

الباب الثاني

الشّد والضغط

(Tension and Compression)

- 1.2 مقدمة .
- 2.2 القوى الداخلية .
- 3.2 الأجهادات العمودية .
- 4.2 الانفعالات العمودية والاراحات .
- 5.2 الدراسات المخبرية التجريبية لخواص المواد .
 - 1.5.2 أنواع الاختبارات وأهدافها .
 - 2.5.2 عينات الاختبار .
 - 3.5.2 الرسوم البيانية للإجهاد والانفعال في التحميلات المحورية
منحنى الإجهاد - والانفعال .
 - 6.2 اختبارات الضغط .
 - 7.2 معاملات الأمان والاجهادات المسموح بها .
 - 8.2 المسائل الغير محددة استاتيكية في حالات الشد والضغط .
 - 9.2 الأجهادات الحرارية والضبط المناسب للقوى في المنشآت .
 - 10.2 الأجهادات في المقاطع المائلة في اتجاه واحد .
 - 11.2 الأجهادات في المقاطع المائلة في اتجاهين .
 - 12.2 الأجهادات الرئيسية وموضع المساحات الرئيسية .
 - 13.2 الطريقة البيانية لتحديد الأجهادات الرئيسية واتجاهاتها " دائرة مور " .
 - 14.2 العلاقة بين الأجهادات والانفعالات " الصيغة العامة لقانون هوك " .
 - 15.2 تمارين .

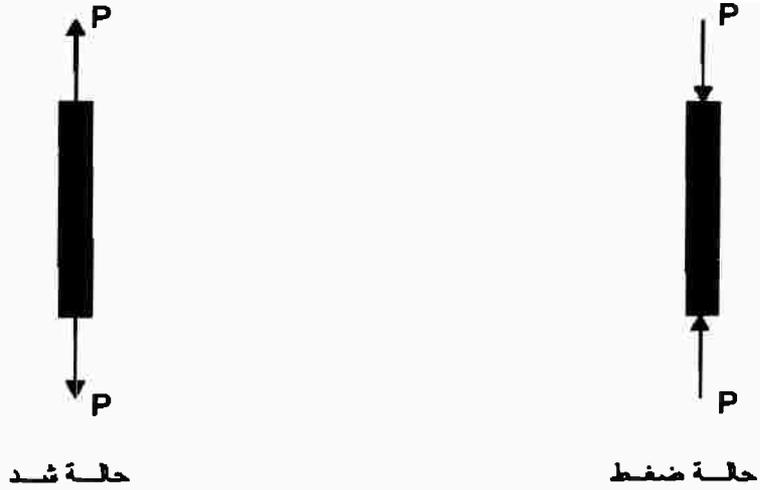
1.2 مقدمة

في كثير من الحالات العملية تتعرض أجزاء المنشآت المختلفة إلى تأثير قوة خارجية أو مجموعة من القوى الخارجية ، وينتج عن ذلك أن تعرض المقاطع المختلفة من هذا الجزء أو ذاك لتأثير قوى داخلية هي عبارة عن القوى العمودية ، وقوى القص ، وعزوم الانحناء ، وعزوم الالتواء ، وتلك القوى يتولد عنها اجهادات عمودية واجهادات قص وغيرها .

وتظهر الاجهادات العمودية عادة عندما تؤثر القوى الخارجية أو عزوم انحناء باتجاه محور الجزء ، أي في حالة تحميل الجزء بقوة محورية ضاغطة كانت أو شادة . وفي هذه الحالة يكون الإجهاد على المقاطع العمودية على محور الجزء ذات قيمة عظمى ، لان أي مقطع آخر غير عمودي على المحور سيولد مساحة أكثر لمقاومة الحمل . ويعتبر الإجهاد العمودي موجباً إذا كان أجهاد شد (Tensil Stress) ، ويعتبر الإجهاد العمودي سالباً إذا كان أجهاد ضغط (Compressive Stess) ، وسنتناول هذا الموضوع بالتفصيل في هذا الباب .

2.2 القوى الداخلية

كما أشرنا سابقاً أن حالة الشد أو الضغط تنشأ عندما تؤثر قوى خارجية باتجاه محور جزء من أجزاء منشئ معين. ولعل أبسط حالة يمكنها أن تعبر عن حالة الشد أو الضغط تعرض قضيب مستقيم نو مقطع عرضي ثابت لتأثير قوتين متعاكستين في الاتجاه وخطوط تأثيرهما على خط واحد ومنطبقاً على المحور الطولي لهذا القضيب ، حيث يكون القضيب في حالة ضغط إذا كان اتجاه القوى للداخل ، وفي حالة شد إذا كان اتجاه هذه القوى للخارج ، ولكي يحدث الاتزان الاستاتيكي يجب أن تتساوى هذه القوى المؤثرة كما يبين الشكل (1-2) .



الشكل (1-2)

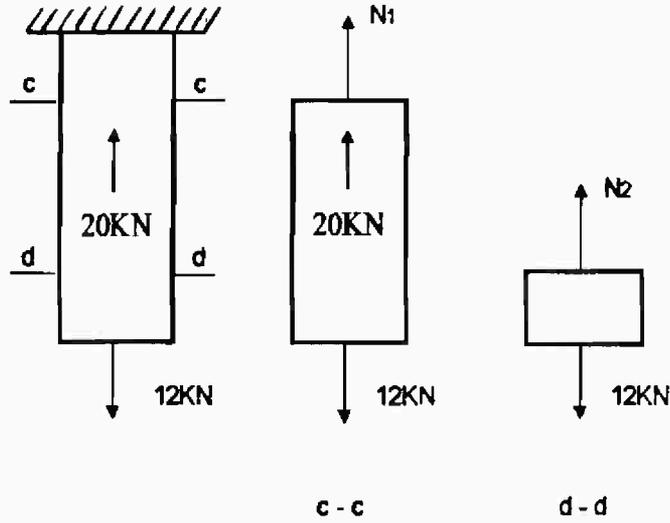
وبفعل تأثير هذه القوى الخارجية تنتج داخل القضيب قوى داخلية مقاومه أو ما يعرف بالقوى الطولية (Longitudinal Forces) والتي يرمز لها عادة بالرمز (N) ولتحديد هذه القوى تستخدم طريقة القطاعات " القطع " التي أشرنا إليها بالباب الأول من هذا الكتاب.

ولتوضيح ذلك نقوم بدراسة القضيب المستقيم نو المقطع العرضي الثابت والموضح في الشكل (2-2) حيث نقوم بأجراء قطع ما مثل " c - c " وبعد ذلك نبحث أتران القسم الأسفل المقطوع ، حيث يتم استبدال تأثير القسم الأعلى الذي أهمل على القسم الأسفل بقوة طولية ، تعطى اتجاهها معيناً ولنفرض أن اتجاهها يكون مبتعداً عن المقطع ، أي بمعنى آخر نفرض أن هذه القوة تعتبر قوة شادة ، بعد ذلك نضع معادلات الاتزان عن طريق إسقاط كل القوى المؤثرة في الأسفل على اتجاه موازي لمحور القضيب ونحصل على معادلة الاتزان ، وبمساواة مجموع المساقط للصفر نحصل على الآتي :

$$N_1 + 20 \text{ KN} - 12 \text{ KN} = 0$$

ومنه :

$$N_1 = - 8 \text{ KN}$$



الشكل (2-2)

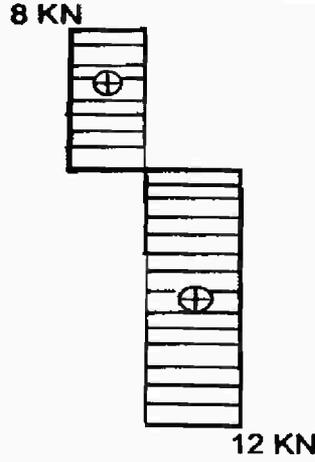
وتوضح الإشارة السالبة أن اتجاه القوة الطولية (N) يجب أن يكون في الاتجاه المعاكس لما فرضناه ، أي بمعنى أن القوة الطولية لا تكون شادة كما تم افتراضها في البداية بل ضاغطة . وبنفس الطريقة نقوم بإيجاد القوة الطولية في المقطع $d - d$ حيث أن :

$$N_2 - 12 \text{ KN} = 0$$

$$N_2 = 12 \text{ KN}$$

حيث يتم اعتبار القوة الطولية المطابقة للشد قوة موجبة .

ويمكن إعطاء صورة واضحة لقانون تغير القوى الطولية على طول القضيب برسم بياني يسمى " بمخطط القوى الطولية " ، حيث يكون محور X موازي لمحور القضيب والمحور Y عمودياً عليه . حيث نضع على المحور العمودي وبمقياس رسم محدد قيم القوى الطولية في المقاطع العرضية للقضيب مع الأخذ بعين الاعتبار الإشارات كما هو مبين في الشكل (2-3) وستوضح طريقة رسم مخططات القوى الطولية أكثر في حلول الأمثلة القادمة من هذا الباب .



الشكل (3-2)

3.2 الاجهادات العمودية

أن الحديث عن القوى العمودية المؤثرة على وحدة المساحات للمقطع العرضي أي كثافة القوى العمودية لوحدة المساحة والتي تسمى بالإجهاد العمودي يعتبر أفضل من الحديث عن القوى الداخلية التي تؤثر على جزء من المساحة .

ولتوضيح مفهوم الإجهاد نقوم بعمل شبكة خطوط على سطح قضيب بحيث تكون خطوط هذه الشبكة موازية وعمودية على محوره وبفعل تأثير قوة طولية شادة عليه ، فإنه يمكننا التأكد من أن خطوط هذه الشبكة تبقى متعامدة فيما بينها بعد الانفعال " التثوه " . كما يبين الشكل (4-2) عدا قسم صغير من القضيب بالقرب من مكان القوى الطولية الشادة ، ولكن مع اختلاف المسافة بين خطوط الشبكة ، حيث أن الخطوط الأفقية تتزاح إلى أسفل وتبقى أفقية ومستقيمة كما يبين الشكل (a-4-2) ولذلك يمكننا الافتراض أيضاً بأن نفس الشيء يحدث في وسط القضيب ، أي بمعنى آخر أن " المقاطع العرضية المستوية والعمودية على محور القضيب قبل الانفعال تبقى مستوية وعمودية

على محور القضيب بعد الانفعال . وهذه الفرضية الهامة تسمى بفرضية المقاطع المستوية أو فرضية العالم المعروف "بيرنولي" .
 وقد أثبتت الأبحاث والتجارب صحة الصيغ والعلاقات المبنية على أساس هذه الفرضية . وأن مثل هذه الصورة للانفعال تعطينا أساساً لاعتبار أنه في المقاطع العرضية للقضيب تؤثر الاجهادات العمودية والموزعة في المقطع بصورة منتظمة . وبتطبيق شرط الاتزان لقسم القضيب المقطوع والمبين في الشكل (c-4-2) نحصل على :

$$\Sigma Y = 0$$

$$- \sigma A + P = 0$$

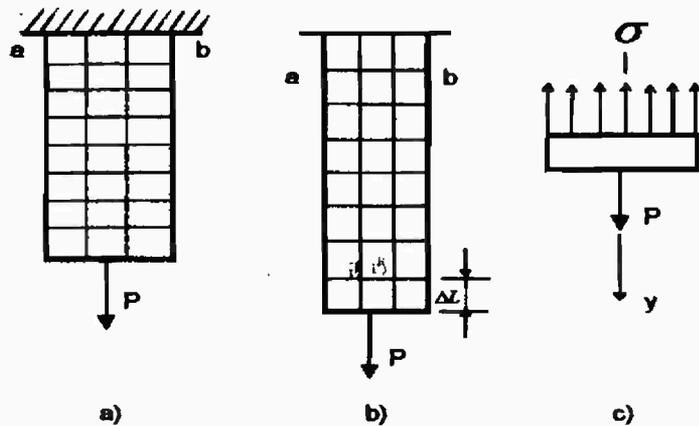
أو على صيغة الإجهاد :

$$\sigma = \frac{P}{A} \dots \dots \dots (1-2)$$

وبشكل عام عندما تؤثر على القسم المقطوع عدة قوى فإن بسط الصيغة السابقة للإجهاد يعتبر المجموع الجبري لمساقط هذه القوى المؤثرة على محور القضيب ، والذي يساوي عددياً القوة الطولية N أي أن :

$$\sigma = \frac{N}{A} \dots \dots \dots (2-2)$$

أن هذه العلاقات يصح استخدامها أيضاً لحالة الضغط ، ولكن مع فرق بسيط هو أن الإجهاد الضاغط يعتبر سالباً .



الشكل (4-2)

4.2 الانفعالات العمودية والاراحات

لقد بينت التجارب العديدة أنه في حالة تعرض قضيب ما إلى تأثير قوة شادة فإن طول هذا القضيب يزداد وتقل الأبعاد الطولية العرضية له ، ويحدث العكس في حالة تعرضه إلى قوة ضاغطة حيث يقل طوله وتزداد أبعاده العرضية كما هو مبين في الشكل (b.4.2) :

وقد أظهرت التجارب أيضا بان العلاقة بين الانفعال (التشوه) الطولي النسبي ϵ وبين الإجهاد σ لكثير من المواد عند تحميلها إلى حدود معينه يمكن أن تعطى بالعلاقة :

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \dots\dots\dots(3-2)$$

وتسمى هذه العلاقة بقانون هوك نسبة إلى العالم "سير روبرت هوك" الذي لاحظ هذه العلاقة في عام 1678. وأطلق عليها فيما بعد بقانون هوك الذي يعبر عنه بالصورة التالية " يتناسب الانفعال الطولي تناسباً طردياً مع الإجهاد العمودي " .

أن النسبة بين وحدة الإجهاد إلى وحدة الانفعال هي عبارة عن معامل يتعلق بنوع المادة ويسمى هذا المقدار بمعامل المرونة الطولية (Modulus of Elasticity) ويرمز له عادة بالرمز E ويعرف أيضا بمعامل يونج (Young's Modulus) وهو يبين صلادة المادة أي قابليتها لمقاومة الانفعالات (التشوهات) .

ويمكن إيجاد الاستطالة لوحدة الأطوال والتي تسمى بالانفعال العمودي ϵ بقسمة الاستطالة الكلية ΔL على الطول القياسي L حيث أن الانفعال العمودي يساوي :

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L} \dots\dots\dots(4-2)$$

وتبين العلاقة (2-4) أن الانفعال العمودي ϵ هو مقدار لا بعدي أي عديم الوحدات ، لذا فإن وحدة قياس معامل المرونة E هي نفسها وحدة قياس الإجهاد σ . ويمكن إيجاد قيم E للمواد المختلفة من خلال دليل خاص بهذه الكمية . ويتحدد أكثر يمكن الحصول على هذه القيم من منشورات وكتيبات المنتجين الدورية ، وحيث أن :

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad , \quad \sigma = \frac{N}{A}$$

فانه يمكن الحصول من العلاقة (2-3) على صيغة لتحديد الاستطالة الكلية حيث :

$$\Delta L = \frac{NL}{EA} \dots \dots \dots (5-2)$$

كما يلاحظ في المواد المرنة أنه إذا تعرض قضيب من مادة ما إلى حمل شد أو ضغط ، فإن طول هذا القضيب يزداد في حالة الشد بينما تنقص أبعاده العرضية ، والعكس يحدث في حالة الضغط حيث ينقص طول القضيب وتزداد إبعاده العرضية . أن النسبة بين الانفعال العمودي في اتجاه المحور هي نسبة ثابتة ومحددة لكل مادة وتسمى هذه النسبة بنسبة " بويسون " أو معامل بويسون (Poissons Ratio) نسبة إلى عالم الرياضيات الفرنسي الذي تتبأ بوجودها وبقيمتها بواسطة النظرية الجزيئية للمادة ، ويرمز لهذه النسبة أو المعامل بالرمز اليوناني μ حيث :

$$\mu = \frac{\epsilon'}{\epsilon}$$

أي أن :

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon \dots \dots \dots (6-2)$$

حيث :

ε' - الانفعال العرضي ، ε - الانفعال الطولي .

وتبين نسبة بويسون قابلية المادة للتشوه العرضي ، وفي حالة الاستطالة أي الشد فإن العلاقة (6-2) تكون موجبة أما في حالة التقلص أي (الضغط) تكون سالبة .

وقد وجد من التجارب المخبرية أن نسبة بويسون تتغير بتغير المادة حيث تختلف من مادة إلى أخرى وغالباً ما تتراوح قيمتها بين (0.25) و (0.35) ، ففي حالات يمكن أن تكون النسبة قليلة حوالي (0.15) لبعض أنواع الخرسانة، ويمكنها أن تكون عالية حيث تصل ما يقارب (0.50) . مع العلم أن القيمة (0.50) هي أعلى ما يمكن الحصول عليه لقيمة نسبة بويسون ، في المواد الموحدة الخواص أي المواد التي تتساوى خواصها في جميع الاتجاهات ، وبمعرفة التشوه العرضي ε' من الممكن تحديد التشوه العرضي الكامل وذلك من العلاقة :

$$\varepsilon' \frac{\Delta b}{b} \dots \dots \dots (7-2)$$

حيث إن (b) هي العرض الأول للقضيب .

وبمعرفة معامل المرونة E ، ومعامل بويسون μ لمادة معينة نستطيع بسهولة حساب التغير الحاصل ، في أبعاد وحجم قضيب مصنوع من هذه المادة عند تعرضه لشد أو ضغط ، وإن الأمثلة القادمة سوف توضح ذلك .

كما تجدر الإشارة إلى أنه في القضبان ذات المقطع المتغير ، من الممكن اعتبار الاجهادات في المقاطع العرضية موزعه بصورة منتظمة وتحدد بنفس العلاقة التي استخدمت للقضبان ذات المقطع الثابت إذا كانت زاوية المخروط $\alpha \leq 12^\circ$ وسوف توضح الأمثلة القادمة طرق التعامل مع هذا النوع من القضبان ذات المقطع المتغير .

مثال (1-2)

عرضت عينة من النحاس دائرية المقطع قطرها 50mm ، لحمل شد محوري مقداره 100kN . أوجد النقص في قطر هذه العينة إذا علمت أن معامل المرونة $E = 90G N/m^2$ ، ومعامل بويسون $\mu = 0.28$

الحل

نجد مساحة مقطع العينة حيث :

$$A = \pi r^2 = 3.14 (25 \times 10^{-3})^2 = 196.10^{-5} m^2$$

نجد الإجهاد حيث :

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{100 \times 10^3}{196 \times 10^{-5}} = 51 MPa$$

نجد الانفعال حيث :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{51 \times 10^6}{90 \times 10^9} = 0.56 \times 10^{-3}$$

وحيث أن معامل بويسون $\mu = 0.28$ فأنتنا نستطيع إيجاد النقص في قطر هذه العينة حيث :

$$\mu = \frac{\text{الاتفعال العرضي } \epsilon'}{\text{الاتفعال الطولي } \epsilon}$$

ومنه :

$$0.28 = \frac{\epsilon'}{0.56 \times 10^{-3}}$$

$$\epsilon' = 1.5 \times 10^{-4}$$

وحيث أن الاتفعال العرضي ϵ' يساوي :

$$\epsilon' = \frac{\Delta b}{b}$$

إذا النقص في قطر هذه العينة يكون Δb حيث :

$$1.5 \times 10^{-4} = \frac{\Delta b}{50 \times 10^{-3}}$$

$$\Delta b = 7.5 \times 10^{-6}$$

مثال (2-2)

تعرضت عينة منتظمة طولها 200mm ونصف قطرها 20mm لقوة شد محورية مقدارها 200KN ، فإذا كانت الزيادة في طول هذه العينة 2mm ، والنقص في قطرها 0.2mm . أوجد معامل المرونة E ، ونسبة بويسون μ لهذه العينة .

الحل

من معطيات السؤال نجد أن :

$$P = 200 \text{ KN}$$

$$r = 20 \text{ mm}$$

$$\Delta b = 0.2 \text{ mm}$$

$$L = 200 \text{ mm}$$

$$\Delta L = 2 \text{ mm}$$

و

نجد أولاً المساحة لهذه العينة حيث :

$$A = \pi r^2 = 3.14 \cdot (20)^2 = 1256 \text{ mm}^2$$

باستخدام العلاقة (2-5) يمكن الحصول على المطلوب الأول معامل

المرونة E حيث :

$$\Delta L = \frac{PL}{EA}$$

ومنه :

$$E = \frac{PL}{\Delta LA}$$

$$= \frac{(200 \times 10^3)(0.2)}{(1256 \times 10^{-6})(2 \times 10^{-3})}$$

$$= \frac{4 \times 10^4}{2512 \times 10^{-9}}$$

$$= 15.92 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

$$= 15.92 \text{ GN/m}^2$$

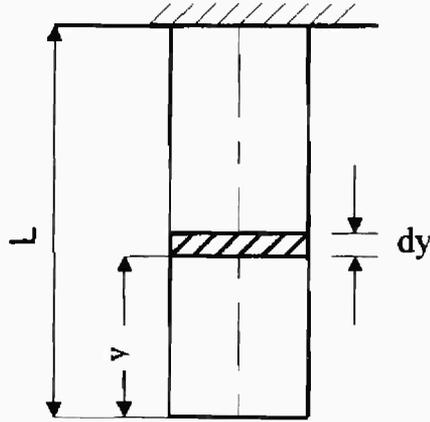
أما معامل (نسبة) بويسون μ فيمكن الحصول عليه من العلاقة (2-7) حيث :

$$\mu = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \frac{\Delta b}{b} / \frac{\Delta L}{L} = \frac{0.2}{40} / \frac{2}{200}$$

$$\mu = \frac{5 \times 10^{-3}}{1 \times 10^{-2}} = 0.5$$

مثال (2 - 3)

الشكل (5-2) يبين قضيب ذو مقطع ثابت . أوجد الاستطالة لهذا القضيب تحت تأثير وزنه الذي يعتبر حمل موزع بصورة منتظمة باتجاه محور القضيب .



الشكل (5-2)

الحل

لنرمز بالحرف γ إلى الكثافة الوزنية أو الوزن النوعي لمادة القضيب ، وبعد ذلك نقوم بأخذ شريحة من هذا القضيب مثل dy والمأخوذة على مسافة y من النهاية السفلى للقضيب ، فنجد أن هذه الشريحة تشد بقوة γAy وهي تساوي وزن القسم من القضيب الواقع تحت المقطع y .
أن استطالة هذا الجزء يمكن الحصول عليه كما يلي :

$$\Delta(dy) = d(\Delta L) = \frac{\gamma Ay \cdot dy}{EA}$$

$$= \frac{\gamma y \cdot dy}{E}$$

وبالحصول على تكامل هذه العلاقة في الحدود من $y = 0$ حتى $y = L$ فإننا نجد أن استطالة القضيب المطلوب إيجادها هي :

$$\begin{aligned} \Delta L &= \int_0^L \frac{\gamma}{E} y \cdot dy = \frac{\gamma y^2}{2E} \Big|_0^L \\ &= \frac{\gamma L^2}{2E} \end{aligned}$$

وإذا اعتبرنا أن وزن القضيب W هو:

$W = \text{الطول} \times \text{المساحة} \times \text{الكثافة الوزنية}$

$$W = L \cdot A \cdot \gamma$$

$$\gamma L = \frac{W}{A}$$

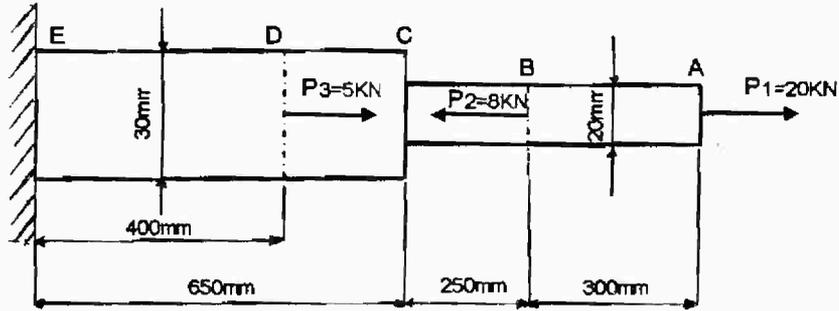
عندئذ يمكن أن نحصل على الاستطالة لهذا القضيب تحت تأثير وزنه حيث :

$$\gamma L = \frac{WL}{2EA}$$

وذلك تكون استطالة قضيب ذو مقطع ثابت تحت تأثير وزنه أقل مرتين من الاستطالة تحت تأثير قوة مساوية لوزن القضيب مؤثرة في نهايته .

مثال (4-2)

يبين الشكل (a.6-2) قضيبان منشوريان من نفس المادة مثبتان ببعضهما
 بجساءة . احسب الإجهاد والاستطالة في كل مقطع من مقاطع القضبان إذا
 علمت أن معامل المرونة لمادة القضيب $E = 90 \text{ G N/m}^2$



(a)



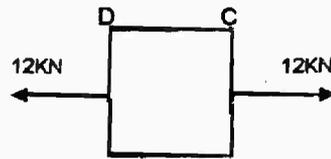
(c)



(b)



(e)



(d)

الشكل (6-2)

الحل

نجد أولاً مساحات مقاطع القضيب المختلفة حيث :

$$A_1 = 300 \times 20 = 600 \text{ mm}^2 \quad \text{: مساحة المقطع AB}$$

$$A_2 = 250 \times 20 = 500 \text{ mm}^2 \quad \text{: مساحة المقطع BC}$$

$$A_3 = 250 \times 30 = 7500 \text{ mm}^2 \quad : \text{مساحة المقطع CD}$$

$$A_4 = 400 \times 300 = 1200 \text{ mm}^2 \quad : \text{مساحة المقطع DE}$$

وبما أن القضيب كله في حالة أتران ، لذا فإن كل جزء من أجزائه يكون في حالة أتران أيضا . الجزء من القضيب بين A , B ، تؤثر عليه محصلة قوى مقدارها (20KN) على كل مقطع مستعرض ، لهذا فإن الرسم البياني للجسم الحر لهذا الجزء بطول (300 mm) يظهر في الشكل (b.6-2) وللحفاظ على أتران هذا الجزء يجب أن تؤثر عليه قوة طولية (N_1) ، وبواسطة توازن قسم القضيب بين A , B نحصل على :

$$P_1 - N_1 = 0$$

$$20 - N_1 = 0$$

$$N_1 = 20 \text{ KN}$$

الإجهاد في هذا المقطع :

$$\sigma_{AB} = \frac{P_1}{A_1} = \frac{20 \times 10^3}{6000 \times 10^{-6}}$$

$$= 3.3 \text{ MPa}$$

أما الاستطالة لهذا الجزء فنحصل عليها باستخدام العلاقة التالية :

$$\Delta_{AB} = \frac{PL_1}{A_1E} = \frac{\sigma_{AB} \cdot L_1}{E}$$

$$= \frac{3.3 \times 300 \times 10^6}{90 \times 10^9}$$

$$= 0.011 \text{ mm}$$

وهكذا حصلنا على كل من الإجهاد والاستطالة في المقطع A , B ،
وبنفس الطريقة يمكننا الحصول على تلك القيم في مقاطع القضيب الأخرى .
بالنسبة للقوة المؤثرة على الجزء B , C فيمكن إيجادها باعتبارها
المجموع الجبري على يسار المقطع بين B , C وبواسطة توازن قسم القضيب
نجد أن القوة الطولية N_2 .

$$P_1 - P_2 - N_2 = 0$$

$$20 - 8 - N_2 = 0$$

$$N_2 = 12KN$$

إذا الجزء B , C تؤثر عليه محصلة قوة 12KN تؤثر إلى اليسار ، أي أن
المقطع تؤثر عليه قوة شد وبالتالي فإن الرسم البياني للجسم يظهر في الشكل
(2 - 6 . C) الإجهاد وفي هذا المقطع :

$$\begin{aligned}\sigma_{AB} &= \frac{N_2}{A_2} \\ &= \frac{12 \times 10^3}{5000 \times 10^{-6}} \\ &= 2.4MPa\end{aligned}$$

أما الاستطالة لهذا الجزء فنحصل عليها كما تم الحصول عليها للجزء السابق
A , B حيث :

$$\begin{aligned}A_{BC} &= \frac{N_2 L_2}{A_2 E} \\ &= \frac{\sigma_{BC} L}{E}\end{aligned}$$

$$= \frac{24 \times 10^3 \times 250}{90 \times 10^6}$$

$$= 0.006 \text{ mm}$$

وبالمثل فان القوة التي تؤثر على أي مقطع مستعرض بين C , D لابد ان تكون 12 KN ، وذلك من خلال توازن القضيب حيث :

$$P_1 - P_2 - N_3 = 0$$

$$20 - 8 - N_3 = 0$$

$$N_3 = 12 \text{ KN}$$

الإجهاد في هذا المقطع :

$$\sigma_{CD} = \frac{N_3}{A_3}$$

$$= \frac{12 \times 10^3}{7500 \times 10^{-6}}$$

$$= 1.6 \text{ MPa}$$

أما الاستطالة لهذا الجزء فهي :

$$\Delta_{CD} = \frac{N_3 L_3}{A_3 E}$$

$$= \frac{\sigma_{CD} \cdot L_3}{E}$$

$$= \frac{(1.6 \times 10^6)(250)}{90 \cdot 10^9}$$

$$= 0.004 \text{ mm}$$

أما القوة الطولية N_4 في المقطع الأخير من هذا القضيب والتي تؤثر في أي مقطع مستعرض بين D , E فنحصل عليها من توازن قسم القضيب حيث :

$$P_1 - P_2 + P_3 - N_4 = 0$$

$$20 - 8 + 5 - N_4 = 0$$

$$N_4 = 17 \text{ KN}$$

الإجهاد في هذا المقطع هو :

$$\sigma_{CD} = \frac{N_4}{A_4}$$

$$= \frac{17 \times 10^3}{12000 \times 10^{-6}}$$
$$= 1.41 \text{ MPa}$$

أما الاستطالة لهذا الجزء فهي :

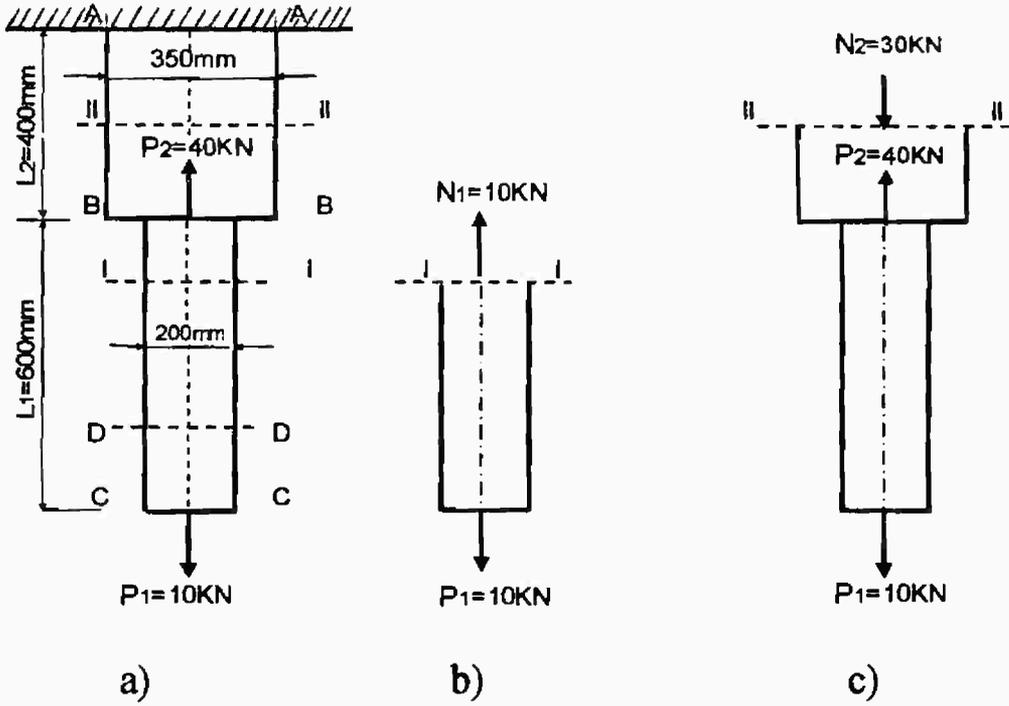
$$\Delta_{DE} = \frac{N_4 L_4}{A_4 E}$$
$$= \frac{\sigma_{DE} \cdot L_4}{E}$$
$$= \frac{1.41 \times 10^6 \times 400}{90 \cdot 10^9}$$
$$= 0.006 \text{ mm}$$

أما الاستطالة الكلية لهذا القضيب فتكون :

$$\Delta = \Delta_{AB} + \Delta_{BC} + \Delta_{CD} + \Delta_{DE}$$
$$= 0.011 + 0.006 + 0.004 + 0.006$$
$$= 0.027 \text{ mm}$$

مثال (5-2)

قضييب من الصلب متدرج الشكل حمل بالقوى الموضحة في الشكل (a.7-2) . حدد القوى الطولية N والإجهاد σ في جميع المقاطع العرضية لهذا القضييب ، وكذلك حدد الإزاحة الرأسية δ لكل المقاطع العرضية للقضييب ، وضع المخططات البيانية لكل من δ ، σ ، N (أي توضيح النتائج برسوم بيانية) . إذا علمت أن معامل المرونة للصلب $E = 200 \text{ G N/m}^2$.



الشكل (7-2)

الحل :

نجد أولاً مساحة مقاطع القضييب حيث :

$$A_1 = 600 \times 200 = 12 \times 10^4 \text{ mm}^2 \quad \text{مساحة المقطع السفلي} :$$

$$A_2 = 400 \times 350 = 14 \times 10^4 \text{ mm}^2 \quad \text{مساحة المقطع العلوي} :$$

لتحديد القوة الطولية N نقوم بعمل قطع القضيب في المقطع (I - I) ، وبواسطة توازن قسم القضيب الموجود تحت المقطع (I - I) نحصل على قيمة القوى الطولية N_1 كما هو مبين في الشكل (b . 7-2) حيث :

$$N_1 - P_1 = 0$$

$$N_1 = 10KN \quad (\text{شد})$$

إذا القوة الطولية تحت المقطع (I - I) تساوي 10KN وهي قوة شادة .

وبالمثل نقوم بعمل قطع القضيب في (II-II) فنحصل بواسطة توازن قسم القضيب تحت المقطع (II-II) على قيمة القوى الطولية N_2 كما هو مبين في الشكل (c . 7-2) حيث :

$$-N_2 + P_2 - P_1 = 0$$

$$-N_2 + 40KN - 10KN = 0$$

$$N_2 = -30KN \quad (\text{ضغط})$$

وهكذا نجد أن القوة الطولية N_2 تحت المقطع تساوي 30KN وهي قوة ضاغطة .

أما الإجهاد σ فهو متساوي في مقاطع القسم الأسفل من القضيب حيث :

$$\sigma_I = \frac{N_1}{A_1} = \frac{10 \times 10^3}{12 \times 10^4 \times 10^{-6}}$$

$$= 8.3 MPa \quad (\text{شد})$$

وبالمثل نحسب الإجهاد في مقاطع القسم الأعلى للقضيب حيث :

$$\sigma_{II} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-30 \times 10^3}{14 \times 10^4 \times 10^{-6}}$$

$$\sigma_{II} = -21.4 \text{ MPa} \quad (\text{ضغط})$$

ولتحديد الإزاحة (δ) لمقاطع القضيب المختلفة (A-A) ، (B-B) ، (C-C) ، (D-D) نجد أن إزاحة المقطع (A-A) تساوي الصفر ، أما القسم (B-B) فينزاح إلى أعلى لان القسم الأعلى مضغوط حيث :

$$\begin{aligned} \delta_B &= \frac{N_2 L_2}{E \cdot A_2} = \frac{\sigma_{II} \cdot L_2}{E} \quad (\text{إلى الأعلى}) \\ &= \frac{-21.4 \times 10^6 \cdot 400}{200 \times 10^9} \\ &= -0.042 \text{ mm} \end{aligned}$$

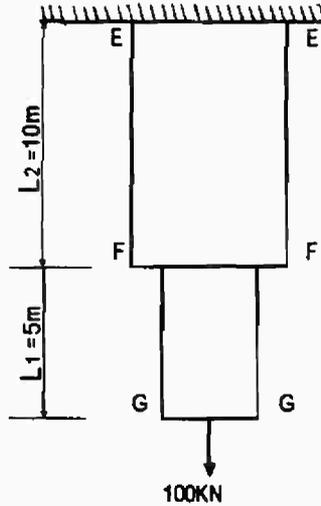
حيث تعتبر الإزاحة إلى أسفل موجبة وإلى الأعلى سالبة ، أما إزاحة المقطع (2-2) فتعتبر المجموع الجبري لإزاحة المقطع (B-B) واستطالة قسم القضيب الذي طوله $L_1 = 600 \text{ mm}$ حيث :

$$\begin{aligned} \delta_C &= \delta_B + \Delta L_1 \\ &= \delta_B + \frac{N_1 L_1}{EA_1} \\ &= \delta_B + \frac{\sigma_1 L_1}{E} \\ &= -0.042 + \frac{8.3 \times 10^6 (600)}{200 \times 10^9} \\ &= -0.042 + 0.0249 \\ &= 0.017 \text{ mm} \quad (\text{إلى الأسفل}) \end{aligned}$$

وهكذا حصلنا على كل من قيم القوة الطولية N ، والإجهاد σ والإزاحة δ في مقاطع القضيب المختلفة .

مثال (2-6)

قضيبان منشوريان ومثبتان ببعضهما ، معرضان لحمل محوري مقداره 100KN كما يوضح الشكل (2-9) . القضيب العلوي من الفولاذ وطوله 10m ومساحة مقطعه المستعرض 5000mm^2 ، القضيب السفلي من النحاس وطوله 5m ومساحة مقطعه المستعرض 4000mm^2 إذا علمت أن الكثافة الوزنية للفولاذ هي $7.7 \times 10^4 \text{ N/m}^3$ ، والكثافة الوزنية للنحاس هي $8.25 \times 10^4 \text{ N/m}^3$ وأن معامل المرونة للفولاذ $E=200\text{G N/m}^2$ ، وأن معامل المرونة للنحاس $E=90\text{G N/m}^2$. أوجد قيمة الإجهاد القصوى في كل مادة من مواد القضيب .



الشكل (2-9)

الحل

أن القيمة القصوى للإجهاد تنتج من تأثير الحمل المحوري 100KN ووزن القضيب أي بسبب تأثيرهما المشترك معاً ، لذلك فإن القيمة القصوى للإجهاد في قضيب النحاس تحدث مباشرة أسفل الوصلة عند المقطع F-F .

ولهذا يجب علينا أولاً إيجاد وزن قضيب النحاس حيث :

وزن قضيب النحاس = الطول × مساحة المقطع × الكثافة الوزنية للنحاس

$$\begin{aligned}W_{\text{نحاس}} &= L_1 \cdot A \cdot \gamma \\ &= 5 \times 10^3 (4000) (8.25 \times 10^4) (10^{-9}) \\ &= 1650 N\end{aligned}$$

الإجهاد في هذا المقطع :

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{P}{A_1} \\ &= \left(\frac{100 \times 10^3 + 1650}{4000 \times 10^{-6}} \right) \\ &= 25.4 MPa\end{aligned}$$

أما بالنسبة لقيمة الإجهاد القصوى في قضيب الفولاذ فإنه يحدث عند المقطع (E-E) ، ولأن الوزن الكلي للقضيبين الفولاذ والنحاس يعمل على زيادة الإجهاد العمودي في حين عند أي مقطع في مستوى أقل فإن أجزاء فقط من وزن القضيب الفولاذ يسبب حدوث إجهاد .

وزن قضيب الفولاذ = الطول × المساحة × الكثافة الوزنية للفولاذ

$$\begin{aligned}W_{\text{فولاذ}} &= L_1 \cdot A_2 \cdot \gamma \\ &= (10 \times 10^3) (5000) (7.7 \times 10^4) (10^{-9}) \\ &= 3850 N\end{aligned}$$

ومنه الإجهاد عند المقطع (E - E) هو :

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{P}{A_2} \\ &= \frac{(100 \times 10^3) + 1650 + 3850}{5000 \times 10^{-6}} \\ &= 21.1 \text{MPa}\end{aligned}$$

حيث أن P في هذه العلاقة هي عبارة عن الحمل الخارجي 100KN مضافاً إليه وزن القضيبان الفولاذ والنحاس .

5.2 الدراسات المخبرية التجريبية لخواص المواد .

من المعروف أن الكثير من المسائل الهندسية تتطلب معرفة تصرف وسلوك المواد تحت تأثير الحمولات المختلفة ، وذلك لدراسة خواص المواد وتحديد مقادير الاجهادات المسموح بها ، وهذا يتطلب القيام بتجارب مخبرية على نماذج المادة المدروسة حتى انهيارها ، والتي عادة ما تكون تجارب شد أو ضغط وذلك للحصول على المعلومات والموصفات الميكانيكية الخاصة بهذه المادة أو تلك ، حتى تفي تماماً بخواص التصميم ومطلوبات المتانة والصلادة والتحمل ومحدودية الاستخدام .

ونظراً لأن نظرية مقاومة المواد تبنى أساساً على المعطيات التجريبية المخبرية ، وقوانين الميكانيكا وتستند إلى الحالة الفعلية للإجهاد والانفعال للمادة في مختلف مراحل التحميل بالحمولات الخارجية المختلفة ، يكون من الأجدر والاعم أن ترسم علاقة التحميل المحوري بدلالة الإجهاد والانفعال بدلاً من القوة والتشوه ، لأن علاقة الإجهاد والانفعال بعكس القوة والتشوه تكون مستقلة عن حجم النموذج المخبري وطول جهاز القياس الذي يستعمل لحساب التشوه .

2.5.2 أهداف الاختبارات المخبرية وأنواعها

إن نظرية مقاومة المواد تبنى أساساً على المعطيات التجريبية المخبرية ، وقوانين الميكانيكا وتستند إلى الحالة الفعلية للإجهاد والانفعال للمادة في مختلف مراحل التحميل بالحمولات الخارجية المختلفة . وبقدر تراكم المعطيات التجريبية ، يكتمل إتقان طرق حساب وتصميم المواد والإنشاعات المختلفة . لذلك يجب أن تتوفر معلومات عن الخواص المرنة وصفات المقاومة للمواد الإنشائية تحت مختلف ظروف الإجهاد ، حيث يجب معرفة

الحدود التي يمكن اعتبار المادة ضمنها ، مثالية المرونة ، لأنواع مختلفة من الإجهاد . وعليه يجب معرفة سلوك وتصرف المادة خارج نطاق هذه الحدود .

أن مثل هذه المعلومات لا تتوفر إلا من خلال البحوث التجريبية في مختبرات " اختبار المواد " والتي تكون عادة مزودة بأجهزة اختبار خاصة تحدث تشوهات وانفعالات نموذجية في عينات اختبار خاصة لحالات مختلفة التحميل ، كالشد والضغط والالتواء والانحناء .

وقد أظهرت النتائج المخبرية والأبحاث المختلفة أن نتائج الاختبارات تتأثر بحجم ، وشكل عينة الاختبار ، ولذا فقد تم تحديد مواصفات معينة لأبعاد ، وأشكال عينات الاختبار . وتجرى الاختبارات بحالات التحميل المختلفة ، الاستاتيكية ، الديناميكية التصادمية والدورية " اختبار الكلال " وغيرها ، وتختلف الاختبارات على الشد أو الضغط أو الالتواء أو الانحناء تبعا لنوع التشوه الحاصل للنموذج المدروس ، وفي حالات خاصة ونادرة تجرى اختبارات المقاومة المعقدة ، على سبيل المثال في حالة اقتران الشد مع الالتواء .

ويستخدم نموذجان متطابقان كحد أدنى في حالة الاختبار الاستاتيكي ، إما الاختبار الديناميكي فتستخدم ثلاثة نماذج ، ولاختبار التحميل يتطلب استخدام ستة إلى ثمانية نماذج متطابقة كحد أدنى ، وعند اختبار المواد الأقل تجانسا يجب الإكثار من التجارب المتكررة بقدر الامكان . وكما أشرنا سابقا بأن التجارب والاختبارات تجرى عادة في ظروف مخبرية قياسية ، وذلك لان نتائج الاختبارات ترتبط وتعتمد على شكل النموذج وحجمه ، وسرعة تشووهه بالإضافة إلى درجة الحرارة عند الاختبار وغيرها من المؤثرات الأخرى والتي تؤخذ بعين الاعتبار عند إجراء مثل هذا النوع من التجارب، بالإضافة إلى أن الاختبار يجب إن يتم بواسطة معدات والآلات خاصة من حيث قدرتها

وتركيبتها وذلك اعتماداً على نوع الاختبار المطلوب ، فمثلاً تزود أجهزة اختبار الشد عادة بجهاز يرسم مخطط اختبار الشد تلقائياً وهذا المخطط يمثل العلاقة بين الحمولة P واستطالة العينة δ بالإضافة إلى أنه يبين العديد من الخواص الهامة للمادة ، كما تستخدم أدوات خاصة عالية الحساسية لقياس التشوهات والاستطالة تسمى "تترومتر" أو ما يعرف بمقياس انفعال كهربائي من النوع المقاوم ، والذي يتم لصقه على سطح المادة المختبرة ، ويتكون من عدد من الأسلاك الرفيعة جداً تكون موجهة في اتجاه محور القضيب ، وحيث أن المقاومة الكهربائية للأسلاك تتغير كلما استطال القضيب فإنه يتم رصد هذا التغير في المقاومة بجهاز خاص ، وبعد ذلك يمكن ترجمت هذا التغير في المقاومة إلى استطالة ، بالإضافة إلى استخدام أنواع أخرى من الآلات والأجهزة المخبرية المتعددة والتي يمكن للقارئ الإطلاع عليها في مراجع أخرى خاصة بذلك .

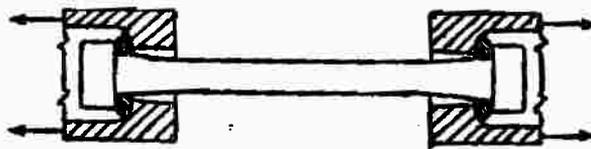
2.5.2 عينات الاختبار

أشرنا في بداية هذا الباب إلى إن الحمولات المحورية تعتبر الأكثر ظهوراً في مسائل المنشآت وتصميم الآلات والمعدات المختلفة ، ولهذا فإن اختبارات الشد والضغط تحت تأثير الحمولات الاستاتيكية هي الأكثر شيوعاً وانتشاراً ، وذلك نظراً لسهولة إجرائها وبساطة إجرائها ، بالإضافة إلى أنها في كثير من الحالات تعطى الحكم الصحيح على سلوك المادة في الحالات الأخرى للتشوه .

وقد أشرنا في البند السابق إن التجارب والأبحاث أظهرت أن نتائج الاختبارات تتأثر في كثير من الأحيان بحجم ، وشكل عينة الاختبار لذلك فقد قامت عدة هيئات ومراكز أبحاث عالمية في دول عديدة بإصدار مواصفات لأكثر من عشرين نوعاً مختلفاً من العينات ، وضعت لمختلف المواد المعدنية وغير المعدنية لكل من اختبار الشد المحوري والضغط المحوري .

فالنسبة لاختبار الشد والذي يعتبر الأكثر استخداما للمواد الإنشائية ، تم تحديد مواصفات عينة الاختبار القياسية في الولايات المتحدة على سبيل المثال بحيث تكون العينة ذات مقطع دائري . قطره 12.5 وطول قياس 50mm ، أي أن $l/d = 4$ ، أو أن $l = 4.51\sqrt{A}$ ، حيث أن A تمثل $A = \frac{\pi d^2}{4}$ مساحة مقطع العينة .

أن طول الجزء الاسطواني للعينة يزيد دائما عن طول القياس L ، ويكون عادة $L+d$ على الأقل . ويكون المقطع عند طرفي العتبة أكبر لمنع حدوث الكسر في أجزاء العينة المثبتة بماسكتي الجهاز حيث تكون حالة الإجهاد في تلك التجربة أشد ، وذلك لعدم الانتظام في توزيع الاجهادات . ويبين الشكل (10-2) عينة اسطوانية لها $L=10d$ ، حيث يلاحظ من الشكل استخدام مسند كروي في كل من الماسكتين لضمان تسليط الحمولة بشكل مركزي . وقد تكون نهايات العينة ذات أشكال مختلفة لتناسب الماسكات الخاصة بأجهزة ومكائن الاختبار التي سوف تحدث الحمل المحوري .



الشكل (10-2)

أن الهدف من اختبار الشد هو تحديد الخصائص الميكانيكية للمادة . ولذلك تزود أجهزة اختبار الشد بجهاز يرسم مخطط الشد تلقائياً . حيث يبين هذا المخطط العلاقة بين قوة شد النموذج (الحمولة) P واستطالة العينة ΔL ، كما يبين عدداً من الخواص الأخرى الهامة للمادة .

3.5.2 الرسوم البيانية للإجهاد والانفعال في التحميلات المحورية منحنى الإجهاد - والانفعال

أشرنا إلى أن الهدف من اختبارات الشد والضغط هو تحديد الخصائص الميكانيكية للمادة . وخلال الاختبار يوضع الرسم البياني بين قوة شد النموذج (P) واستطالة (ΔL) بواسطة جهاز يرسم مخطط اختبار الشد تلقائياً ، بالإضافة إلى انه يبين عدداً من الخواص الأخرى الهامة للمادة .

ولأجل مقارنة نتائج اختبار النماذج ذات الأبعاد المختلفة والمصنوعة من مادة واحدة ، فإن المخطط البياني للشد عادة ما ينقل إلى رسم آخر بمجموعة أخرى من محاور الإحداثيات ، حيث يوضع على الاحداثي الأفقي مقدار الاستطالة النسبية للنموذج حسب العلاقة :

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

حيث L هو الطول الأولي للنموذج . ويوضع على الاحداثي العمودي مقدار الإجهاد العمودي في المقطع العرضي للنموذج المشدود حسب العلاقة :

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

حيث أن A هي المساحة الأولية للنموذج .

وتختلف رسوم الإجهاد والانفعال للمواد المختلفة واختلاف درجة الحرارة للنموذج الواحد وسرعة الاختبار، بالإضافة إلى عوامل أخرى تؤثر كذلك على علاقة الإجهاد والانفعال كنا قد أشرنا إليها سابقاً. وبشكل عام يمكننا القول أنه يوجد نوعان رئيسيان من الرسوم البيانية لعلاقة الإجهاد والانفعال التي

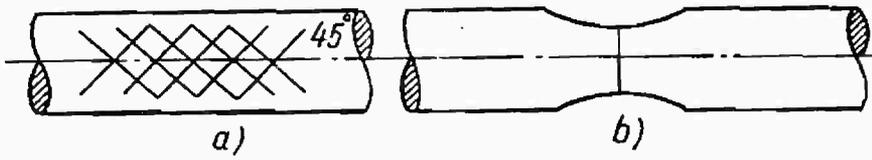
تستحدث من التجارب في درجة حرارة ثابتة وعلى مادة مستقلة في تصرفها الميكانيكي عن الزمن، النوع الأول هو الرسم البياني للمواد المطاوعة اللدنة (المطيلة) والتي تتميز بانفعال شد كبير نسبياً حتى نقطة الكسر، أما النوع الثاني فهو الرسم البياني للمواد الهشة (القصفة) والتي تتميز بأنفعال صغير نسبياً حتى نفس النقطة .

وبين الشكل (2-11) مخطط الرسم البياني لاختبار شد نموذج من الفولاذ ذو نسبة كاربون منخفضة وبإحداثيات ϵ ، σ والذي يتبع النوع الأول " المواد المطاوعة اللدنة " والذي ومنه نحصل على صفات هامة للمادة كنقطة الخضوع ، والمقاومة النهائية ، ومقدار الاستطالة اللدنة وغيرها من الخواص الميكانيكية للمادة .

وكما هو واضح في البداية أي في الجزء OA أن التشوه يزداد كلما زاد الاجهاد حتى نصل إلى إجهاد يسمى بأجهاد حد التناسب (Proportional Limit Stress) والذي يرمز له بالرمز σ_p ومن هنا فإن قانون " هوك " يكون صحيحاً حتى حد التناسب . أن تحديد حد التناسب يتطلب مقاييس استطالة حساسة لرصد أقل انحراف عن الخط المستقيم في مخطط اختبار الشد ، ولذا فإن هذا الحد سيعتمد إلى حد كبير ، على حساسية هذه المقاييس وللحصول على انتظام أفضل في النتائج ، فإنه عادة ما تؤخذ قيمة معينة من التشوه الدائم أو الانحراف عن التناسب كأساس لتحديد حد التناسب ، وقد حدد المؤتمر الدولي لاختبار المواد في بروكسل في عام 1906 حد التناسب على أنه إجهاد شد يؤدي إلى تشوه دائم مقداره 0.001 % .

وعند الزيادة اللاحقة للحمولة فإن مخطط الرسم البياني يأخذ شكل الخط المنحني. ولكن إذا لم يتجاوز الاجهاد مقداراً معيناً هو σ_e هو إجهاد حد المرونة (Maximum Elastic Stress) فإن المادة تحتفظ بخواصها المرنة أي أن النموذج يأخذ شكله وإبعاده الأولية عند رفع الحمولة عنه ويقع

وقد بينت التجارب والدراسات المختلفة أن الخضوع يرتبط بانزلاق متبادل كبير لبلورات المادة ، وبسبب ذلك تظهر على سطح النماذج خطوط تسمى "بخطوط لودرز" مائلة على محور النموذج بزاوية تقدر بحوالي 45° درجة الشكل (a.12-2) ، وقد بينت الدراسات المجهرية أن خطوط لودرز تمثل طبقات رقيقة من المادة حدث فيها تشوه لدن بينما تبقى المادة المجاورة لها مرنة تماما ، وتكون هذه الطبقات متقاطعة مع سطح العينة .



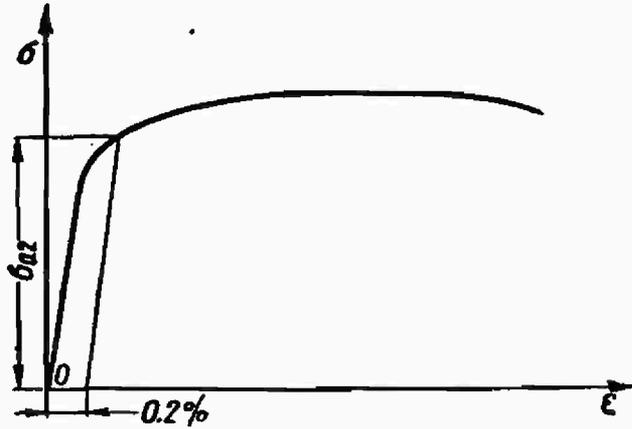
الشكل (2-12)

وعند زيادة طول المادة إلى حد ما بتأثير القوى الثابتة ، اى عندما تمر بحالة الخضوع ، فإنها تستعيد قابليتها لمقاومة الشد ، والخط البياني يرتفع إلى الأعلى بعد النقطة D ويميلان اقل بكثير مما كان عليه سابقا كما يبين الشكل (2-11) .

وعند وصول الإجهاد إلى أقصى مقدار نه في نقطة E ، وهو الإجهاد الاصطلاحي الأقصى الذي يمكن أن تتحمله المادة ويسمى بحد المقاومة ، ويرمز إلى حد المقاومة بالرمز σ_u ، وفي حالة الشد يرمز له بالرمز σ_{up} ، وفي حالة الضغط يرمز له بالرمز σ_{uc} .

وعند وصول الإجهاد مقدار حد المقاومة يظهر على النموذج عادة تقلص يسمى بالرقبة ويبدأ بالتخصر (Necking) الشكل (b.11-2) وتقل مساحة مقطع النموذج في منطقة التخصر بسرعة ، ونتيجة لذلك تنخفض القوة والإجهاد الاصطلاحي ويحدث تمزق وانفصال عند اصغر مقطع من الرقبة .

كما ذكرنا أعلاه بان إشكال الرسوم البيانية في لكثير من أنواع الفولاذ ، وكذلك سبائك المواد الغير الحديدية لا تحتوي على مساحة أو منطقة الخضوع، كما هو مبين في الشكل (13-2) الرسم البياني المميز لحالات تشوه مثل هذه المواد .



الشكل (13-2)

ولدراسة التشوهات اللدنة (البلاستيكية) الكبيرة يجب معرفة الرسم البياني الحقيقي للشد ، الذي يعطى العلاقة بين التشوه الحقيقي والإجهاد الحقيقي والتي تحسب بتقسيم القوة الشادة على المساحة الحقيقية للمقطع العرضي للنموذج ، وبما أن المساحة الحقيقية العرضية اقل من المساحة الأولية ، فإن الرسم البياني للإجهاد الحقيقي يذهب أعلى من الرسم البياني للإجهاد الاصطلاحي وخاصة بعد ظهور الرقبة أي عندما يحدث التقليل الشديد لمقطع النموذج العرضي - المنحنى OCS الشكل (11-2) ، والذي يعتبر خاصية لما يسمى بالمواد اللدنة المطيلية (Ductility) أي المواد التي لها القابلية على تحمل التشوه الدائم الكبير (δ) أي المواد التي تتميز بانفعال شد كبير نسبيا دون أن تتحطم أو تنهار.

وتستخدم عادة طرق تقريبية لتمثيل الرسم البياني للإجهاد الحقيقي في الدراسات المفصلة لعلم مقاومة المواد .

وكلما كانت المادة أكثر لدونة كلما كانت قابليتها على تحمل الانفعال أكبر، ويعتبر النحاس، والالومنيوم، والنحاس الأصفر، والفولاذ منخفض الكربون من المواد اللدنة، ويعتبر البرونز، والديورالومنيوم مواد أقل لدونة وللمواد ضعيفة اللدونة ينتمي أكثر أنواع الفولاذ السبائكي.

وتعتبر صفة التقصف (الهشاشة) هي الصفة المعاكسة للدونة، أي قابلية المادة للانكسار عند الانفعالات الدائمة البسيطة، حيث أن مقدار التشوه الدائم عند الانفصال لمثل هذه المواد لا يزيد على % 2-5 ، وينتمي إلى المواد الهشة حديد الزهر، والفولاذ العالي الكربون، والخرسانة، والزجاج وغيرها من المواد.

أن تقسيم المواد في الواقع إلى المواد لدنة (مطيلية)، ومواد قصيفة (هشة) يعتبر اصطلاحياً، وذلك لأنه طبقاً لنوعية حالة الإجهاد وشروط الاختبار، فإن المواد اللدنة يمكنها أن تسلك مثل المواد القصيفة الهشة، والهشة مثل اللدنة. فمثلاً حديد الزهر في حالة الضغط من جميع الجهات، يسلك مثل المادة اللدنة، أي أنه لا يتحطم ولا ينهار حتى عند تشوهات كبيرة ، وبالعكس فإن نموذج الفولاذ المخدد ينكسر عند تشوه قليل نسبياً . ولهذا فإنه من الأصح الحديث عن الحالة اللدنة والحالة الهشة للمادة .

ويلاحظ عند شد المواد القصيفة (الهشة) عدة خواص من أهمها أن الابتعاد عن قانون هوك يبدأ مبكراً ، وأن الانفصال يبدأ فجأة عند تشوهات صغيرة جداً وبدون ظهور الرقبة ، وهذه الخاصية لجميع المواد الهشة . وأن الرسم البياني لهذه المواد يعطى إمكانية لتحديد خاصيتين هما حد المقاومة عند الشد σ_u ، والاستطالة النسبية الدائمة عند الانفصال .

وبالعودة إلى الرسم البياني المبين في الشكل (2-11) يمكن أن نلاحظ أنه إذا كانت الحمولة على النموذج لم تتجاوز حد المرونة وتم أزالته فان كل التشوهات تزول ، وعند إعادة تحميل النموذج فانه يسلك نفس سلوكه في الحالة الأولى .

أما إذا كان النموذج نفسه محملاً بإجهاد أكثر من حد المرونة ، مثلاً حتى الإجهاد الذي يناسب النقطة K من الرسم البياني المشار إليه أعلاه ، حيث يمثل خط إزالة الحمولة بالمستقيم KL ويكون موازياً إلى الخط OA . أي أن القسم المرن من التشوه (الخط LM) يزول ، أما القسم اللدن لنفس قسم التشوه (الخط OL) سيبقى .

إذا أعيد تحميل النموذج من جديد ، فان الرسم البياني يمر بالمستقيم LK حتى النقطة K نفسها . أن الاستطالة الدائمة عند الانفصال ستقاس بمقدار القسم LR ، أي أن لها مقدراً أقل من حالة التحميل الابتدائي بمرّة واحدة حتى الانفصال .

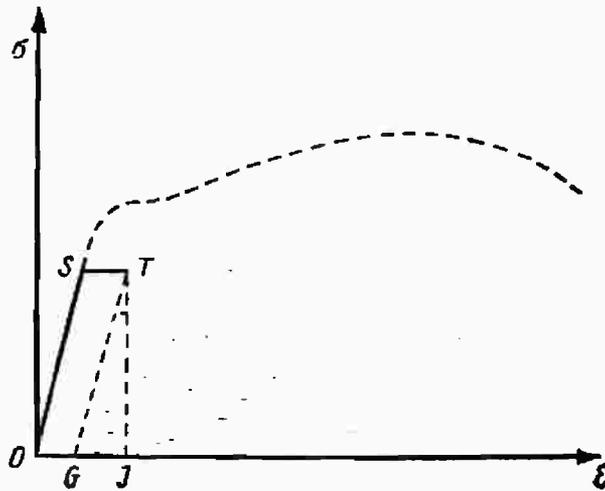
ومن هنا يتبين أن تكرار التحميل للنموذج المشدود المقدم أكثر من حد الخضوع حتى ظهور الإجهاد فيه ، يزداد حد التناسب إلى المقدار الذي وصلت إليه الاجهادات في التحميل السابق . وإذا كان بين إزالة الحمولة وتكرار الحمولة فترة توقف فان حد التناسب يزداد مرة أخرى .

كما وتجدر الإشارة إلى إن الرسم البياني LKEN الذي حصلنا عليه بواسطة تكرار التحميل لا يحتوي على مساحة الخضوع ، ولذا فان النموذج الذي اجتاز مرحلة إزالة التحميل وإعادته يعين له الحد الاصطلاحي للخضوع ($\sigma_{0,2}$) ومن البديهي أنه أعلى من حد الخضوع في حالة التحميل الأولى .

أن ظاهرة زيادة حد التناوب وتقليل لدونة المادة عند إجراء تكرار التحميل تسمى بالتصلد الانفعالي (Strain hardening) . وتعتبر عملية التصلد ظاهرة غير مرغوب فيها ، وذلك لان المعدن المصلد انفعاليا يصبح قصيفا وأكثر هشاشة . ولكن يكون التصلد الانفعالي بصورة عامة مفيداً في حالات كثيرة أخرى ويجري تحقيقه صناعياً ، مثل الأجزاء التي تقع تحت تأثير أحمال متغيرة بسرعة كبيرة ذو طابع ديناميكي ، حيث تصاحب تأثير تلك الأحمال اهتزازات في الإنشاءات وأجزائها المنفردة .

وقد أظهرت التجارب العديدة تأثير الزمن على الانفعال (التشوه) ، حيث تبين أن الانفعال نتيجة تأثير الحمولات لا يظهر فجأة بل بعد مرور فترة زمنية محددة .

ففي الشكل (14-2) إذا قمنا بإيقاف التحميل عند اجهادات مطابقة لنقطة S وتركنا النموذج لفترة زمنية معينة تحت تأثير الحمولة فان الانفعال سيزداد كما هو واضح من الشكل - الجزء ST - حيث يكون الازدياد في البداية سريعاً، وبعدها أكثر ببطأ. وعند إزالة الحمولة فان قسم الانفعال الذي يناظر القسم GJ يزول تقريباً على الفور إما القسم الآخر من الانفعال الذي يمثله القسم OG ، فلا يزول مباشرة وانما بعد مرور وقت معين .



الشكل (14-2)

أن ظاهرة تغير الانفعالات المرنة مع مرور الزمن تسمى بظاهرة " التأثير اللاحق المرن " ، وكلما كانت المادة أكثر تجانسا كان التأثير اللاحق المرن اقل ، وهو بالنسبة للمواد الصعبة الانصهار في درجات الحرارة العادية قليل ومن الممكن إهماله . بعكس المواد العضوية التي يكون فيها التأثير اللاحق المرن كبير ويجب أخذه في عين الاعتبار .

كما تلاحظ ظاهرة أخرى في كثير من المواد تحت تأثير الحمولات في ظروف درجات الحرارة العالية " هي الزيادة المستمرة للانفعالات الدائمة غير المرنة التي تنتهي بانهياب المادة في حالات معينة . وتسمى هذه الظاهرة بظاهرة الزحف (Creep) ، أن هذه الظاهرة تشاهد لبعض المواد في درجات الحرارة العادية كما في الخرسانة (Concrete) ، والمعادن ذات درجة الانصهار المنخفضة .

كما توجد ظاهرة أخرى متصلة اتصالاً وثيقاً مع ظاهرة الزحف ، حيث يتحول فيها انفعال الجسم المرن بمرور الزمن إلى انفعال لدن ، تكون نتيجته تغير الاجهادات المؤثرة مع الحفاظ على مقدار الانفعال الكامل . أن هذه مثل الظاهرة تسمى " بالارتخاء " أو باسترخاء الاجهادات (Relaxation of Stresses) ، وفي كثير من الحالات ونتيجة للارتخاء فان المفاصل التي تكون منجزة بصورة متوترة في ظروف درجات الحرارة العالية بمرور الزمن تصبح ضعيفة .

وكما هو معروف أن خواص المواد تتأثر بشدة درجة الحرارة كما أظهرت الكثير من التجارب ، حيث أن مقدار حد الخضوع σ_y وحد التناسب σ_p للفولاذ المنخفض الكربون يقلان بزيادة درجة الحرارة .

وفي درجة حرارة 400 مئوية فإن حد الخضوع يشكل 60-70 من قيمته عند درجة حرارة الغرفة . وبارتفاع درجة الحرارة فإن طول منطقة الخضوع يقل وعند درجة حرارة معينة فإن منطقة الخضوع تختفي نهائياً .

أن الرسم البياني لمنحنى الإجهاد - والانفعال البين في الشكل (11-2) يستعمل كما اشرنا سابقاً لوصف العديد من الخصائص الميكانيكية للمادة ومقاومتها تحت تأثير الحمولات ، وسنقوم بذكر أهم هذه الخواص كملخص لما سبق وهي :

حد التناسب (Proportional Limit)

يطلق على البعد العمودي للنقطة A حد التناسب، وهو إجهاد (σ_p) الذي تبدأ عنده المادة في التحول من المنطقة المرنة إلى المنطقة اللدنة ويحدد بخط مستقيم من المنحنى، أي أن إجهاد يكون دالة خطية للانفعال ، ويعتبر هذا الإجهاد الأكبر لكل الاجهادات الأخرى .

إجهاد حد المرونة (Maximum Elastic Stress)

وهو أقصى حد يمكن أن تتحمله المادة مع عدم بقاء أي استطالة لدنة دائمة بعد إزالة هذا الإجهاد ، أي أن المادة تحتفظ بخواصها المرنة وتعود إلى شكلها وأبعادها الأولية بعد رفع الحمولة عنها ، بحيث يكون إجهاد حد المرونة (σ_e) وإجهاد حد التناسب (σ_p) متقاربين تقريباً ويستعمل أحياناً أي من التعبيرين بدلاً من الآخر . وعند التمييز بين إجهاد حد المرونة وإجهاد حد التناسب في بعض الحالات فإن حد المرونة غالباً يكون أكبر من حد التناسب ، وكما هو مبين في الشكل (11-2) فإن إجهاد حد المرونة هو البعد الرأسي الذي يتطابق مع النقطة A تقريباً .

نقطة الخضوع (Yield Point)

عند تجاوز المادة نقطة حد المرونة فإن الاستطالة تصبح دائمية أي أن المادة لا تعود على أبعادها الأصلية بعد زوال الحمولة عنها وتسمى هذه الحالة بالانفعال اللدن ، وتعرف النقطة C بنقطة الخضوع .
وأن الإجهاد الذي يحدث عنده زيادة في الانفعال بدون زيادة في الإجهاد يسمى بنقطة الخضوع ويرمز له (σ_y) وهي البعد الرأسي للنقطة C . وان القسم الأفقي CD من الرسم البياني المبين في الشكل (2-11) يسمى بمساحة الخضوع .

المقاومة القصوى للشد (Tensile Ultimate Strength)

هو الإجهاد الاصطلاحي الأقصى (σ_{up}) الذي يمكن أن تتحمله المادة عند الشد ، وهو البعد الرأسي للنقطة E ، ويطلق عليه أما المقاومة القصوى أو مقاومة الشد للمادة .

معايير الرجوعية (Modulus of Resilience)

يعرف الشغل المبذول على وحدة الحجم من المادة ، عندما تبدأ بالازدياد قوة شد من الصفر إلى القيمة التي تؤدي بالوصول إلى حد التناسب بمعامل الرجوعية . ويمكننا حسابها بالمساحة تحت منحنى الإجهاد والانفعال من نقطة الواصل إلى حد التناسب ، ووحدات هذه الكمية هي Nmm^{-3} . وبناء على هذا فإن رجوعية المادة هي قدرتها على امتصاص الطاقة في المنطقة المرنة .

معاير المتانة (Modulus of Toughness)

يطلق على الشغل المبذول على وحدة الحجم من المادة عندما تزداد قوة شد من الصفر إلى القيمة التي تسبب الكسر معاير المتانة. ويمكن حسابه بالمساحة الكلية تحت المنحنى البياني للإجهاد والانفعال من نقطة الأصل حتى الكسر. وبمعنى آخر متانة المادة هي قدرتها على امتصاص الطاقة في المنطقة اللدنة للمادة .

النسبة المئوية للاستطالة

النسبة المئوية للاستطالة هي الزيادة في الطول عند الكسر مقسوماً على الطول الابتدائي ومضروباً في 100 ، وتعتبر النسبة المئوية للاستطالة مقياساً لمطولية المادة (Ductility) .

التصلد الانفعالي (Strain Hardening)

يقال لمادة لدنة مطلية أنها تصلدت انفعالياً إذا كان بالإمكان إجهادها بدرجة كبيرة بعد نقطة الخضوع بدون انهيار .

أجهاد التشغيل (Working Stress)

وهو الإجهاد الذي يحدد عن طريق قسمة أما أجهاد الخضوع أو الإجهاد الأقصى على عدد يسمى بمعامل الأمان (Factor of Safety) ، الذي يستخدم لأجل أمانة وسلامة عمل الإنشاءة وأجزائها ، ويعتمد اختياره عادة على تقدير المصمم والتجربة الموجودة في استعمال الإنشاءات المختلفة .

ويستعمل عادة حد الخضوع بدلاً من الإجهاد الحدي بالنسبة للمواد اللدنة ،
ويستعمل حد المقاومة بدلاً من الإجهاد الحدي بالنسبة للمواد الهشة .

معامل التمدد الخطي

يعرف معامل التمدد الخطي على أنه التغير في الطول لكل وحدة أطوال
من قضيب مستقيم معرض لتغير في درجة الحرارة مقدارها درجة واحدة
بمقياس كلفن ، حيث تعتمد قيمة هذا المعامل على مقياس الحرارة المستعمل .

النسبة المئوية للنقص في مساحة المقطع المستعرض

تعرف النسبة المئوية للنقص في مساحة المقطع على أنها النقص في
مساحة المقطع المستعرض من المساحة الأصلية حتى الكسر مقسوم على
المساحة الأصلية ومضروباً في 100 . ومن الملاحظ إن مساحة المقطع
المستعرض تتناقص عند التأثير بقوة شد على قضيب ما ، ولكن في العادة
الإجهاد العمودي يحسب على أساس المساحة الأصلية . كما يبين الرسم البياني
لمنحنى الإجهاد والانفعال في الشكل (2-11) . وكلما زاد الانفعال بدرجة
كبيرة كلما زادت الأهمية في اعتبار القيم الفورية لمساحة المقطع المستعرض
وبذلك نحصل على ما يسمى المنحنى الحقيقي للإجهاد - الانفعال
(منحنى OCS ، الشكل 2-11) .

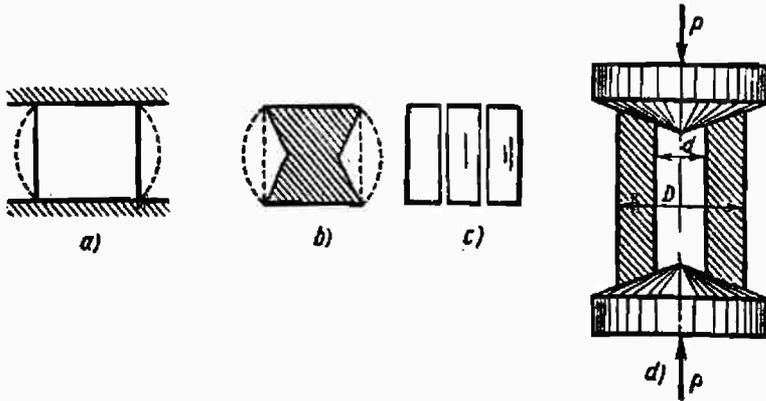
مقاومة الكسر (Breaking Strength)

تعرف مقاومة الكسر على أنها البعد الرأسي (N) للمادة كما هو مبين في
الشكل (2-11) .

6.2 اختبارات الانضغاط (Compression Test)

اختبارات الانضغاط تستخدم عادة لاختبار المواد القصيفة (الهشة) كالخرسانة والحديد الزهر وغيرها . وتكون عينات الاختبار نماذج على شكل مكعبات أو أسطوانات قصيرة ذات ارتفاع $h \geq 3d$ ، لان نماذج الاختبار الطويلة يمكن أن تنحني تحت تأثير الحمولات الضاغطة . كما إن استخدام نماذج قصيرة جداً أيضاً يعتبر أمر غير مرغوب فيه ، وذلك لان النموذج في هذه الحالة يأخذ شكل برميل بسبب قوى الاحتكاك المتنامية في طرفي النموذج والتي تعمل على تعرقل توسعه الشكل (2-15, a) .

ومن المفروض عند ضغط العينة بين السطحين المستويين لجهاز الاختبار أن تكون قوة الانضغاط موزعة بانتظام على مساحة مقطع العينة ، حيث تتعلق نتائج الاختبار بمقدار قوى الاحتكاك المتنامية على طرفي العينة ، إلا إن التوزيع الفعلي في الواقع للجهدات يكون أكثر تعقيداً حتى ولو كان التلامس بين أسطح جهاز الاختبار تاماً وكانت الحمولة مسلطة بشكل مركزي . وبسبب وجود الاحتكاك عند أسطح التلامس بين النموذج ورأسي جهاز الاختبار لا يحدث التمدد الجانبي عند هذه الأسطح وتكون المادة في هاتين المنطقتين في حالة أفضل من ناحية الإجهاد .



الشكل (2-15)

ونتيجة لذلك يكون شكل انهيار العينة هو انهيار العينة من الجوانب وعدم تأثر مادة العينة الملامسة لأسطح طرفي الجهاز الشكل (b, 15-2) .

ويمكن تقليل تأثير قوى الاحتكاك عند أسطح التلامس وذلك للحصول على مقاومة الانضغاط الحقيقية لمادة معينة كالخرسانة مثلاً عن طريق تغطية هذه الأسطح بمادة " البرافين " . وقد أظهرت التجارب أن استخدام هذه الطريقة في الاختبار أدى إلى انخفاض كبير في المقاومة القصوى للخرسانة ، بالإضافة إلى أن شكل الانهيار للعينة كان مختلفاً تماماً حيث انهارت عينات مكعبة بالانقسام إلى صفائح موازية لأحد الجوانب الشكل (c, 15-2) .

وقد قامت العديد من مراكز الأبحاث بتطوير طرق مختلفة للحصول على حالة انضغاط منتظمة على عينات أسطوانية ذات أسطح مخروطية ، لها زاوية تساوي زاوية الاحتكاك كما هو مبين في الشكل (d, 15-2) ، مما يؤدي إلى تقليل قوى الاحتكاك وبالتالي الحصول على حالة انضغاط منتظم .

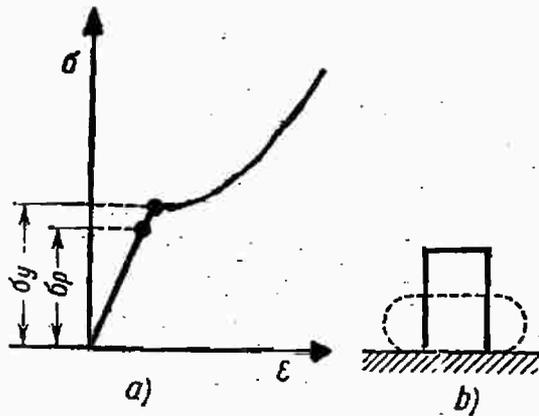
وتظهر اختبارات الانضغاط لمادة قصيفة (هشة) أن مخطط الرسم البياني لانضغاط هذه المادة مشابه للرسم البياني لشدة تلك المادة ، وان الانهيار يحدث عند انفعالات بسيطة ، ويكون حد المقاومة عند الانضغاط σ_{uc} للمواد القصيفة أكبر بكثير من حد المقاومة عند الشد σ_{ut} .

أن الشكل (a, 16-2) يبين الرسم البياني لانضغاط مادة لدنة كالفولاذ منخفض الكربون مثلاً ، حيث يلاحظ في البداية أن الرسم البياني للانضغاط مشابهاً للرسم البياني للشد ، ولكن بعد ذلك يرتفع المنحنى إلى أعلى بسبب توسع مساحة المقطع للنموذج وتصلب المادة . وفي هذه الحالة عادة لا يحدث انهيار بل يحدث تمدد للنموذج فقط كما يبين الشكل (b, 16-2) وهنا يجب إيقاف التجربة .

أن حد الخضوع في حالة الشد والانضغاط للمواد اللدنة لا يختلف عملياً ولكن منطقة الخضوع في حالة الانضغاط اصغر بكثير منها في حالة الشد .

وقد أظهرت اختبارات الانضغاط للمواد الهشة أيضاً كالخرسانة والحديد الزهر أن لهذه المواد حد تناسب منخفض جداً ، وأنه بعد حد التناسب يبدأ التشوه بالازدياد بسرعة أكبر نسبة إلى الحمولة ، أما بالنسبة لاختبارات الانضغاط للمواد اللدنة فإن شكل الرسم البياني لمخطط الإجهاد والانفعال يعتمد على أبعاد العينة بشكل كبير حيث أنه كلما قل البعد باتجاه الانضغاط ازداد تأثير قوى الاحتكاك .

ونادراً ما يحدث انهيار في المواد اللدنة كالنحاس مثلاً أثناء اختبار الانضغاط إذ يصاحب الانضغاط عادةً تمدد جانبي بحيث تأخذ الاسطوانة المضغوطة في النهاية شكل قرص مسطح .



الشكل (16-2)

7.2 معاملات الأمان والاجهادات المسموح بها (Coefficients of Safety and Working Stress)

أشرنا سابقاً إلى أن مختلف الإنشاءات يجب أن تتمتع بقدر كافي من المتانة والصلادة وغيرها من المعطيات التي تساعد على تحمل الكثير من الحمولات عند الاستخدام العملي لها. أن الحمولات الحقيقية التي تؤثر على أجزاء منشئ ما ، وكذلك خواص المواد التي تصنع منها تلك الأجزاء يمكن أن تختلف كثيراً عن تلك التي تستعمل عند التصميم والحسابات .

أن السبب في ذلك يعود إلى وجود عدة عوامل تعمل على تقليل متانة الأجزاء منها عدم تجانس المواد ، وتجاوز الحمولات وغيرها ، وكل هذه العوامل تحمل بصورة عامة طابعاً عفويماً لا يمكن أخذها في الحسبان مقدماً. ولأن أجزاء الإنشاءات المختلفة يجب أن تعمل بأمان حتى في ظل تأثير هذه العوامل والظروف لذلك يجب اتخاذ بعض الاجراءات الوقائية اللازمة لنفاذي هذه العوامل العفوية .

وكما أشرنا سابقاً أن مخطط الإجهاد - والانفعال لأية مادة يعطي معلومات ثمينة عن الخواص الميكانيكية لتلك المادة . فعند معرفة المقاومة النهائية ، ونقطة الخضوع ، وحد التناسب يكون بالإمكان تحديد قيمة الإجهاد الذي يمكننا اعتباره مأموناً حسب نوع وظروف المسألة الهندسية ، وهذا ما يسمى عادة بالإجهاد المسموح به أو أجهاد الاشتغال (Working Stress) .

أن الأجهادات المسموح بها (اجهادات الاشتغال) تؤخذ اقل من تلك الأجهادات الحدية ، التي لا يمكن معها استمرار الاستعمال العادي للإنشاءات وعلى هذا الأساس تستخدم العلاقة التالية :

$$\sigma_w = \frac{\sigma_{lim}}{n} \dots \dots \dots (8 - 2)$$

حيث أن :

n - معامل الأمان أو ما يسمى أحيانا بمعامل احتياطي المتانة .

σ_{lim} - الإجهاد الحدي للمادة .

σ_w - إجهاد الاشتغال أو الإجهاد المسموح به .

بالنسبة للمواد اللدنة يستخدم إجهاد حد الخضوع σ_y (Yield Stress) بدلا من الأجهاد الحدي وذلك لأن تشوهات لدنة كبيرة غير مسموح بها تظهر عادة عند الأجهادات التي تساوي إجهاد حد الخضوع ، إما بالنسبة للمواد القصيفة (الهشة) كالحديد الزهر ، والخرسانة ، والخشب فيستخدم حد المقاومة القصوى بدلا من الأجهاد الحدي كأساس لتحديد اجهادات الاشتغال .

وبناء على ذلك فإن معامل الأمان يستخدم لأجل أمانة وسلامة عمل الإنشاءات المختلفة وأجزائها بغض النظر عن أمكانية الانحرافات الغير ملائمة لظروف عملها الحقيقية . وكما أشرنا سابقاً فإن قيمة معامل الأمان (Factor of Safety) تعتمد بصورة رئيسية على مدى الدقة في تحديد الحمولات الخارجية ، ومدى الدقة في حساب الأجهادات ، وعلى مدى تجانس المواد المستخدمة .

أن تحديد معامل الأمان ، واجهادات الاشتغال وفق ما ذكر أعلاه وذلك بناء على أساس إجهاد معين كالمقاومة القصوى للحديد الزهر ، أو نقطة الخضوع في الفولاذ مثلاً قد يعطي في بعض الأحيان صورة فيها بعض الخطورة والخطأ لذلك فقد قسم معامل الأمان (n) في الوقت الحاضر إلى عدة معاملات أمان خاصة ، حيث يعكس كل من هذه المعاملات تأثير معامل معين أو مجموعة من المعاملات على متانة جزء من أجزاء المنشئ .

فمثلاً أحد هذه المعاملات يعكس انحراف مقادير الحمولات المؤثرة عن قيمها الحسابية ، والآخر يعكس أمكانية انحراف خواص المادة المستخدمة عن الخواص المستعملة في الحسابات ، أن هذا التقسيم لمعاملات الأمان يساعد كثيراً على

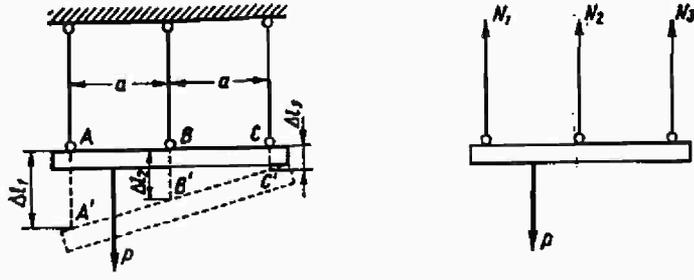
مراعاة الشروط والظروف الهندسية المختلفة لعمل أجزاء الإنشاءات والمكانن والآلات بصورة أفضل وتصميمها بطرق أكثر أماناً واقتصاداً .

أن قيم معاملات الأمان تستعمل عادة على أساس التجربة الموجودة في استعمال الإنشاءات والآلات والمكانن المختلفة من نوع واحد ، حيث يستخدم في بعض الأحيان معامل أمان واحد أو ثلاثة أو خمسة أو حتى عشرة معاملات أمان خاصة ، فعند حساب الإنشاءات الخرسانية مثلاً تستعمل ثلاثة معاملات هي معامل تجاوز الحمولة ، معامل التجانس ، ومعامل حالة الخدمة. وأن قيم هذه المعاملات تعطى حسب ظروف وقواعد تصميم الإنشاءات الخرسانية ، ويمكن الرجوع إلى جداول ومنشورات خاصة لإيجاد معاملات الأمان المختلفة .

8.2 المسائل غير المحددة استاتيكيًا في حالة الشد والضغط

في كثير من مجموعات وأنظمة القوى وبذات في المجموعات التي تشكلها القضبان المنفردة ، لا يمكن تحديد القوى في القضبان بواسطة معادلات وشروط الاتزان الاستاتيكي الثلاث فقط لأن عدد القوى المجهولة يكون أكبر من عدد معادلات الاتزان . وفي هذه الحالة فإن هذا المجموعات والأنظمة تعتبر غير محددة استاتيكيًا (Statically Indeterminate) .

وبصورة عامة إذا احتوى هيكل منشي ما على عوامل تثبيت تزيد عما هو ضروري لثباته ، أي إذا احتوى على عوامل تثبيت زائدة فسيكون غير محدد استاتيكيًا ، وكمثال على ذلك نقوم بدراسة المجموعة أو النظام المبين في الشكل (2-17) ، وذلك لتحديد القوى المجهولة في القضبان الثلاث ، حيث نقوم أولاً برسم مخطط الجسم الحر للمجموعة باستخدام طريقة القطع التي درسناها في البنود السابقة ، وبذلك نحصل على ثلاثة قوى مجهولة هي N_1 , N_2 , N_3 كما هو واضح من الرسم البياني في الشكل (2-17) .



الشكل (2-17)

وباستخدام معادلات الاتزان يمكننا وضع معادلتين فقط وهي مجموع مساقط جميع القوى على المحور الرأسي التي تؤثر على القسم المقطوع ، ويجب أن تساوي الصفر ، ومجموع عزوم هذه القوى حول أي نقطة اختيارية ، يجب أن يساوي كذلك الصفر ، ومن هاتين المعادلتين لا يمكننا تحديد ثلاث قوى مجهولة ، لذلك يجب وضع معادلة إضافية توضح حالة تشوه أجزاء المجموعة المشتركة .

ولوضع هذه المعادلة الإضافية أي معادلة التشوهات (التشكلات) المشتركة ، نتصور أن المجموعة في حالة تشوه وبعد ذلك نثبت العلاقة مباشرة من الرسم بين تشوهات الأقسام (القضبان) المختلفة بعد تسليط الحمولة عليها ، حيث نلاحظ من الرسم بأن العارضة AC والتي نعتبرها مطلقة الصلابة تأخذ وضع جديد A'C' والمبين بمستقيم منقطع .

ويمكننا من الرسم أن نستنتج أن :

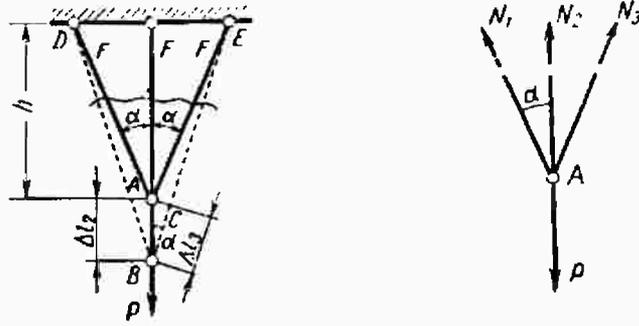
$$BB' = \Delta L_2 = \frac{\Delta L_1 + \Delta L_3}{2}$$

وبعد ذلك نعبر عن الاستطالة بالقوة وبصلابة القضيب حسب الصيغة (2-5) في البند (2-4) من هذا الباب ، وبذلك نحصل على المعادلة الثالثة وبعدها نستطيع أن نجد المجاهيل الثلاث N_1 , N_2 , N_3 .

أن هذه الطريقة في الحل تسمى بطريقة التحليل المرن (Deformation method of analysis) ، حيث تعتمد هذه الطريقة على التشوهات (التشكلات) في المجموعة أو النظام . وبناءً على هذه الطريقة في تحليل نظام قوى غير محدد أستاتيكيًا فإنه يتم أولاً كتابة معادلات الاتزان الاستاتيكي الثلاث التي تخص النظام ، وبعد ذلك يتم تكملة هذه المعادلات بمعادلات إضافية تعتمد على التشوهات في أجزاء المنشأ ، حيث يجب كتابة عدد كافي من المعادلات التي تشمل التشوهات بحيث يكون العدد الكلي للمعادلات من شروط الاتزان الاستاتيكي الموجودة والتشوهات مساوياً لعدد القوى المجهولة المراد إيجادها وان حلول الأمثلة التالية سوف يوضح لنا كيفية استخدام هذه الطريقة في تحليل المجموعات والأنظمة الغير محددة أستاتيكيًا .

مثال (7-2)

حدد القوى المحورية الناشئة في قضبان الهيكل غير المحدد أستايتيكياً والمتصل اتصالاً مفصلياً كما هو مبين في الشكل (18-2) ، بفعل تأثير الحمولة الرأسية P . إذا علمت أن معاملات المرونة ومساحة المقاطع لجميع قضبان الهيكل متساوية .



الشكل (18-2)

الحل :

باستخدام طريقة القطع للمفصل A ، نقوم برسم مخطط الجسم الحر (F.B.D) ، وذلك لتحديد القوى المجهولة N_1, N_2, N_3 كما هو مبين في الشكل (18-2) ، حيث تتقاطع مجموعة القوى في نقطة واحدة ، وبوضع شروط الاتزان الأستايتيكي ، فأننا نحصل على معادلتين فقط ، وبذلك فإن المسألة غير محددة أستايتيكياً مرة واحدة وذلك لأن عدد المجاهيل تزيد عن عدد المعادلات بمجهول واحد . ولتحديد هذه القوى نبحث أولاً توازن مفصل A حيث :

$$\Sigma F_X^{\rightarrow+} = 0 ;$$

$$- N_1 \sin \alpha + N_3 \sin \alpha = 0 \dots\dots\dots (1)$$

ومنه :

$$\Sigma F_y \uparrow = 0 ;$$

$$N_1 \cos \alpha + N_3 \cos \alpha + N_2 - P = 0 \dots\dots\dots(2)$$

وبالتعويض عن $N_1 = N_3$ من المعادلة الأولى في المعادلة الثانية نحصل

على :

$$2N_1 \cos \alpha + N_2 - P = 0$$

ولوضع المعادلة الثالثة اللازمة يجب علينا أن نبحث تشوهات (تشكلات) قضبان الهيكل تحت تأثير الحمولة P . ونتيجة لتأثير الحمولة P فإن قضبان الهيكل تأخذ الأوضاع المبينة بالخطوط المنقطعة الشكل (2-18) حيث أن النقطة A تنزاح إلى النقطة B ، وأن القسم AB يوضح لنا الاستطالة ΔL_2 للقضيب الأوسط، والقسم BC يوضح استطالة القضيب ΔL_3 .

حيث يمكن الحصول على هذا القسم إذا قمنا من النقطة E وبمساعدة فرجال بنقل طول قضيب الأيمن ووضعه على الخط BA ، ونظراً لقلّة التشوهات فإن AC يمكن استبداله بالمستقيم AC الذي هو عبارة عن مساقط من النقطة A على الاتجاه BE ، ومن المثلث ABC نحصل على :

$$\Delta L_3 = \Delta L_2 \cos \alpha$$

ولأن هذه القضبان معرضة إلى حمولة محورية فإن الاستطالات (ΔL_i) تعطى حسب الصيغة (2-5) أي العلاقة $\Delta L = \Delta L / AE$ ، أي بالتعويض عن التشوه بالقوى وصلابة القضبان حسب قانون هوك وبذلك نحصل على :

$$\frac{N_3 L_3}{EA} = \frac{N_2 L_2}{EA} \cos \alpha$$

وبما أن :

$$L_2 = h \quad , \quad h_3 = L_1 = \frac{h}{\cos \alpha}$$

وبأخذ ذلك بالاعتبار وبالتعويض نحصل على :

$$\frac{N_3 h}{EA \cos \alpha} = \frac{N_2 h}{EA} \cdot \cos \alpha$$

نجد أن :

$$N_3 = N_1 = N_2 \cos^2 \alpha$$

وبتعويض هذه الصيغة في معادلة الاتزان الثانية :

$$2N_1 \cos \alpha + N_2 - P = 0$$

نجد أن :

$$2N_2 \cos^2 \alpha \cdot \cos \alpha + N_2 = P$$

ومنه :

$$N_2 (2 \cos^3 \alpha + 1) = P$$

وإن :

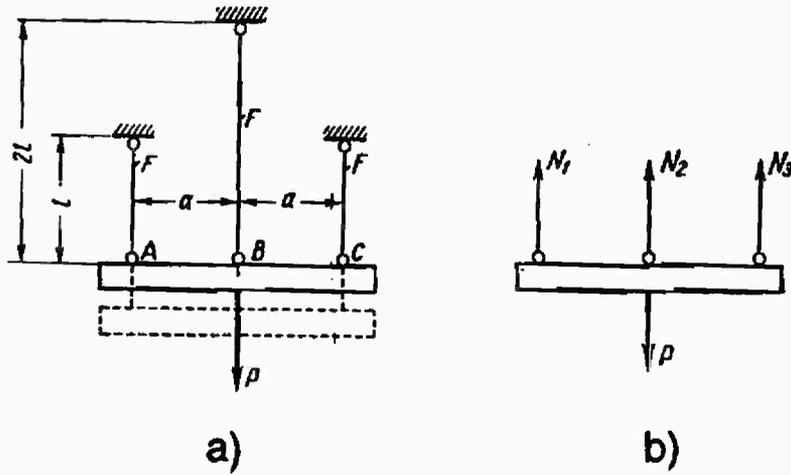
$$N_2 = \frac{P}{2 \cos^3 \alpha + 1}$$

$$N_1 = N_3 = \frac{P \cos^2 \alpha}{2 \cos^3 \alpha + 1}$$

وهكذا حصلنا على قيم القوى المحورية في قضبان الهيكل ، حيث يلاحظ أن أكبر قوة ستكون في القضيب الأوسط ، وإن متانة القضيب هي التي يحدد الحمل المسموح به (حمل الاشتغال) بالنسبة للهيكل .

مثال (2-8)

حدد الحمل المسموح به (حمل الاشتغال) لهيكل مكون من مجموعة من القضبان الفولاذية المبينة في الشكل (2-19) . مع اعتبار العارضة AC جاسئة تماماً أي مطلقة الصلابة ، والإجهاد المسموح به هو σ_{lim} .



الشكل (2-19)

الحل :

ونقوم أولاً برسم مخطط الجسم الحر للمجموعة باستخدام طريقة المقاطع ، ومن ثم نضع معادلات الاتزان للعارضة التي تؤثر عليها مجموعة القوى المتوازية للعارضة التي تؤثر عليها مجموعة القوى المتوازية كما هو مبين في الشكل (2-19.b) حيث :

$$\Sigma F_y \uparrow^+ = 0 ;$$

$$N_1 + N_2 + N_3 - P = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$\Sigma M_B \uparrow^+ = 0 ;$$

$$- N_1(a) + N_3(a) = 0$$

ومنه :

$$N_1 = N_3$$

وهكذا بوضع شروط الاتزان الثلاث نستطيع الحصول على معادلتين فقط وبذلك فإن المسألة غير محددة استاتيكيًا مرة واحدة وذلك لأن عدد المجاهيل تزيد عن معادلات الاتزان بمجهول واحد .

ولوضع معادلة التشوه (التشكل) ، فإننا نفرض أن المجموعة في حالة تشوه ، وبما أن المجموعة متناسقة فإن العارضة AC تنزل وتزاح إلى أسفل وتكون موازية للوضع الأصلي الأول ، وبهذا تكون الاستطالة في كل القضبان متساوية

$$\Delta L_1 = \Delta L_2 = \Delta L_3$$

وبواسطة قانون هوك أي باستخدام الصيغة (2-5) أي التعويض عن التشوه بالقوى وصلابة القضبان نحصل على :

$$\frac{N_1 L}{EA} = \frac{N_2 2 L}{EA}$$

ومن هذه العلاقة نجد أن :

$$N_2 = \frac{N_1}{2}$$

وبالتعويض عن قيم N_2, N_3 في المعادلة الأولى :

$$N_1 + N_2 + N_3 - P = 0$$

نحصل على :

$$N_1 + \frac{N_1}{2} + \frac{N_1}{2} - P = 0$$

ومنه :

$$N_1 = N_3 = 0.4P \quad , \quad N_2 = 0.2P$$

وهكذا حصلنا على قيم القوى في القضبان الثلاث ومن المعادلة الأولى
نحصل على الحمل المسموح به حيث :

$$P' = 2.5N_1 = 2.5N_3$$

ومن المعادلة الثانية نحصل على :

$$P'' = 5N_2$$

حيث أن P', P'' هي القيم المسموح بها ل P ، ونحصل عليها بعض
التعويض بقيم القوى الطولية المسموح بها :

$$N_{1(\text{lim})} = N_{2(\text{lim})} = N_{3(\text{lim})} = A \cdot \sigma_{(\text{lim})}$$

ولذلك نحصل على :

$$P' = 2.5\sigma_{\text{lim}} \cdot A \quad , \quad P'' = 5\sigma_{\text{lim}} \cdot A$$

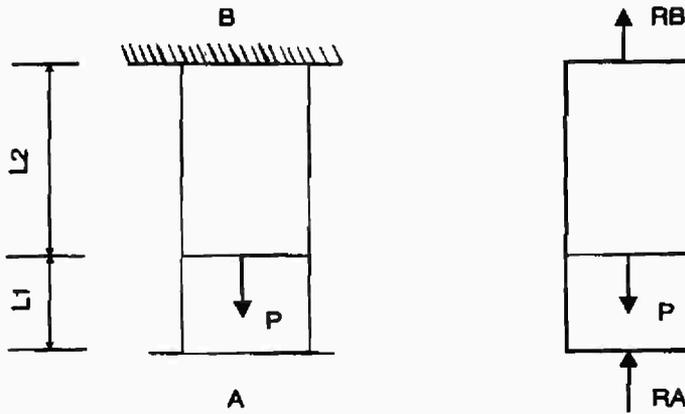
ومن الطبيعي فإن P كقيمة مسموح بها ، أي كحمل اشتغال تكون القيمة الأقل من بين تلك القيمتين وهي :

$$P' = 2.5 \sigma_{lim} . A$$

أي أن الحمل المسموح به بواسطة متانة القضبان الفرضية في هذا المثال.

مثال (9-2)

الشكل (15-2.a) يبين قضيب له مقطع مستعرض ثابت ، ومثبت بجساءة من نهايته السفلى والعليا عند A , B بين حائطين ، إذا أثر عليه حمولة محورية مقدارها P على مسافة L_1 من نهايته السفلى . أوجد ردود الأفعال الناتجة من الحائطين على القضيب .



الشكل (15-2)

الحل :

نقوم أولاً برسم مخطط للجسم الحر (F.B.D) للقضيب مبيناً على الحمولة المؤثرة P وردود الأفعال الناتجة عند نهايته المثبتة على القضيب

نرمز إلى ردود الأفعال بالرمز R_A ، R_B كما هو مبين في الشكل (15-2.b) .

وبوضع شروط الاتزان الأستاتيكي نستطيع الحصول على معادلة واحدة فقط حيث :

$$\Sigma F_y \uparrow^+ = 0;$$
$$R_A - P + R_B = 0$$

أن معادلة الاتزان الوحيدة التي حصلنا عليها تحتوي على مجهولين هما (R_B , R_A) لذلك فإن المسألة غير محددة إستاتيكيًا مرة واحدة . وبالتالي فإنه يجب الحصول على معادلة أخرى مبنية على التشوهات (التشكلات) التي تحدث للقضيب وأضافتها إلى معادلة الاتزان ، وبعد ذلك نحصل على ردود الأفعال المطلوب إيجادها .

أن النقص في الجزء الذي طوله L_1 من القضيب يساوي الاستطالة في الجزء والمنطقة L_2 . يضع أساس المعادلة الخاصة بالتشوهات التي نريد الحصول عليها .

أن القوة المحورية التي تؤثر على الجزء الأسفل من القضيب هي R_A ، وعلى المنطقة العليا هي R_B ، وأن المعادلة التي تربط التشوهات ببعضها تصبح :

$$\frac{R_A L_1}{EA} = \frac{R_B L_2}{EA}$$

حيث أن E ترمز إلى معايير المرونة و A ترمز إلى مساحة المقطع المستعرض . ومن هذه المعادلة نجد أن :

$$R_A L_1 = R_B L_2$$

$$R_A = \frac{R_B \cdot L_2}{L_1}$$

وبالتعويض عن ذلك وبحل هذه المعادلة مع معادلة الأتزان الأستاتيكي نجد
أن :

$$R_A = \frac{P L_2}{L_1 + L_2}$$

$$R_B = \frac{P L_1}{L_1 + L_2}$$

وبمعرفة ردود الأفعال ، تكون قيمة الاستطالة في الجزء الأعلى من
القضيب (L_2) تساوي :

$$\Delta_{L_2} = \frac{R_B L_2}{AE} = \frac{P L_1 \cdot L_2}{(L_1 + L_2) EA}$$

والنقص في الطول في الجزء السفلي (L_1) من القضيب هو :

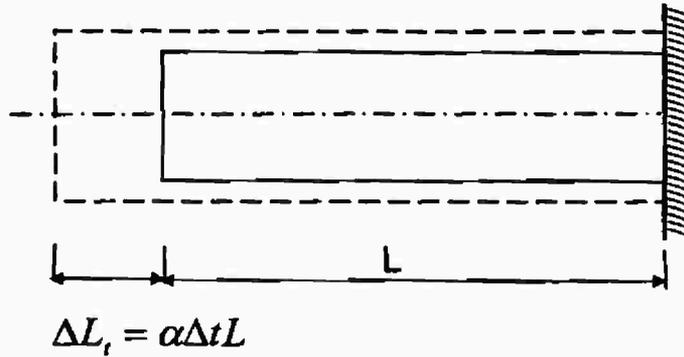
$$\begin{aligned} \Delta_{L_1} &= \frac{R_A L_1}{AE} \\ &= \frac{P L_1 L_2}{(L_1 + L_2) EA} \end{aligned}$$

وبالتالي فإن :

$$\Delta_{L_2} = \Delta_{L_1}$$

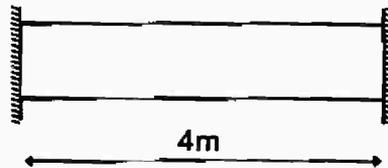
9.2 الأجهادات الحرارية والضبط المناسب للقوى في المنشآت .

كما هو معروف أن التغيير في درجات الحرارة يؤدي إلى ظهور أجهادات حرارية في المنشآت المختلفة ، والتي تؤدي بدورها إلى زيادة في الأجهادات الداخلية مثل القوى المؤثرة . لذلك يجب أخذ هذه الأجهادات الحرارية بعين الاعتبار عند التصميم . ولدراسة تأثير التغيير في درجات الحرارة نقوم بدراسة مجموعتين ، المجموعة الأولى محددة أستانيكياً ومبينة في الشكل (16-2) .



الشكل (16-2)

والمجموعة الثانية غير محددة أستانيكياً ومبينة في الشكل (17-2) .



الشكل (17-2)

عند رفع درجة الحرارة أي تسخين المجموعة الأولى المثبتة من نهاية واحدة بمقدار Δt ، فإن الأبعاد الطولية والعرضية تزداد كما يبين الشكل (16-2) . أن زيادة الطول ΔL_1 تعطى حسب العلاقة التالية :

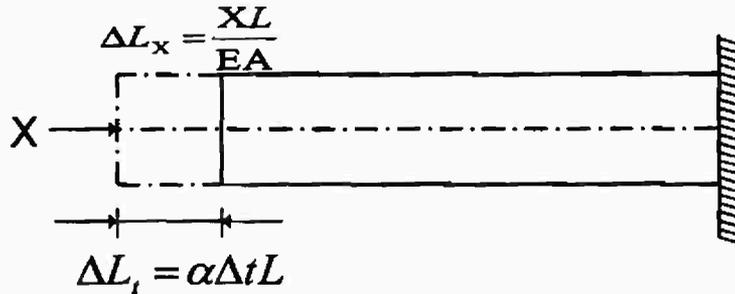
$$\Delta L_1 = \alpha \cdot \Delta t \cdot L$$

حيث أن :

α : معامل التمدد الطولي .

وبما أنه لا توجد أية عوائق أمام استطالة المجموعة (القضيب) ، لذا فلا تظهر فيه أية قوى داخلية .

أما عند تسخين المجموعة الثانية المثبتة من نهايتها بمقدار Δt فنظهر فيها قوى داخلية ضاغطة ، وذلك لأن النهاية المثبتة الثانية تعرقل استطالة المجموعة (القضيب) كما هو مبين في الشكل (18-2) .



الشكل (18-2)

وبشكل عام أتبعنا قاعدة عند تصميم المنشآت المختلفة هي :
 1- في المجموعات المحددة أستاينيكياً تظهر الانفعالات (التشكلات) بسبب الاختلاف في درجات الحرارة بدون وجود قوى داخلية .

2- إن اختلاف درجات الحرارة في المجموعات غير المحددة أستانتيكياً يصاحبه دائما ظهور قوى داخلية . ولتحديد هذه القوى تستخدم طريقة عادية لحساب المجموعات غير المحددة أستانتيكياً وهذه الطريقة تتضمن الآتي :

" إهمال إحدى النهايات المثبتة ولتكن مثلا النهاية اليسرى وعندئذ يكون للمجموعة أمكانية الاسطتالة " وذلك بمقدار :

$$\Delta L_1 = \alpha . \Delta t . L$$

ولكن قوة رد الفعل X تضغط المجموعة بمقدار :

$$\Delta L_x = \frac{XL}{EA}$$

أن الإزاحة الفعلية الحقيقية لمقطع النهاية اليسرى تساوي الصفر ومن هنا نجد رد الفعل المجهول X :

$$\alpha . \Delta t . L = \frac{XL}{EA}$$

ومنه نجد أن :

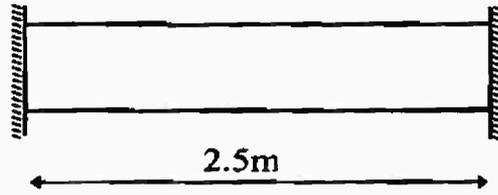
$$\sigma_r = \frac{X}{A} = E . \Delta t$$

$$X = E . A . \Delta t . \alpha$$

ويمكن أن تكون مقادير الأجهادات الحرارية σ_r كبيرة جداً . ولتقليل ذلك في الإنشاءات ، يأخذ في عين الاعتبار عادة استعمال فراغات حرارية خاصة تسمى الفواصل الحرارية . والأمثلة التالية توضح كيفية إيجاد الأجهادات الناتجة عن التغير والاختلاف في درجات الحرارة .

مثال (10-2)

الشكل (19-2) يبين قضيب له مقطع منتظم مستعرض ومثبت من نهايته بجساءة . طول القضيب 2.5m ، وله مساحة مقطع مستعرض تساوي 2000mm^2 ، عند درجة حرارة 400K° لا توجد إجهادات في القضيب . أحسب الأجهاد في القضيب إذا تغيرت درجة الحرارة إلى 365K° ، إذا علمت أن معامل المرونة لمادة القضيب هو $E = 120 \text{ GN m}^2$ ومعامل التمدد الطولي $\alpha = 20 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.



الشكل (19-2)

الحل :

كما أشرنا سابقاً نفرض إن القضيب قد فصل تماماً عند نهايته اليسرى من الحائط . وفي هذه الحالة فإنه يكون حرّاً في التقلص عندما تقل درجة الحرارة ، حيث يتقلص القضيب بمقدار :

$$\begin{aligned}\Delta &= \alpha \cdot \Delta t \cdot L \\ &= (20 \times 10^{-6})(35)(2500) = 1.75 \text{ mm}\end{aligned}$$

نستطيع الآن حساب القوة المحورية P اللازم تأثيرها على القضيب لجعله يستطيل بمقدار 1.75mm ، أي بمعنى إعادة النهاية اليسرى لوضعها الحقيقي ، لأنه في الحقيقة أن هذه النهاية لا تتحرك مطلقاً عندما تقل درجة

الحرارة ولحساب هذه القوة المحورية P نستخدم العلاقة التالية :

$$\Delta_L = \frac{PL}{EA}$$

$$1.75 = \frac{P(2500)}{(2000)(120 \times 10^9 \times 10^{-6})}$$

ومنه :

$$P = 168 \text{ KN}$$

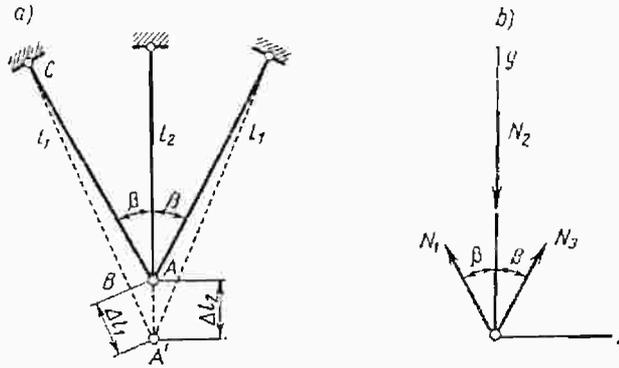
أما الأجهاد المحوري الناتج نتيجة لهذه القوة فهو :

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{168 \times 10^3}{2000} \\ &= 84 \text{ MPa} \end{aligned}$$

مثال (11-2)

الشكل (20-2 a) يبين مجموعة من القضبان مصنوعة من مادة واحدة ، ومساحة مقاطعها العرضية متساوية ، إذا رفعت درجة حرارة القضيب الأوسط فيها بمقدار Δt . المطلوب تحديد القوى في مجموعة القضبان .



الشكل (20-2)

الحل :

باستخدام طريقة القطع التي تم استخدامها في حلول الأمثلة السابقة نرسم مخطط الجسم الحر للمجموعة والمبين في الشكل (b,20-2) ، ونضع معادلات الاتزان حيث :

$$\sum F_x \rightarrow = 0$$

$$N_3 \sin \beta - N_1 \sin \beta = 0$$

ومنه :

$$N_3 = N_1$$

$$\sum F_y \uparrow = 0$$

$$N_3 \cos \beta + N_1 \cos \beta - N_2 = 0$$

وبما أن :

$$N_1 = N_3$$

إذاً :

$$2N_1 \cos B - N_2 = 0$$

$$N_2 = 2N_1 \cos B$$

ومن أجل وضع المعادلة الثالثة أو معادلة التشوهات ، فأننا نتخيل المجموعة وكأنها في حالة انفعال (تشوه) . فالنقطة A تأخذ وضع جديد هو النقطة A' نتيجة تشوه القسم AA' الذي يمثل استطالة القضيب الأوسط .

ولأجل تحديد استطالة القضيب الأيسر يسقط عموداً من النقطة A على الاتجاه AC' . عندئذ نحصل على النقطة B . أن القسم AB' عبارة عن التمدد ΔL_1 للقضيب المائل ، ونظراً لقلّة التشوه يمكننا اعتبار الزاوية الرأسية للمثلث AB'A' مساوية للزاوية الرأسية الأصلية ، وعند ذلك نحصل من المثلث AB'A' على المعادلة التالية :

$$\Delta L_1 = \Delta L_2 \cos B$$

وهكذا نحصل على معادلة التشوه ، ويمكن بعد ذلك التعبير عن التشوه في المعادلة بواسطة القوى ، أما في معادلة القضيب الأوسط فيجب أن نأخذ في الاعتبار الانفعال الناتج عن تأثير الحرارة :

$$\frac{N_1 L_1}{EA} = \left(\alpha L_2 \Delta t - \frac{N_2 L_2}{EA} \right)$$

وهكذا حصلنا على المعادلة الثالثة معادلة التشوه أو الانفعال ، وبحل الثلاث معادلات ذات الثلاث مجاهيل نستطيع تحديد القوى الثلاث N_1 , N_2 , N_3 في مجموعة القضبان .

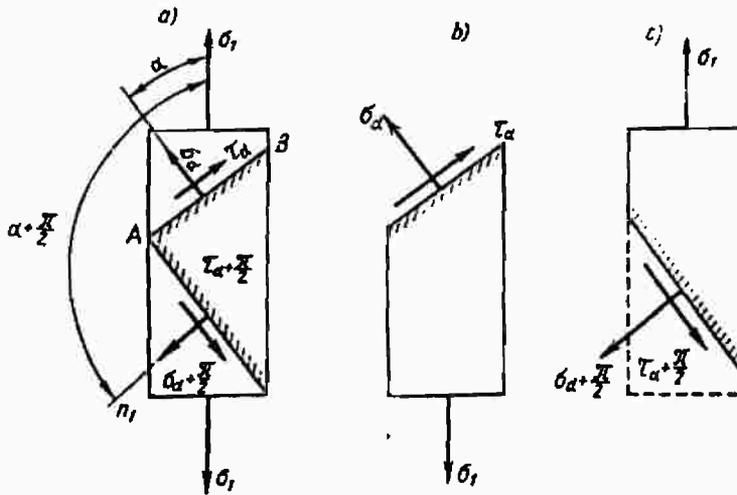
10.2 الأجهادات في المقاطع المائلة في اتجاه واحد

درسنا في البنود السابقة من هذا الباب الأجهادات العمودية الناتجة في القضبان في حالة الشد والضغط ، وعرفنا أن هذه الأجهادات في المقطع العرضي للقضيب هي :

$$\sigma_1 = \frac{N}{A}$$

ولأجل الحكم الصحيح على متانة المادة يجب معرفة وتحديد الأجهادات التي تؤثر على أي مقطع مائل للجزء المشدود أو المضغوط كما هو مبين في الشكل (21-2) .

تحدد الأجهادات التي تظهر في المقطع المائل AB حيث يشكل العمودي عليه زاوية مقدارها α باتجاه الأجهاد σ_1 وعادة ما يعتبر اتجاه الزاوية α موجباً إذا كان اتجاه الدوران مضاداً لدوران عقارب الساعة .



الشكل (21-2)

إذا رمزنا بالرمز A لمساحة المقطع العرضي على محور القضيب
ورمزنا بالرمز A_α لمساحة المقطع المائل فإن :

$$A_\alpha = \frac{A}{\cos \alpha} \dots\dots\dots (8-2)$$

وبشكل عام يمكن أن تؤثر الأجهادات العمودية σ_α والاجهادات المماسية على المقطع المائل . ويمكن الحصول على مقاديرها للقسم المقطوع ، وليكن مثلاً القسم الأسفل كما هو مبين في الشكل (21-2 . b) ونقوم بإسقاط القوة على σ_α فنحصل على :

$$\sigma_\alpha A_\alpha - \sigma_1 A \cos \alpha = 0$$

وبالتعويض عن A_α بالعلاقة السابقة نحصل على :

$$\sigma_\alpha \frac{A}{\cos \alpha} = \sigma_1 A \cos \alpha$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 A \cos \alpha \cdot \frac{\cos \alpha}{A}$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \dots\dots\dots (9-2)$$

وبإسقاط القوى باتجاه τ_α نحصل على :

$$\tau_\alpha A_\alpha - \sigma_1 A \sin \alpha = 0$$

ومن هنا :

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha \dots\dots\dots (10-2)$$

ويجب الإشارة هنا إلى أن قيمة σ_1 موجبة أي شادة عندما تكون الزاوية $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ وبذلك نحصل على قيمة موجبة للإجهاد المماسي τ_α وهذا يعني أن الأجهاد المماسي يكون اتجاهه كما هو مبين في الشكل (2-21 . b).

أن اتجاه الإجهاد المماسي يبين أن العمودي n على المساحة يجب أدارته باتجاه عقارب الساعة لكي ينطبق مع الأجهاد المماسي . أما إذا تمت إدارة العمودي على المساحة باتجاه مضاد لدوران عقارب الساعة لكي ينطبق مع الإجهاد ، فإن الإجهاد المماسي يعتبر سالباً كما يبين الشكل (2-21 . c).

أن العلاقة (2-9) تبين أن النهاية العظمى للأجهادات العمودية عندما تكون الزاوية $\alpha=0$ أي في المقطع العمودي على محور القضيبي . كما يستنتج من العلاقة (2-10) بأنه عندما تكون الزاوية $\alpha=0$ فإن الأجهاد المماسي يساوي الصفر $\tau=0$ ، وفي هذه الحالة فإن الإجهاد العمودي في المقطع العرضي هو الإجهاد الرئيسي .

ويتضح من العلاقتين (2-9) و (2-10) أنه في حالة $\alpha = 90^\circ$ فإن كلاً من الإجهاد العمودي والإجهاد المماسي مساويان للصفر أي $\alpha = 0$ ، $\tau = 0$.

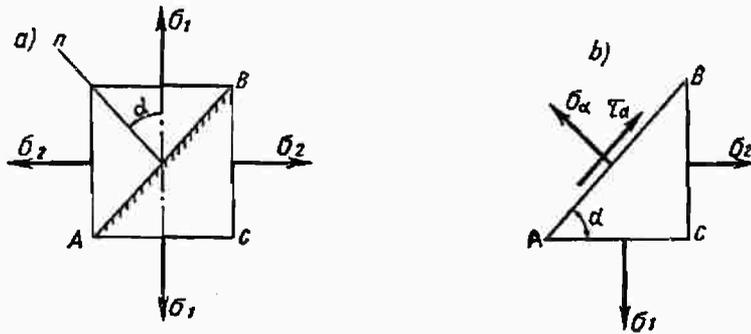
وبناءً على هذا فإنه في المقطع الطولي لا توجد إجهادات عمودية ولا مماسية ، ويتضح من العلاقة (2-10) أيضاً أن الأجهادات المماسية العظمى تكون في حالة المقطع الذي يميل بزاوية $\alpha = 45^\circ$ وتساوي نصف الأجهادات

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_2}{2} \text{ الرئيسية}$$

11.2 الأجهادات في المقاطع المائلة في اتجاهين

في هذا البند نبحث حالة الإجهاد السطحية والمبينة في الشكل (22-2 . a) عندما يكون كلا الإجهادين الرئيسين σ_1 ، σ_2 موجبين أي في حالة الشد . وقد ذكرنا في البند السابق بأن إشارات الأجهادات الرئيسية توضع بحيث تتحقق حالة عدم المساواة $\sigma_1 > \sigma_2$ ، وأن الزاوية الموجبة α بين اتجاه σ_1 والعمودي على المساحة الاختيارية ، تؤخذ باتجاه مضاد لدوران عقارب الساعة .

أن الأجهادات σ_α ، τ_α في المقطع المائل الاختياري يمكن تحديدها أما بواسطة أتران المنشور الثلاثي السطوح ABC الشكل (22-2 . b) أو بواسطة العلاقتين (9-2) ، (10-2) وجمع الأجهادات التي نجمت عن تأثير σ_1 والأجهادات التي عن تأثير σ_2 وذلك بعد استبدال الزاوية α بالزاوية $\alpha + \frac{\pi}{2}$.



الشكل (22-2)

وبذلك نحصل على :

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right)$$

ومن هنا :

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha \dots\dots\dots(11-2)$$

وبعد ذلك :

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha + \frac{\sigma_2}{2} \sin 2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

ومن هنا نحصل على العلاقة (12-2) :

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \dots\dots\dots(12-2)$$

ويتضح من العلاقة (12-2) أن الأجهادات المماسية العظمى تساوي نصف الفرق بين الأجهادين الرئيسيين :

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

وهذه عادةً تكون في المقاطع المائلة عن اتجاه σ_1 و σ_2 بنفس الزاوية ، أي بزاوية $\alpha = 45^\circ$ وهذا يستنتج من الحالات التي تناظر فيها τ_{\max} ، $\sin 2\alpha = 1$.

وبتحديد الأجهادات المماسية في المساحة العمودية على مساحة AB ، نرى أن ازدواج الأجهادات المماسية يتحقق ، حيث تؤثر الأجهادات المماسية في المساحتين المتعامدتين بصورة متساوية من حيث المقدار ومختلفة في الإشارة ويمكن التأكد من هذا بواسطة استخدام العلاقة (12-2) لتحديد قيم τ_{α} ، $\tau_{\alpha} + 90^\circ$. وهناك حالات أجهاد خاصة منها :

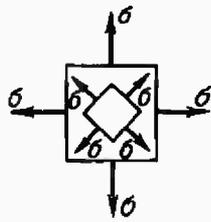
الحالة الأولى :

حيث تبحث حالة الأجهاد التي يكون فيها $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ كما يبين الشكل (23-2 a). حيث يكون في هذه الحالة جميع الأجهادات المماسية τ_α في جميع المساحات المارة في النقطة موضع البحث تساوي صفراً ، وأن الأجهاد العمودي له قيمة واحدة $\sigma_\alpha = \sigma$. أن مثل حالة الأجهاد هذه تسمى بالشد أو الضغط الثنائي المحور المنتظم .

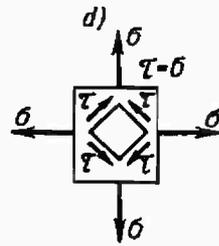
الحالة الثانية :

حيث تبحث حالة الأجهاد المبينة في الشكل (23-2 b) والتي تمثل الأجهادات الرئيسية $\sigma_1 = \sigma$ ، $\sigma_2 = -\sigma$ ، ونحدد الأجهاد هنا في المقاطع المتساوية الميلان عن اتجاهات σ_1 ، σ_2 أي $\alpha = 45^\circ$ و $\alpha = 135^\circ$ وباستعمال العلاقتين (2-11) ، (2-12) نحصل على :

$\sigma_\alpha = 0$ ، $\tau_\alpha = \pm \sigma$ وهذه حالة الأجهاد تسمى بحالة القص البحث .



a)



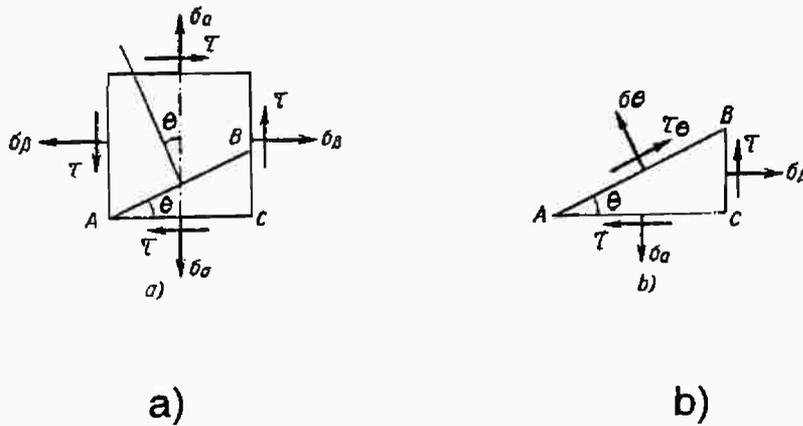
b)

الشكل (23-2)

12.2 الأجهادات الرئيسية وموضع المساحات الرئيسية

إذا كانت الأجهادات العمودية σ والمماسية τ التي تؤثر تؤثر على السطوح الخارجية للمادة معلومة وكان المطلوب تحديد مقدار الأجهادات الرئيسية ، الشكل (24-2 . a) فإنه لأجل ذلك يجب دراسة توازن المنشور ثلاثي السطوح ، التي قاعدته ABC ، ونفترض أن $\sigma_B < \sigma_\alpha$ والزاوية θ تقاس من اتجاه الأجهاد الكبير نحو اتجاه العمودي على المساحة كما يبين الشكل (24-2 . b) ، وكما اشرنا في البند السابق نعتبر اتجاه الزاوية θ موجباً ، إذا كان اتجاه الدوران مضاداً لاتجاه دوران عقارب الساعة .

وبما أن مساحة السطح المائل هو dA ، فإن مساحة السطح الرأسي تكون $dA \sin \theta$ ومساحة السطح الأفقي $dA \cos \theta$.



الشكل (24-2)

عند إسقاط جميع القوى على اتجاه σ_θ فأننا نحصل على :

$$\sigma_\theta \cdot dA - (\sigma_\alpha \cdot dA \cos \theta) \cos \theta - (\sigma_\beta \cdot dA \sin \theta) \sin \theta + (\tau \cdot dA \cos \theta) \sin \theta + (\tau \cdot dA \sin \theta) \cos \theta = 0$$

وبإسقاط جميع القوى على اتجاه τ_θ فنحصل على :

$$\tau_\theta dA - (\sigma_\alpha dA \cos \theta) \sin \theta - (\tau dA \cos \theta) \cos \theta + (\tau dA \sin \theta) \sin \theta + (\sigma_\beta dA \sin \theta) \cos \theta = 0$$

وباختصار dA ووضع الزوايا نحصل على :

$$\sigma_\theta = \sigma_\alpha \cos^2 \theta + \sigma_\beta \sin^2 \theta - \tau \sin 2\theta \dots\dots\dots (13-2)$$

$$\tau_\theta = \frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2} \sin 2\theta + \tau \cos 2\theta \dots\dots\dots (14-2)$$

ولأجل إيجاد وتحديد موضع المساحات الرئيسية ، أي المساحات التي تؤثر فيها الأجهادات العمودية العظمى ، يجب أما أن تساوي المشتقة $\frac{d\sigma_\theta}{d\theta}$ صفر ، وأن تساوي الأجهادات المماسية τ_θ صفرأ ، وذلك لان في المساحات الرئيسية لا توجد إجهادات مماسية . ولتحديد زاوية θ ميلان المساحات الرئيسية في كلتا الحالتين نحصل على العلاقة التالية :

$$\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2} \sin 2\theta_0 + \tau \cos 2\theta_0 = 0$$

أو :

$$\tan 2\theta_0 = \frac{2\tau}{\sigma_\beta - \sigma_\alpha} \dots\dots\dots (15-2)$$

وللحصول على القيمة العظمى للإجهادات العمودية ، أي مقادير الأجهادات ، نعوض بقيم الزاوية من العلاقة (15-2) في العلاقة (13-2) ، حيث يجب تعويض الدالة المثلثية بظل الزاوية الزوجية واستعمال بعض قوانين

المتلثات المعروفة ، وبعد عدة تحويلات بسيطة نحصل على العلاقة التالية لتحديد الأجهادات الرئيسية حيث :

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta})^2 + 4\tau^2} \dots\dots\dots (16-2)$$

أما إذا كان احد الأجهادات العمودية يساوي صفراً فإن العلاقة (16-2) تكتب على النحو التالي :

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \dots\dots\dots (17-2)$$

وبتحليل المشتقة التالية $\frac{d^2\sigma}{d\theta^2}$ يمكننا التأكد من أن الأجهاد الرئيسي الأقصى يؤثر في المساحة الرئيسية بزاوية θ_0 على شرط أن يكون $\sigma_{\alpha} > \sigma_{\beta}$ أما الأجهاد الرئيسي الأدنى ، فيؤثر في المساحة بزاوية $\theta_0 + 90^\circ$.

أما لتحديد القيمة القصوى التي يمكن أن يكون عليها إجهاد القص τ ، كلما اختلفت الزاوية θ سوف نفاضل المعادلة الموضحة في العلاقة (14-2) بالنسبة للزاوية θ ، ونساوي هذا التفاضل بالصفر وهكذا فإن :

$$\frac{d\tau}{d\theta} = (\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta}) \cos 2\theta - 2\tau \sin 2\theta = 0$$

وتكون قيم θ التي تؤدي إلى القيم القصوى هي :

$$\tan 2\theta_{0s} = \frac{1}{2} (\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta}) / \tau \dots\dots\dots (18-2)$$

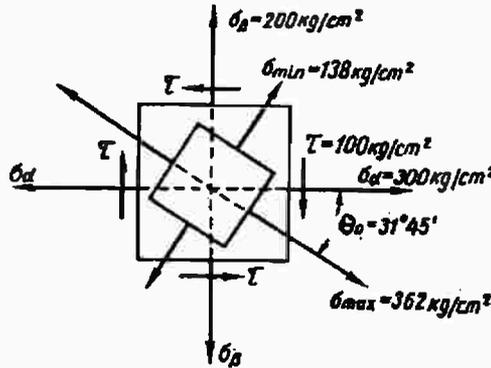
وباستخدام العلاقات المتلثية الخاصة بجيب تمام وجيب الزاوية وبتعويض ذلك من خلال العلاقة (18-2) في العلاقة (14-2) يمكن الحصول على صيغة لإيجاد إجهاد القص الأقصى حيث نجد أن :

$$\tau_{\frac{\max}{\min}} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta}}{2}\right)^2 + (\tau)^2} \dots\dots\dots (19-2)$$

والمثال التالي سوف يوضح كيفية استخدام العلاقات السابقة ، وتحديد مقدار الأجهادات الرئيسية وموضع المساحات الرئيسية التي تؤثر فيها هذه الأجهادات .

مثال (12-2)

في حالة الأجهاد المبينة في الشكل (25-2) ، أوجد مقدار الأجهادات الرئيسية وموضع المساحات الرئيسية التي تؤثر فيها هذه الأجهادات .



الشكل (25-2)

الحل :

لتحديد مقدار الأجهادات الرئيسية نستخدم العلاقة (16-2) فنحصل على :

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta})^2 + 4\tau^2}$$

ومنه :

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \frac{300 + 200}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(300 - 200)^2 + 4 \times 100^2} \\ &= 250 + 112 \\ &= 362 \text{ Kg / cm}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\min} &= \frac{300 + 200}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(300 - 200)^2 + 4 \times 100^2} \\ &= 250 - 112 \\ &= 138 \text{ Kg / cm}^2\end{aligned}$$

ولتحديد موضع المساحات الرئيسية العمودية نستخدم العلاقة (2-15) :

$$\begin{aligned}\tan 2\theta_0 &= \frac{2\tau}{2\sigma_\beta - \sigma_\alpha} \\ &= \frac{2 \times 100}{200 - 300} \\ &= -2 \\ 2\theta_0 &= -63^\circ \\ \theta_0 &= 31.5^\circ\end{aligned}$$

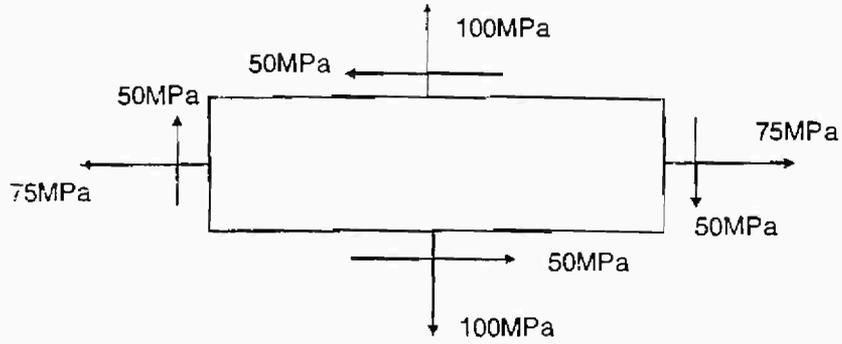
الإشارة السالبة تظهر بأن θ_0 تحسب من اتجاه $\sigma_\alpha = 300 \text{ Kg / cm}^2$ باتجاه دوران عقارب الساعة . وهكذا نجد أن σ_{\max} تؤثر على مساحة ذات زاوية $\theta_0 = 31.5^\circ$ ، σ_{\min} تؤثر على مساحة ذات زاوية $90^\circ + \theta_0$.

وتجدر الإشارة إلى أنه لو كانت الأجهادات المماسية τ متجهة في الجهة المعاكسة أي إن الأجهاد المماسي قد أصبح سالباً فإن زاوية ميلان المساحات

الرئيسية أيضاً تغير إشارتها وتصبح مساوية $\theta_0 = 31.5^\circ$ ، حيث نضعها في الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة ، ولكن مقدار الأجهادات الرئيسية لا يتغير في هذه الحالة .

مثال (13-2)

- في حالة الأجهادات لعنصر مستو المبين في الشكل (26-2) أوجد ما يلي :
1. الأجهادات الرئيسية واتجاهاتها .
 2. إجهادات القص القصوى واتجاهات المستويات التي تحدث عليها .



الشكل (26-2)

الحل :

من معطيات السؤال وطبقاً للرموز المذكورة سابقاً في هذا البند نجد أن :

$$\sigma_\alpha = 75MPa \quad , \quad \sigma_\beta = 100MPa \quad , \quad \tau = 50MPa$$

1) لإيجاد الأجهادات الرئيسية نستخدم العلاقة (16-2) ونجد الإجهاد العمودي الأفقي حيث :

$$\begin{aligned}
\sigma_{\max} &= \frac{\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta})^2 + 4\tau^2} \\
&= \frac{75 + 100}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(75 - 100)^2 + 4(50)^2} \\
&= 87.5 + \frac{1}{2} \sqrt{625 + 10000} \\
&= 87.5 + 51.5 \\
&= 139 \text{ MPa} .
\end{aligned}$$

أما الإجهاد العمودي الأصغر فيمكن إيجاداه بنفس العلاقة ولكن مع تغيير الإشارة حيث :

$$\begin{aligned}
\sigma_{\min} &= \frac{\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta})^2 + 4\tau^2} \\
&= \frac{75 + 100}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(75 - 100)^2 + 4(50)^2} \\
&= 87.5 - 51.5 \\
&= 36 \text{ MPa} .
\end{aligned}$$

ولإيجاد اتجاهات المستويات (المساحات) الرئيسية التي تحدث عليها الأجهادات التي قيمتها 139 MPa و 36 MPa نستخدم العلاقة (2-15) حيث:

$$\begin{aligned}
\tan 2\theta_0 &= \frac{2\tau}{\sigma_{\beta} - \sigma_{\alpha}} \\
&= -\frac{2 \times 50}{(75 - 100)} \\
&= 4
\end{aligned}$$

$$\tan 2\theta_0 = 4$$

ومنه نجد أن :

$$2\theta_0 = 75^{\circ} , 256^{\circ}$$

وأن :

$$\theta_0 = 38^\circ , 128^\circ$$

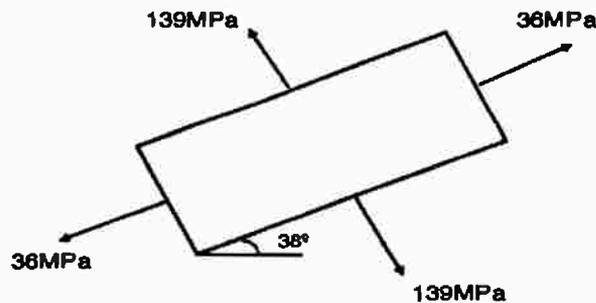
ولتحديد أي من الأجهادات الرئيسية يحدث على كل مساحة ومستوى من المستويات نستخدم العلاقة السابقة وبالتحديد العلاقة :

$$\sigma \frac{1}{2} (\sigma_\alpha + \sigma_\beta) - \frac{1}{2} (\sigma_\alpha - \sigma_\beta) \cos 2\theta_0 + \tau \sin 2\theta_0$$

وبالتعويض عن $\theta_0 = 38^\circ$ مع القيم المعطاة بالمسألة للاجهادات $\sigma_\alpha , \sigma_\beta , \tau$ نحصل على :

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2} (75 + 100) - (75 - 100) \cos 76^\circ + 50 \sin 76^\circ \\ &= 139 \text{ MPa} \end{aligned}$$

وهذا يظهر عنصر في أتجاه المساحات الرئيسية ومعرض للاجهادات الرئيسية التي تم إيجادها كما هو مبين في الشكل (27-2) .



الشكل (27-2)

وتجدر الإشارة هنا أن أجهادات القص على تلك المستويات تساوي الصفر .

(2) لإيجاد أجهادات القص القصوى والدنيا نستخدم العلاقة (19-2) حيث :

$$\tau_{\frac{\max}{\min}} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta}}{2}\right)^2 + (\tau)^2}$$

$$\begin{aligned}\tau_{\frac{\max}{\min}} &= \pm \sqrt{\left(\frac{75 - 100}{2}\right)^2 + (50)^2} \\ &= \pm 51.5 \text{ MPa}\end{aligned}$$

ولإيجاد اتجاهات المساحات الرئيسية أو المستويات التي تحدث عليها أجهادات القص القصوى نستخدم العلاقة (18-2) فنحصل على :

$$\tan 2\theta_{0_s} = \frac{1}{2}(\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta}) / \tau$$

$$\begin{aligned}\tan 2\theta_{0_s} &= \frac{1}{2}(75 - 100) / 50 \\ &= -0.25\end{aligned}$$

وبالتالي فإن :

$$2\theta_{0_s} = \tan^{-1}(-0.25)$$

ومنه :

$$2\theta_{0_s} = 166^{\circ}, 346^{\circ}$$

$$\theta_0 = 83^{\circ}, 173^{\circ}$$

أن قيمة θ_0 تبين أن تلك المساحات والمستويات تقع على 45° من مستويات الأجهاد العمودي الأقصى والأدنى .

ولتحديد إذا ما كان أجهاد القص على المستوى 83° موجباً أو سالباً نستخدم العلاقة (2-14) حيث :

$$\tau_\theta = \frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2} \sin 2\theta + \tau \cos 2\theta$$

وبالتعويض عن $\theta_0 = 83^\circ$ مع القيم المعطاة للاجهادات σ_α , σ_β , τ نحصل على :

$$\begin{aligned} \tau_\theta &= \left(\frac{75 - 100}{2} \right) \sin 166^\circ + 50 \cos 166^\circ \\ &= -51.5 \text{ MPa} \end{aligned}$$

وتعني هنا الإشارة السالبة أن أجهاد القص يتجه عكس الاتجاه الموجب المفروض .

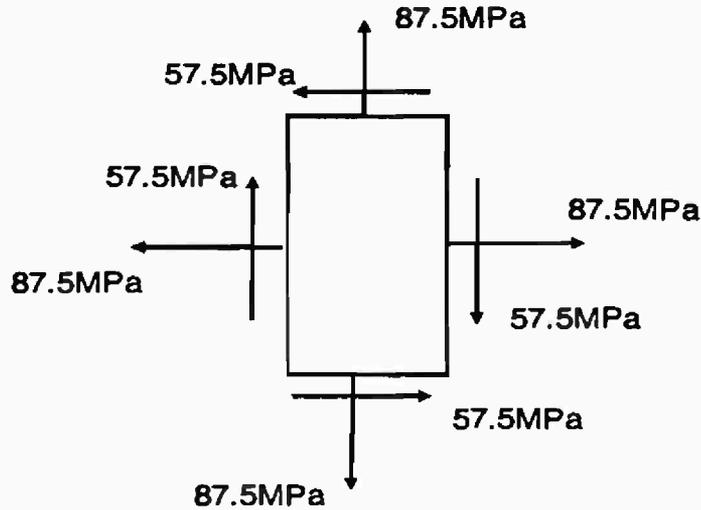
وأخيراً يمكننا الحصول على الأجهادات العمودية على مستويات أجهاد القص القصوى التي حصلنا عليها وذلك باستخدام العلاقة التالية :

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_\alpha + \sigma_\beta) - \frac{1}{2}(\sigma_\alpha - \sigma_\beta) \cos 2\theta + \tau \sin 2\theta$$

وبالتعويض عن قيم $\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$ في المعادلة السابقة نجد أن الأجهاد العمودي يصبح :

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{1}{2}(\sigma_\alpha + \sigma_\beta) \\ &= \frac{1}{2}(75 + 100) \\ &= 87.5 \text{ MPa} . \end{aligned}$$

أن اتجاه العنصر الذي تؤثر عليه أجهادات قص قصوى مبين في الشكل (2-28) .



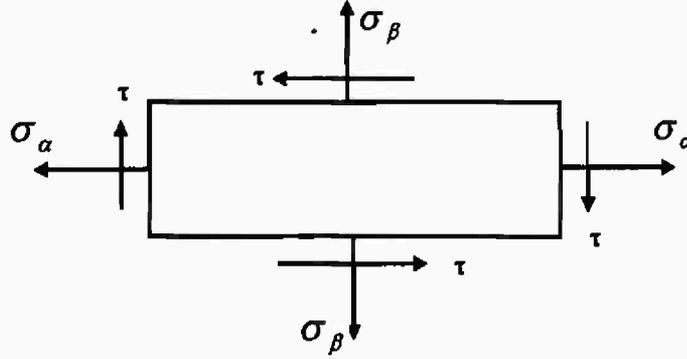
الشكل (28-2)

13.2 الطريقة البيانية لتحديد الأجهادات الرئيسية واتجاهاتها " دائرة مور "

يمكن تمثيل جميع العلاقات والمعادلات السابقة الخاصة بحساب الأجهادات العمودية الرئيسية ، واجهادات القص القصوى واتجاهاتها بيانياً على شكل رسم بياني يعرف باسم دائرة مور (Mohr's Circle) ، وتسمى هذه الطريقة بالطريقة البيانية (التخطيطية) ، حيث يكون من الأسهل الحصول على قيم الأجهادات واتجاهاتها باستخدام هذه الطريقة من مجموعة المعادلات المذكورة في البند السابق .

في " دائرة مور " ترسم الأجهادات العمودية على محور أفقي واجهادات القص على المحور العمودي ، وعادة ترسم الأجهادات σ_α ، σ_β ، τ بمقياس رسم واحد وبعد ذلك ترسم دائرة تمر بهذه النقاط ويكون مركزها على المحور الأفقي .

ولتوضيح وشرح كيفية رسم دائرة مور بالتفصيل ، وبخطوات مبسطة تساعد الطالب على استخدام هذه الطريقة في الحصول على قيم الأجهادات الرئيسية واتجاهاتها ، نأخذ الحالة العامة للإجهاد لجزء من مادة ما والمبينة في الشكل (29-2) .

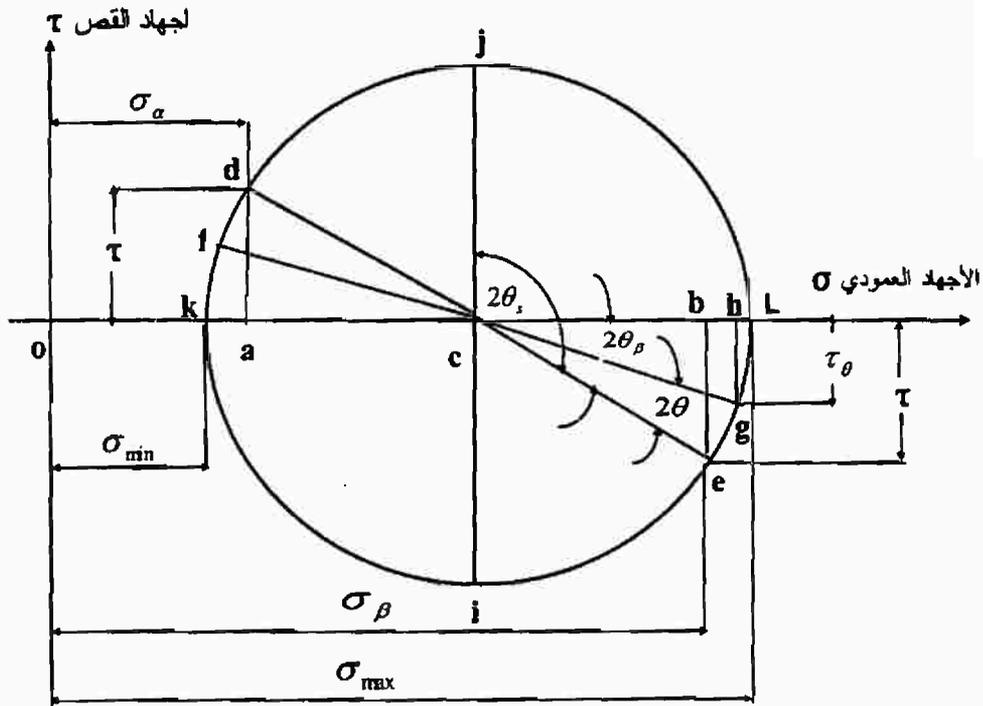


الشكل (29-2)

و نقوم برسم دائرة مور لهذه الحالة بأتباع الخطوات المبسطة التالية :
 أولاً : نرسم محوري الإحداثيات ، حيث تمثل الأجهادات العمودية σ_α ، σ_β على طول المحور الأفقي ، واجهادات القص T على المحور الرأسي ، وذلك بأخذ مقياس رسم واحد ومناسب وتعين نقطة الأصل على المحورين كما يبين الشكل (30-2) .

ثانياً : نستخدم اصطلاح الإشارات الذي يعتبر أن أجهادات القص تكون موجبة إذا عملت على دوران العنصر في اتجاه عقارب الساعة ، وسالبة لو عملت على دورانه عكس عقارب الساعة . وبالنظر إلى العنصر المعرض للحالة العامة للإجهاد المستوى في الشكل (29-2) ، نجد أن أجهادات القص موجب على الأوجه الرأسية ، وسالبة على الأوجه الأفقية . كذلك تعتبر أجهادات الشد موجبة واجهادات الضغط سالبة .

ثالثاً : لتعين النقطة d نعين قيمة σ_e على الأحداثي الأفقي الخط (oa) ، وإجهاد القص τ كقيمة موجبة إلى أعلى (ad) بناءً على اصطلاح الإشارات ، حيث يكون τ على الأوجه الرأسية التي تؤثر عليها σ_e موجباً وبالتالي ترسم هذه القيمة موجبة ، وهكذا نحصل على النقطة d الشكل (30-2) .



الشكل (30-2)

رابعاً : نعين موقع النقطة e بطريقة مماثلة ، وذلك برسم σ_β على الأحداثي الأفقي الخط (ob) بقيمتها المعطاة . وبم أن إجهاد القص τ على الأوجه الأفقية التي يؤثر عليها σ_β سالباً لذا ترسم هذه القيمة أسفل المحور الأفقي (be) ، وبذلك نحصل على القيمة e .

وتجدر هنا الإشارة إلى أن الشكل (2-30) يرسم على افتراض أن $\sigma_\beta > \sigma_\alpha$ ، على الرغم أن الطريقة هنا تصلح لو أن $\sigma_\beta < \sigma_\alpha$.

خامساً : نرسم الخط (de) ، ونعين المنتصف النقطة c ، ونرسم دائرة مركزها عند c ونصف قطرها cd. وهذه الدائرة يطلق عليها دائرة مور الشكل (2-30) .

وفي دائرة مور (Moher's Circals) يجب توضيح ما يلي :
 1) النقطتين L و k على طول القطر الأفقي للدائرة يمثلان الأجهادات الرأسية . ولإثبات ذلك نلاحظ أن النقطة c تقع على مسافة $0.5(\sigma_\alpha + \sigma_\beta)$ من نقطة الأصل لنظام الأحداثيات ، وكذلك طول الخط \overline{ab} هو $(\sigma_\beta - \sigma_\alpha)$ ، ومن المثلث قائم الزاوية نجد أن :

$$(ce)^2 = (cb)^2 + (be)^2$$

وبالتعويض عن هذه القيم نجد أن :

$$\overline{ce} = \sqrt{[0.5(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)]^2 + \tau^2}$$

وبما أن : $ck = cL = cz$ فإن الاحداثي الأفقي للنقطة (L) يساوي $oc + cL$ أو بالتعويض عن ذلك بواسطة الأجهادات يكون مساوياً لما يلي :

$$0.5(\sigma_\alpha + \sigma_\beta) + \sqrt{[0.5(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)]^2 + \tau^2}$$

وهذه العلاقة هي الأجهاد الرئيسي الأقصى كما في العلاقة (2-16) ، وبالمثل نجد الأجهاد الرئيسي الأدنى حيث يكون الاحداثي الأفقي للنقطة (k) هو $oc - kc$ أو :

$$0.5(\sigma_\alpha + \sigma_\beta) - \sqrt{[0.5(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)]^2 + \tau^2}$$

وهذه العلاقة هي الأجهاد الرئيسي الأدنى . وبالتالي فإن النقطتين L و k تمثلان الأجهادات الرئيسية الموجودة في العنصر الأصلي .

(2) يمكننا نلاحظ أيضاً أن المماس للزاوية (bce) يساوي $\frac{\overline{eb}}{\overline{bc}}$ وبالتالي نحصل على :

$$\tan \theta_p = \frac{\tau}{0.5(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)}$$

وبمقارنة هاتين العلاقتين نرى أن الزاوية $\hat{bce} = 2\theta_p$ أي دوران عكس عقارب الساعة من القطر de حتى القطر KL الممثل للمستويات الرئيسية التي تحدث عليها الأجهادات الرئيسية . حيث تقع المستويات الرئيسية على زاوية مقدارها θ_p من اتجاه المحور الأفقي x .

وهكذا نجد أن دائرة مور هي طريقة بيانية سهلة ومناسبة لإيجاد الأجهادات الرئيسية حيث يمكننا رسم الدائرة لمجموعة معطاة من الأجهادات σ_α ، σ_β ، τ ، ثم قياس ok ، ol . حيث تمثل تلك الإحداثيات الأفقية الأجهادات الرئيسية بنفس مقياس الرسم المستخدم في رسم σ_α ، σ_β ، τ .

(3) أن الشكل (2-30) يبين أيضاً أن نصف قطر دائرة مور هو \overline{ce} الذي يساوي :

$$\overline{ce} = \sqrt{[0.5(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)]^2 + \tau^2}$$

بناظر إجهاد القص الأقصى ، وفعالياً يمثل إجهاد القص على أي مستوى بالأحداثي الرأسي لدائرة مور ، وبالتالي يجب أن تعتبر الخطوط cj , ci ممثلة لأجهادات القص القصوى كما يلاحظ أيضاً من الشكل (2-30) أن الزاوية \hat{ecj} تساوي الزاوية $2\theta_s$ ، وبالتالي يتضح لنا أن ضعف الزاوية بين مستويات الأجهاد العمودي الأفقي ومستويات إجهاد القص الأقصى \hat{bcj} تساوي 90° ، وهكذا نجد أن مستويات أجهادات القص الأقصى تساوي 45° من مستويات الأجهادات العمودية القصوى .

(4) أن نقطتي النهايتين للقطر de تمثلان الأجهادات المؤثرة في الاتجاهين الأفقي x والعمودي y الأصليتين ، وتجدر الإشارة هنا إلى نقطتي النهايتين لأي قطر مثل fg (الذي يعمل زاوية 2θ مع de) تمثلان أجهادات على مستوى يميل بمقدار θ على المحور الأفقي x . ولتحقيق ذلك نلاحظ أن الأحداثي الأفقي للنقطة g يعطى بالعلاقة التالية :

$$\overline{oc} + \overline{ch} = 0.5(\sigma_\alpha + \sigma_\beta) + \overline{cg} (\cos 2\theta_p \cos 2\theta + \sin 2\theta_p \sin 2\theta)$$

ومن دراسة المثلث cbe في دائرة مور يتضح أن :

$$\sin 2\theta_p = \frac{\tau}{\sqrt{[0.5(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)]^2 + \tau^2}}$$

$$\cos 2\theta_p = \frac{0.5(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)}{\sqrt{[0.5(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)]^2 + \tau^2}} \dots\dots\dots (20-2)$$

وبالتعويض عن قيم τ و $0.5(\sigma_\beta - \sigma_\alpha)$ من تلك المعادلات في المعادلة السابقة نجد أن :

$$\sigma = 0.5 (\sigma_\alpha - \sigma_\beta) - 0.5 (\sigma_\alpha - \sigma_\beta) \cos 2\theta + \tau \sin 2\theta$$

وهذه العلاقة هي بالضبط الأجهاد العمودي على مستوى يميل بزاوية θ على المحور الأفقي x كما تم ذكره في البند السابق من هذا الباب حسابياً عن طريق الاشتقاق ، أما الاحداثي الراسي للنقطة g فيعطي بالعلاقة التالية :

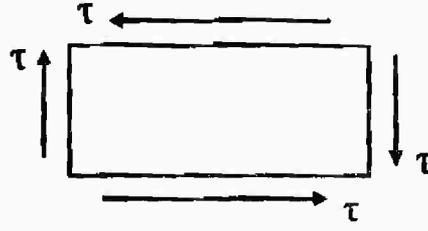
$$\begin{aligned} \tau &= \overline{gh} = \overline{cg} \sin(2\theta_p - 2\theta) \\ &= \overline{cg} (\sin 2\theta_p \cos 2\theta - \cos 2\theta_p \sin 2\theta) \\ &= \sqrt{[0.5(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)]^2 + \tau^2} (\sin 2\theta_p \cos 2\theta - \cos 2\theta_p \sin 2\theta) \end{aligned}$$

وبطريقة مماثلة وبالتعويض عن قيم τ ، $0.5(\sigma_\beta - \sigma_\alpha)$ من (20-2) في هذه المعادلة نجد أن :

$$\tau_\theta = \tau \cos 2\theta + 0.5 (\sigma_\alpha - \sigma_\beta) \sin 2\theta$$

وهذا بالضبط إجهاد القص على مستوى يميل بزاوية θ على المحور الأفقي x كما تم اشتقاقه سابقاً . وهكذا نجد أن إحداثيات نقطة g على دائرة مور تمثل الأجهادات العمودية واجهادات القص على مستوى يميل بزاوية θ على المحور الأفقي x .

واخيراً يجب الإشارة مرة أخرى أن اصطلاحات الإشارات المستخدمة في دائرة مور تعتبر أجهادات الشد موجبة واجهادات الضغط سالبة ، ولهذا ترسم أجهادات الشد عادةً على يمين نقطة الأصل واجهادات الضغط على اليسار كما اشرنا سابقاً وكما يبين الشكل (2-30) ، إما بالنسبة لاجهادات القص فأنها تكون موجبة لو أنها عملت على دوران العنصر أو الجزء المعرض لها في اتجاه عقارب الساعة ، وسالبة لو عملت على دوران العنصر عكس عقارب الساعة .



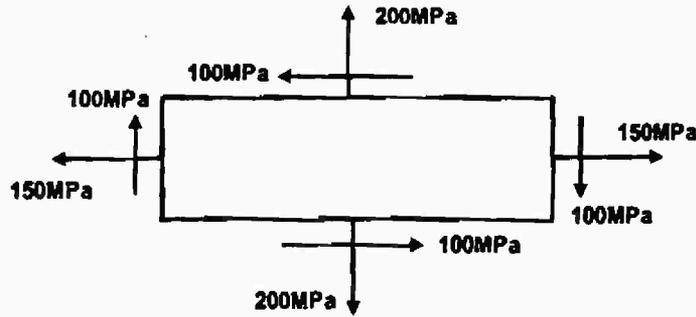
الشكل (31-2)

ولهذا يكون للعنصر المبين في الشكل (31-2) أجهادات قص موجبة على الأوجه الرأسية ، وسالبة على الأوجه الأفقية . وان الأمثلة الآتية سوف تبين كيفية إيجاد الأجهادات الرئيسية واتجاهاتها ، وأجهادات القص القصوى واتجاهات المستويات التي تحدث عليها .

مثال (14-2)

الشكل (32-2) يبين عنصر مستوى معرض للأجهادات . باستخدام دائرة مور أوجد :

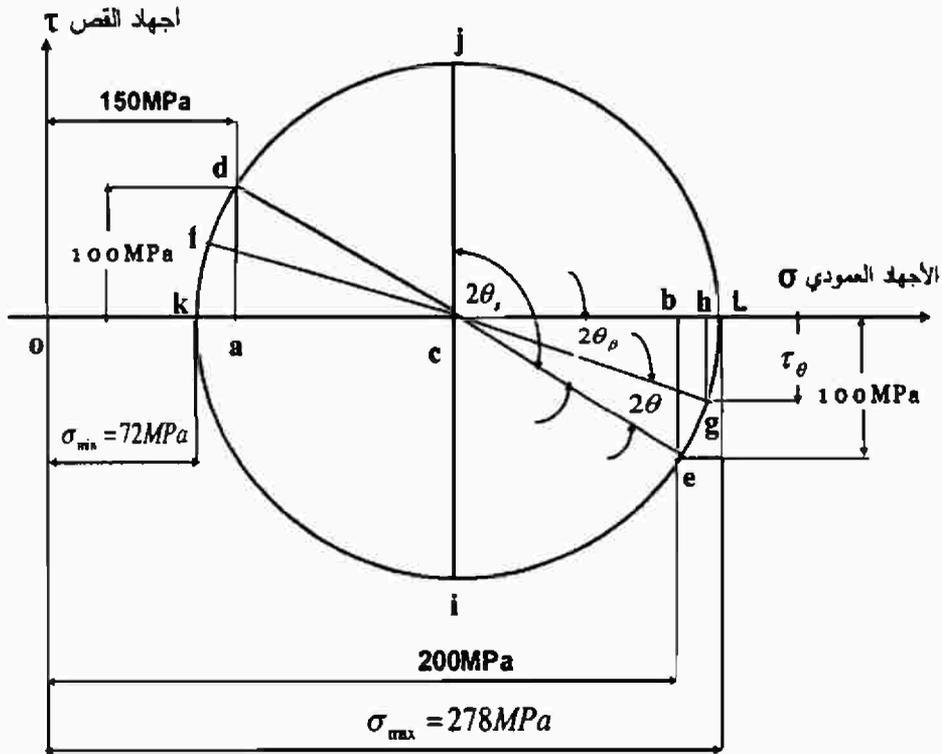
1. الأجهادات الرئيسية واتجاهاتها .
2. أجهادات القص القصوى واتجاهات المستويات التي تحدث عليها .



الشكل (32-2)

الحل :

بأتباع الخطوات السابقة والخاصة في بناء دائرة مور ، وبالذات استخدام اصطلاح الإشارات نجد أن أجهادات القص على الأوجه الرئيسية للعنصر المستوي والمبين في الشكل (2-32) موجبة بينما تكون هذه الأجهادات على الأوجه الأفقية سالبة . وبناءً على ذلك نقوم برسم الأجهادات $\sigma_a = 150MPa$ و $\tau = 100MPa$ الموجودان على الأوجه الرأسية للعنصر ، لنحصل بذلك على النقطة d . بعد ذلك يرسم الخط \overline{de} ، وذلك بعد رسم شرط الأجهاد $\sigma_\beta = 200MPa$ و $\tau = -100MPa$ ، الموجودان على الأوجه الأفقية للعنصر المستوي ، لنحصل بذلك على النقطة e .



الشكل (2-33)

نحدد نقطة المنتصف بهذا الخط وهي النقطة c . ترسم دائرة بعد ذلك بنصف قطر $\overline{cd} = \overline{ce}$ و c مركزاً لها وبذلك نكون قد حصلنا على دائرة مور كما يبين الشكل (2-33) . وتجدر الإشارة هنا إلى أنه يجب اخذ مقياس رسم واحد مناسب وواحد لقيم الإجهاد المعطاة في المسألة .

في هذه الدائرة نلاحظ ما يلي :

1. تمثل الأجهادات الرئيسية بالنقطتين k و L ، كما تم توضيح ذلك في البند السابق . ويمكن تحديد الأجهادات الرأسية أما عن طريق القياس المباشر من الشكل (2-33) والرجوع إلى مقياس الرسم بعد ذلك وأما عن طريق إيجاد الأحداثي الأفقي لنقطة c والذي من الواضح أنه يساوي 175Mpa ، حيث أن cb تساوي 25Mpa ومنه نجد طول الخط \overline{ce} حيث أن :

$$\overline{ce} = \sqrt{(25)^2 + (100)^2} = 103 \text{ MPa}$$

ومنه نجد الإجهاد الرئيسي الأدنى الذي يساوي :

$$\begin{aligned} \sigma_{\min} &= \overline{ok} \\ &= \overline{oc} - \overline{ck} \\ &= 175 - 103 \\ &= 72 \text{ MPa} \end{aligned}$$

أما الأجهاد الرئيسي الأقصى فيساوي :

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \overline{ol} = \overline{oc} + \overline{cl} \\ &= 175 + 103 \\ &= 278 \text{ MPa} \end{aligned}$$

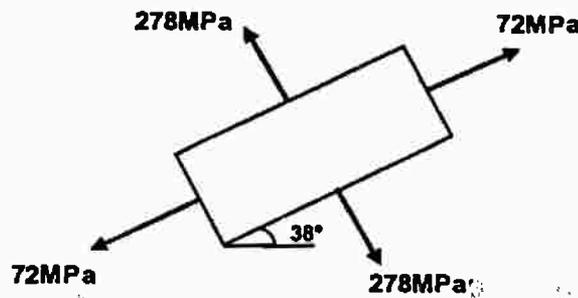
وهكذا حصلنا على قيم الأجهادات الرئيسية من خلال بعض الإحداثيات واستخدام بعض القوانين الخاصة بالمثلث قائم الزاوية . وتجدر الإشارة مرة أخرى إلى أن تلك القيم يمكن تحديدها عن طريق القياس المباشر اعتماداً على مقياس الرسم المختار . أما اتجاهات هذه الأجهادات فيعطى من خلال الزاوية $2\theta_p$ حيث :

$$\tan 2\theta_p = \frac{100}{25}$$

$$2\theta_p = \tan^{-1} \left(\frac{100}{25} \right)$$

ومنه نجد أن : $\theta_p = 38^\circ$

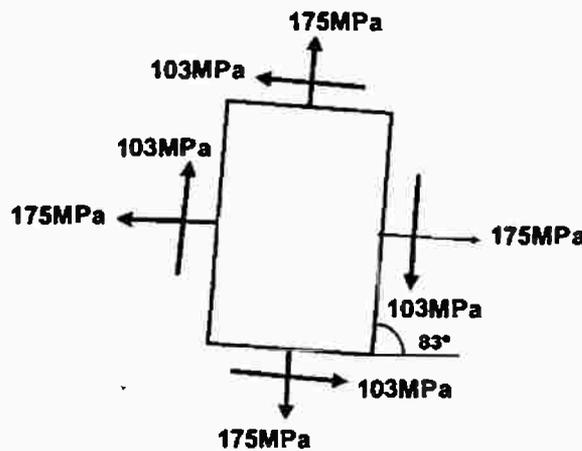
كما يمكن الحصول على تلك القيمة بقياس الزاوية $e\hat{c}b$ باستخدام المنقلة مباشرة في دائرة مور . ومن هنا يتبين لنا أن الأجهاد الرئيسي الممثل بالنقطة L يؤثر على مستوى يميل 38° من المحور الأفقي x . والشكل (2-34) يبين الأجهادات الرئيسية ، حيث يكون واضح أن أجهادات القص على تلك المستويات تساوي صفراً حيث أن نقطتي K و L تقعان على المحور الأفقي لدائرة مور .



الشكل (2-34)

2. يمثل إجهاد بواسطة أجهاد القص بواسطة \overline{cj} في دائرة مور وقد وجدنا أن نصف القطر \overline{ce} في البند السابق يساوي 103MPa ، ومنه نرى أن أجهاد القص الأقصى يساوي 103MPa . أما اتجاهات المستويات التي تحدث عليها أي الزاوية $2\theta_s$ فيمكن الحصول عليها أما بالقياس المباشر من الرسم المبين في الشكل (2-33) ، أو ببساطة بإضافة 90° إلى الزاوية $2\theta_p$ التي تم تحديدها يؤدي إلى أن $2\theta_s = 166^\circ$ و $\theta_s = 83^\circ$. ونلاحظ أن أجهاد القص الممثل بالنقطة ز موجباً ، وبالتالي يعمل أجهاد القص على هذا المستوى 83° إلى دوران العنصر في اتجاه عقارب الساعة .

كما يكون الأحداثي الأفقي للنقطة ز من دائرة مور 175MPa ، وهذا يمثل الأجهاد العمودي الحادث على مستويات أجهاد القص القصوى . ويبين الشكل (2-35) أجهادات القص القصوى .



الشكل (2-35)

وهكذا بكل هذا المثال السابق يتبين لنا بأن تحديد الأجهادات الرئيسية واتجاهاتها ، وإجهاد القص واتجاهات المستويات التي تحدث عليها باستخدام

الطريقة البيانية دائرة مور أسهل من الطريقة الحسابية باستخدام العلاقات المختلفة المذكورة من البند السابق من هذا الباب .

14.2 العلاقة بين الأجهادات والانفعالات " الصيغة العامة لقانون هوك "

أشرنا في الباب الأول من هذا الكتاب أن العلاقة المبسطة لقانون هوك في حالة الشد المحوري أي في حالة الأجهاد الوحيد المحور تعطى حسب العلاقة التالية :

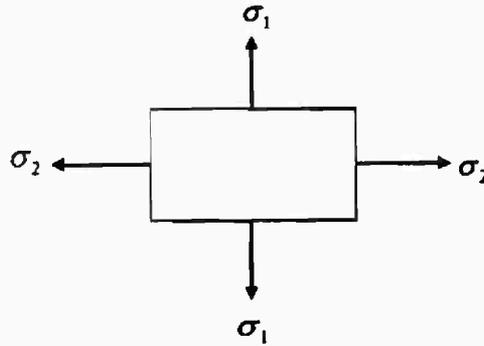
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

ولأجل تحديد الانفعالات (التشوهات) النسبية ε_1 , ε_2 في اتجاهات الأجهادات الرئيسية في حالة الأجهاد السطحي المبين في الشكل (2-36) ، واستخدام العلاقة بين الانفعالات الطولية والعرضية :

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon$$

حيث أن :

μ : معامل الانفعال العرضي " نسبة بواسون "



الشكل (2-36)

نجد أن الاستطالة النسبية الرأسية تحت تأثير الأجهاد σ_1 وحده تساوي :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_1}{E}$$

وبتأثير الأجهاد σ_2 وحده تحدث في الاتجاه الأفقي استطالة تساوي :

$$\varepsilon_{22} = \frac{\sigma_2}{E}$$

وفي الاتجاه الرأسي ، تقلص يساوي :

$$\varepsilon_{12} = -\mu \frac{\sigma_2}{E}$$

وبجمع هذه الانفعالات يمكننا الحصول على :

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} \\ &= \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} \dots\dots\dots(21 - 2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= \varepsilon_{22} + \varepsilon_{21} \\ &= \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_1}{E} \dots\dots\dots(22 - 2)\end{aligned}$$

أن هذه العلاقات تعبر عن الصيغة العامة لقانون هوك في حالة الأجهادات السطحية . وبمعلومية الانفعالات ε_1 , ε_2 نستطيع حل المعادلتين بالنسبة للاجهادات σ_1 , σ_2 والحصول على العلاقات التالية :

$$\sigma_1 = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2)$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1)$$

وبنفس الطريقة في الحالة العامة عندما تتعرض المادة إلى ثلاثة أجهادات عمودية مشتركة ومتعامدة σ_1 , σ_2 , σ_3 ويصحبهم الانفعالات ε_1 , ε_2 , ε_3 على التوالي نحصل على الصيغة العامة لقانون هوك حيث :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu (\sigma_1 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu (\sigma_1 + \sigma_2)]$$

أن هذه العلاقات تمثل قانون هوك العام لحالة الأجهاد الحجمية . أن الانفعالات ε_1 , ε_2 , ε_3 عندما تكون في اتجاهات الأجهادات الرئيسية فأنها تسمى بالانفعالات الرئيسية .

15.2 تمارين

س1 : سلك من الصلب قطره 8mm يستخدم في رفع معدات معنية أثناء تشيد المباني ، لو أن 100m من هذا السلك علقت رأسياً وكان هناك حملاً مقداره 1.5KN يتم رفعه من الطرف الأسفل للسلك . عين الاستطالة للسلك ، علماً بأن الكثافة الوزنية للصلب هي $E = 200 \cdot G \text{ N} / \text{m}^2$.

س2 : قضيب مستقيم ذو مقطع مستعرض منتظم معرض لشد محوري ، ومساحة المقطع المستعرض لهذا القضيب 50mm^2 ، وطوله 5m ، إذا كانت الاستطالة الكلية تحت تأثير حمل مقداره 40 KN تساوي 2mm . أوجد معامل المرونة لمادة هذا القضيب .

س3 : قضيب مربع من الصلب طول ضلعه 5mm وطوله 1m معرض لقوة شد محوري مقدارها 250 KN . احسب الزيادة في البعد الجانبي نتيجة لتأثير هذا الحمل على اعتبار أن $E = 200 \text{ G N} / \text{m}^2$ و $\mu = 0.3$.

س4 : شريط صلب طوله 20m ومساحة مقطعه المستعرض 4mm . احسب الاستطالة في حالة مد الشريط بكامل طوله وشده بقوة 50 KN . علماً بأن معامل المرونة لمادة الشريط هي $E = 200 \text{ G N} / \text{m}^2$.

س5 : قضيب دائري مصمت من الصلب طوله 300mm وقطره 4mm ، مثبت بصلاية في نهاية قضيب مربع من النحاس الأصفر طوله 200mm وطول ضلعه 15mm . علماً بأن المحاور الهندسية للقضيبين تقع على خط واحد ، إذا أثرت قوة شد محورية مقدارها 3KN عند أقصى نقطة من النهايتين . أوجد الاستطالة الكلية للمجموعة ، إذا علمت أن معامل المرونة الصلبة هو $E = 200 \text{ G N} / \text{m}^2$ وللنحاس الأصفر هو $E = 90 \text{ G N} / \text{m}^2$.

س6 : قضيب دائري مصمت من النحاس قطره 30mm ومعرض لقوة شد محورية 60 KN . عين النقص في قطر القضيب نتيجة لهذا الحمل ، علماً بأن معامل المرونة للنحاس الأصفر هو $E = 90 \text{ G N / m}^2$ ومعامل بواسون هو $\mu = 0.28$.

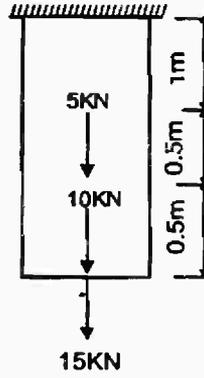
س7 : قضيب مستقيم من الالومنيوم طول قطره 20mm ، ومعرض لقوة شد محورية مقدارها 45 KN . إذا علمت أن معامل المرونة $E = 90 \text{ G N / m}^2$ ، ومعامل بواسون $\mu = 0.25$ ، أوجد ما يلي :

1. الاستطالة في طول قياس مقداره 20mm .
2. وحدة الإجهاد .
3. وحدة الانفعال .

س8 : سلك مستقيم من الألمنيوم طوله 40m ، معرض لإجهاد شد قيمته 85 Mpa ، إذا علمت أن معامل المرونة لمادة الألمنيوم هو $E = 70 \text{ G N / m}^2$ ، ومعامل التمدد الخطي هو $\alpha = 25 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ، أوجد ما يلي :

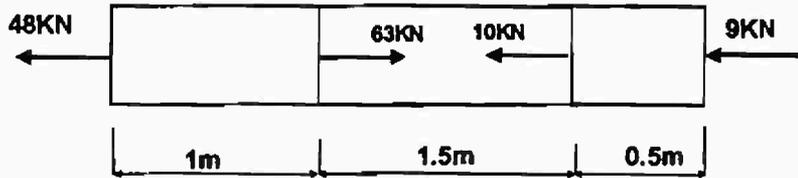
1. الاستطالة الكلية للسلك .
2. التغير في درجة الحرارة الذي قد يسبب نفس الاستطالة .

س9 : قضيب من الصلب ذو مقطع مستعرض منتظم مساحة مقطع تساوي 400 mm^2 ، وطوله الكلي 2m ، ومعامل المرونة لمادته يساوي $E = 200 \text{ G N / m}^2$. معلق رأسياً ويحمل حملاً مقداره 15 KN عند نهايته السفلى القصوى ، كما يبين الشكل (2-37) ، تؤثر فوقها قوة رأسية مقدارها 10 KN ، ويؤثر فوق هذه النقطة الأخيرة حمل مقداره 5 KN . أوجد الاستطالة الكلية للقضيب .



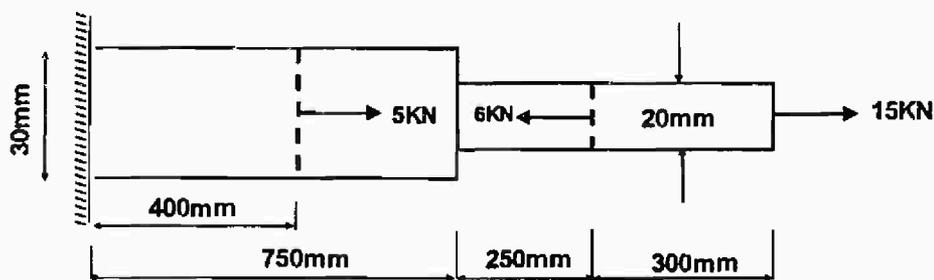
الشكل (2-37)

س10 : قضيب من النحاس الأصفر معرض لحمولات محورية مبينة في الشكل (2-38) ، له مقطع مستعرض مساحته 1000mm^2 . إذا علمت أن معامل المرونة للنحاس الأصفر يساوي $E = 90 \text{ GN} / \text{m}^2$. أوجد الاستطالة الكلية في القضيب .



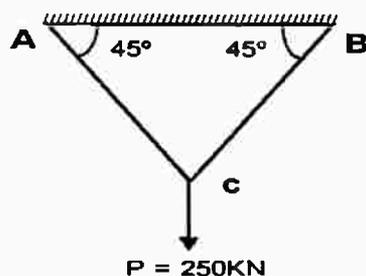
الشكل (2-38)

س11 : قضيبان منشورين من النحاس الأصفر مثبتان ببعضهما بجساءة ومعرضان لتأثير حمولات شد محورية كما يبين الشكل (2-39) . أجب الأجهاد في كل مقطع من مقاطع المجموعة والاستطالة الكلية الناتجة . إذا علمت أن معامل المرونة لمادة النحاس الأصفر هو $E = 90 \text{ GN} / \text{m}^2$.



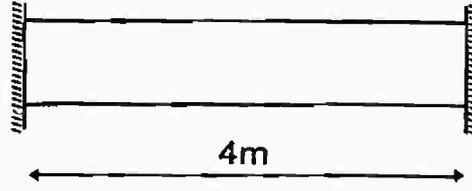
الشكل (2-39)

س12: قضيبان من الفولاذ متصلان معاً بمفصل عند النقطة c ويؤثر عليها قوة مقدارها 250KN كما يبين الشكل (2-40). أوجد الإزاحة الراسية للنقطة c ، ثم أوجد مساحة مقطع القضبان بحيث لا يزيد الأجهاد العمودي فيهما عن 100Mpa ، إذا علمت أن معامل المرونة لمادة الفولاذ هو $E = 200 \text{ G N / m}^2$.



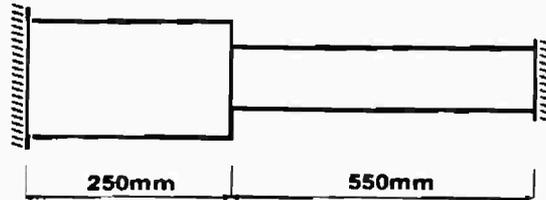
الشكل (2-40)

س13: قضيب من الفولاذ مثبت بجساءة من نهايتيه في حوائط خرسانية كما يوضح الشكل (2-41) ، وله مقطع مستعرض منتظم طوله 4m ، ومساحة مقطعه المستعرض تساوي 2000mm^2 . عند درجة حرارة 300K° لا يحدث أي أجهاد في القضيب . احسب الأجهاد في القضيب إذا هبطت درجة الحرارة إلى 275 K° ، علماً بأن معامل المرونة للفولاذ $E = 200 \text{ G N / m}^2$.



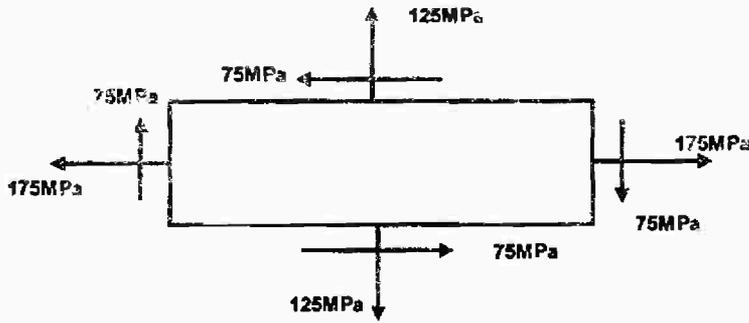
الشكل (41-2)

س14: الشكل (42-2) قضيبان مستقيمان متصلان معاً ومثبتان بدعامات في حوائط ، القضيب الأيسر من النحاس الأصفر ذو مساحة مقطع مستعرض تساوي 400mm^2 ، والقضيب الأيمن من الألومنيوم ذو مساحة مقطع مستعرض يساوي 650mm^2 . إذا علمت أن النحاس له $E = 90 \text{ GN/m}^2$ و $\alpha = 20 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ، ولألومنيوم $E = 70 \text{ GN/m}^2$ و $\alpha = 25 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ، وأن النظام في حالة عدم أجهاد . أحسب الأجهاد العمودي في كل قضيب إذا حدث هبوط في درجة الحرارة مقداره 20K° .



الشكل (42-2)

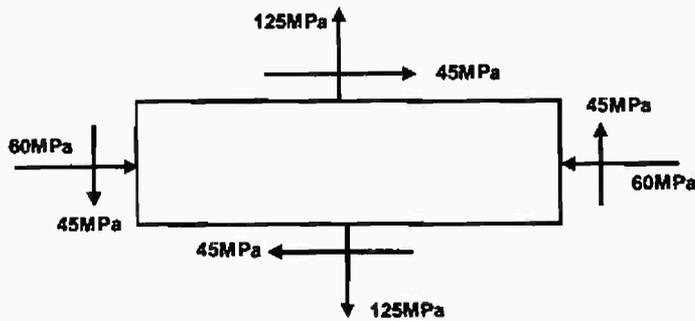
س15: عنصر مستو في جسم معرض للاجهادات المبينة في الشكل (43-2) ، عين حسابياً :
 (a) الأجهادات الرئيسية واتجاهاتها .
 (b) أجهادات القص القصوى واتجاهات المستويات التي تحدث عليها .



الشكل (43-2)

س16: عنصر مستو معرض للأجهادات المبينة في الشكل (44-2) عين ما يلي :

1. الأجهادات الرئيسية واتجاهاتها .
2. إجهادات القص القصوى واتجاهات المستويات التي تحدث عليها .

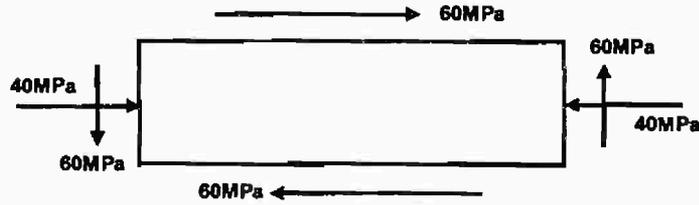


الشكل (44-2)

س17: عنصر مستوي في جسم معرض للأجهادات
 $\sigma_\alpha = 45 \text{ MPa}$ ، $\sigma_\beta = 0$ ، $\tau = 65 \text{ MPa}$ ، عين حسابياً
 الأجهادات العمودية واجهادات القص الموجودة على مستوى يميل 45° على
 محور X .

س18: عنصر مستو في جسم معرض للاجهادات المبينة في الشكل (2-45) عين حسابياً :

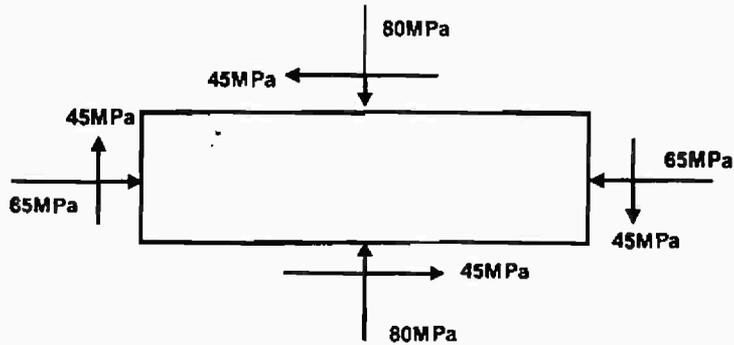
1. الأجهادات الرئيسية واتجاهاتها .
2. إجهادات القص القصوى واتجاهات المستويات التي تحدث عليها .



الشكل (2-45)

س19: عنصر معرض للاجهادات المبينة في الشكل (2-46) عين باستخدام الطريقة البيانية " دائرة مور " ما يلي :

1. الاجهادات الرئيسية واتجاهاتها .
2. إجهادات القص القصوى واتجاهات المستويات التي تحدث عليها .



الشكل (2-46)

