) , (c , b)$$

$$(b) \quad F_1 \circ F_2 = F_1 (F_2)$$

$$= (a , b) , (b , c) , (c , c)$$

$$(c) \quad R_{f_2 \circ f_1} = \{ a , b \}$$

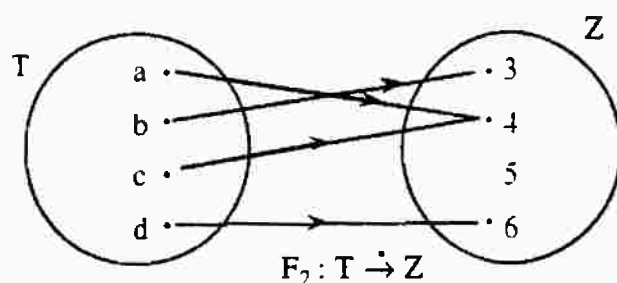
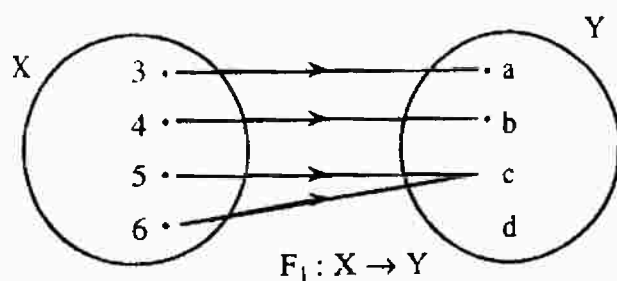
$$R_{f_1 \circ f_2} = \{ b , c \}$$

نلاحظ من المثال السابق أن :

$$F_2 \circ F_1 \neq F_1 \circ F_2$$

مثال 2:

F_2 , F_1 دالتين معرفتين كما بالشكل (شكل 74)



شكل 74

أوجد الآتى:

(a) $F_2 \circ F_1$

(c) $F_1 \circ F_2$

(b) $D_{f_2 \circ f_1}$

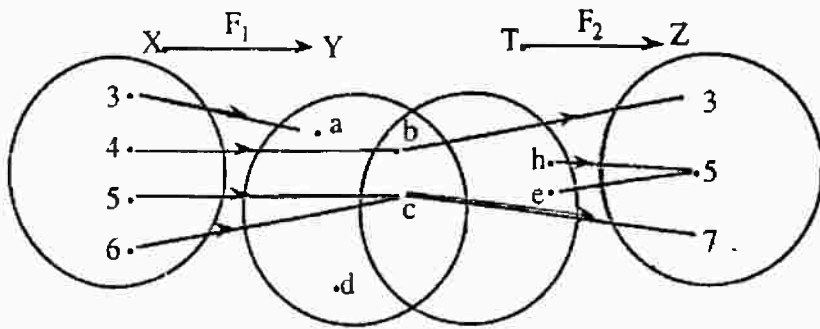
(d) $D_{f_1 \circ f_2}$

الحل :

(a) $F_2 \circ F_1 = F_2 (F_1)$

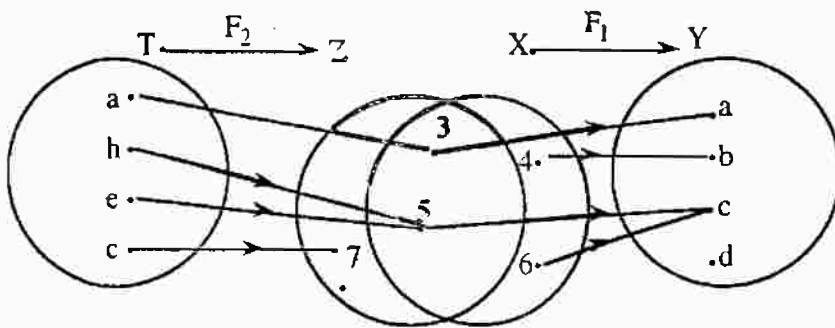
$= \{ (4, 3), (5, 7), (6, 7) \} \dots \dots$ شكل 75

(b) $D_{f_2 \circ f_1} = \{ 4, 5, 6 \}$



$$F_2 \circ F_1 : x \rightarrow z$$

شکل 75



$$F_1 \circ F_2 : T \rightarrow Y$$

شکل 76

(c) $F_1 \circ F_2 = F_1 (F_2)$

$= (h, c), (b, a), (e, c) \dots\dots\dots$

شکل 76

$$(d) D_{f_1 \circ f_2} = \{b, h, e\}$$

نلاحظ من المثال الآتي:-

$$1- F_2 \circ F_1 \neq F_1 \circ F_2$$

$$2- 3 \notin D_{f_2 \circ f_1}$$

$$3- c \notin D_{f_1 \circ f_2}$$

مثال 3 :

a - اذكر مجال كل من الدالتين الحقيقيتين F_2, F_1 المعرفتين كالآتي:

$$F_1(x) = 5 - x^2$$

$$F_2(x) = \sqrt{x - 1}$$

b- أوجد أيضًا:

$$D_{f_2 \circ f_1}, \quad F_2 \circ F_1$$

$$D_{f_1 \circ f_2}, \quad F_1 \circ F_2$$

الحل :

$$a- F_1(x) = 5 - x^2$$

$$D_{f_1} = \mathbb{R}$$

$$F_2(x) = \sqrt{x - 1} \quad \therefore x \geq 1, \quad D_{f_2} = [1, \infty)$$

$$b- = f_2 \circ f_1(x) = f_2(f_1(x))$$

$$= f_2(5 - x^2)$$

$$\therefore F_2 \circ F_1(x) = \sqrt{5 - x^2 - 1}$$

$$= \sqrt{4 - x^2}$$

$$II \quad D_{f_2 \circ f_1} :$$

$$4 - x^2 \geq 0$$

$$x^2 \leq 4$$

$$2 \leq x \leq 2$$

$$\therefore D_{f \circ f_1} = [-2, 2]$$

$$\text{III} \quad F_1 \circ F_2 = F_1(F_2)$$

$$\therefore F_2(x) = \sqrt{x-1}$$

$$\therefore F_1(x) = 5 - x^2$$

$$\therefore F_1 \circ F_2 = 5 - (\sqrt{x-1})^2$$

$$= 5 - (x-1)$$

$$= 6 - x$$

$$\text{IV} \quad \therefore D_{f_1 \circ f_2} = \{ x : x \in D_{f_1}, F_2(x) \in D_{f_1} \}$$

$$= [1, \infty)$$

مثال 4 :

أوجد $g(x)$ إذا كان :

$$f(x) = \sqrt{x-1}, \quad f \circ g(x) = x^2$$

الحل :

$$f \circ g(x) = x^2$$

$$= F(g(x))$$

$$\therefore F(x) = \sqrt{x-1}$$

$$\therefore F(g(x)) = \sqrt{g(x)-1}$$

$$\therefore \sqrt{g(x)-1} = x^2$$

$$\therefore g(x) = x^4 + 1$$

مثال 5 :

إذا كان :-

$$F(x) = \frac{\ln x}{x-2}$$

$$g(x) = \frac{1}{x-1}$$

أوجد $F \circ g(x)$

الحل :

$$F \circ g(x) = F(g(x))$$

$$= \frac{\ln g(x)}{g(x) - 2}$$

$$= \frac{\ln \frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x-1} - 2}$$

$$= \frac{\ln 1 - \ln(x-1)}{\frac{1-2(x-1)}{x-1}}$$

$$= \frac{0 - \ln(x-1)}{-2x+3} \cdot (x-1)$$

$$= \frac{(x-1)}{(3-2x) \ln(x-1)}$$

تمارين (28)

1 - إذا كانت :-

$$F_1 = \{ (1, 2), (2, 2), (3, 1) \}$$

$$F_2 = \{ (1, 1), (2, 3), (3, 3) \}$$

دالتين معرفتين على المجموعة X حيث:

$$X = \{ 1, 2, 3 \}$$

فأوجد :

$$F_2 \circ F_1, F_1 \circ F_2$$

2 - إذا كانت f, g دالتين معرفتين على مجموعة الأعداد الحقيقية:-

$$F(x) = 3, \quad g(x) = 3x$$

فاذكر مجال ومدى كل من :-

$$f \circ g, \quad g \circ f$$

وأوجد قيمة :

$$g \circ f(2), \quad f \circ g(2), \quad f \circ f(2), \quad g \circ g(2)$$

3 - إذا أعطيت $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x-1}$ فأوجد قيمة :-

$$(a) \quad f \circ g(3)$$

$$(c) \quad f \circ g\left(\frac{1}{3}\right)$$

4 - أوجد $f \circ g(x)$. $g \circ f(x)$ في الحالات الآتية:

$$(a) \quad F(x) = \sqrt{x} + 1, \quad g(x) = x^2$$

$$(b) \quad F(x) = 2 + \sqrt{x}, \quad g(x) = (x-2)^2$$

5 - إذا كانت :-

$$F(x) = \frac{x+1}{x-2} , \quad g \circ f(x) = \frac{3}{x-2}$$

أوجد قيمة $g(x)$

6 - أوجد مجال ومدى الدوال الآتية :

$$F_1 , F_2 , F_1 \circ F_2 , F_2 \circ F_1$$

وذلك إذا كان :

$$F_1(x) = \sqrt{x-1}$$

$$F_2(x) = x^2 + 1$$

أوجد أيضا قيمة :

$$F_1(2) , F_2(2) , F_2 \circ F_1(2) , F_1 \circ F_2(2)$$

7 - إذا كانت :

$$F_1(x) = \sqrt{2x-5}$$

$$F_2(x) = \frac{1}{x}$$

فأوجد :

$$(a) F_2 \circ F_1(x) , F_1 \circ F_2(x)$$

$$(b) D_{f_2 \circ f_1} , D_{f_1 \circ f_2}$$

8 - إذا كانت :

$$f(x) = x^2 , \quad -\infty < x < \infty$$

$$g(x) = \sin x \quad -\infty < x < \infty$$

أوجد :

$$f \circ g(x) , g \circ f(x)$$

الدوال العكسية :

درسنا فيما سبق الدالة الحقيقية وعرفنا أن معكوس الدالة الحقيقية ليس بالضرورة دالة.

وعلى أية حال نستطيع القول بأن العلاقة العكسية للدالة تكون أيضا دالة إذا كان :

$$1 - F(x_1) = F(x_2) \quad \rightarrow \quad x_1 = x_2$$

أو

$$2- x_1 \neq x_2 \quad \rightarrow \quad F(x_1) \neq F(x_2)$$

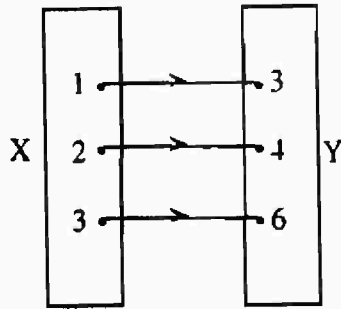
حيث x_1, x_2 في مجال الدالة F (تعرفا بالقاعدة (1) أو القاعدة (2))
وتسمى الدالة F في هذه الحالة بالدالة الأحادية وتسمى الدالة F^{-1} معكوس الدالة F
فمثلا إذا كان :

$$F_1 = \{ (1, 3), (2, 4), (3, 6) \}$$

يكون المعكوس لها F_1^{-1} حيث

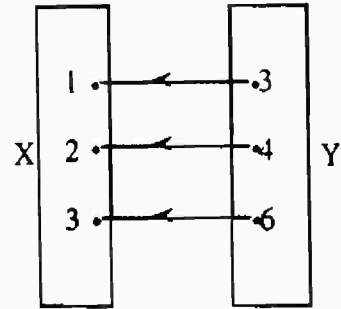
$$F_1^{-1} = \{ (3, 1), (4, 2), (6, 3) \}$$

ويمكن تمثيلهما بالمخطط السهمي كالتالي (شكل 77 ، شكل 78).



$$F_1 = X \rightarrow Y$$

شكل 77



$$F_1^{-1} = Y \rightarrow X$$

شكل 78

حيث X المجال ، Y المدى للدالة F_1

Y المجال ، X المدى للدالة F_1^{-1} ،

وعلى ذلك نجد أن :-

$$F_1(3) = 6$$

$$F_1^{-1}(6) = 3$$

إذ أن العنصر $x = 3$ ينتمي إلى X وينتمي أيضا إلى Y

$$\therefore F_1(F_1^{-1}(3)) = 3$$

I

$$F_1^{-1}(F_1(3)) = F_1^{-1}(6)$$

$$= 3$$

II

من I , II نستنتج أن :-

$$F_1(F_1^{-1}(3)) = F_1^{-1}(F_1(3))$$

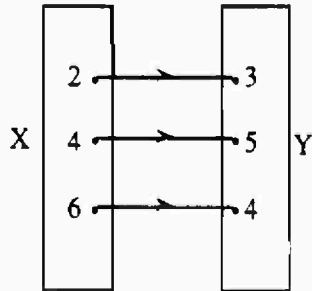
مثالا آخر يؤكد هذا الاستنتاج:

$$F_2 = \{ (2, 3), (4, 5), (6, 4) \}$$

ويكون المعكوس للدالة F_2 هو F_2^{-1} حيث :-

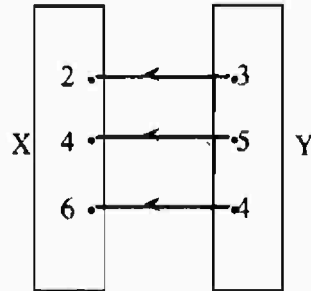
$$F_2^{-1} = \{ (3, 2), (5, 4), (4, 6) \}$$

يمثلها شكل 79 شكل 80 على الترتيب



$F_2 : X \rightarrow Y$

شكل 79



$F_2^{-1} : Y \rightarrow X$

شكل 80

وعلى ذلك نجد أن :

$$F_2(4) = 5$$

$$F_2^{-1}(4) = 6$$

حيث العنصر $x = 4$ ينتمي إلى X وينتمي أيضا إلى Y

$$F_2(F_2^{-1}(4)) = F_2(6)$$

$$= 4$$

III

$$F_2^{-1}(F_2(4)) = F_2^{-1}(5)$$

$$F_2^{-1}(F_2(4)) = 4$$

IV

من III , IV نستنتج أن :

$$(F_2^{-1}(4)) = F_2(F_2^{-1}(4))$$

من: I , II في المثال الأول F_1 , III , IV في المثال الثاني F_2 نستطيع

أن نستنتج هذا التعريف :

إذا كانت F دالة أحادية مجالها X ومداها Y فإن الدالة F^{-1} التي مجالها

Y ومداها X تسمى الدالة العكسية للدالة F إذا كان لجميع $x \in Y$

$$3- F (F^{-1} (x)) = x$$

$$4- F^{-1} (F (x)) = x$$

مثال 1 :

إذا كانت :-

$$F_1 = \{ (1, 3), (2, 4), (3, 6) \}$$

$$F_2 = \{ (2, 3), (4, 5), (6, 4) \}$$

فأوجد :

F_1^{-1} , F_2^{-1} مع رسم كل دالة ومعكوسها على الرسم البياني واكتب

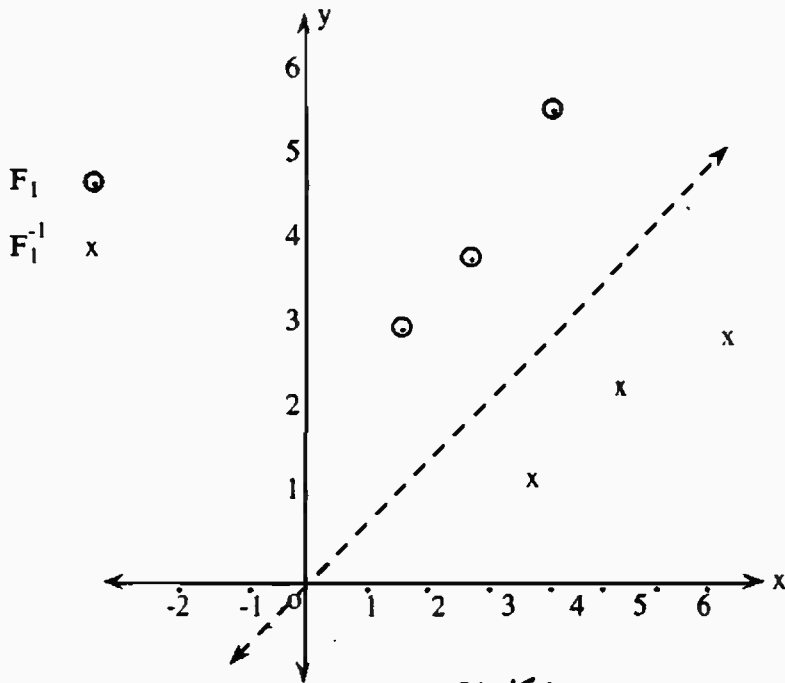
ملاحظاتك.

الحل :

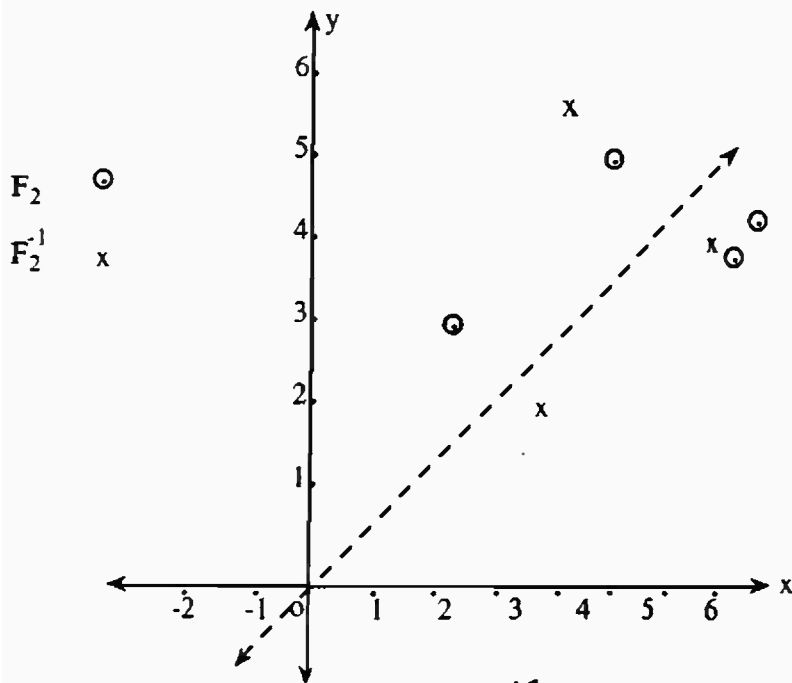
$$F_1^{-1} = \{ (3, 1), (4, 2), (6, 3) \}$$

$$F_2^{-1} = \{ (3, 2), (5, 4), (4, 6) \}$$

ومثلهما شكل 81 , شكل 82 على الترتيب .



شكل 81



شكل 82

من الرسم البياني نجد أن الدوال F_1^{-1} , F_2 متماثلين بالنسبة للمستقيم $y = x$ وكذلك F_2^{-1} , F_1 متماثلين بالنسبة للمستقيم $y = x$ أي أن : الدالة والدالة العكسية لها متناظرتان بالنسبة للمستقيم $y = x$ أي كل منهما صورة للأخرى على الخط العاكس $y = x$.

مثال 2:

إذا كانت :-

$$F = \{ (1, -2), (2, 0), (3, -3), (4, 1) \}$$

$$F^{-1} = \{ (-2, 1), (0, 2), (-3, 3), (1, 4) \}$$

إثبت صحة المعادلات

$$1- F(F^{-1}(x)) = x$$

$$2- F^{-1}(F(x)) = x$$

لجميع قيم x المنتمية إلى Y

الحل :

$$F(1) = -2$$

$$F^{-1}(1) = 4$$

$$F(F^{-1}(1)) = F(4) = 1 \quad \text{(المعادلة 1)}$$

$$F^{-1}(F(1)) = F^{-1}(-2) = 1 \quad \text{(المعادلة 2)}$$

∴ المعادلتين صحيحتين عند $x = 1$ المنتمية إلى Y

مثال 3 :

$$F = 2 - 3x$$

إذا كانت :

إثبت أن F^{-1} دالة

الحل

نفرض أن x_1, x_2 فى مجال F

$$\therefore F(x_1) = 2 - 3x_1$$

$$F(x_2) = 2 - 3x_2$$

فإذا كان $F(x_1) = F(x_2)$

$$\therefore 2 - 3x_1 = 2 - 3x_2$$

$$x_1 = x_2$$

$\therefore$ الدالة أحادية ويكون لها معكوس هو F^{-1} يكون أيضا دالة وفقا

للقاعدة رقم 1.

إختبار الدالة من حيث كونها إحادية أم غير أحادية:

يمكن اختيار الدالة F من حيث كونها إحادية أم لا وذلك بعد رسمها بيانيا وباستخدام خط مستقيم يوازي محور السينات، فإذا قطع هذا الخط الدالة فى أكثر من نقطة فهذا معناه أن المكون الثانى للدالة F (الاحداثى الثانى) هو نفسه - أى أن للدالة F أكثر من زوج واحد بنفس المكون - هذا معناه أن الدالة F ليست أحادية وأن F^{-1} غير موجودة.

مثال :

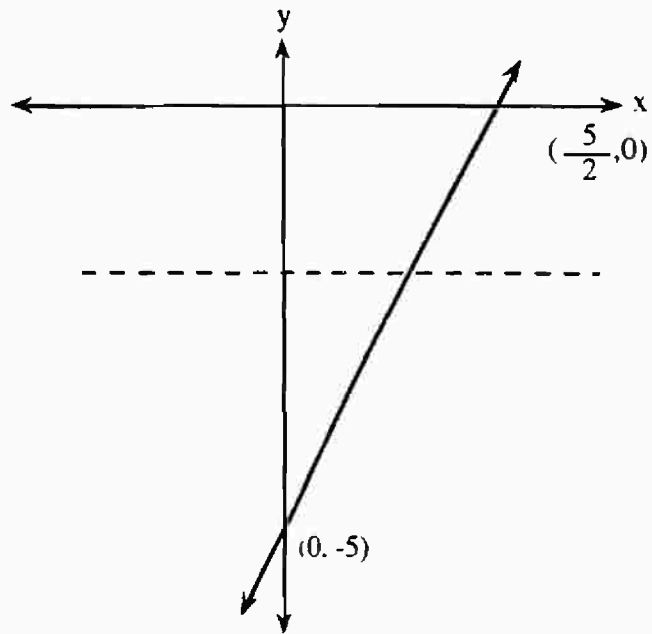
إثبت أن الدالة F المعرفة بالقاعدة:

$$F(x) = 25 - 5x$$

أحادية بيانيا.

الحل :

نرسم الدالة بيانيا . شكل 83



83

نلاحظ أن أى مستقيم يوازي محور السينات يقطع الدالة فى نقطه واحده

وبالتالى فإن الدالة F داله أحاديه.

الدوال الصريحة والدوال الضمنية:

إذا كانت الدالة على الصورة:

$$y = F(x)$$

تسمى دالة صريحة حيث ذكرت الدالة y صريحة بدلا له x .

مثال ذلك:

$$y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 2}$$

$$y = \tan x$$

$$y = a^x$$

$$y = \ln x$$

حيث أمكن وضع المتغير المتسقل فى طرف والمتغير التابع فى الطرف

الأخر.

أما إذا كانت المعادلة على الصورة :

$$f(x, y) = 0$$

مثال ذلك :

$$x^2 - (y + 1)x + y^2 - y + 6 = 0$$

أى أن كلا من المتغير المتسقل x والمتغير التابع y ظهرا فى طرف واحد

من المعادلة ولا يمكن فصلهما عن بعض حيث المتغير y واقع ضمنا فى x ومثل

هذه الدالة تسمى دالة ضمنية . مثال ذلك:

$$\frac{y a^x}{x + 1} = 0$$

$$y^2 - x y + x^2 = 0$$

وقد تكون الدالة على شكل صورة ضمنية ولكن يمكن كتابتها على صورة

دالة صريحة مثال ذلك:

. 287

$$x y - x + y + 1 = 0 \quad , \quad y \neq -1$$

فيمكن كتابتها على الصورة .

$$\begin{aligned} x - 1 &= x y + y \\ &= y (x + 1) \\ \therefore y &= \frac{x - 1}{x + 1} \end{aligned}$$

مثال :

إذا كانت دالة معرفة ضمنية بالمعادلة:

$$x + 4 = \sqrt{y^2 - 16}$$

اكتب المعادلة في الصورة الآتية:

$$y = f(x)$$

الحل :

بتربيع طرفي المعادلة:

$$(x + 4)^2 = y^2 - 16$$

$$\therefore x^2 + 8x + 16 = y^2 - 16$$

$$\therefore y^2 = x^2 + 8x + 32$$

$$y = \sqrt{x^2 + 8x + 32}$$

الدالة الزوجية والدالة الفردية:

أ- الدالة الزوجية :

يقال للدالة الحقيقية بأنها دالة زوجية إذا كان :

$$F(x) = F(-x) \quad , x \in D_F$$

بمعنى إنه إذا وضع $-x$ فى معادلة الدالة بدلا من x وكانت قيمة الدالة لا

تتغير سميت هذه الدالة بالدالة الزوجية.

مثال 1 :

إثبت أن الدالة :

$$F(x) = x^2$$

دالة زوجية . ثم إرسم الدالة

الحل :

$$F(-x) = (-x)^2 = x^2$$

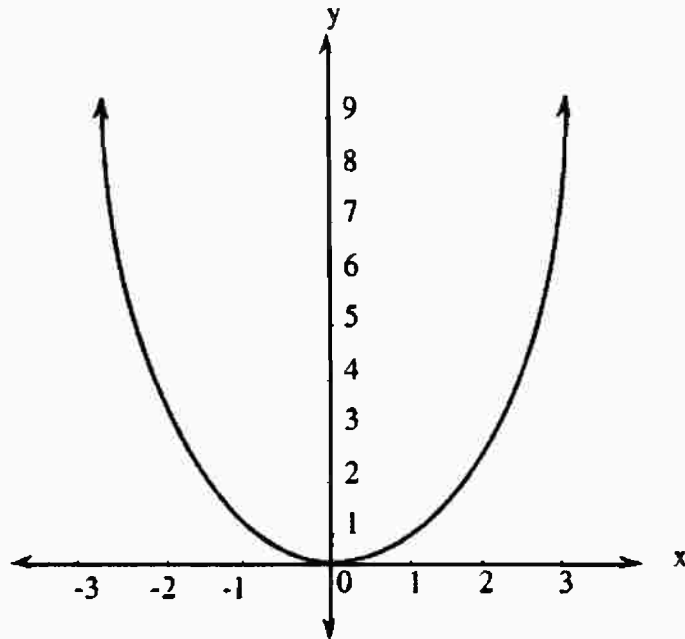
$$\therefore F(-x) = F(x)$$

وبالتالى تكون الدالة زوجية

ولرسم الدالة بيانيا يتم عمل الجدول الآتى:

x	0	1	2	3	-1	-2	-3
y	0	1	4	9	1	4	9

شكل 84 يوضحه بيانيا .



شكل 84

مثال 2 :

إثبت أن الدالة :

$$F(x) = 3x^4 + 2x^2 + 1$$

دالة زوجية . ثم إرسم الدالة وادرس تماثل المنحنى حول المحور y

الحل :

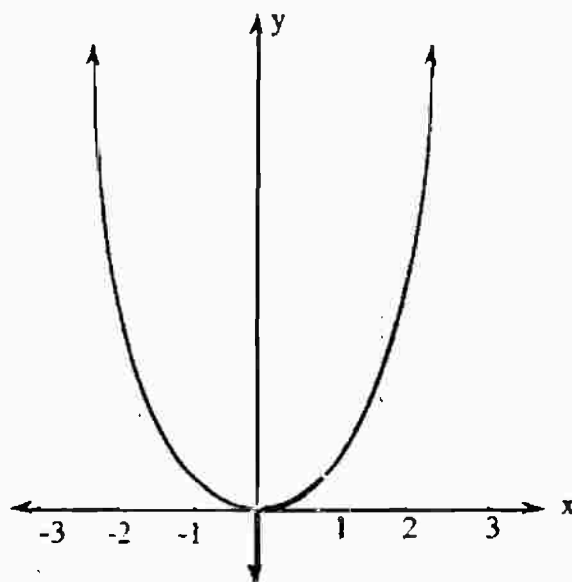
$$\begin{aligned} F(-x) &= 3(-x)^4 + 2(-x)^2 + 1 \\ &= 3x^4 + 2x^2 + 1 \\ &= F(x) \end{aligned}$$

∴ الدالة زوجية

ولرسم بيانيا يتم عمل الجدول الآتي : -

x	0	1	2	3	-1	-2	-3
y	1	6	57	243	6	57	243

وشكل 85 يوضحه بياناً.



شكل 85

ومن الرسم نلاحظ أن :

منحنى متماثل حول المحور y أي أن المحور y يمكن إعتباره خط سراه

عاكس لأي من الجيتين.

مثال 3 :

إثبت أن :

$$f(x) = |x|, \quad x \in \mathbb{R}$$

دالة زوجية

الحل :

$$\begin{aligned} F(-x) &= |-x| \\ &= |x| \\ &= F(x) \end{aligned}$$

∴ الدالة زوجية

ب- الدالة الفردية :

يقال للدالة الحقيقية $F(x)$ بأنها فردية إذا كان :-

$$F(-x) = -F(x) \quad , x \in F$$

مثال 4 :

إثبت أن :

$$F(x) = x^3$$

دالة فردية:

الحل:

$$\begin{aligned} F(-x) &= (-x)^3 \\ &= -x^3 = -F(x) \end{aligned}$$

∴ الدالة حسب التعريف دالة فردية

مثال 5 :

إثبت أن الدالة

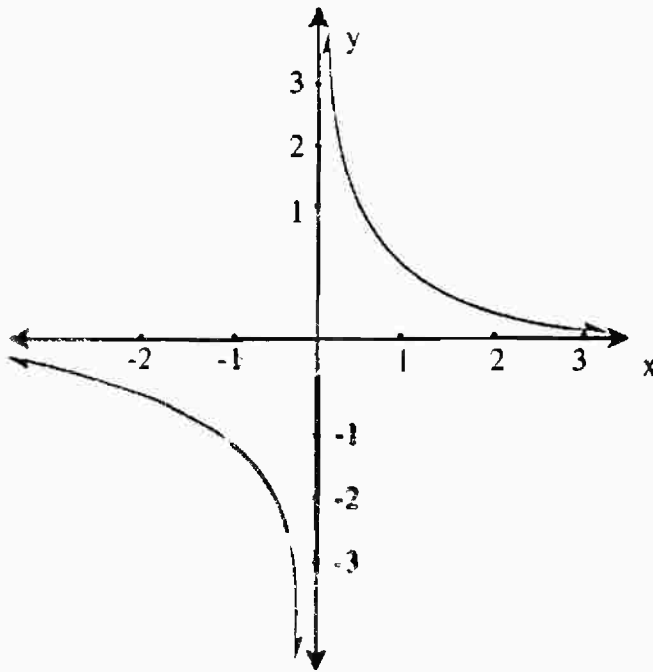
$$F(x) = \frac{1}{x}$$

دالة فردية ثم إرسم المنحنى البياني لها وادرس تماثله حول نقطة الأصل.

الحل: يتم عمل الجدول الآتي:

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
F(x)	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	-4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

يوضحه الرسم البياني شكل 68



شكل 86

من الرسم نلاحظ أن منحنى الدالة F متماثل حول نقطة الأصل . أي أن كل من نصفى منحنى الدالة F هو صورة مقلوبة للنصف الآخر (الانعكاس فى نقطة الأصل).

ملاحظات هامة:

- 1 - من الممكن أن تتواجد دوال ليست زوجية ولا فردية.
- 2 - مجموع دالتين زوجيتين هو دالة زوجية.
- 3 - مجموع دالتين فرديتين هو دالة فردية.
- 4 - حاصل ضرب دالة زوجية وأخرى فردية هو دالة فردية.
- 5 - حاصل ضرب دالتين زوجيتين هو دالة زوجية.
- 6 - حاصل ضرب دالتين فرديتين هو دالة زوجية.

تمارين (30)

إبحث نوع كل من الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية:

1- $F(x) = 5$

2- $F(x) = 3x - 2x^3$

3- $F(x) = 2x^2 + 3x - 5$

4- $F(x) = x^4 - 2x^2 + 5$

5- $F(x) = \frac{x^3 + 5}{2x + 3}$

6- $F(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$

7- $F(x) = x^5 (2x^2 + 1)$

8- $F(x) = x^5 - 5^{-x}$

9- $F(x) = \sqrt[3]{x^3 - 8x}$

10- $F(x) = \left(\frac{2x}{5} + \frac{5}{2x}\right)^2$

11- $F(x) = \frac{|x^3|}{x}, x \neq 0$

$$12- F(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3 + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3$$

$$13- F(x) = \frac{x^3}{\cos x}$$

$$14- F(x) = x^5 \sin^2 x$$

$$15- F(x) = \cot^2 x - \tan^2 x$$

أوجد المدى وعين نوع كل من الدوال الآتية من حيث الفردية والزوجية:

$$1- F(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} & , x > 0 \\ \frac{3}{2} & , x < 0 \end{cases}$$

$$2- F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} (x - 3) & , x > 0 \\ \frac{1}{2} (x + 3) & , x < 0 \end{cases}$$

$$3- F(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & , x > 0 \\ x^3 - 1 & , x < 0 \end{cases}$$

$$4- F(x) = \begin{cases} (x + 1)^2 & , x < -1 \\ -(x - 1)^2 & , x > 1 \end{cases}$$

$$5- F(x) = \begin{cases} (x + 3)^2 & , 0 > x \geq -3 \\ (x - 3)^2 & , -3 \geq x > 0 \end{cases}$$

النهايات . Limits

مثال تمهيدي

أوجد قيمة:

$$\lim_{x \rightarrow 0}^{(1)} \left(\frac{\sin x}{x} \right)$$

الحل :

نلاحظ أن قيمة الدالة $\frac{\sin x}{x}$ وهذه كمية غير معرفة لذلك لنجأ إلى طريقة

الاقتراب من على يمين النقطة $x = 0$ وليكن من عند $x = 1$ ونستمر في الاقتراب

قرباً كافياً من النقطة $x = 0$ ونوجد قيمة الدالة $\left(\frac{\sin x}{x} \right)$ في كل حالة، وكذلك من

على أ سار النقطة $x = 0$ وليكن من عند $x = -1$ ونستمر في «لاقتراب قريباً كافياً

من النقطة $x = 0$ ويوضح ذلك الجدولين الآتيين:-

x	$\frac{\sin x}{x}$
1.0	0.8417
0.90	0.8704
0.80	0.8967
0.70	0.9203
0.60	0.9411
0.50	0.9586
0.40	0.9736
0.30	0.9851
0.20	0.9934
0.10	0.99983
0.010	0.9999

x	$\frac{\sin x}{x}$
-1	0.8417
-0.90	0.8704
-0.880	0.8967
-0.70	0.9203
-0.60	0.9411
-0.50	0.9586
-0.40	0.9736
-0.30	0.9851
-0.20	0.9934
-0.10	0.99983
-0.01	0.9999

(1) القيمة النهائية للدالة.

نجد أن قيمة الدالة تقترب من الواحد الصحيح في حالتى الاقتراب من يمين و يسار النقطة $x = 0$ وهذا واضح في نهايتى الجدولين السابقين.

فعندما تقترب قيمة الدالة من الواحد الصحيح من ناحية اليمين أى من على يمين $x = 0$ تكتب بالصورة:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

حيث وضعت إشارة + فوق 0 على الصورة 0^+ لتعنى أن الاقتراب من الصفر من ناحية اليمين.

وعندما تقترب قيمة الدالة أيضا من الواحد الصحيح من ناحية اليسار أى من على يسار النقطة $x = 0$ تكتب بالصورة:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$$

حيث وضعت إشارة - فوق 0 على الصورة 0^- لتعنى أن الاقتراب من الصفر من ناحية اليسار.

وعندما تتساوى قيمة النهايتين أى أن:

قيمة النهاية من ناحية يمين النقطة = قيمة النهاية من ناحية يسار النقطة تكتب النهاية بدون إشارة لنقطة الاقتراب هكذا:-

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

وفي هذه الحالة يكون:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

نظريات في النهايات:

نقدم بعض النظريات الهامة للطالب في هذه المرحلة بدون برهان لها مع أمثلة توضيحية مختلفة تطبيقاً على النظريات تساعد الطالب على الاستيعاب والفهم.

نظرية (1) :

إذا كان m, a, b جزء من الأعداد الحقيقية فإن:

$$\lim_{x \rightarrow a} mx + b = ma + b$$

حالات خاصة:

$$\text{I} \quad \lim_{x \rightarrow a} x = a, \quad m = a, b = 0$$

$$\text{II} \quad \lim_{x \rightarrow a} x = a, \quad m = a$$

مثال 1 :

أوجد:

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2x + 5$$

الحل:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} 2x + 5 &= 2(2) + 5 \\ &= 9 \end{aligned}$$

مثال 2 :

أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow 2} x, \quad \lim_{x \rightarrow 2} 5$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow 2} x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 5 = 5$$

نظرية 2 :

$$\lim_{x \rightarrow a} G(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} F(x) \quad \text{إذا كانت كل من النهايتين}$$

موجودة فإن :-

$$I - \lim_{x \rightarrow a} [F(x) \pm G(x)] = \left[\lim_{x \rightarrow a} F(x) \right] \pm \left[\lim_{x \rightarrow a} G(x) \right]$$

$$II - \lim_{x \rightarrow a} K \cdot F(x) = K \lim_{x \rightarrow a} F(x)$$

حيث K ثابت

$$II - \lim_{x \rightarrow a} F(x) \cdot G(x) = \left[\lim_{x \rightarrow a} F(x) \right] \left[\lim_{x \rightarrow a} G(x) \right]$$

$$IV - \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} F(x)}{\lim_{x \rightarrow a} G(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow a} G(x) \neq 0$$

نظرية 3 :

$$\lim_{x \rightarrow a} G(x) \quad \text{إذا كانت النهاية } G(x) \text{ موجودة , } n \text{ عدد صحيح موجب فإن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [G(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} G(x) \right]^n$$

مثال 3 :

أوجد :-

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 2x + 1)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 2x + 1) &= \left[\lim_{x \rightarrow 3} x \right]^2 + \left[2 \lim_{x \rightarrow 3} x \right] + \left[\lim_{x \rightarrow 3} 1 \right] \\ &= [3]^2 + [2(3)] + [1] \\ &= 9 + 6 + 1 \\ &= 16 \end{aligned}$$

مثال 4 :

أوجد :-

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 3x)(x+1)^2}{(x^2 - 5)}$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 3x)(x+1)^2}{(x^2 - 5)} = \frac{\left[\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3x) \right] \left[\lim_{x \rightarrow 1} (x+1)^2 \right]}{\left[\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 5) \right]}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\left[\left(\lim_{x \rightarrow 1} x \right)^2 + 3 \left(\lim_{x \rightarrow 1} x \right) \right] \left[\left(\lim_{x \rightarrow 1} x \right) + \left(\lim_{x \rightarrow 1} 1 \right) \right]^2}{\left[\left(\lim_{x \rightarrow 1} x \right) - \left(\lim_{x \rightarrow 1} 5 \right) \right]} \\
 &= \frac{[1 + 3(1)][1 + 1]}{[1 - 5]} \\
 &= \frac{[4] \cdot [2]}{[-4]} = -2
 \end{aligned}$$

نظرية 4 :

إذا كان a عددا حقيقيا ، r عددا نسبيا (قياسيا) بحيث أن a^r معرف كعدد حقيقي فإن:

$$\lim_{x \rightarrow a} x^r = a^r$$

مثال 5 :

أوجد :-

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^{0.2} = 3^{0.2}$$

نظرية 5 :

إذا كان m, n عددان صحيحان موجبين فإن :-

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x^m - a^m} = \frac{n}{m} (a)^{n \cdot m}$$

مثال 6 :

أوجد:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 2^4}{x - 2}$$

الحل:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 2^4}{x - 2} &= \frac{4}{1} (2)^{4-1} \\ &= 4 (2)^3 \\ &= 32\end{aligned}$$

نظرية 6 :

إذا كان a عدد حقيقي و r عدد أنسبياً وكانت $G(x)$ دالة وأن

$\lim_{x \rightarrow a} G(x)$ موجودة وأن $[\lim_{x \rightarrow a} G(x)]^r$ معرف كعدد حقيقي فإن:

$$\lim_{x \rightarrow a} G^r(x) = \left[\lim_{x \rightarrow a} G(x) \right]^r$$

مثال 7 :

أوجد :

$$\lim_{y \rightarrow 1} \sqrt{5 - 3y - y^2}$$

الحل :

$$\begin{aligned}\lim_{y \rightarrow 1} \sqrt{5 - 3y - y^2} &= \left[\lim_{y \rightarrow 1} 5 - 3 \lim_{y \rightarrow 1} y - \left(\lim_{y \rightarrow 1} y \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= [5 - 3 - 1]^{\frac{1}{2}} \\ &= 1\end{aligned}$$

أمثلة متنوعة :

مثال 1 :

أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + x - 2}{x + 1}$$

الحل :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + x - 2}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(3x - 2)}{(x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (3x - 2) \\ &= (3(-1) - 2) \\ &= -5 \end{aligned}$$

مثال 2 :

أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 125}{x - 5}$$

الحل :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 125}{x - 5} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - x^3}{x - 5} \\ &= \frac{3}{1} (5)^{3-1} \\ &= 75 \end{aligned}$$

مثال 3 :

أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3^3}{x^2 - 3^2} = \frac{3}{2} (3)^{2-1}$$

$$= \frac{9}{2}$$

مثال 4 :

أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1}$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1^5}{x^3 - 1^3} =$$

$$= \frac{5}{4} (-3)^{5-4}$$

$$= -\frac{15}{4}$$

مثال 6 :

أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3)^2 - 9}{x}$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3)^2 - 9}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 + 6x + 9 - 9}{x}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 + 6x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x + 6$$

$$= 6$$

حل آخر :

يمكن تطبيق نظرية 5 وذلك بإضافة 3 , -3 فى المقام كالآتى:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3)^2 - 3^2}{x+3-3}$$

أيضا $x \rightarrow 0$

بإضافة 3 + فى الطرفين تصبح كالآتى:

$$x+3 \rightarrow 3$$

وبذلك توضع الدالة بنفس صيغة النظرية وتصبح كالآتى:

$$\lim_{x+3 \rightarrow 3} \frac{(x+3)^2 - 3^2}{(x+3) - 3} = \frac{2}{1} (3)^{2-1}$$

$$= 6$$

مثال 7 :

أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x}$$

الحل :

بضرب الدالة في مرافق البسط لتصبح :-

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x} \cdot \left(\frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{3}}{\sqrt{x+3} + \sqrt{3}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3) - 3}{x(\sqrt{x+3} + \sqrt{3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+3} + \sqrt{3})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

وعلى الطالب حل المثال باستخدام نظرية 5 بنفس طريقة حل المثال السابق.

مثال 8 :

أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x - 5}$$

الحل:

بضرب الدالة في مرافق البسط لتصبح :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x - 5} \cdot \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{5}}{\sqrt{x} + \sqrt{5}} \right) \\&= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{5}} \\&= \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{5}} \\&= \frac{1}{2\sqrt{5}}\end{aligned}$$

مثال 9 :

أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2}$$

الحل :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} &= \lim_{x-2 \rightarrow 0} \frac{\sin(x-2)}{x-2} \\&= 1\end{aligned}$$

مثال 10 :

أوجد :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{3x} \\&= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \\&= 3(1)\end{aligned}$$

مثال 11 :

أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x}$$

$$= (1) \cdot \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \cos x}$$

$$= (1) \cdot \frac{1}{(1)}$$

$$= 1$$

تمارين (31)

1- $\lim_{x \rightarrow -2} 7$

2- $\lim_{x \rightarrow -2} 3x$

3- $\lim_{x \rightarrow \infty} 7$

4- $\lim_{y \rightarrow 2} 2y$

5- $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x^3 - 2x - 1}$

6- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x}{x + 1}$

7- $\lim_{y \rightarrow 2} \frac{(y-1)(y-2)}{y + 1}$

8- $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$

9- $\lim_{z \rightarrow 4} \frac{z^2 - 3z - 4}{z - 4}$

10- $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{1/x + 1}{x + 5}$

11- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3 + 8x^2}{3x^4 - 16x^2}$

12- $\lim_{t \rightarrow -2} \frac{t^3 + 8}{t + 2}$

$$13- \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + x - 6}$$

$$14- \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^3 + t^2 - 5t + 3}{t^3 - 3t + 2}$$

$$15- \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|}$$

$$16- \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|}$$

$$17- \lim_{y \rightarrow -3} \frac{y + 3}{y^2 - 9}$$

$$18 - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{(x-1)(x+8)^2}$$

$$19 - \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-3} - 2}{x-7}$$

$$20 - \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{4}} \frac{(2x+3)^2 - 4x^2}{4x^2 + 3x}$$

$$21 - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$$

$$22 - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^7 - 128}$$

$$23 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x}$$

$$24 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{7x}$$

$$25 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin x}$$

$$26 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x^2)^2 - (1 - x^2)^2}{x^2}$$

$$27 - \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{\frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - 3x + 4}}$$

$$28 - \lim_{x \rightarrow 1} \left(3x + \frac{2}{3}\right) \sqrt{x+8}$$

$$29 - \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$$

$$30 - \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{7}}{x - 3}$$

$$31 - \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 16}$$

$$32 - \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(3x - 2)^2 - 4}{5x}$$

$$33 - \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - 16}{x^3 + 64}$$

$$34 - \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1/x - 1/4}{4 - x}$$

$$35 - \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{4}} \frac{(2x + 3)^2 - 4x^2}{4x^2 + 3x}$$

$$36 - \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x + 5} - \sqrt{x + 5}}{x + 1}$$

$$37 - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{3x - 2} - \sqrt{x + 2}}$$

$$38 - \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 1} - 2}{\sqrt{6 + x} - 3}$$

$$39 - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3 - x} \cdot \sqrt{x + 1}}{\sqrt{2x - 1} - \sqrt{3x - 2}}$$

$$40 - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{x - 1}$$

$$41 - \lim_{e \rightarrow 0} \frac{(3 + e)^5 - 243}{5e}$$

$$42 - \lim_{e \rightarrow 0} \frac{(2 + 3e)^8 - 256}{4e}$$

الانهاية:

$$F(x) = \frac{1}{x}$$

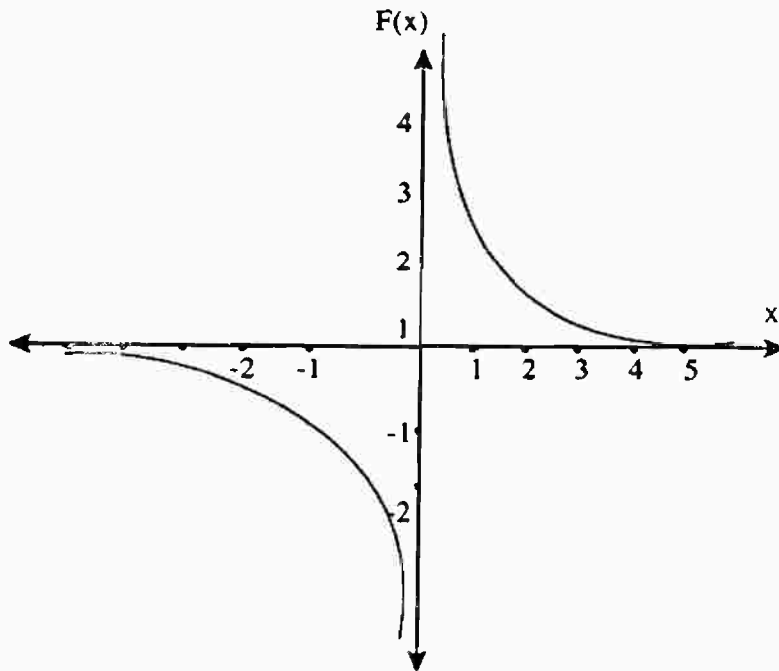
هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا $x = 0$

ولعمل الرسم البياني لها يتم عمل الجدول الآتي :-

x	1	2	3	4	5	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10^6}$
$\frac{1}{x}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	2	4	8	16	32	64	100	1000	10^6

واضح أن الدالة $\leftarrow \infty$ عندما $x \leftarrow 0$ ، كما أن الدالة فردية (تستخدم

نقطة الأصل في رسمها في الربع الثالث (شكل 87).



شكل 87

ويتضح من الرسم البياني الآتي:-

(أ) تقترب $\frac{1}{x}$ من الصفر عندما تقترب x من اللانهاية الموجبة أو اللانهاية السالبة ($+\infty$ أو $-\infty$)

(ب) تقترب $\frac{1}{x}$ من $+\infty$ عندما تقترب x من الصفر عبر القيم الموجبة (الاقتراب من الصفر من جهة اليمين)

(ج) تقترب $\frac{1}{x}$ من $-\infty$ عندما تقترب x من الصفر عبر القيم السالبة (الاقتراب من الصفر من جهة اليسار).

ملحوظة :

يستعمل أحيانا في الرياضيات المتقدمة منظومة جديدة تتكون من الأعداد الحقيقية والعنصرين الإضافيين $+\infty$, $-\infty$ وتسمى هذه المنظومة منظومة الأعداد الحقيقية الموسعة وسوف يستبعد في هذا الكتاب استعمال منظومة الأعداد الحقيقية الموسعة كما نتجنب القسمة على الصفر للحفاظ على القوانين العادية للحساب والجبر.

تعريف:

إذا كانت الدالة $F(x)$ معرفة للقيم الكبيرة لـ x فيقال أن $F(x)$ تقترب من العدد الحقيقي L كنهاية لها عندما تقترب x من اللانهاية وكتب بهذه الصيغة:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = L$$

علما بأن النظريات المستخدمة في اللانهاية حول نهايات المجموع والفرق

والنسبة ماثلة للنظريات المقابلة للنهايات عندما $x \rightarrow a$.

نظرية 1 :

إذا كان:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = L_1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} G(x) = L_2$$

حيث L_1, L_2 عدنان حقيقيان فإن:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (F(x) \pm G(x)) = L_1 \pm L_2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) \cdot G(x) = L_1 L_2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \quad L_2 \neq 0$$

نظرية 2 :

إذا كان :-

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$$

، $G(x)$ محدودة عندما $x \rightarrow \infty$ فإن :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (F(x) \cdot G(x)) = \infty$$

نظرية 3 :

إذا كان :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$$

، $G(x)$ محدودة عندما $x \rightarrow \infty$ فإن :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (F(x) - G(x)) = 0$$

وسوف نقتصر في دراستنا على الأمثلة التوضيحية الهامة فقط التي نهم

الطالب في هذه المرحلة.

مثال 1 :

أوجد قيمة :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}$$

الحل :

x	1	10	100	1000	10^4	10^5	10^6
$\frac{1}{x}$	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10^4}$	$\frac{1}{10^5}$	$\frac{1}{10^6}$

نلاحظ من الجدول أنه كلما إقتربت x من اللانهاية تقترب $\frac{1}{x}$ من الصفر.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

يتم عمل جدول فيه $x \rightarrow -\infty$

x	-1	-10	-100	-1000	-10^4	-10^5	-10^6
$\frac{1}{x}$	-1	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{1000}$	-10^{-4}	-10^{-5}	-10^{-6}

نلاحظ من الجدول أنه كلما اقتربت x من سالب ما لانهاية تقترب $\frac{1}{x}$ من

الصفر أي أن :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

مثال 2 :

أوجد قيمة :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n}$$

الحل :

$$\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} \right)^n = 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n}$$

مثال 3:

أوجد قيم النهايات الآتية:-

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 5}{6x - 8}$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - x}{6x^3 - 8}$$

$$(c) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3x+5}{6x-8}}$$

الحل :

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+5}{6x-8}$$

بقسمة البسط والمقام على x

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+5}{6x-8} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+5 \left(\frac{1}{x}\right)}{6x-8 \left(\frac{1}{x}\right)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 3+5 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} 6-8 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right)} \\ &= \frac{3+5(0)}{6-8(0)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{المقدار} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+4x}+x}{\sqrt{x^2+4x}-x} (\sqrt{x^2+4x}-x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+4x-x^2}{\sqrt{x^2+4x}+x} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x \left(\sqrt{1 + 4 \left(\frac{1}{x} \right) + 1} \right)}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{4}{2} = 2$$

ملحوظة :

تم الضرب في المرافق كأسلوب جبري للحل عندما تكون قيمة النهاية $\infty - \infty$

مثال 4 :

أوجد قيمة :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 4x} - x$$

الحل :

يتم ضرب المقدار في المرافق.

$$\therefore \text{المقدار} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x} + x}{\sqrt{x^2 + 4x} - x} \cdot (\sqrt{x^2 + 4x} - x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x - x^2}{\sqrt{x^2 + 4x} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x \sqrt{1 + 4 \left(\frac{1}{x} \right) + 1}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{4}{2} = 2$$

ملحوظة:

تم الضرب في المرافق كأسلوب جبرى للحل عندما تكون قيمة النهاية تساوى $\infty - \infty$

مثال 5 :

أوجد قيمة :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$$

الحل:

بالتعويض المباشر تكون النتيجة $\infty - \infty$ وهى كمية غير معنية باستخدام تحليل

فرق بين معكبين

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

$$\therefore A - B = (\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}) \left(A^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{A} \sqrt[3]{B} + B^{\frac{2}{3}} \right)$$

مع التعويض عن :

$$A = x + 1$$

$$B = x$$

$$\therefore \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} = \frac{x+1-x}{(x+1)^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{x+1} \sqrt[3]{x} + x^{\frac{2}{3}}}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} = \frac{x+1-x}{(x+1)^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{x+1} \sqrt[3]{x} + x^{\frac{2}{3}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(x+1)^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{x+1} \sqrt[3]{x} + x^{\frac{2}{3}}}$$

$$= 0$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - x}{6x^3 - 8}$$

بالقسمة على x^2 لكل من البسط والمقام

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - x}{6x^3 - 8} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{1}{x^2}\right)}{6 - 8\left(\frac{1}{x^3}\right)} \\ &= \frac{4 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right) - \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}\right)^2}{\lim_{x \rightarrow \infty} 6 - 8 \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}\right)^3} \\ &= \frac{4(0) - 0}{6 - 0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{3x + 5}{6x - 8}}$$

بإدخال النهاية داخل الجذر التكعيبي وقسمة البسط والمقام على x

$$\begin{aligned} \text{المقدار} &= \sqrt[3]{\frac{3 + 5 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right)}{6 - 8 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{3 + 5(0)}{6 - 8(0)}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{3 + 5(0)}{6 - 8(0)}} \end{aligned}$$

قاعدة عامة :

في النهايات التي يقترب فيها المتغير من اللانهاية يتم قسمة البسط والمقام على أكبر قوة للمتغير (أكبر أس للمتغير).

مثال 6 :

أوجد قيمة :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sin x)$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

$$\sin x \geq -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \quad \text{كمية غير محددة}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sin x) = \infty$$

مثال 7 : أوجد قيمة :-

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x}$$

الحل :

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

تمارين (32)

أوجد النهايات الآتية :-

1- $\lim_{x \rightarrow \infty} 7$

2- $\lim_{x \rightarrow \infty} (-3)$

3- $\lim_{x \rightarrow \infty} (-2h)$

4- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + n^2}{n}$

5- $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(t+1)(2t+1)}{t^2}$

6- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(2x+1)(3x+1)}{x^3}$

7- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}$

8- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+4}{x^2+x+1}$

9- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-5+14}{17+7x+4x^2}$

$$10- \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 4x + 5}{5x^3 + 4x - 8}$$

$$11- \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)(x-1)x+1}{(1-2x)(1+x)}$$

$$12- \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7(2)^x + 5(3)^x}{4(3)^x + 2^x}$$

$$13- \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} [1 + 4 + 7 + \dots + (3x - 2)]$$

$$14- \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + 9 + 13 + \dots + (4x - 78)}{1 + 3 + 5 + \dots + (4x - 3)}$$

15 إذا كانت :

$$F(x) = \begin{cases} x - 1 & , x \leq 3 \\ 3x - 7 & , x > 3 \end{cases}$$

أوجد :

$$(a) \lim_{x \rightarrow 3^-} F(x)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 3^+} F(x)$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 3} F(x)$$

الدوال المستمرة :

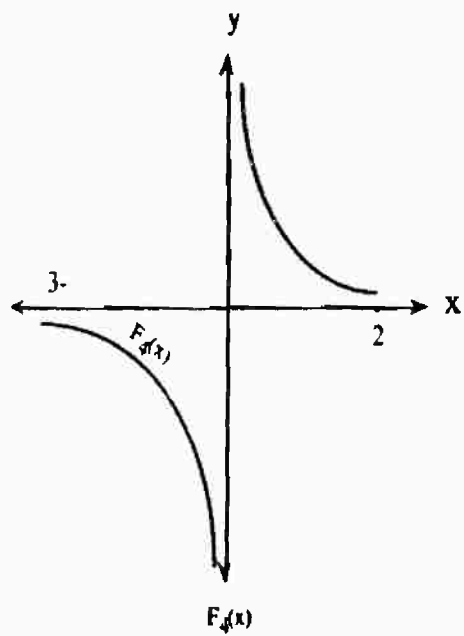
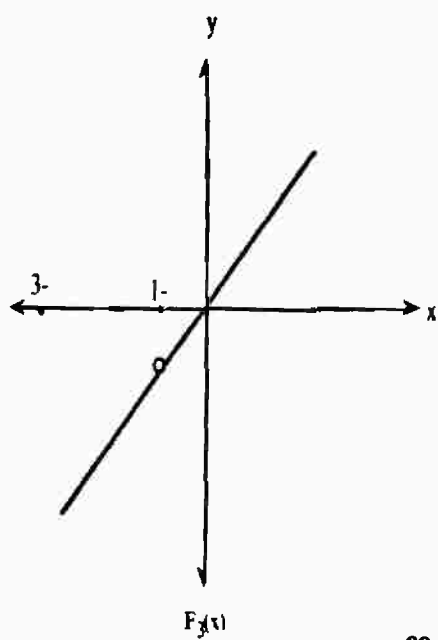
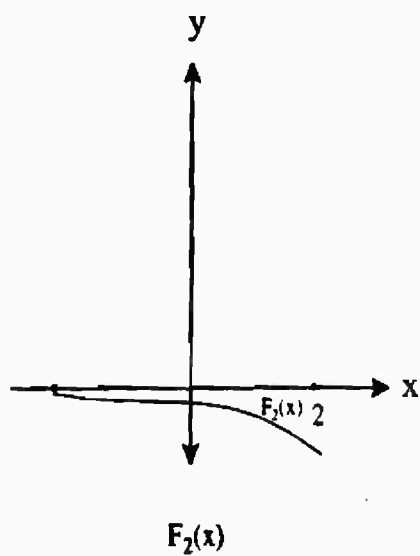
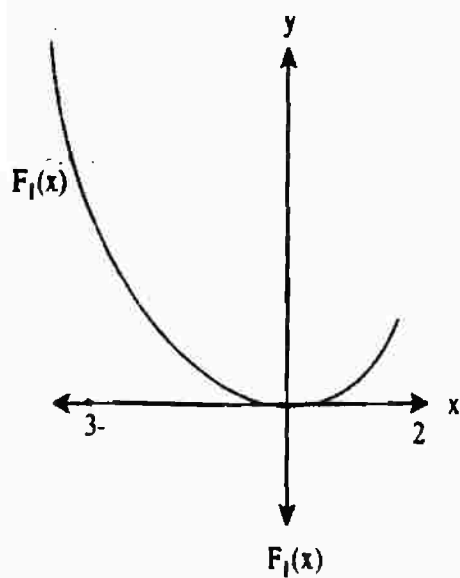
إن سلوك الاستمرار في الدالة له صلة ببيانها ولذلك نعتبر الآتى للتوضيح
والذى يوضحه شكل 88 .

$$F_1(x) = \left\{ (x,y) : y = x^2, x \in [-3, 2] \right\}$$

$$F_2(x) = \left\{ (x,y) : y = \frac{1}{x-3}, x \in [-3, 2] \right\}$$

$$F_3(x) = \left\{ (x,y) : y = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} & , x \in [-3, 2] \\ -1 & , x = -1 \end{cases} \right\}$$

$$F_4(x) = \left\{ (x,y) : y = \begin{cases} \frac{1}{x} & , x \in [-3, 2 - \{0\}] \\ 0 & , x = 0 \end{cases} \right\}$$



من الملاحظ أن الدوال الأربعة معرفة على الفترة $[-3, 2]$ كما يمكن رسم منحني الدالتين $F_1(x)$, $F_2(x)$ دون الحاجة لرفع القلم من الصفحة أى بحركة متصلة للقلم ولذلك تسمى هذه الدوال متصلة.

أما الدالة رقم (3) $F_3(x)$ تعبر عن خط مستقيم به، ما يسمى (ثغرة) عند $x = -1$ حيث قيمة الدالة عندها يساوى -1 . وبذلك لا يمكن أن يتحرك القلم حركة متصلة عند $x = -1$ فى بيان الدالة.
ولكن إذا عرفنا دالة R كالآتى:

$$R(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & , x \neq -1 \\ -2 & , x = -1 \end{cases}$$

لجميع قيم x فى الفترة $[-3, 2]$ تعبر عن دالة متصلة يمثلها خط مستقيم متصل بدون إنقطاع فى الفترة المذكورة.

أما الدالة رقم (4) $F_4(x)$ لا يمكن رسمها بحركة متصلة بالقلم على ورقة الرسم لوجود ما يسمى (قفزة أو وثبة) عنده $x = 0$.

وعلى ذلك تكون $F_1(x)$, $F_2(x)$ مثالين للدوال المستمرة.

، $F_3(x)$, $F_4(x)$ يمثلان دوال غير مستمرة.

وبدراسة الدوال السابقة نلاحظ على الدوال الغير مستمرة ما يلي:-

عند النقطة $x = c$ التى فى نطاق الدالة F وتكون عندها الدالة F غير

مستمرة إما أن تكون :-

$$\lim_{x \rightarrow c} F(x) \text{ غير معرفة } I$$

أو

$$\lim_{x \rightarrow c} F(x) \quad \text{II غير معرفة}$$

فمثلا $F_3(x)$ عند $x = -1$ نجد أن :-

$$\lim_{x \rightarrow -1} F(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} x - 1 = -2$$

$$, F_3(-1) = -1$$

أى أن :

$$\lim_{x \rightarrow -1} F_3(x) \neq F_3(-1)$$

بمعنى أن قيمة النهاية لا تساوى قيمة الدالة عند $x = -1$ وكذلك $F_4(x)$

عند $x = 0$ نجد أن

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F_4(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F_4(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

أى أن :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F_4(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} F_4(x)$$

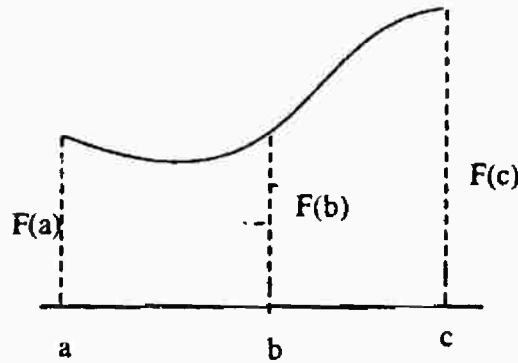
بمعنى أن قيمة النهاية غير معرفة عند $x = 0$.

أما بالنسبة للدوال المستمرة عند أى نقطة c فى نطاقها أن :-

$$\lim_{x \rightarrow c} F(x) = F(c)$$

ويوجه عام فإن استمرارية الدالة $F(x)$ عند c داخل مجال (نطاق) F يعنى استمرارها من الجهتين.

أما إذا كانت c هى إحدى نهايتى النطاق فإن استمرار الدالة عندها يعنى استمرارها من جهة واحدة. شكل 89.



شكل 89

$$\lim_{x \rightarrow c} F(x) = F(c)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = F(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} F(x) = F(a)$$

أى أن الدالة مستمرة عند كل من a , b وجميع النقط الواقعة بينهما.

مثال 1 :

إبحث استمرار الدوال أو عدمه عند النقط المبينة:

(a) $F(x) = x^3 + 5x + 2$ at $x = 1$

(b) $F(x) = \sqrt{x+1}$ at $x = 3$, $x = -1$

(c) $F(x) = \sqrt[3]{4-x}$ at $x = 5$

$$(d) F(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x-3} & \text{at } x \neq 3 \\ 4 & \text{at } x = 3 \end{cases}$$

$$(e) F(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + 5x - 7}{3x - 3} & \text{at } x \neq 1 \\ 4 & \text{at } x = 1 \end{cases}$$

الحل :

$$(a) F(1) = 1 + 5 + 2 = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^3 + 5x + 2 = 8$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} F(x) = F(1)$$

$\therefore$ الدالة $F(x)$ متصلة (مستمرة) عند 1

$$(b) F(x) = \sqrt{x+1}$$

$$D_F: x + 1 \geq 0$$

$$x \geq -1$$

$$x \in [-1, \infty)$$

I- at $x = 3$:

$$F(3) = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} F(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+1} = 2$$

∴ الدالة $F(x)$ (مستمرة) عند $x = 3$

II- at $x = -1$:

$$F(-1) = \sqrt{-1+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} F(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x+1} = 0$$

∴ الدالة $F(x)$ متصلة (مستمرة) عند $x = -1$ من جهة اليمين فقط وهي

غير معرفة من جهة اليسار.

$$(c) F(x) = \sqrt[3]{4-x}$$

$$F(5) = \sqrt[3]{4-5} = \sqrt[3]{-1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} F(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \sqrt[3]{-1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} F(x) \neq F(3) \quad \text{وحيث أن}$$

∴ الدالة غير مستمرة عند $x = 3$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x+7)(x-1)}{3(x-1)} = 3$$

$$F(1) = \frac{(2+7)(1)}{3} = 3$$

∴ الدالة مستمرة عند $x = 1$

مثال 2 :

أوجد قيمة k التي تجعل الدالة $F(x)$ المعرفة بالعلاقة :

$$F(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 2 \\ kx & , x \geq 2 \end{cases}$$

مستمرة عند $x = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} F(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} kx = 2k$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 = 4$$

ولكي تكون الدالة مستمرة عند $x = 2$ يكون :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} F(x)$$

$$\begin{aligned} \therefore 4 &= 2k \\ k &= 2 \end{aligned}$$

مثال 3 :

أزل عدم الاستمرار إن أمكن للدالة المعرفة كالآتي:-

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2 (x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)} & , x \neq 1, x \neq -2 \\ 1 & x = 1 \\ -2 & x = -2 \end{cases}$$

الحل :

نختبر استمرار الدالة عند $x = 1$

$$F(1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 (x - 1) (x + 2)}{(x - 1) (x + 2)} = 1$$

وحيث أن نهاية الدالة تساوي قيمة الدالة عند $x = 1$

∴ الدالة مستمرة عند $x = 1$.

نختبر استمرار الدالة عند $x = -2$

$$F(-2) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} F(x) = \lim_{x \rightarrow -2} x^2 = 4$$

أي أن الدالة غير مستمرة عند $x = -2$

ويمكن إعادة التعريف لكي تكون الدالة مستمرة عند تلك النقطة فيجب أن

يكون :-

$$F(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} F(x) = 4$$

بالتعريف الآتي:-

$$\left[\begin{array}{ll} \frac{x^2 (x - 1) (x + 2)}{(x - 1) (x + 2)} & , x \neq 1 , x \neq -2 \\ 1 & (x = 1 \text{ عند}) \\ 4 & (x = -2 \text{ عند}) \end{array} \right.$$

تمارين (33)

١- ابحث إتصال الدالة F عند النقطة المعطاه

$$\text{a) } F(x) = \begin{cases} \frac{4x^2 - 9}{2x - 3} & \rightarrow \text{at } x \neq \frac{3}{2} \\ 6 & \rightarrow \text{at } x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$x = \frac{3}{2}$ عند

$$\text{a) } F(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \rightarrow \text{at } x \leq 1 \\ 5x & \rightarrow \text{at } x > 1 \end{cases}$$

$x = 1$ عند

$$\text{c) } F(x) = \begin{cases} x^2 & \rightarrow \text{at } x \leq 0 \\ x & \rightarrow \text{at } x > 0 \end{cases}$$

$x = 0$ عند

2 - أوجد قيمة h التي تجعل الدالة $F(x)$ مستمرة عند $x = 1$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & \rightarrow \text{at } x \neq 1 \\ h & \rightarrow \text{at } x = 1 \end{cases}$$

3 - إذا كانت الدالة $F(x)$ معرفة كالآتي:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{|x-5|} & \rightarrow \text{at } x \neq 5 \\ 3 & \rightarrow \text{at } x = 5 \end{cases}$$

فأبحث استمرارية الدالة $F(x)$ عند النقطة $x = 5$

4- إذا كانت الدالة (x) معرفة كالآتي:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x^3-1} & \rightarrow \text{at } x \neq 1 \\ 2k-1 & \rightarrow \text{at } x = 1 \end{cases}$$

أوجد قيمة k التي تجعل $F(x)$ متصلة عند $x = 1$

5- أوجد قيمة h التي تجعل $F(x)$ دالة متصلة عند $x = 1$

$$F(x) = \begin{cases} x^2 + h & \rightarrow \text{at } x \neq 1 \\ 3 & \rightarrow \text{at } x = 1 \end{cases}$$

6 - إذا كانت الدالة $F(x)$ معرفة كالآتي:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{5x-3\sin x}{2x} & \rightarrow \text{at } x \neq 0 \\ 3k-2 & \rightarrow \text{at } x = 0 \end{cases}$$

ما هي قيمة k التي تجعل الدالة $F(x)$ متصلة عند $x = 0$

7 - إذا كانت الدالة $F(x)$ معرفة كالآتي:

$$F(x) = \begin{cases} 2 k x & \rightarrow \text{at } x \geq 3 \\ x^2 + 1 & \rightarrow \text{at } x < 3 \end{cases}$$

أوجد قيمة k التي تجعل $\lim_{x \rightarrow 3} F(x)$ موجودة

8 - إدرس استقرار الدوال الآتية خلال مجال كل منها :

$$(a) \quad F(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \rightarrow x \neq 1 \\ 3 & \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$(b) \quad F(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & \rightarrow x \neq 1 \\ 3 & \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$(c) \quad F(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x + 3} & \rightarrow x \neq -3 \\ 3 & \rightarrow x = -3 \end{cases}$$

9 - أزل عدم الاتصال في الدوال الآتية:-

$$(a) \quad F(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1} & \rightarrow x \neq -1 \\ 2 & \rightarrow x = -1 \end{cases}$$

$$(b) \quad F(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{(x + 1)(x - 1)} & \rightarrow x \neq 1, x \neq -1 \\ 1 & \rightarrow x = -1 \\ 3 & \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

10 - أوجد قيمة h التي تجعل الدالة $F(x)$ معرفة :-

$$(a) \quad F(x) = \begin{cases} h^2 + 1 & \rightarrow x \leq 1 \\ 2 & \rightarrow x > 1 \end{cases}$$

$$(b) \quad F(x) = \begin{cases} h x & \rightarrow x \leq 1 \\ 6 & \rightarrow x > 1 \end{cases}$$