

الباب السادس

الانحناء

(Bending)

- 1.5 مقدمة .
- 2.6 الركائز والدعائم والاتصالات .
- 3.6 أنواع وتصنيف العتبات .
- 4.6 أنواع الحمولات .
- 5.6 تحديد ردود الأفعال في الركائز والدعائم والاتصالات .
- 6.6 تحديد القوى الداخلية عند الانحناء .
- 7.6 اصطلاح الإشارات لقوة القص وعزم الانحناء .
- 8.6 العلاقة بين قوة القص وعزم الانحناء وكثافة الحمولة الموزعة .
- 9.6 الرسوم البيانية لمخططات قوة القص وعزم الانحناء .
- 10.6 تحديد الأجهادات العمودية في العتبات .
- 11.6 تحديد أجهادات القص في العتبات .
- 12.6 الأجهادات الرئيسية في العتبات .
- 13.6 أشكال مقاطع العتبات المختلفة .
- 14.6 الانحناء اللدن للعتبات .
- 15.6 تمارين .

1.6 مقدمة

في كثير من الأحيان تتعرض الأعمدة والقضبان لتأثير الحملات العرضية ، أو القوى الخارجية المزدوجة ، والتي يمر مستوى تأثيرها بمحور العمود أو القضيب . وفي هذه الحالة تظهر في المقاطع العرضية للعمود عزوم الانحناء (Bending Moments) ، أي العزوم الداخلية التي يكون تأثيرها عمودياً على المستوى العرضي للعمود أو القضيب . وأن تأثير الحملات العرضية تعمل على انحناء محور القضيب ، ويسمى مثل هذا النوع من الحملات بحمولات الانحناء (Bending Loads) .

أن الأعمدة والقضبان التي تعمل بالأساس على الانحناء تسمى عادة بالعتبات أو الكمرات (Beams) ، وعليه فإن الجزء الإنشائي يسمى عتبة أو كمره عندما يكون ذلك الجزء طويلاً نسبياً بالمقارنة مع بعديه الجانبين ، ويتعرض وهو في حالة ارتكاز مناسب إلى قوى عرضية تؤدي إلى حنايته في مستوى محوري . ويسمى الانحناء بالانحناء الخالص (Pure Bending) إذا كان عزم الانحناء هو القوة الداخلية الوحيدة في مقطع العمود أو القضيب . ولكن في أحياناً كثيرة تظهر في المقاطع قوى عرضية إلى جانب عزوم الانحناء ، ويسمى الانحناء في هذه الحالة بالانحناء العرضي .

أما إذا كان مستوى تأثير عزم الانحناء يمر بأحد محاور القصور الذاتي الرئيسية المركزية لمقطع القضيب العرضي ، فيسمى في هذه الحالة الانحناء بالانحناء المستوي (Plane Beding) ، أما في الحالة المضادة فيسمى بالانحناء المائل . وعند الانحناء المستوي يبقى محور العتبة في مستوى القوى الخارجية حتى بعد التشوه ، أي في مستوى القوة . أما عند الانحناء المائل فإن مستوى التشوهات لا ينطبق على مستوى القوة .

أن الانحناء المستوى للقضبان الرقيقة الجدران في حالة الحملات التي تؤثر في مستوى يمر بمحور القصور الذاتي الرئيسي الذي لا يعتبر محور تماثل لمقطع القضيب العرضي ، يصبح معقد نتيجة تشوهات الالتواء . وسوف نقوم في هذا الباب بدراسة انفعالات وتشوهات الانحناء الناتجة في حالة الانحناء المستوى الخالص ، أما الانحناء المائل الذي يرتبط بحالة مقاومة معقدة فيتم بحثه في أبواب أخرى .

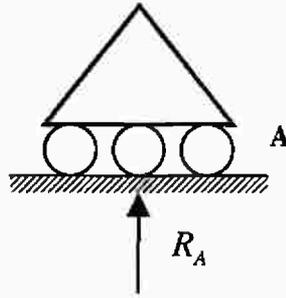
2.6 الركائز والدعائم والاتصالات

من المهم معرفة أنواع الركائز والدعائم والاتصالات في المنشآت التي تعمل على الانحناء ، لكي يتم تحديد عدد المجاهيل المتمثلة في ردود الأفعال ، يجب علينا معرفة نوعية القوى المؤثرة على هذه المنشآت من قوى عاملة (Acting Forces) ، أن كانت قوى مركزة أو قوى موزعة أو مزدوجة وغيرها ، حتى نستطيع تحديد القوى الداخلية المعروفة بردود الأفعال (Reactions) في الركائز والمساند والاتصالات .

وقد اشرنا إلى أن ردود الأفعال تتوقف على نوع الارتكاز والتثبيت (Supports and connection) ، والتي تقسم إلى أنواع كثيرة من أهمها ثلاثة أنواع ثنائية الأبعاد وهي :

1- الارتكاز البسيط أو ما يسمى بالمسند المتدحرج (Roller support) ويعتبر أبسط أنواع الارتكاز ، مثل المتدحرجات ، وحالة تلامس الأجسام الملساء ، أن هذا الارتكاز لا يمنع دوران نهاية العتبة أو الكمره ، وكذلك أزاحتها باتجاه مستوى التدحرج . ويمكن أن يظهر فيها رد فعل واحد ، ويكون رد الفعل عمودياً على مستوى التلامس والتدحرج ، ويمر بمركز الدحراج .

أن الشكل (1-6) يبين المسند المتدحرج ونظراً لأن اتجاه رد الفعل في المركز البسيط محدد فهو يعتبر مجهولاً واحداً في معادلات الاتزان . أن هذا النوع من الارتكاز يعطى العتبات أمكانية تغيير طولها بسهولة عند اختلاف درجات الحرارة ، وفي نفس الوقت التخلص من احتمال ظهور الأجهادات الحرارية .

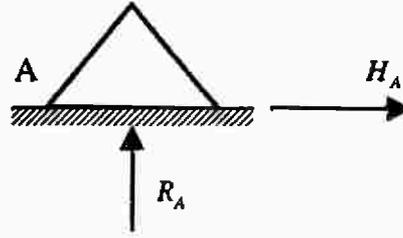


الشكل (1-6)

حيث أن :

R_A - رد الفعل العمودي في المسند A .

2- الارتكاز المفصلي أو ما يسمى بالمفصل (Hinge) ، وهو عبارة عن تثبيت نقطة من الجسم بحيث يمكن أن يدور حولها ، لذا فإن هذا النوع من الارتكاز يسمح بدوران طرف العتبة أو الكمرة ، ولكنه يمنع أزاحتها الانتقالية إلى أية جهة كانت ، أن رد الفعل الحاصل فيها يمكن تحليله إلى مركبتين أفقية ورأسية . ويجب أن يقع المفصل على مستوى محور العتبة ، ورد الفعل في المفصل يكافئ قوة خط عملها مجهول كتلامس جسم مع سطح خشن ، وعلى ذلك ينطوي رد فعل المفصل على مجهولين هما مركبتيه المتعامدتين H_A ، R_A كما هو مبين في الشكل (2-6) .

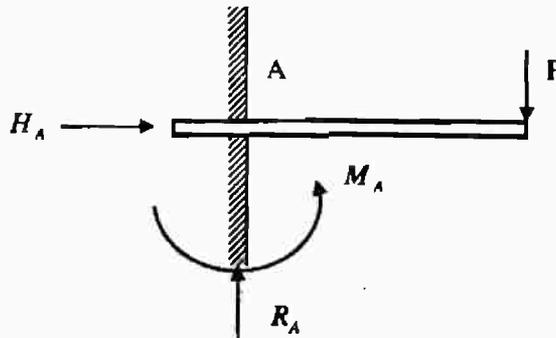


الشكل (2-6)

حيث أن :

- . H_A - رد الفعل الأفقي في المفصل A .
- . R_A - رد الفعل العمودي في المفصل A .

3- التثبيت الصلب أو المسند المثبت (Fixed support) أن مثل هذا التثبيت - الربط - لا يسمح بالإزاحة الخطية والزواوية للمقطع فوق المركز ، ويعني ذلك منع الحركة سواء خطياً أو دورانياً ، أي أن رد الفعل يكون مكافئ لقوة وعزم ازدواج ، كحامل مثبت أي عمود كهربائي . وعلى هذا يتألف رد فعل التثبيت من مجاهيل ثلاثة هي H_A ، R_A ، M_A ، أي مركبتين رأسية وأفقية وعزم الربط أو القمط كما هو مبين في الشكل (3-6) .



الشكل (3-6)

حيث أن :

- . H_A - رد الفعل الأفقي في المسند الثابت A .
- . R_A - رد الفعل العمودي في المسند الثابت A .
- . M_A - عزم التثبيت في المسند A .

أن حل المسائل المتعلقة بإيجاد ردود الأفعال يتطلب إنشاء وتوضيح القوى التي تؤثر على العتبات ، وتعد هذه الخطوة البداية السليمة والمهمة في حل هذه المسائل والتي تعتمد على شروط الاتزان الإستاتيكي بعد ذلك ، لذلك يتم وضع مخطط الجسم الحر (Free-Body Diagrams) للمسألة المدروسة .

وتسمى العتبة المثبتة من أحد طرفيها بالعتبة الكابولية . وإذا أمكن الحصول على ردود الأفعال في الركائز من معادلات الاتزان الإستاتيكي ، فتسمى عند ذلك عتبات محددة استاتيكيًا (Statically Determinate Beams) . وإذا كان عدد ردود الأفعال في الركائز أكثر من عدد معادلات الاتزان الإستاتيكي المتوفرة لهذه المسألة فتسمى العتبات عندئذ ، بالعتبات غير المحددة استاتيكيًا (Statically Indeterminate Beams) . ولتحديد ردود الأفعال في مثل هذه العتبات فإن ذلك يتطلب وضع معادلات إضافية تسمى بمعادلات الانفعالات (التشوّهات) أو الازاحات .

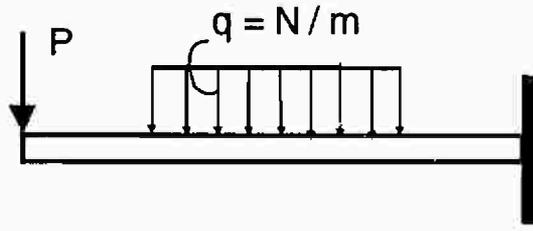
ولغرض رسم الرسم البياني للجسم الحر الخاص بالعتبة ، فإنه لا بد من التعرف على نوع القوى التي تؤثر على العتبة وخاصة في الركائز والمساند والاتصالات المختلفة . كما يجب تعريف كل قوة بمقدارها المعلوم أو برمز عندما تكون القوة غير معلومة . ويمكن افتراض اتجاه القوى غير المعلومة على أن يصحح هذا الافتراض فيما بعد إذا ظهر أنه غير صحيح .

3.6 أنواع وتصنيف العتبات

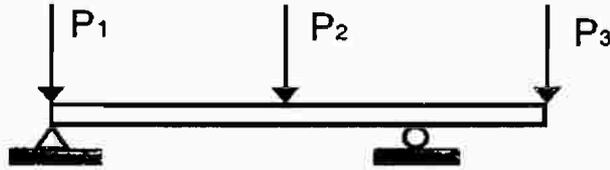
أشرنا في بداية هذا الباب إلى أن الجزء الإنشائي يسمى عتبة أو كمرة عندما يكون ذلك الجزء طويلاً نسبياً بالمقارنة مع بعديه الجانبين ، ويتعرض وهو في حالة ارتكاز مناسب إلى قوى عرضية تؤدي إلى حنائه في مستوى محوري ، وأن الأعمدة والقضبان التي تعمل بالأساس على الانحناء تسمى عادة بالعتبات أو الكمرات (Beams) . وتسمى العتبة المثبتة من أحد طرفيها بالعتبة الكابولية (Cantilever Beam) كما يبين الشكل (a.4-6) ، حيث أن النهاية اليسرى للعتبة تنحرف بحرية في حين أن النهاية اليمنى مثبتة بجساءة تامة داخل حائط ، وتتكون ردود الأفعال على العتبة عند اليمين من رد فعل رأسي بالإضافة ورد فعل أفقي وعزم التثبيت أو القمط . كما تسمى العتبة المرتكزة بحرية عند نقطتين وتمتد إحدى نهايتها أو كلتا النهايتين خلف نقاط الارتكاز أيضاً بالعتبة الكابولية كما هو مبين في الشكل (b.4-6) .

وتسمى العتبات أو الكمرات التي ترتكز بحرية عند نهايتها بالعتبات البسيطة (Simple Beams) ، أي أن دعائم الارتكاز عند النهايتين قادرة فقط على بذل قوى على العتبة وغير قادرة على بذل أي عزم . وهذا لأنه لا يوجد أي قيود ضد الدوران الزاوي لنهايتي العتبة عند نقاط الارتكاز عندما تبدأ العتبة بالانفعال تحت تأثير الحمولات المختلفة . والشكل (c.4-6) يبين هذا النوع من العتبات .

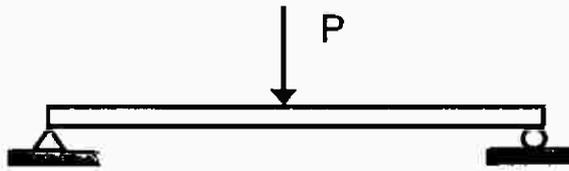
ويلاحظ في العتبات والكمرات البسيطة أنه يجب تكون إحدى دعائم الارتكاز على الأقل قادرة على الحركة في الاتجاه الأفقي بحيث لا توجد قوة في اتجاه محور العتبة .



(a)



(b)

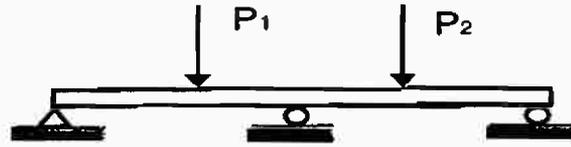


(c)

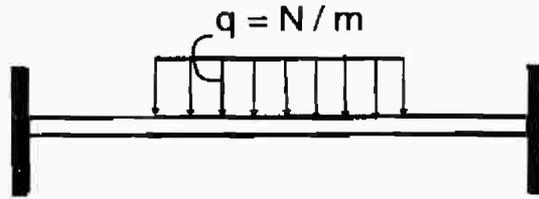
الشكل (4-6)

وإذا أمكن الحصول على ردود الأفعال في ركائز ودعائم العتبات البسيطة والعتبات الكابولية وغيرها من معادلات الاتزان الإستاتيكي ، فإن هذه العتبات والكوابيل عندئذ تسمى بالعتبات المحددة استاتيكيًا (Statically Determinate Beams) . أما إذا كان عدد ردود الأفعال في الركائز أكثر من عدد معادلات الاتزان الإستاتيكي المتوفرة لهذه المسألة ، فإن هذه العتبات عندئذ تسمى بالعتبات غير المحددة استاتيكيًا

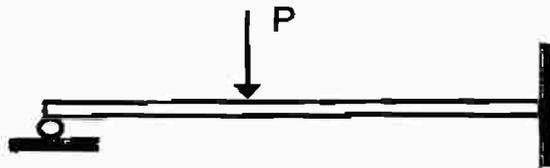
(Statically Indeterminate Beams) . ولتحديد ردود الأفعال في مثل هذه العتبات فإن ذلك يتطلب وضع معادلات إضافية تسمى بمعادلات الانفعالات (التشوّهات) أو الازاحات . والشكل (5-6) يبين أمثلة لعتبات وكمرات غير محددة استاتيكيًا ، حيث يبين الشكل (a.5-6) عتبة تمتد وترتكز على ثلاث ركائز ، والشكل (b.5-6) يبين عتبة مثبتة بجساءة عند نهايتها ، والشكل (c.5-6) يبين عتبة كابولية مرتكزة عند نهايتها البعيدة بمسند متحرك ، وكل هذه العتبات أمثلة على العتبات الغير محددة استاتيكيًا .



(a)



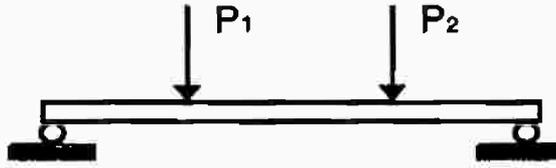
(b)



(c)

الشكل (5-6)

أما إذا كانت عدد ردود الأفعال أقل من عدد معادلات الاتزان الإستاتيكي ، فإن هذه العتبات في هذه الحالة تسمى بالعتبات أو الكمرات الغير مستقرة أو المنهارة أي أنها لا تحقق شروط الاتزان ولا يجوز استخدامها ، والشكل (6-6) يبين عتبة غير مستقرة لن عدد ردود الأفعال اثنان وشروط الاتزان هي ثلاث شروط .



الشكل (6-6)

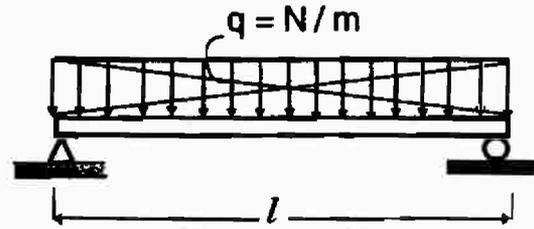
4.6 أنواع الحمولات

بعد دراستنا لأنواع الركائز والدعائم والاتصالات المستخدمة في تثبيت المنشآت التي تعمل على الانحناء أي الكمرات والعتبات المختلفة ، ومعرفتنا برود الأفعال التي قد تنتج عن كل نوع من هذه الركائز والدعائم والمساند يجب علينا قبل البدء في دراسة طرق إيجاد ردود الأفعال في المنظومات أن نقوم بالتعرف على طبيعة وأشكال القوى الخارجية ، أي الحمولات الخارجية العاملة والمؤثرة على الكمرات والعتبات ، والتي عادةً ما تصادفنا في كثير من المسائل ، والتي يمكن أن تكون ذو أشكال مختلفة منها :

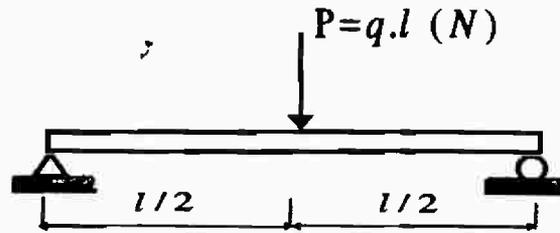
1- القوى المركزة وهي القوى التي تؤثر في نقطة واحدة ، ومثل هذا النوع من الحمولات يظهر في الرسم البياني لمخطط الجسم الحر .

2- القوى أو الحمولات الموزعة بانتظام (uniformly distributed load) ويعبر عن هذه القوى والحمولات بالنيوتن لكل متر طولى ، ويرمز لها بالرمز (N/m) . أن هذا النوع وهو الحمولة الموزعة بانتظام يكون على شكل مستطيل ، ومن الأمثلة على ذلك وزن عتبة مسنده إسناداً بسيطاً كما هو مبين في الشكل (a.7-6) حيث يعتبر الوزن لهذه العتبة حمولة موزعة بانتظام على المتر الطولي لهذه العتبة .

وعند حل المسائل المختلفة وبذات عند إيجاد ردود الأفعال ورسم مخططات الأجسام الحرة (F.B.D) ، يجب علينا تحويل هذه الحمولة الموزعة بانتظام إلى قوة مركزة مكافئة لهذه الحمولة الموزعة كما هو مبين في الشكل (b.7-6) ، ونلاحظ انه تم تحويل الحمولة إلى قوة مركزة تؤثر في مركز النقل بالنسبة للمستطيل أي في منتصفه مقدارها $P = q.l, (N)$.



(a)

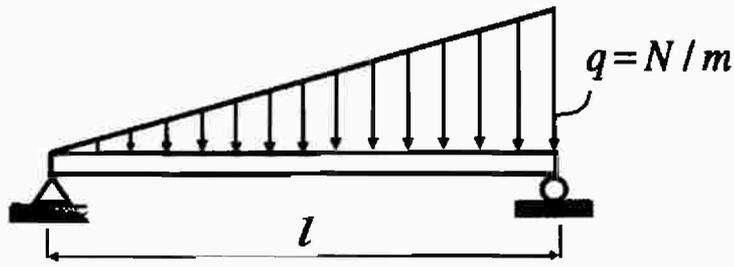


(b)

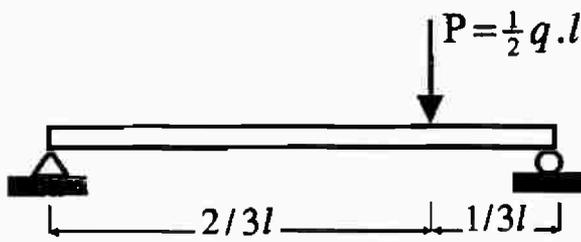
الشكل (7-6)

3- الحمولات المتغيرة بانتظام (uniformly varying load) ، ويعبر عن هذه القوى والحمولات بالنيوتن لكل متر طولي ، ويرمز لها بالرمز q ووحدها هي (N/m) . أن هذا النوع وهو الحمولة الموزعة المتغيرة بانتظام تكون على شكل مثلث كما هو مبين في الشكل (a.8-6) ، وهذه الحمولات تعمل على الجدران الرأسية والمائلة للخزانات المحتوية على السوائل ، كما تعمل أيضا على العتبات والأبنية المختلفة .

وعند حل المسائل الخاصة بإيجاد ردود الأفعال ورسم مخطط (F.B.D) للعتبة ، يجب علينا تحويل هذه الحمولة الموزعة بانتظام إلى قوة مركزية مكافئة لهذه الحمولة الموزعة تؤثر في مركز ثقل المثلث كما يبين الشكل (b.8-6) .



(a)



(b)

الشكل (8-6)

نلاحظ أن الحمل المتغير بانتظام (q) قد تم استبداله بقوة مكافئة P حيث أن :

$$P = \frac{1}{2} q \cdot e , (N)$$

وهي مساحة مثلث الحمولة الذي قاعدته e وارتفاعه q ، وتؤثر هذه القوة كم أشرنا سابقاً في مركز نقل المثلث الذي يبعد عن المسند المتدرج A مسافة $\frac{2}{3} e$ وعن المفصل B $\frac{1}{3} e$. وأن حلول الأمثلة المختلفة ستوضح كيفية استبدال وتحويل هذه الأنواع من الحمولات إلى قوى مركزه في نقطة واحدة .

5.6 تحديد ردود الأفعال في الركائز والدعائم والاتصالات

أن تحديد ردود الأفعال في الركائز والاتصالات ومناطق التثبيت تم دراسته في مادة الميكانيكا النظرية ، ولكن سوف نقوم بذكر الخطوات الهامة والرئيسية التي يجب أتباعها عند حلول المسائل بشكل عام لتنظيم التحليل ، وتسلسل خطوات الحل بالاتجاه الصحيح والتي تمكن الطالب من استيعاب هذه الخطوات بطريقة سهلة ومبسطة . وتعتبر هذه الخطوات مرشداً يساعد في حلول المسائل المتعلقة بالاتزان وتحديد ردود الأفعال ، ومن أهم هذه الخطوات هو :

1- معرفة نوعية القوى المؤثرة على من قوى عاملة (Acting Forces) ، والقوى المعروفة بردود الأفعال (Reactions) في الركائز والدعائم والمساند والاتصالات .

2- وضع الرسم البياني لمخطط الجسم الحر (Free-Body Diagrams) للعبة أو الكرة المدروسة ، وفرض رسم مخططات الجسم الحر لا بد من

التعرف على نوع القوة التي تؤثر على الجسم لكافة أنواع الدعائم والمساند والاتصالات . كما يجب تعريف كل قوة بمقدراها المعلوم أو برمز عندما تكون القوة غير معلومة .

3- تفرض اتجاهات ردود الأفعال عادةً في الاتجاهات الموجبة على أن تعدل على الرسم البياني إذا ظهرت سالبة بعد الحل .

4- نقوم بتحويل القوى الموزعة إلى قوى مركزة في نقطة واحدة كما تم عرضه في البند السابق .

5- نضع شروط الاتزان الإستاتيكي الثلاث والتي يمكن التعبير عنها جبرياً حسب المعادلات التالية :

$$\sum F_x \rightarrow^+ = 0 \dots\dots\dots(1-6)$$

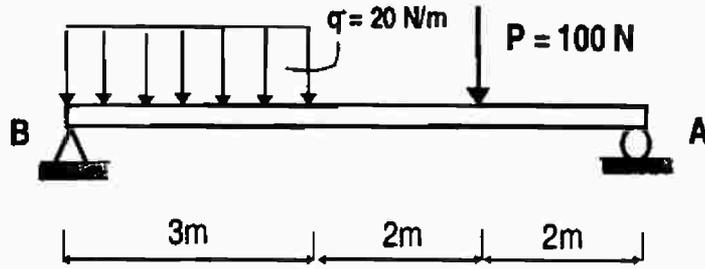
$$\sum F_y \uparrow^+ = 0 \dots\dots\dots(2-6)$$

$$\sum M_{(o)} \curvearrowright^+ = 0 \dots\dots\dots(3-6)$$

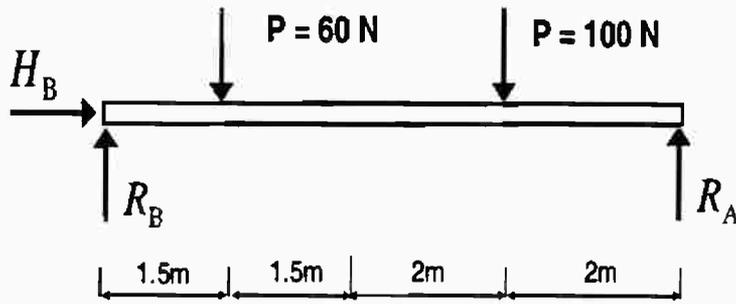
وبحل هذه المعادلات يمكننا إيجاد ردود الأفعال في كمره أو عتبة محددة أستاتيكيًا . أن المعادلات الثلاثة المبينة أعلاه تبين أن الجزء الإنشائي أو الجسم يكون في حالة أتزان عندما تكون مجموع القوى المؤثرة على المحور (x) مساوية للصفر ، ومجموع القوى على محور (y) مساوية للصفر، ومجموع عزوم القوى حول أي نقطة اختيارية (o) من العتبة مساوية للصفر . وهذه الشروط تسمى بشروط الاتزان الإستاتيكي وهي لازمة وكافية للاتزان . وأن الأمثلة التالية سوف توضح لنا كيفية إيجاد ردود الأفعال في الركائز والمساند المختلفة حسب الخطوات المذكورة أعلاه . حيث يجب على الطالب استيعاب هذه الخطوات لأهميتها في دراسة وتحديد القوى الداخلية ورسم مخططات قوى القص وعزم الانحناء .

مثال (1-6)

أوجد ردود الأفعال في المسند المتدرج A ، والمفصل B على العتبة البسيطة المحملة بالحمولات الخارجية المبينة في الشكل (a.9-6) .



(a)



(b)

الشكل (9-6)

الحل :

لتحديد ردود الأفعال نقوم كخطوة أولى ومهمة برسم الرسم البياني لمخطط الجسم الحر للعتبة كما يبين الشكل (b.9-6) ، وبعد ذلك نضع معادلات شروط أتران العتبة الثلاث ، ويلاحظ من المخطط أن المسألة تحتوي على ثلاثة مجاهيل ردود أفعال ، وبالتالي هي مسألة محددة أستاتيكيًا ، لان عدد المجاهيل يساوي عدد معادلات وشروط الاتزان الثلاث وهي :

$$\sum F_x \rightarrow^+ = 0 ;$$

$$H_B = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$\sum F_y \uparrow^+ = 0 ;$$

$$R_B + R_A - 100 - 60 = 0 \dots\dots\dots(2)$$

$$\sum M_{(B)} \curvearrowright^+ = 0 ;$$

$$-60(1.5) - 100(5) + R_A(7) = 0 \dots\dots\dots(3)$$

نقوم بحل المعادلات الثلاثة لنحصل على قيم ردود الأفعال المجهولة ، فمن المعادلة رقم (1) نجد أن :

$$H_B = 0$$

ومن المعادلة رقم (3) نجد رد الفعل العمودي R_A حيث أن :

$$7 R_A = 90 + 500$$

$$R_A = 84.2 N$$

وبالرجوع إلى المعادلة رقم (2) نجد رد الفعل العمودي في المفصل B حيث أن :

$$R_B + R_A = 160$$

$$R_B = 160 - 84.3$$

$$= 75.7 N$$

وهكذا حصلنا على ردود الأفعال الثلاث ، أما الخطوة الأخيرة فتسمى خطوة التأكد من الحل أي من قيم ردود الأفعال التي حصلنا عليها ، وذلك عن طريق إيجاد العزم حول أي نقطة اختيارية أخرى غير النقطة (B) ولتكن النقطة (A) مثلاً ، حيث يجب أن يكون مجموع العزوم حول هذه النقطة مساوياً للصفر وذلك بعد تعويض قيم ردود الأفعال التي حصلنا عليها حيث :

$$\sum M_{(A)}^+ = 0 ;$$

$$100(2) + 60(5.5) - 75.7(7) = 0$$

$$200 + 330 - 530 = 0$$

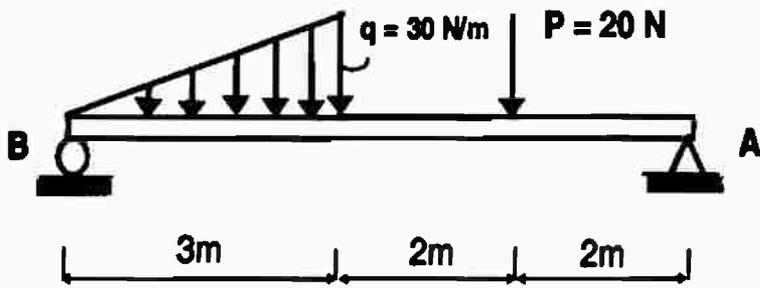
وهكذا تم التأكد من صحة قيم ردود الأفعال التي حصلنا عليها .

مثال (2-6)

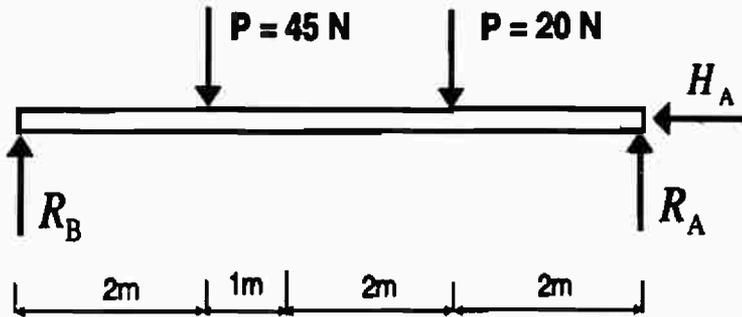
أوجد ردود الأفعال في المفصل A ، والمسند المتدرج B على العتبة البسيطة المحملة بالحمولات الخارجية المبينة في الشكل (a.10-6) .

الحل :

لتحديد ردود الأفعال نقوم باتباع نفس الخطوات التي تم أتباعها في المثال (2-6) ، حيث نقوم برسم الرسم البياني لمخطط الجسم الحر للعتبة كما يبين الشكل (b.10-6) ، وبعد ذلك نضع معادلات الاتزان الثلاثة ، أن الرسم البياني لمخطط الجسم الحر يبين أن العتبة أو الكمره محددة أستاتيكيًا ، لان عدد المجاهيل يساوي عدد معادلات وشروط الاتزان الثلاث ، نضع هذه الشروط ونجد ردود الأفعال حيث :



(a)



(b)

الشكل (10-6)

$$\sum F_x \rightarrow^+ = 0 ;$$

$$H_A = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$\sum F_y \uparrow^+ = 0 ;$$

$$R_B + R_A - 45 - 20 = 0 \dots\dots\dots(2)$$

$$\sum M_{(A)} \curvearrowright^+ = 0 ;$$

$$20(2) + 45(5) + R_A(7) = 0 \dots\dots\dots(3)$$

نلاحظ من مخطط الجسم الحر للعتبة كما يبين الشكل (b.10-6) أن الحمولة المتغيرة بانتظام على شكل مثلث قد تم تحويلها إلى قوة مركزة في نقطة واحدة تؤثر في مركز ثقل المثلث حسب العلاقة التالية :

$$P = \frac{1}{2} q . e$$

وبالتالي فإن هذه القوة المركزة تساوي 45N . وبحل المعادلات الثلاثة نحصل على قيم ردود الأفعال المطلوب إيجادها ، فمن المعادلة رقم (1) نجد أن :

$$H_A = 0$$

ومن المعادلة رقم (3) نجد رد الفعل العمودي R_B حيث أن :

$$7 R_B = 265$$

$$R_B = 37.85 N$$

وبالرجوع إلى المعادلة رقم (2) نجد رد الفعل العمودي في المفصل A حيث أن :

$$37.85 + R_A = 65$$

$$R_A = 27.15$$

وهكذا حصلنا على ردود الأفعال الثلاث ، وللتأكد من الفعل أي من قيم ردود الأفعال التي حصلنا عليها ، نقوم بإيجاد العزم حول أي نقطة اختيارية أخرى غير النقطة (A) ولتكن النقطة (B) مثلاً حيث أن :

$$\sum M_{(B)} \curvearrowright^+ = 0 ;$$

$$R_A(7) - 20(5) - 45(2) = 0$$

$$27.15 - 100 - 90 = 0$$

مثال (3-6)

أوجد ردود الأفعال في المسند المثبت للعتبة الكابولية المبينة في الشكل (a.11-6).

الحل :

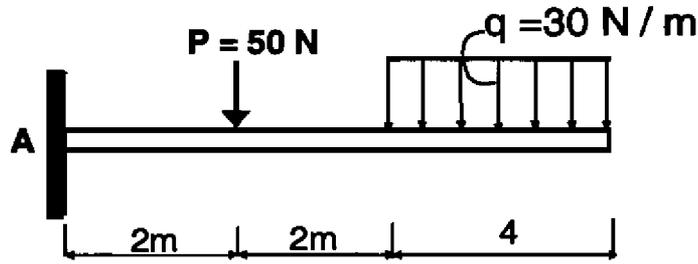
لتحديد ردود الأفعال نقوم برسم الرسم البياني لمخطط الجسم الحر للعتبة كما يبين الشكل (b.11-6)، وبعد ذلك نضع معادلات الاتزان الثلاثة، أن الرسم البياني لمخطط الجسم الحر يبين أن العتبة أو الكرة الكابولية محددة أستاتيكيًا، لأن عدد ردود الأفعال في المسند المثبت يساوي ثلاثة مجاهيل هي رد الفعل الأفقي H_A ، ورد الفعل العمودي R_A ، وعزم مفاعل M_A وتساوي معادلات وشروط الاتزان الثلاث، بعد ذلك نضع هذه الشروط ونجد ردود الأفعال حيث :

$$\sum F_x \rightarrow^+ = 0 ;$$

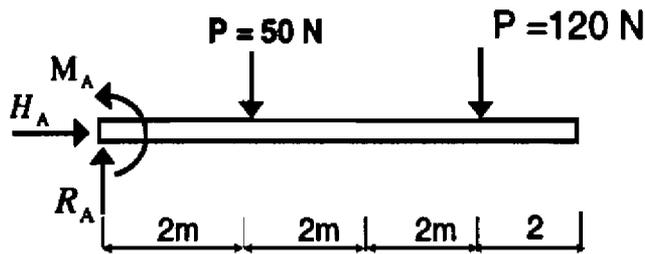
$$H_A = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$\sum F_y \uparrow^+ = 0 ;$$

$$R_A - 50 - 120 = 0 \dots\dots\dots(2)$$



(a)



(b)

الشكل (11-6)

ومن هذه المعادلة نجد رد الفعل العمودي R_A حيث :

$$R_A = 170 \text{ N}$$

ولإيجاد رد الفعل الثالث نجد العزم حول النقطة A حيث :

$$\sum M_{(A)}^{\curvearrowright} = 0 ;$$

$$M_A - 50(2) + 120(6) = 0 \dots\dots\dots(3)$$

ومن هذه العادلة نجد أن :

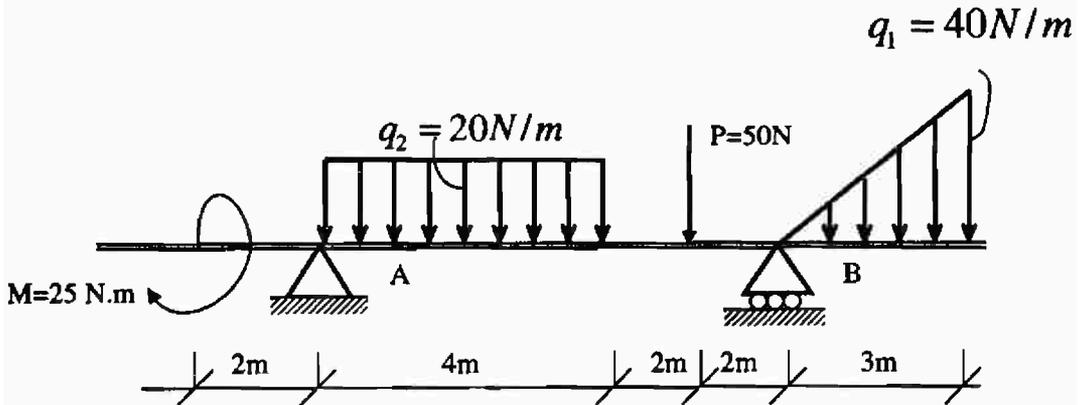
$$M_A = - 620 \text{ N.m}$$

$$M_A = 620 \text{ N.m}$$

أن العلامة السالبة تبين أن اتجاه العزم المفاعل الذي اتخذناه في البداية يجب أن يعكس . وهكذا فإن هذا العزم في الطرف المثبت يساوي مجموع عزوم القوى الخارجية بالنسبة للطرف المثبت .

مثال (4-6)

الشكل (12-6) يبين عتبة ذات بروز جانبية ومسلط عليها الحمولة الموزعة المتغيرة بانتظام ($q_1 = 40 \text{ N/m}$) ، والقوة المركزة في نقطة واحدة ($P = 50 \text{ N}$) ، والحمولة الموزعة بانتظام ($q_2 = 20 \text{ N/m}$) ، وعزم ناتج عن أزواج ($M = 25 \text{ N.m}$) . العتبة مسندة عند النقطة A بمسند مفصلي وعند النقطة B بمسند متدحرج (عجلة) . أوجد ردود الأفعال عند A ، B على العتبة .



الشكل (12-6)

الحل :

نقوم برسم الرسم البياني لمخطط الجسم الحر للعتبة (F.B.D) كما يبين الشكل (6-13) ، حيث نقوم بتحويل كافة الحمولات الموزعة (q_2, q_1) إلى قوى مركزة تؤثر في نقطة واحدة حتى نستطيع وضع شروط ومعادلات الاتزان الإستاتيكي الثلاث .

أن الحمولة الموزعة بانتظام على شكل مستطيل q_2 تحول إلى قوة عمودية مركزة تؤثر في مركز ثقل المستطيل وتساوي :

$$q_2 \cdot e = 20 (N / m) \cdot 4 (m) = 80 N$$

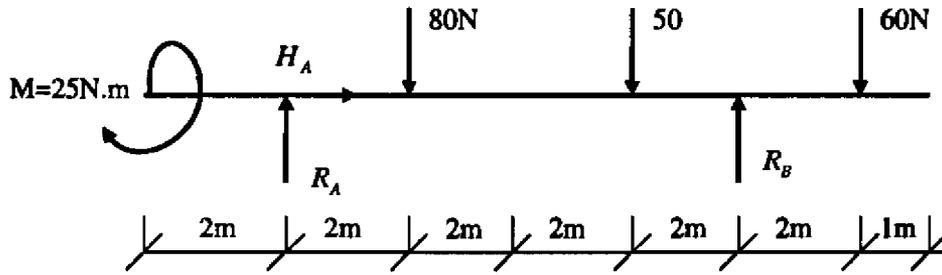
أما بالنسبة للحمولة المتغيرة بانتظام على شكل مثلث فتستبدل بقوة مركزة مؤثرة في مركز ثقل المثلث وتساوي:

$$\frac{1}{2} q_1 \cdot e = \frac{1}{2} \times 40 \times 3 = 60 N$$

وهي مساحة مثلث الحمولة الذي قاعدته 3m وارتفاعه 40N/m وتؤثر هذه القوة في مركز ثقل المثلث الذي يبعد (2m) من المسند المتدرج B.

أما العزم $M=25N.m$ فإنه يظهر على مخطط الجسم الحر كما هو ويدخل في معادلة العزم الشرط الثالث للاتزان حسب إشارته إذا كان باتجاه عقارب الساعة سالب ، وإذا كان بعكس عقارب الساعة موجب .

بعد الانتهاء من رسم مخطط الجسم الحر للعتبة نقوم بوضع معادلات الاتزان الثلاث التي تمكنا من إيجاد ردود الأفعال المطلوبة حيث :



الشكل (13-6)

مخطط الجسم الحر (F.B.D) للعتبة

$$\sum F_x \rightarrow = 0;$$

$$H_A = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$\sum F_y \uparrow = 0;$$

$$R_A + R_B - 80 - 50 - 60 = 0 \dots \dots \dots (2)$$

$$\sum M_A \curvearrow = 0;$$

$$- 60(10) + R_B(8) - 50(6) - 80(2) - 25 = 0 \dots \dots \dots (3)$$

ومن المعادلة رقم (3) نجد رد الفعل (R_B) حيث :

$$8R_B = 600 + 300 + 160 + 25$$

$$R_B = \frac{600 + 300 + 160 + 25}{8} = 135,6 N$$

وبالرجوع إلى معادلة رقم (2) نجد قيمة رد الفعل R_A :

$$R_A + 135,6 - 80 - 50 - 60 = 0$$

$$R_A = 54,4 N$$

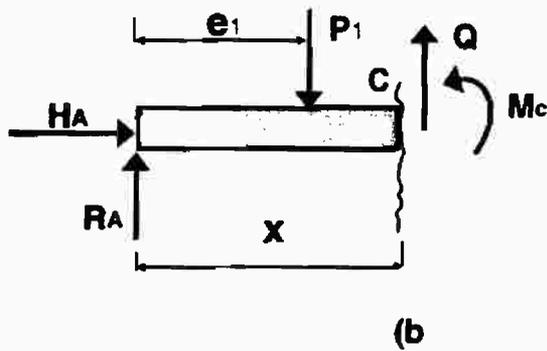
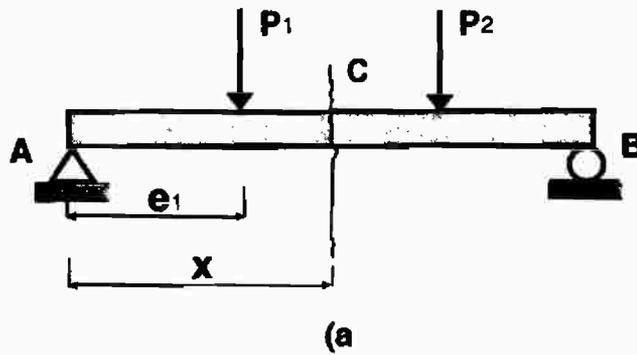
وللتأكد من الحل نستخدم معادلة المجموع الجبري للقوى بالاتجاه العمودي أو نجد العزم حول نقطة اختيارية أخرى مثل B حيث يجب أن يكون مجموع العزوم مساوياً للصفر .

6.6 تحديد القوى الداخلية عند الانحناء

نكرنا في بداية هذا الباب أنه عند تحميل العتبات والكمرات بقوى وازدواجات خارجية تظهر أجهادات داخلية في داخل هذه العتبات ، وبالتالي سوف يحدث بشكل عام أجهادات عمودية واجهادات قص . ففي حالة الانحناء العرضي المستوى تظهر في المقاطع العرضية للعتبة القوة العرضية أو ما يسمى بقوة القص (Shearing Force) والتي يرمز لها بالرمز Q ، وعزم الانحناء (Bending Moment) ويرمز له بالرمز M .

ولتحديد هذه القوى والاجهادات الناتجة عنها عند أي مقطع من العتبة فإنه من الضروري معرفة القوى المحصلة والعزم المحصل المؤثرين عند هذا المقطع . حيث يمكن الحصول عليها بتطبيق معادلات الاتزان الإستاتيكي الثلاث . ولدراسة ذلك نأخذ العتبة البسيطة والمبينة في الشكل (a.14-6) ، ونقوم بعمل قطع مثل c في النقطة التي تهمننا أي النقطة موضع الدراسة ، والواقعة على مسافة مثل x من المفصل الأيسر للعتبة ، ثم نهمل أحد قسمي العتبة وليكن الطرف الأيمن ونقوم بدراسة توازن القسم الأيسر .

والشكل (b.14-6) يبين استبدال الفعل المتبادل لقسمي العتبة بالقوى
الداخلية عزم الانحناء M_c ، وقوة القص Q .



الشكل (14-6)

ولتحديد M_c ، Q نضع معادلات الاتزان الإستاتيكي حيث أن :

$$\sum F_y \uparrow^+ = 0 ;$$

$$R_A - P_1 + Q = 0$$

$$Q = P_1 - R_A ;$$

$$Q = \sum (P_i)_y$$

وهكذا نجد أن قوة القص Q في المقطع العرضي تساوي عددياً المجموع الجبري لمساقط جميع القوى الخارجية على مستوى المقطع والتي تؤثر على جهة واحدة من المقطع .

$$\sum M_{(B)}^+ = 0 ;$$

$$-R_A(x) + P_1(x - e_1) + M_c = 0$$

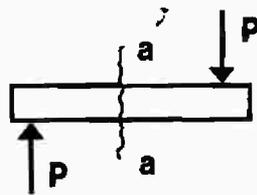
$$M_c = R_A(x) - P_1(x - e_1)$$

$$M_c = \sum m_c(p_i)$$

من هذه المعادلة نجد أن عزم الانحناء M_c في المقطع العرضي للعتبة يساوي عددياً المجموع الجبري لعزوم القوى الخارجية المحسوبة بالنسبة لمركز ثقل المقطع والتي تؤثر على جهة واحدة من المقطع .

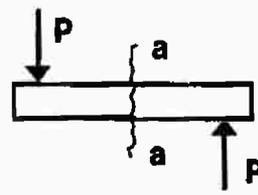
7.6 اصطلاح الإشارات لقوة القص وعزم الانحناء

تعتبر قوة القص Q في مقطع العتبة مثلاً في المقطع $(a - a)$ موجبة إذا كان اتجاه محصلة القوى الخارجية التي تقع على يسار المقطع من الأسفل إلى الأعلى ، والتي تقع على يمين المقطع من الأعلى إلى الأسفل كما يبين الشكل (a . 15-6) . وتعتبر سالبة إذا كان العكس كما يبين الشكل (b . 15-6) .



$$Q_{a-a} > 0$$

(a)

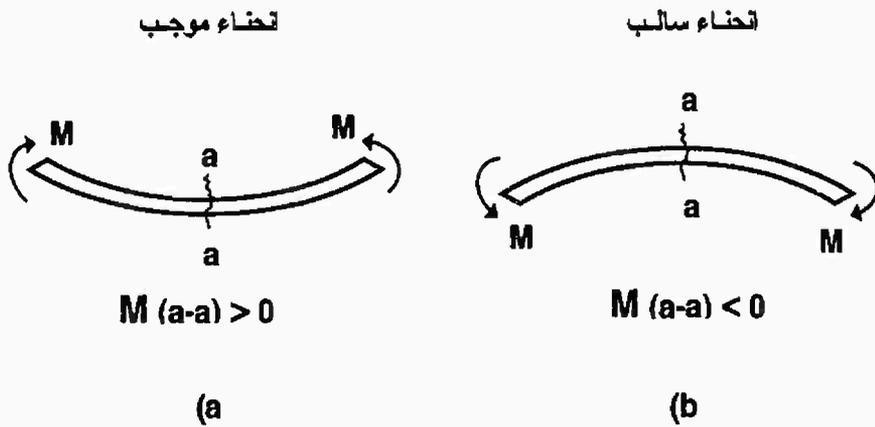


$$Q_{a-a} < 0$$

(b)

الشكل (15-6)

ويعتبر عزم الانحناء M في مقطع العتبة ، مثلاً في المقطع (a-a) موجباً ، إذا كان اتجاه محصلة عزم القوى الخارجية التي تقع على يسار المقطع ، باتجاه دوران عقارب الساعة ، والتي تقع على يمين المقطع ، باتجاه معاكس لدوران عقارب الساعة كما يبين الشكل (a.16-6) ، ويعتبر عزم الانحناء سالباً إذا كان العكس كما هو مبين في الشكل (b. 16-6) .



الشكل (16-6)

أن عزوم الانحناء المبينة في الشكل (a.16-6) تحني العتبة بحيث يكون التحدب إلى الأسفل ، أما العزوم المبينة في الشكل (b. 16-6) فإنها تحني العتبة بحيث يكون التحدب إلى الأعلى . ومن هنا يمكننا استنتاج طريقة أسهل لتحديد الإشارة الجبرية لعزم الانحناء يمكننا تذكرها ببساطة . حيث يعتبر عزم الانحناء موجباً ، إذا كان مقطع العتبة المدروس ينحني بتقعر إلى الأسفل .

ويمكن تلخيص اصطلاحات الإشارات لقوة القص وعزم الانحناء بناءً على ما تم عرضه بالقول أن " القوة التي تعمل على ثني العتبة أو الكمره بحيث تتقعر إلى الأعلى أنها تحدث عزم انحناء موجباً . والقوة التي تعمل لقص

الجزء الأيسر من العتبة إلى أعلى بالنسبة للجزء الأيمن أنها تحدث قوة قص موجبة . كما يمكننا القول أن القوى الخارجية المتجهة أعلى تحدث عزم انحناء موجباً والقوة التي تتجه إلى أسفل تحدث عزم انحناء سالباً " كما يبين الشكل (6-16) .

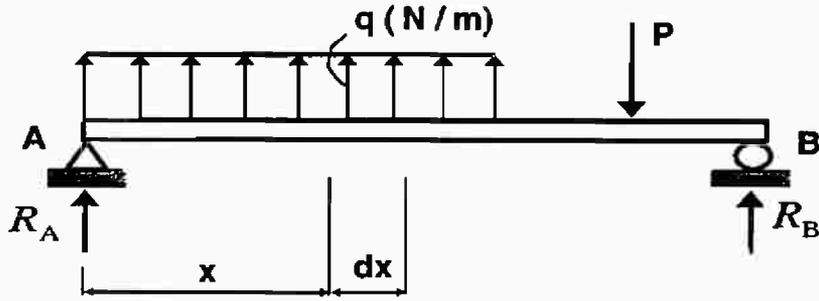
ويجب ملاحظة أن اصطلاحات الإشارة لقوة القص وعزم الانحناء هو اختياري ومن الممكن عكسها وأن الطريقة المختارة تعطي الإشارات الصحيحة رياضياً من حيث الانحدار والانحناء للعتبات ، وأن المخططات التي توضح التغيرات في قيم عزوم الانحناء وقوى القص على امتداد طول العتبة لأي ظروف تحميل ثابتة تعرف بمخططات عزم الانحناء وقوة القص ، والتي تعطي صورة واضحة عن المقطاع التي تتعرض إلى أقصى قص أو أجهادات والتي تساعد في كثير من الأحيان إلى إعادة النظر في التصميم .

8.6 العلاقة بين قوة القص وعزم الانحناء وكثافة الحمولة الموزعة

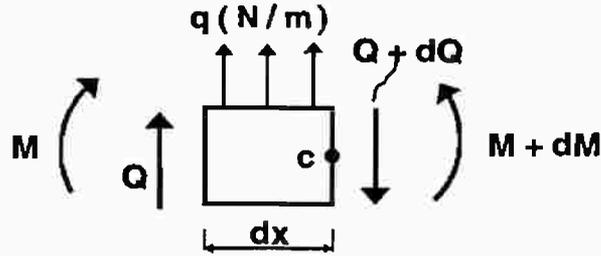
قبل البدء بدراسة كيفية رسم الرسومات البيانية للمخططات التي توضح التغيرات في قيم عزوم الانحناء وقوى القص على امتداد طول العتبة لأي ظروف تحميل ثابتة ، والتي تعطي صورة واضحة عن المقطع التي تتعرض إلى أقصى قص أو أجهادات ، وتساعد في كثير من الأحيان في عملية التصميم للعتبات والكمرات الإنشائية . يكون من المهم معرفة العلاقة بين قوة القص وعزم الانحناء وكثافة الحمولة الموزعة ، والتي تساعدنا في رسم الرسومات البيانية لهذه القوى .

ومن خلال دراسة العتبة البسيطة المحملة بحمولة اختيارية والمبينة في الشكل (6-17.a) ، يكون من السهل وضع علاقة بين قوة القص وعزم

الانحناء وكثافة الحمولة الموزعة ، مع أن الاعتبارات التي سوف نقوم بعرضها تظل قائمة لجميع أنواع العتبات وأشكال التحميل المختلفة .



(a)



(b)

الشكل (17-6)

من أجل ذلك نقوم بتحديد قوة القص أي القوة العرضية في المقطع الذي يقع على المسافة x من المفصل الأيسر A . حيث نجد قوة القص Q تؤثر على الجانب الأيسر للجزء تحت الدراسة ، ويفصل الجزء الذي طوله dx عن العتبة ورسم مخطط الجسم الحر لهذا الجزء والمبين في الشكل (b.17-6) ، والعبور خلال المسافة dx تتغير قوة القص لتصبح $Q + dQ$. كما ويؤثر عزم انحناء M على الجانب الأيسر للجزء ويتغير بالعبور خلال المسافة dx إلى $M + dM$ على الجانب الأيمن .

وبوضع معادلة الاتزان الثالثة ، أي بأخذ العزم حول النقطة c للجزء المدروس والمبين في الشكل (b.17-6) نجد أن :

$$\sum M_{(c)}^+ = 0 ;$$

$$M + dM - M - Qdx - qdx(dx/2) = 0$$

ومنه نجد أن :

$$dM = M - M + Qdx + qdx(dx/2)$$

$$= Qdx + \frac{1}{2}q(dx)^2$$

وبما أن الحد الأخير من هذه العلاقة يتكون من حاصل ضرب تفاضلين فإنه يهمل بالمقارنة مع الحدود الأخرى التي تحتوي على تفاضلاً واحداً فقط وبهذا يمكن أن نحصل على :

$$dM = Q dx ;$$

$$Q = \frac{dM}{dx}$$

وهكذا نجد أن قوة القص Q تساوي معدل تغير عزم الانحناء M بالنسبة للمسافة x . وسوف تبين هذه العلاقة أنها ذات قيمة هامة في رسم الرسومات البيانية لقوة القص وعزم الانحناء لأنواع التحميل الأكثر تعقيداً . والواضح من هذه العلاقة أنه إذا كانت قوة القص موجبة عند مقطع معين للعتبة ، فإن ميل الرسم البياني لعزم الانحناء يكون أيضاً موجباً عند هذه النقطة . وهي تثبت أيضاً أن أي تغير مفاجئ في قوة القص يصحبه تغير مفاجئ في ميل الرسم البياني لعزم الانحناء .

كما أنه عند تلك النقاط التي يكون عندها المماس للرسم البياني لعزم الانحناء في وضع أفقي فإن العزم قد يكون له قيمة صغرى أو عظمى ، وهذا معروف من علم التفاضل عند الحصول على القيم العظمى والصغرى ، إضافة إلى ذلك فإن ميل الرسم البياني لعزم الانحناء يساوي الصفر عند تلك النقطة حيث القص يساوي الصفر .

وباستخدام معادلة الاتزان في الاتجاه العمودي ، للجزء المدروس نجد أن :

$$\sum F_y \uparrow^+ = 0 ;$$

$$qdx + Q - (Q + dQ) = 0 ;$$

ومنه نجد أن :

$$q = \frac{dQ}{dx}$$

وهذه العلاقة تبين أن معدل تغير قوة القص Q بالنسبة للمسافة x ، ولهذه العلاقة قيمة هامة في تحديد الرسومات البيانية لقوة القص كما سنرى ومن خلال حل الأمثلة المختلفة في البند اللاحق من هذا الباب .

9.6 الرسوم البيانية لمخططات قوة القص وعزم الانحناء

من أجل توضيح طبيعة تغير قوة القص وعزم الانحناء على طول العتبة أو الكمره ، وتحديد المقاطع الخطرة ، وتوفير المعلومات اللازمة لتحليل وتصميم العتبات بشكل عام ، تستخدم رسوم تسمى بالرسوم البيانية لمخططات قوة القص (S.F) وعزم الانحناء (B.M) :

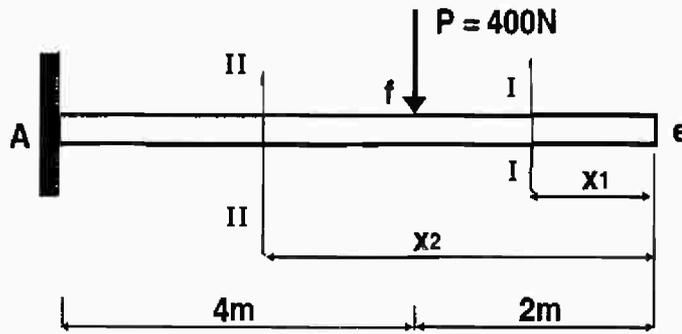
وقد أشرنا في البند السابق أنه من الملائم عادة إدخال نظام إحداثيات على طول الكمره أو العتبة بحيث تكون نقطة الأصل عند إحدى نهايتي العتبة . لذا تكتب معادلتان أحدهما تصف قوة القص Q كدالة في المسافة x ، مثلاً من إحدى نهايتي العتبة ، والثانية تصف عزم الانحناء M كدالة في x ، وتسمى هاتين المعادلتين بمعادلات القص والعزم ، وتوضع هاتين المعادلتين عادة لأنه يكون من الضروري معرفة قوة القص وعزم الانحناء عند جميع المقاطع على طول العتبة .

أن رسم هذه المعادلات بالنسبة إلى Q و M يعرف بالرسوم البيانية لقوة القص وعزم الانحناء على التوالي . حيث تمثل الإحداثيات الأفقية في هذه الرسومات وضع المقطع على طول العتبة ، في حين أن الإحداثيات العمودية تمثل قيم قوة القص وعزم الانحناء على التوالي . أن هذه الرسومات البيانية التخطيطية تمثل في الواقع التغير في قوة القص وعزم الانحناء عند أي مقطع على مدى طول العتبة . حيث يمكن كما أشرنا سابقاً تحديد القيمة القصوى لكل كمية منها بسهولة .

أن الأمثلة اللاحقة سوف توضح لنا كيفية رسم هذه المخططات والرسومات البيانية لقوى القص وعزوم الانحناء بطريقة مفصلة وبسيطة وسهلة مما يساعد الطالب على استيعاب ما تم عرضه من مفاهيم .

مثال (5-6)

أرسم الرسوم البيانية لقوة القص وعزم الانحناء للعتبة الكابولية (الكابولي) المبينة في الشكل (18-6) .



الشكل (18-6)

الحل :

نقوم بعمل قطع في الجهة اليمنى (I-I) على مسافة x_1 من الطرف الأيمن للعتبة ، حيث يمكن تحديد عزم الانحناء في هذا المقطع بطريقة سهلة ، والذي يساوي مجموع عزوم القوى الخارجية الواقعة على يمين المقطع حيث أن :

$$\sum M_{x_1} \curvearrowright = 0 ;$$

$$M_{x_1} = 0$$

وهكذا نجد أن عزم الانحناء يساوي الصفر على كافة مقاطع القسم nm .
نقوم بعمل قطع آخر (II-II) بعد القوة المركزة P ونجد عزم الانحناء في القسم em بنفس الطريقة ، حيث يحسب العزم كمجموع عزوم جميع القوى

التي تقع على يمين المقطع ، ولهذا لا توجد حاجة لتحديد ردود الأفعال هنا في المسند الثابت A ونحصل على :

$$\sum M_{x_2}^+ = 0 ;$$

$$M_{x_2} = -P(x_2 - 2)$$

أن الإشارة السالبة هنا تدل على أن تحذب العتبة يكون إلى الأعلى ونحصل بذلك على معادلة خط مستقيم مائل . ولتخطيط الرسم البياني لهذه المعادلة نحسب قيمتين لعزم الانحناء عندما $x_2 = 2$ فإن قيمة عزم الانحناء تساوي :

$$M_{x_2} = -P(2-2) = -100(0) = 0$$

وعندما $x = 6$ فإن قيمة عزم الانحناء تساوي :

$$M_{x_2} = -P(6-2) = -100(4) = -400 \text{ N.m}$$

نقوم بعد ذلك بوضع المقدار 400 nm حسب مقياس رسم مناسب أسفل محور الرسم البياني لان قيمة العزم سالبة ، والشكل (a.19-6) يبين الرسم البياني لمخطط عزم الانحناء. ويكون عزم الانحناء الأقصى في المقطع عند المسند المثبت A حيث أن قيمة العزم القصوى هو :

$$M_{\max} = -400 \text{ N.m}$$

أما القوة العرضية أي قوة القص في المقطع (I-I) فأنها تساوي الصفر أي أن :

$$\sum F_y \uparrow^+ = 0 ;$$

$$Q_{x_1} = 0$$

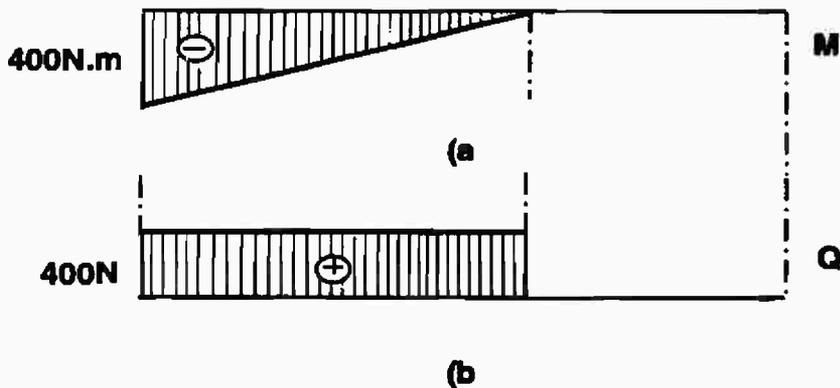
وذلك من خلال إسقاط جميع القوى الواقعة في الجهة اليمنى من المقطع على المحور العمودي ، وبنفس الطريقة نحصل على قيمة قوة القص في المقطع (II-II) حيث أن :

$$\sum F_y \uparrow^+ = 0 ;$$

$$Q_{x_2} - P = 0$$

$$Q_{x_2} = P$$

وذلك حسب اصطلاحات الإشارات التي اشرنا إليها في البنود السابقة ، أن العلامة الموجبة تبين أن اتجاه القوة الخارجية التي تؤثر في الجهة اليمنى من المقطع ، هو من أعلى إلى أسفل ، ويبين الشكل (b.19-6) الرسم البياني لمخطط قوة القص Q .



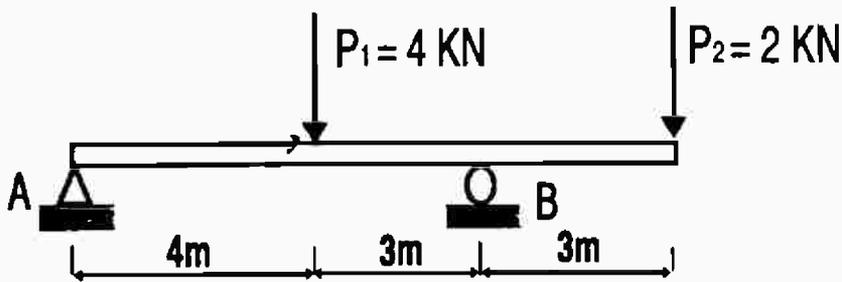
الشكل (19-6)

وهكذا حصلنا على الرسومات الخاصة بقوة القص وعزم الانحناء لعتبة الكابولية ، مع أن هناك الكثير من النقاط الهامة التي ستوضح في الأمثلة اللاحقة .

كما تجدر الإشارة إلى أنه لتحديد إشارة قوة القص إضافة إلى القاعدة التي تم شرحها سابقاً ، هو أن تعتبر قوة القص موجبة في أقسام العتبة التي يكون فيها عزم الانحناء M صاعداً من اليسار إلى اليمين ، وتعتبر سالبة في تلك الأقسام التي يكون فيها الرسم البياني لعزم الانحناء هابطاً ، وتعتبر هذه الطريقة سهلة وتمكن الطالب من استيعاب قاعدة الإشارات لمخطط قوة القص بسهولة وذلك بعد رسم مخطط عزم الانحناء والتأكد من الرسم بعد الحل .

مثال (6-6)

ارسم الرسوم البيانية لمخططات قوة القص وعزم الانحناء للعتبة المسندة عند A بمفصل ، وعند B بمسند متدرج (عجلة) والمعرضة إلى الحملات الخارجية المركزة P_1 ، P_2 كما يبين الشكل (20-6) .



الشكل (20-6)

الحل :

من أجل إيجاد ردود الأفعال في B ، A نقوم برسم الرسم البياني لمخطط الجسم الحر للعتبة كما هو مبين في الشكل (6-21) ، وبعد ذلك نضع شروط الاتزان الثلاثة حيث أن :

$$\sum F_x \rightarrow = 0 ;$$
$$H_A = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$\sum F_y \uparrow = 0 ;$$
$$R_A + R_B - 4 - 2 = 0 \dots\dots\dots(2)$$

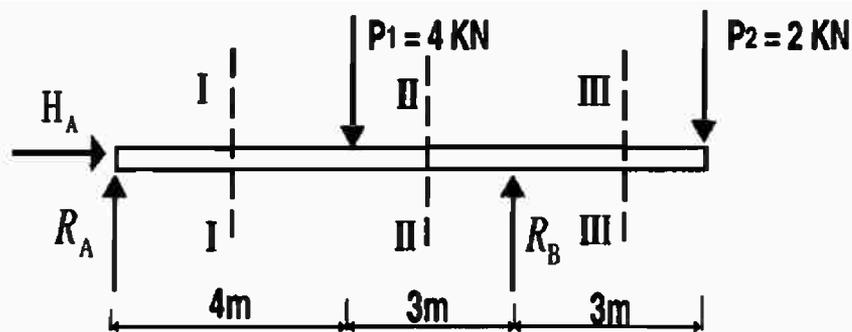
$$\sum M_A \curvearrow = 0$$
$$-4(4) + R_B (7) - 2(10) = 0 \dots\dots\dots(3)$$

ومن المعادلة رقم (3) نجد رد الفعل العمودي في المسند المتدرج B حيث أن :

$$R_B = \frac{36}{7} = 5.15 \text{ KN}$$

ثم نعود إلى المعادلة رقم (2) ونجد R_A حيث :

$$R_A + 5.15 - 4 - 2 = 0$$
$$R_A = 0.85 \text{ KN}$$



الشكل (6-21)

بعد حصولنا على ردود الأفعال نقوم بقطع العتبة عند المقطع (I-I) ، كما هو مبين في الرسم البياني لمخطط الجسم الحر لجزء العتبة على يسار القطع (a.22-6) ، والذي يوضح قوة القص Q وعزم الانحناء M في الاتجاهات الموجبة ، ومن توازن هذا الجزء في الاتجاه العمودي نجد أن :

$$R_A + Q = 0$$

ومنه :

$$Q = -0.85 \text{ KN},$$

وبوضع معادلة الاتزان الثالثة أي بأخذ العزم عند النقطة c نجد أن :

$$\sum M_{(c_1)}^+ = 0 ;$$

$$-0.85 (X_1) + M = 0$$

$$M = 0.85 X_1$$

حيث أن :

$$X = 4 m \quad , \quad X = 0$$

الخطوة التالية تكون بعمل قطع آخر هو (II-II) والمبين في الشكل (21-6) ، ونرسم مخطط الجسم الحر للجزء الكلي للعتبة على يسار القطع (II-II) كما هو مبين في الشكل (b.22-6). وبوضع شروط الاتزان لهذا الجزء نجد أن :

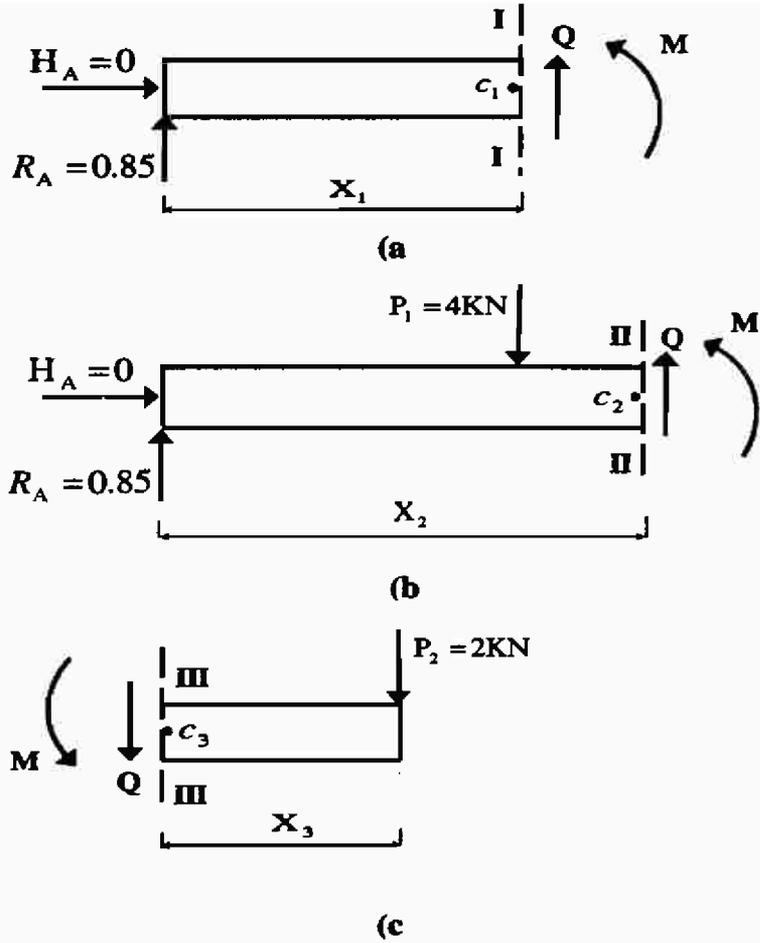
$$\begin{aligned} \sum F_y \uparrow^+ &= 0 \quad ; \\ R_A + -4 + Q &= 0 \\ Q &= 4 - 0.85 = 3.15 \text{ KN} \end{aligned}$$

وبأخذ العزم حول النقطة c_2 نجد صيغة لعزم الانحناء في القطع (II-II) حيث نجد أن :

$$\begin{aligned} \sum M_{(c_2)} \curvearrowright^+ &= 0 \quad ; \\ M + 4(X_2 - 4) - 0.85(X_2) &= 0 \\ M &= 16 - (3.143 X_2) \end{aligned}$$

وأخيراً نقوم بعمل قطع (III-III) ، والذي يعتبر أبسط الرسومات البيانية حيث يتم رسم الرسم البياني للجزء الأيمن من العتبة كما يبين الشكل (c.22-6) . وباستخدام معادلات الاتزان لهذا الجزء نجد أن :

$$\begin{aligned} \sum F_y \uparrow^+ &= 0 \quad ; \\ -Q - 2 &= 0 \\ Q &= -2 \text{ KN} \end{aligned}$$



الشكل (22-6)

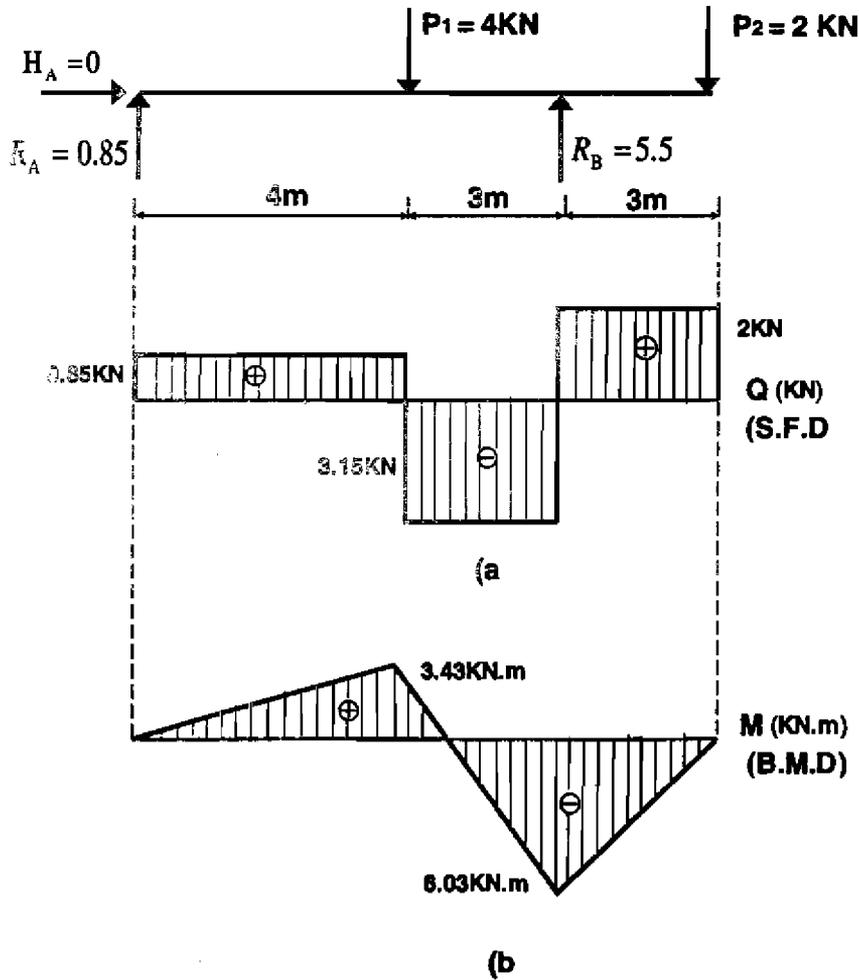
ونجد العزم حول النقطة c_3 لنحصل على :

$$\sum M_{(c_3)}^+ = 0 ;$$

$$M + 2(10 - X) = 0$$

$$M = -2(10 - X)$$

بعد إيجاد صيغ وعلاقات قوة القص وعزم الانحناء في المقاطع الثلاث ، وعرفنا هذه القيم في كل مقطع ، نقوم برسم الرسوم البيانية لمخططات قوة القص وعزم الانحناء على طول العتبة ، كما هو مبين في الشكل (23-6) .



الشكل (6-23)

وهكذا تم رسم الرسومات البيانية لمخططات قوة القص وعزم الانحناء للعتبة . وتجدر الإشارة إلى بعض الملاحظات الهامة التي تم أتباعها في حل هذه المسألة :

1- بالنسبة لقيم قوة القص عند كل مقطع فإننا عليها من معادلة الاتزان على المحور العمودي y .

2- بالنسبة لقيم عزم الانحناء فقد حصلنا عليها عن طريق إيجاد قيم عزم الانحناء في كل مقطع بالتعويض عن قيم x الخاصة بصيغة عزم الانحناء في ذلك المقطع ، فمثلاً في المقطع الأول صيغة عزم الانحناء هي :

$$M = 0.85 X_1$$

وحيث أن قيم x_1 تتغير بين 0 و 4m ، فإن قيم عزم الانحناء تكون في هذا المقطع هي :

$$\begin{aligned} M &= 0.85(0) = 0 \\ &= 0.85(4) \\ &= 3.43 \text{ KN.m} \end{aligned}$$

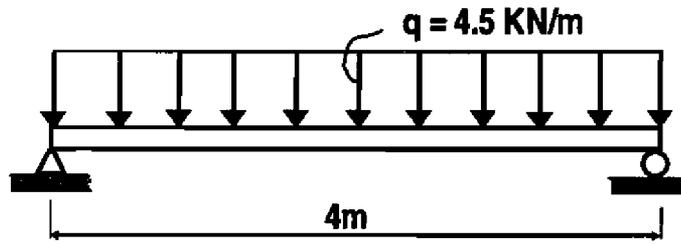
وهكذا نجد أن قيمة العزم على مسافة 4m تساوي 3.43KN.m ، كما هو مبين في الرسم البياني لمخطط الجسم الحر الشكل (b.23-6) . أما بالنسبة للجزء الثاني عند القطع (II - II) فأنا حصلنا على صيغة عزم الانحناء التالي :

$$\begin{aligned} M &= 16 - 3.14 X_2 \\ &= 16 - 3.14 (7) \\ &= 6.03 \text{ KN.m} \end{aligned}$$

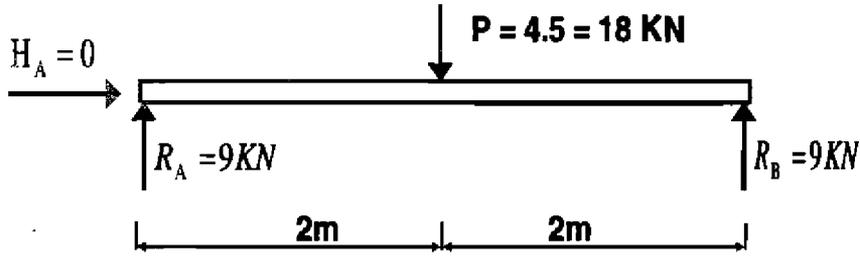
وبهذه الطريقة نحصل على الرسم البياني لمخطط عزم الانحناء للعتبة عند كل نقطة .

مثال (7-6)

الشكل (a.24-6) يبين عتبة بسيطة طولها 4 m ومعرضة لحمولة رأسية موزعة بانتظام وقيمتها 4.5 KN / m . ارسم الرسوم البيانية لمخططات قوة القص وعزم الانحناء لهذه العتبة .



(a)



(b)

الشكل (24-6)

الحل :

نرسم الرسم البياني لمخطط الجسم الحر للعتبة كما يبين الشكل (b.24-6) حيث تحول الحمولة الموزعة بانتظام إلى قوة مركزة تؤثر في مركز النقل للمستطيل حسب العلاقة التالية :

$$P = q \cdot e = 4.5 \times 4 = 18 \text{ KN}$$

ومن معادلات الاتزان والتماثل نجد قيمة ردود الأفعال عند A ، B والتي تساوي 9 KN عند كل نهاية للعتبة . نقوم بعمل تقطع (I-I) على مسافة x من النهاية اليسرى للعتبة . وتكون قوة القص عند هذا المقطع مساوية للمجموع الجبري للقوى على يسار هذا القطع ، حيث أن :

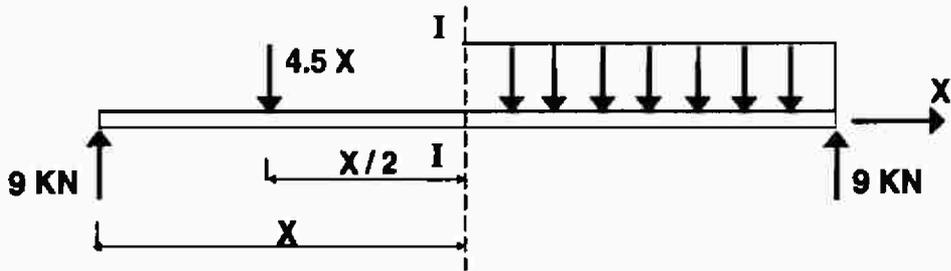
$$\sum F_y \uparrow^+ = 0 ;$$

$$R_A - 4.5 (X) + Q = 0$$

$$- Q - 4.5 (X) + R_A = 0$$

$$Q = R_A - 4.5 (X)$$

حيث أن الجزء من الحمولة الموزعة على يسار المقطع عند x بمحصلته التي تساوي $4.5 x$ تؤثر إلى أسفل كما يبين الشكل (27-6) .



الشكل (27-6)

وحيث أنه لا توجد أي حمولات مركزة أخرى تؤثر على العتبة ، فإن صيغة قوة القص التي حصلنا عليها من معادلة الاتزان حيث أن $Q = R_A - 4.5(x)$ تكون سارية عند جميع النقاط على طول هذه العتبة . وواضح أن قوة القص تتغير خطياً من $x = 0$ ، $x = 4$ ، فعند $x = 0$ فإن قوة القص تساوي $Q = 9 \text{ KN}$ ، وعند نهاية العتبة أي عند $x = 4\text{m}$ ، فإن $Q = -9 \text{ KN}$ ، وبالتالي فإن يمكن تمثيل التغير في قوة القص على طول العتبة بخط مستقيم يصل بين هاتين القيمتين عند النهايتين

والشكل (a.28-6) يبين الرسم البياني لقوة القص Q ، حيث يلاحظ أن قوة القص تساوي الصفر في منتصف العتبة .

أما عزم الانحناء فيعطى عند المقطع x بالمجموع الجبري لعزوم لرد الفعل الذي قيمته 9 والحمولة الموزعة الذي قيمتها $4.5x$ KN القطع (I-I) حيث أن :

$$\sum M_{(I-I)}^+ = 0$$

$$-9.X + 4.5 X \left(\frac{X}{2} \right) + M = 0$$

$$M = 9X - 4.5 \frac{X^2}{2}$$

وتسري هذه المعادلة على الطول الكلي للعتبة . ويجب ملاحظة أنه طالما أن الحمولة الموزعة توزيعاً منتظماً فإن المحصلة الموضحة بالقوة التي تؤثر على المسافة $x/2$ من القطع (I-I) . أي أنه عند منتصف المسافة للحمولة الموزعة على يسار المقطع x حيث يحسب عزم الانحناء .

وواضح أيضاً أن عزم الانحناء يمثل بقطع ناقص على مدى طول العتبة لأنه من الدرجة الثانية . وحيث أن العتبة مرتكزة إرتكازاً بسيطاً فإن العزم يساوي الصفر عند كل نهاية ، أي عند المفصل A ، والمسند B .

وبسبب تماثل الحمولة فإن عزم الانحناء الأقصى يجب أن يكون عند منتصف العتبة أي عند $x = 2$ m . ويكون عزم الانحناء عند هذه النقطة $x = 2$ يساوي :

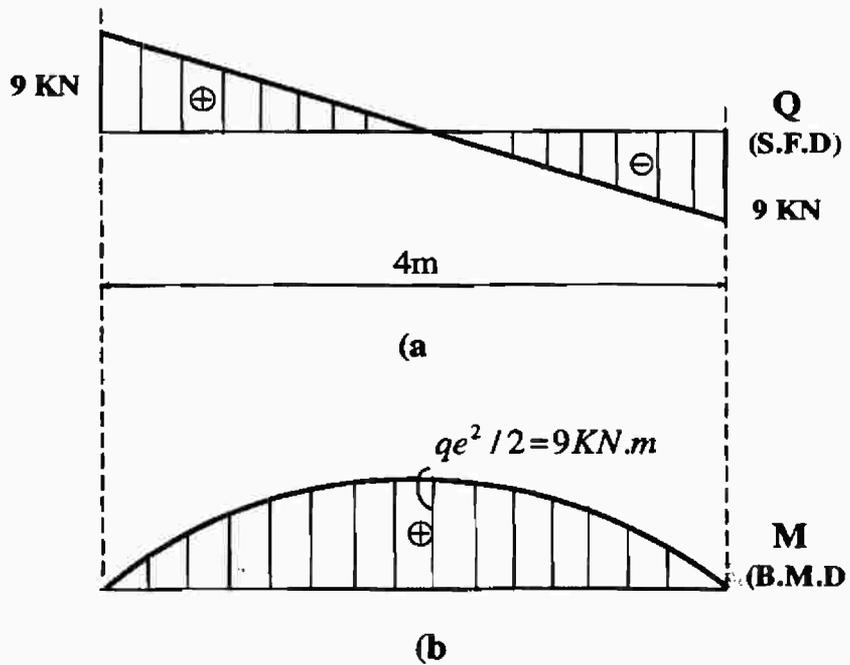
$$\begin{aligned}
 M &= \frac{qe^2}{8} \\
 &= \frac{4.5 \times 4^2}{8} \\
 &= 9 \text{ KN} \cdot \text{m}
 \end{aligned}$$

حيث أن :
e - الطول الكلي للعتبة .

ويمكن اثبات ذلك من خلال إيجاد العزم عند النقطة 2m حيث :

$$\begin{aligned}
 M &= 9(2) - 4.5(2) \times 1 \\
 &= 18 - 9 \\
 &= 9 \text{ KN} \cdot \text{m}
 \end{aligned}$$

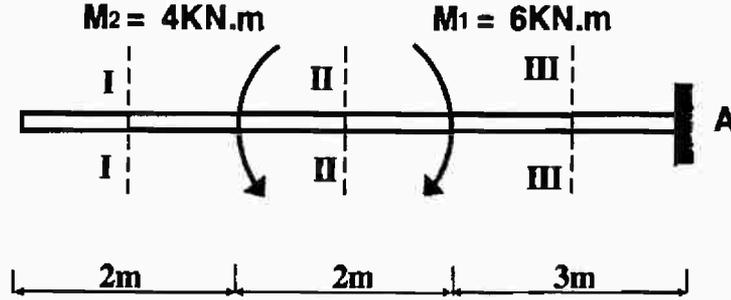
أن الرسم البياني لمخطط عزم الانحناء موضح في الشكل (b.28-6) .



الشكل (28-6)

مثال (8-6)

أرسم الرسومات البيانية لمخططات عزم الانحناء وقوة القص للعتبة الكابولية المبينة في الشكل (29-6) .



الشكل (29-6)

الحل :

نقوم بإيجاد صيغ لعزم الانحناء في مقاطع مختلفة من العتبة ، لذا نقوم بقطع العتبة في ثلاثة مناطق كما يبين الشكل (29-6) . أن صيغة عزم الانحناء في المقطع الأول (I-I) على مسافة x_1 يساوي :

$$M_{x_1} = 0$$

أما قيمة عزم الانحناء في المقطع الثاني (I-I) للعتبة فيساوي مجموع عزوم القوى الواقعة على الجهة اليسرى حيث :

$$M_{x_2} = -4 \text{ KN.m}$$

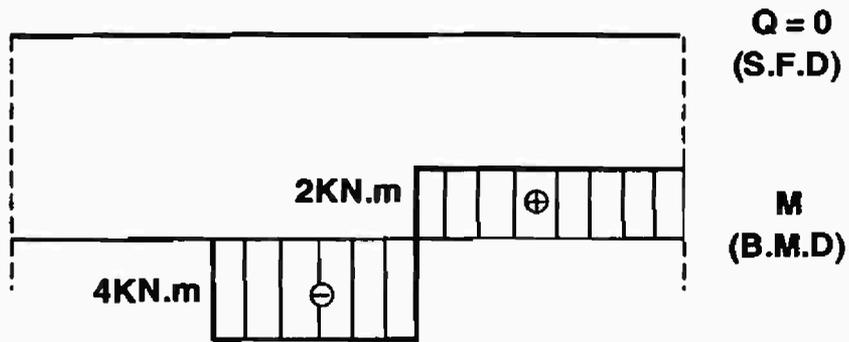
واخيراً نجد قيمة عزم الانحناء في المقطع (III-III) والذي يساوي :

$$M_{x_1} = -4 + 6 = 2 \text{ KN.m}$$

أما قوة القص فتكون في جميع المقاطع مساوية للصفر حيث :

$$Q = 0$$

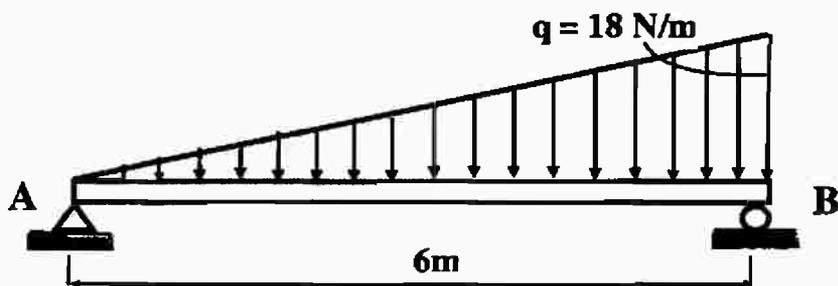
وذلك لعدم وجود أية قوى عمودية مؤثرة على العتبة . أن الرسوم البيانية لعزم الانحناء وقوة القص مبينة في الشكل (30-6) .



الشكل (30-6)

مثال (9-6)

أرسم الرسوم البيانية للعتبة البسيطة المبينة في الشكل (31-6) ،
والمعرضة لحمولة راسية متغيرة بانتظام من الصفر عند النهاية اليسرى إلى
قيمة قصوى مقدارها 18m عند النهاية اليمنى .

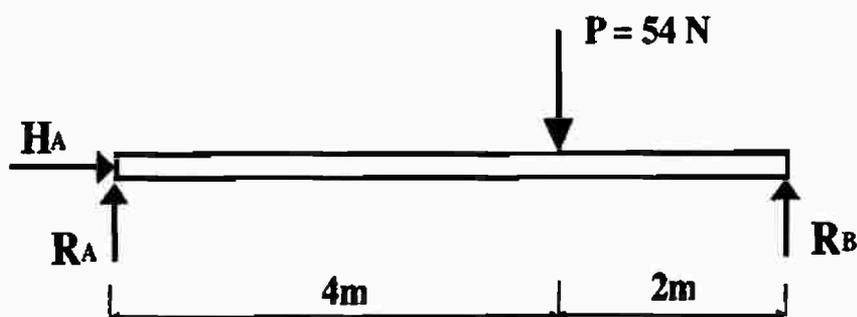


الشكل (31-6)

الحل :

نقوم أولاً بإيجاد ردود الأفعال في المفصل A والمسند B ، وذلك بعد رسم مخطط الجسم الحر للعتبة المبين في الشكل (32-6) . حيث يتم استبدال الحمولة المتغيرة بانتظام التي تؤثر في مركز الثقل لمثلث الحمولة حيث :

$$P = \frac{1}{2} qe = \frac{1}{2} 18 \cdot 6 = 54 \text{ N}$$



الشكل (32-6)

وبما أن الحمولة تتغير من الصفر عند النهاية اليسرى إلى 18N/m عند النهاية اليمنى ، فإن الكثافة المتوسطة تساوي 9N/m تؤثر على طول 6m . وبالتالي فإن الحمولة الكلية تساوي 54N وتؤثر عند مسافة 4m على يمين النهاية اليسرى للعتبة . وبوضع شروط الاتزان الإستاتيكي نجد ردود الأفعال الثلاث حيث أن :

$$\sum F_x \rightarrow^+ = 0 ;$$

$$H_A = 0$$

$$\sum F_y \uparrow^+ = 0 ;$$

$$R_A + R_B - 54 = 0$$

$$\sum M_{(A)} = 0 ;$$

$$-54(4) + R_B(6) = 0$$

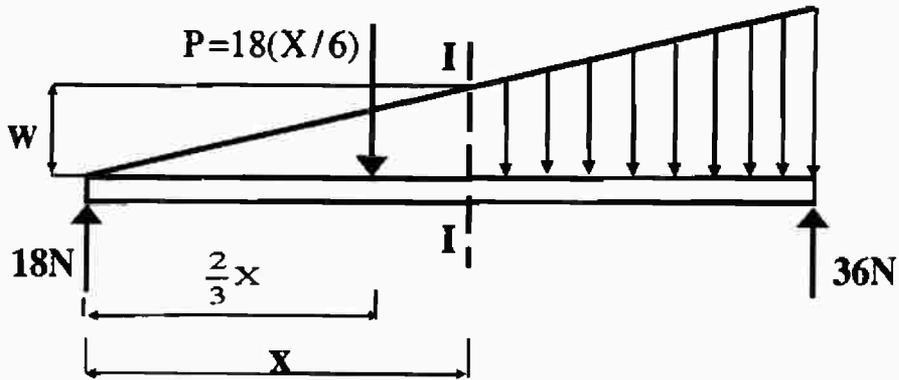
ومنه :

$$R_B = 216/6 = 36\text{N}$$

نعود إلى المعادلة الثانية ، أي إلى الشرط الثاني للاتزان لنجد رد الفعل R_A حيث أن :

$$R_A = -36 + 54 = 18\text{N}$$

وتجدر الإشارة إلى أنه لا يمكن استخدام المحصلة المبينة في مخطط الجسم الحر في رسم الرسوم البيانية لقوة القص وعزم الانحناء . حيث يجب علينا أن نعتبر الحمولة موزعة ومتغيرة بانتظام ونحدد القص والعزم عند مقطع على مسافة x من النهاية اليسرى كما يبين الشكل (6-33) .



الشكل (33-6)

أن كثافة الحمولة يمكن إيجادها من تشابه المثلثين حيث أن :

$$\frac{w}{x} = \frac{18}{6}$$

ومنه نجد أن :

$$W = 18(x/6) , (N/m)$$

ويكون متوسط كثافة الحمولة على طول المسافة x هو :

$$P = \frac{1}{2}18(x/6)$$

وذلك لان الحمولة تساوي الصفر عند النهاية اليسرى .

أن الحمولة الكلية المؤثرة على طول x وتساوي الكثافة المتوسطة للحمولة مضروبة في الطول x حيث أن :

$$P = \frac{1}{2} [18 (x/6)] x$$

وتؤثر في مركز النقل للمثلث أى خلال نقطة تقع على مسافة $\frac{2}{3} x$ من المفصل A ، أن محصلة هذا الجزء من الحمولة المتغيرة بانتظام مبينة بالقوة والخط المنقطع في الشكل (6-33) .

ويمكن بسهولة إيجاد قوة القص وعزم الانحناء عند القطع (I-I) حيث أن قوة القص تكون :

$$\begin{aligned} Q_{I-I} &= 18 - \frac{1}{2} (18 \cdot \frac{x}{6}) x \\ &= 18 - 0.75 x^2 \end{aligned}$$

أما عزم الانحناء فيمكن الحصول عليه بأخذ العزم عند القطع (I-I) حيث :

$$18x + \frac{1}{2} (\frac{x}{6} \cdot 18) (\frac{x}{3}) + M_{I-I} = 0$$

ومنه نجد أن :

$$M_{I-I} = 18X - 0.25X^3$$

وهذه الصيغ والمعادلات تعتبر حقيقة على مدى الطول الكلي للعتبة . نقوم برسم قوة القص كقطع ناقص من الدرجة الثانية له قيمة مقدارها 18KN عند $x = 0$ ، و -18KN عند $x = 6m$.

أما عزم الانحناء فيكون من الدرجة الثالثة متعدد الحدود تختفي عند النهايتين وتأخذ أقصى قيمة حيث القص يساوي صفراً . وهذا من حقيقة أن $Q = dM / dx$ ، وبالتالي فإن النقطة التي تكون فيها قوة القص تساوي الصفر يجب أن تكون هي النقطة التي عندها المماس للرسم البياني لعزم الانحناء يكون أفقياً ، و يمكن إيجاد النقطة التي عند القص يساوي الصفر وذلك بمساواة قوة القص حيث :

$$Q = 0$$

ومنه :

$$18 - 0.75X^2 = 0$$

أو أن :

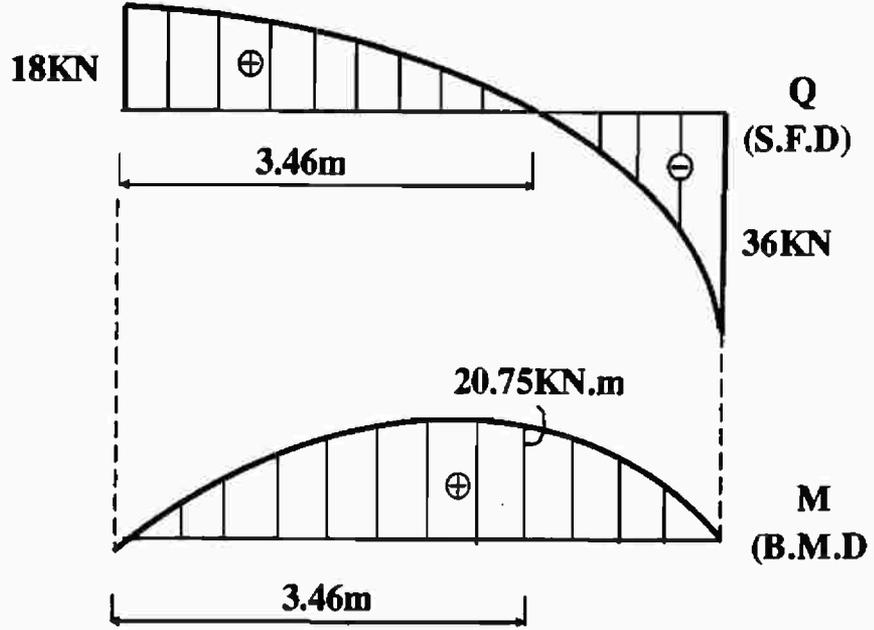
$$x = 3.46m$$

ويمكن إيجاد عزم الانحناء عند هذه النقطة بالتعويض بالعلاقة العامة

السابقة حيث :

$$\begin{aligned} M_{x=3.46} &= 18(3.46) - 0.25(3.46)^3 \\ &= 20.75 \text{ KN} \cdot m \end{aligned}$$

أن الرسوم البيانية لصيغ ومعادلات قوة القص وعزم الانحناء مبينة في الشكل (6-34) .

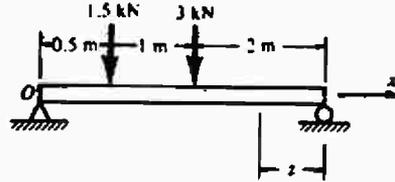


الشكل (34-6)

بعد دراسة هذه الأمثلة المختلفة والتي توضح كيفية الحصول على الرسومات البيانية لمخططات قوة القص Q وعزم الانحناء M لمختلف أنواع التحميل التي قد تتعرض إليها العتبات . وحتى يستطيع الطالب تدعيم استيعابه لهذا الموضوع سوف نقوم بعرض بعض الأمثلة المطولة للعتبات محملة حمولات مختلفة مع كتابة معادلات القص وعزم الانحناء عند أي نقطة على مدى طول العتبة بالإضافة إلى رسم مخططات عزم الانحناء وقوى القص لهذه العتبات . وعلى الطالب الاستفادة من هذه الأمثلة لأنها تعمل على زيادة استيعابه لهذا الموضوع بشكل مفيد للغاية .

مثال (10-6)

ارسم الرسوم البيانية لقوة القص وعزم الانحناء . ثم أكتب أيضا معادلات قوة القص وعزم الانحناء عند أي نقطة على مدى طول العتبة المبيّنة في الشكل (35-6) .



الشكل (35-6)

الحل :

عند : $0 < x < 1m$

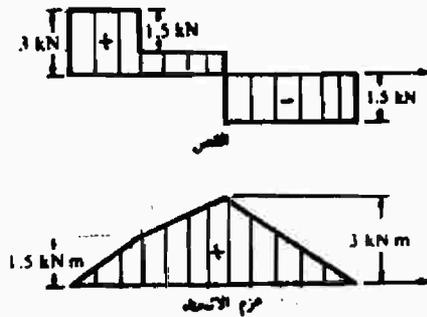
$$Q = 1.875 - 1.5x \text{ (KN)}$$

عند : $1 < x < 2m$

$$Q = 0.375 - 3(x - 1) \text{ (KN)}$$

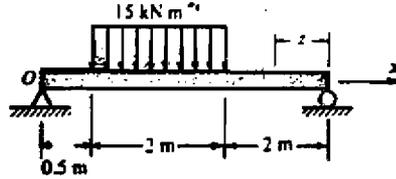
عند : $0 < x < 1$

$$M = 1.875x - 0.75x^2 \text{ (KN.m)}$$



مثال (11-6)

ارسم الرسوم البيانية لقوة القص وعزم الانحناء . ثم اكتب أيضا معادلات قوة القص وعزم الانحناء عند أي نقطة على مدى طول العتبة المبيّنة في الشكل (36-6) .



الشكل (36-6)

الحل :

$0 < x < 0.5 \text{ m}$: عند $Q = 20 \text{ (KN)}$

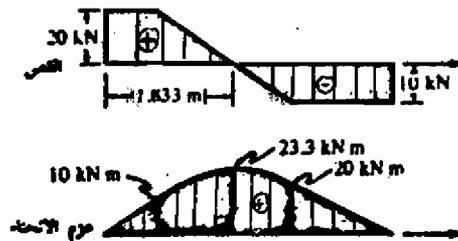
$0.5 < x < 2.5 \text{ m}$: عند $Q = 20 - 15(x - 0.5)$

$2.5 < x < 4.5 \text{ m}$: عند $Q = -10 \text{ KN}$

$0 < x < 0.5 \text{ m}$: عند $M = 20x \text{ KN.m}$

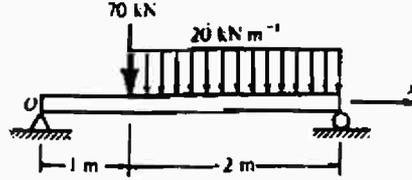
$0.5 < x < 2.5 \text{ m}$: عند $M = 20x - 7.5(x - 0.5)^2 \text{ KN.m}$

$0 < x < 2 \text{ m}$: عند $M = 10x \text{ KN.m}$



مثال (12-6)

ارسم الرسوم البيانية لقوة القص وعزم الانحناء . ثم أكتب أيضا معادلات قوة القص وعزم الانحناء عند أي نقطة على مدى طول العتبة المبيّنة في الشكل (37-6) .



الشكل (37-6)

الحل :

عند $0 < x < 1m$:

$$Q = 60 \text{ KN}$$

عند $1 < x < 3m$:

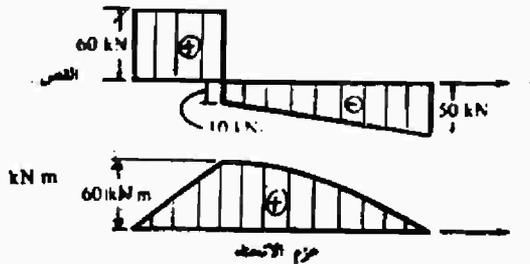
$$Q = 60 - 70 - 20(x - 1) \text{ KN}$$

عند $0 < x < 1m$:

$$M = 60x \text{ KN.m}$$

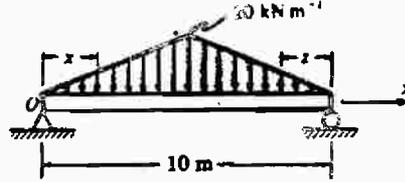
عند $1 < x < 3m$:

$$M = 60x - 70(x - 1) - 10(x - 1)^2 \text{ KN.m}$$



مثال (13-6)

ارسم الرسوم البيانية لقوة القص وعزم الانحناء . ثم أكتب أيضا معادلات قوة القص وعزم الانحناء عند أي نقطة على مدى طول العتبة المبيّنة في الشكل (38-6) .



الشكل (38-6)

الحل :

عند : $0 < x < 5 \text{ m}$

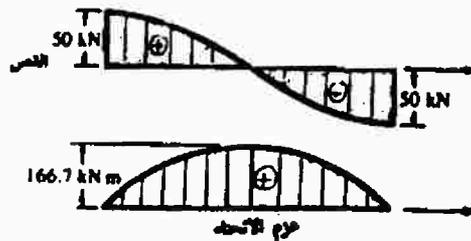
$$Q = 50 - \frac{x^2}{10} (20) \text{ KN}$$

عند : $0 < x < 5 \text{ m}$

$$Q = -50 - \frac{x^2}{10} (20) \text{ KN}$$

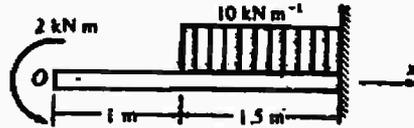
عند : $0 < x < 5 \text{ m}$,

$$M = 50x - \frac{x^3}{30} (20) \text{ KN.m}$$



مثال (14-6)

للعتبة الكابولية المبينة في الشكل (39-6) اكتب معادلات قوة القص وعزم الانحناء عند أي نقطة على مدى طول العتبة . ثم ارسم الرسوم البيانية لقوة القص وعزم الانحناء .



الشكل (39-6)

الحل :

عند $0 < x < 1m$:

$$Q = 0$$

عند $1 < x < 2.5m$:

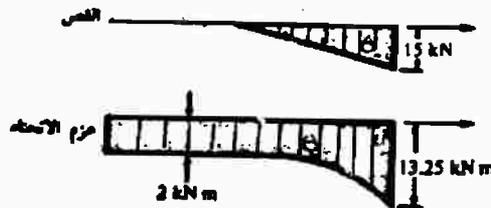
$$Q = -10(x - 1)$$

عند $0 < x < 1m$:

$$M = -2 \text{ KN.m}$$

عند $1 < x < 2.5m$:

$$M = -2 - 5(x - 1)^2 \text{ KN.m}$$



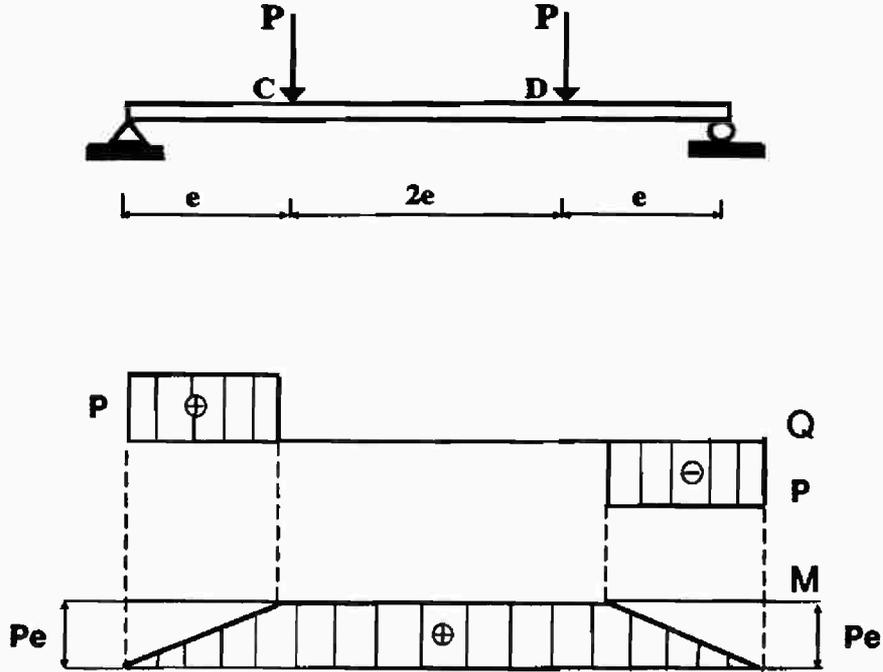
10.6 الأجهادات العمودية في العتبات

بعد دراسة كيفية وضع صيغ ومعادلات لقوة القص وعزم الانحناء وتمثيل ذلك من خلال الرسومات البيانية لهذه القوى . سوف نقوم في هذا البند بدراسة كيفية تحديد الأجهادات الناتجة عن الانحناء في العتبات والكمرات ، حيث أشرنا سابقاً أن الحمولات التي تؤثر على العتبات والكمرات يمكن أن تكون إما قوة أو ازدواجات تقع في مستوى يحوي المحور الطولي للعتبة ، وإن القوة تؤثر عمودياً على المحور الطولي ، ويفترض أن المستوى الذي يحتوي على القوة يكون مستوى تماثل العتبة .

أن تأثيرات هذه القوة والمزدوجات المؤثرة على العتبة هي إما أن تكون انفعالات (تشوهات) عمودية على المحور الطولي للعتبة ، أو أن تحدث أجهادات عمودية واجهادات قص على أي مقطع مستعرض للعتبة عمودياً على محورها . فلو تم التأثير عند نهايتي العتبة دون أن تؤثر أي قوة على العتبة فإن الانحناء في هذه الحالة يسمى " الانحناء الخالص أو الصرف " .

فمثلاً من الشكل (6-40) نلاحظ أن الجزء من العتبة بين القوتين المركزتين معرض لانحناء خالص ، والعزم الناتج عن قوى لا تشكل ازدواجات يسمى عزماً عادياً ، وأن العتبة المعرضة لانحناء خالص لها أجهادات عمودية فقط ولا ينشأ بها أجهادات قص ، والعتبة المعرضة لانحناء عادي تؤثر فيها أجهادات عمودية واجهادات قص .

ولدراسة طبيعة تصرف العتبات وتحديد الأجهادات الناتجة عند الانحناء ، فإنه من المناسب تخيل أن العتبة تتركب من عدد لانهائي من الشرائح الطولية الرقيقة أو الألياف .

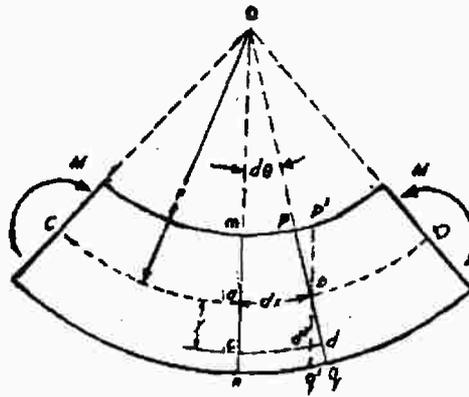


الشكل (40-6)

حيث يفترض أن كل واحد من هذه الشرائح تتصرف باستقلال عن الأخرى بمعنى أنه ليس هناك ضغوط عرضية أو أجهادات قص بين هذه الشرائح والألياف ، ومن أجل توضيح ذلك نقوم بدراسة العتبة البسيطة المبينة في الشكل (40-6) مع الرسومات البيانية لمخططات قوة القص وعزم الانحناء لهذه العتبة . والتي من خلالها نلاحظ أن جزء العتبة الأوسط CD تنعدم فيه قوة القص ، أما عزم الانحناء فيكون مقداراً ثابتاً بين C ، D وقيمته $M = P \cdot a$.

أن مثل هذه الحالة تسمى كما اشرنا سابقاً بالانحناء الخالص ، ولتحديد الأجهاد الداخلي نقوم بدراسة الانفعال أو التشوه الذي يحدث داخل مادة العتبة وسنفترض أن العتبة ذات مستوى تماثل محوري وليكن xy على سبيل

المثال ، فعندما تؤثر الحمولات على مستوى التماثل ينتج عنها انحناء في ذات المستوى فقط . ومع افتراض أن المادة متجانسة وتخضع لقانون هوك . وبما أن قيمة عزم الانحناء ثابتة بين C , D فأنا نستطيع اعتبار أن الانفعال الناتج عن الانحناء يكون منطقياً بين هاتين النقطتين . أي أن جزء العتبة يتقوس دائرياً كما هو مبين في الشكل (41-6) .



الشكل (41-6)

ويمكن الافتراض أن المقاطع العرضية للعتبة التي تكون مستوية قبل الانفعال التشوه ، تبقى مستوية حتى بعد التشوه أيضاً حسب نظرية المقاطع المستوية التي أشرنا إليها في بداية هذا الكتاب .

ويلاحظ أنه نتيجة لانفعال العتبة المبين في الشكل (41-6) ، فإن الألياف الواقعة في الجزء المحدب تستطيل قليلاً . أما تلك التي في جزء العتبة المقعر فأنها تقصر قليلاً ، وبالتالي تكون هناك منطقة في الجزء الأوسط من العتبة لا تتغير طولها وتسمى الطبقة المحايدة . وتقاطع هذا السطح مع مستوى التماثل المحوري يسمى المحور المحايد للعتبة . أما تقاطعه مع مستوى آخر لأي مقطع فيسمى المحور المحايد لذلك المقطع .

ف عند الانفعال نجد أن مستوى المقطعين mn و pq يتقاطعان عند نقطة مثل (o) . وتكون الزاوية المحصورة بينها هي $d\theta$ ، وان المقدار $1/\rho$ هو تقوس المحور المحايد للعتبة .

نقوم الآن برسم المستقيم $p'q'$ ليوازي المستقيم mn ويمر بالنقطة b الشكل (6-41) ، وهو يمثل وضعية المقطع pq قبل الانحناء ، حيث نلاحظ من الشكل أن الليفة المقوسة cd' التي تبعد مسافة y عن المحور المحايد تستطيل بمقدار $d'd = yd\theta$ مع العلم أن طولها قبل الانفعال والتشوه قد كان $cd' = dx$ وهكذا يصبح الانفعال في هذه الحالة هو :

$$\epsilon_x = \frac{yd\theta}{dx} = y/\rho \quad \dots\dots\dots(4 - 6)$$

ونلاحظ أنه إذا كانت الليفة تقع في جزء العتبة المقعر فأن المسافة y تصبح سالبة ، وبالتالي فأن الانفعال يكون سالباً أيضاً . أي أن الألياف في جزء العتبة المحدب تتعرض للشد ، وتلك التي في الجزء المقعر تتعرض للضغط . وقد بينت التجارب العملية والمخبرية أن الانفعال الجانبي للألياف العتبية يكون مماثلاً ومشابهاً للانفعال الذي يحدث في اختبار الشد البسيط ، وبهذا فأن الأجهاد في كل ليفة أو شريحة تتناسب مع الانفعال الطولي وعليه فلن :

$$\sigma_x = \epsilon_x E = \frac{E}{\rho} y \quad \dots\dots\dots(5 - 6)$$

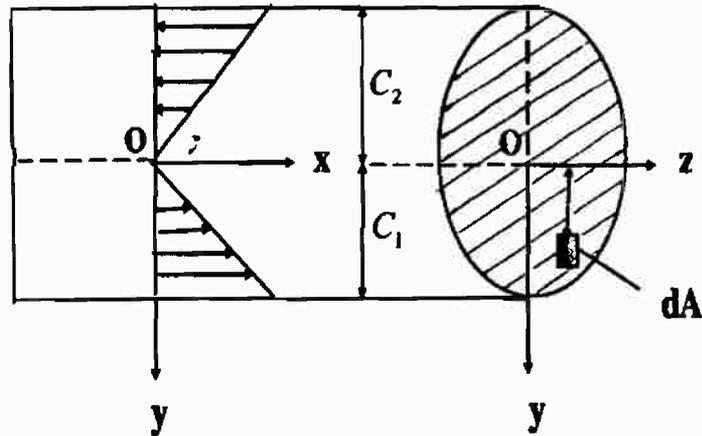
ويتضح من هذه العلاقة أنه ما دامت المادة تخضع لقانون هوك فأن الأجهادات σ_x في الألياف الناتجة عن الانحناء تتناسب طردياً مع البعد y من المحور المحايد .

أن الشكل (6-42) يوضح توزيع الأجهاد لعمق العتبة وينتج عن هذا التوزيع مزدوج M في مقطع العتبة ويمكن استخدام هذه النتيجة لتحديد موضع المحور المحايد O. وإذا كانت dA تمثل مساحة عنصر متناهي في الصغر من مقطع العتبة أي جزيئة شريحة وتبعد مسافة y عن المحور المحايد، فإن القوة المؤثرة على هذه الشريحة سوف تكون $\sigma_x dA$ ، وباستخدام العلاقة (6-5) نحصل على ما يلي:

$$\sigma_x dA = \frac{E}{\rho} y \cdot dA$$

وبما أن محصلة القوة العمودية Nx على المقطع تساوي صفراً " الانحناء الخالص"، فإن تكامل $\sigma_x dA$ لمساحة المقطع كلها يساوي الصفر أيضاً، وعليه فإن:

$$\frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0 \dots\dots\dots(6-6)$$



الشكل (6-42)

وبما أن المقدار E / ρ لا يساوي الصفر فأننا نجد أن :

$$\int_A y \cdot dA = A y_c = 0$$

حيث أن :

A - المساحة الكلية لمقطع العتبة .

y_c - بعد مركز المقطع عن المحور المحايد .

ومن البديهي أن المساحة الكلية لا تساوي الصفر $A \neq 0$ ، لذلك يجب أن تكون $y_c = 0$ ، ومعنى ذلك أن المحور المحايد يجب أن يمر في مركز المقطع .

ونلاحظ أن العزم الناتج عن القوة $\sigma_x \cdot dA$ حول محور المقطع المحايد

يساوي :

$$dM = y \sigma_x \cdot dA$$

وأن مجموع عزوم القوى في شرائح وجزيئات المقطع المختلفة يكون مساوياً لعزم الانحناء M أي أن :

$$M = \int_A y \sigma_x \cdot dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 \cdot dA \dots \dots \dots (7-6)$$

ويسمى حد التكامل في هذه العلاقة بعزم القصور الذاتي لمساحة المقطع بالنسبة لذلك المحور . ويساوي مجموع حاصل ضرب مساحة كل شريحة متناهية في الصغر مثل dA في مربع بعدها عن المحور المحايد ، ويمكن التعبير عن ذلك رياضياً حسب العلاقة التالية :

$$I = \int_A y^2 . dA$$

وهكذا يمكن كتابة العلاقة (6-7) على النحو المبين في العلاقة (6-8) حيث :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \dots\dots\dots(8-6)$$

وتوضح هذه العلاقة أن التقوس $1 / \rho$ لمحور العتبة يتناسب طردياً مع عزم الانحناء M وعكسياً مع المقدار EI والذي يسمى بالجساءة أو جساءة الانحناء للعتبة . وهذا يعكس مدى صلابة المادة التي تتمثل في E وكذلك أبعاد مساحة المقطع والتي تتمثل في I .

وبتعويض القيمة $1 / \rho$ التي حصلنا عليها من العلاقة (6-8) في العلاقة (6-5) يمكننا الحصول على صيغة لإجهاد الانحناء في العتبة حيث :

$$\sigma_x = \frac{M}{I} y \dots\dots\dots(9-6)$$

أن هذه الصيغة تسمح لنا بتحديد مقدار الإجهاد العمودي في أي نقطة كانت للمقطع العرضي للعتبة ، بواسطة عزم الانحناء M وعزم القصور الذاتي للمقطع . كما وتظهر الأبحاث والدراسات بأن هذه الصيغة صالحة لتحديد الأجهادات العمودية في حالة الانحناء المستوي العامة عندما يؤثر في المقاطع العرضية للعتبة عزم الانحناء والقوى العرضية معاً . ويتضح من هذه المعادلة أن إجهاد الانحناء يصل حده الأقصى عند أبعد الألياف والشرائح عن السطح أو الطبقة المحايدة . حيث يتعرض الجزء المقعر أي أسفل العتبة إلى حالة شد ، بينما يتعرض الجزء المحدب في أعلى العتبة إلى حالة ضغط .

فإذا رمزنا إلى البعد بين أبعاد ليفة مشدودة وبين المحور المحايد بالرمز C_1 ، وكذلك البعد بين أبعاد ليفة مضغوطة وبين المحور المحايد بالرمز C_2 كما يبين الشكل (6-42) وبالتعويض عن تلك الأبعاد في العلاقة (6-9) نجد أن :

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc_1}{I}$$

$$\sigma_{\min} = \frac{Mc_2}{I} \dots\dots\dots(10-6)$$

وإذا كان المقطع متمثلاً بالنسبة للمحور المار خلال مركز المقطع فإن $C_1 = C_2 = C$ وتصبح الأجهادات في الألياف الخارجية متساوية في حالة الشد وحالة الضغط .

ويمكن كتابة المعادلتين في (10-6) على النحو التالي :

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{Z_1}$$

$$\sigma_{\min} = \frac{M}{Z_2}$$

حيث أن Z_1 , Z_2 تسمى بمعامل القطع ويعبر عنها بالعلاقة :

$$Z_1 = \frac{I}{C_1} \quad , \quad Z_2 = \frac{I}{C_2}$$

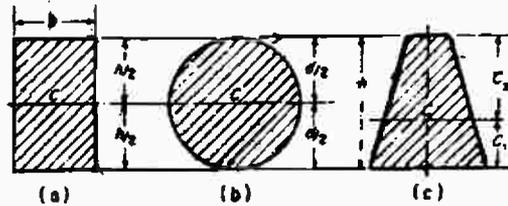
فمثلاً بالنسبة لمقطع مستطيل عرضه b وسمكه h نجد أن $c_1 = c_2 = h/2$ ، ومنه نجد أن :

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad , \quad Z_1 = Z_2 = \frac{bh^2}{6}$$

وكذلك بالنسبة لمقطع دائري قطره d نجد أن $c_1 = c_2 = d/2$ ، ومنه نجد أن :

$$I = \frac{\pi d^4}{64} \quad , \quad Z_1 = Z_2 = \frac{\pi d^3}{32}$$

وبالنسبة لعتبة مقطوعها على شكل شبه منحرف كالمبينة في الشكل (6-43) نجد أن $c_1 < c_2$ مما يجعل $Z_1 > Z_2$. لذلك إذا تعرضت مثل هذه العتبة إلى حالة انحناء تؤدي إلى قصر في سطحها الأعلى فان إجهاد الأنضغاط الأقصى في الألياف العلوية للعتبة سوف يفوق إجهاد الشد الأقصى في الألياف السفلية للعتبة ، وتعد هذه ميزة جيدة بالنسبة لعتبات الحديد الزهر ، وذلك لأن مادة الحديد الزهر في الأنضغاط أقوى مما عليه في الشد .



الشكل (6-43)

أن العلاقات والصيغ السابقة مبنية على أساس أن العتبة تتعرض إلى انحناء خالص ، أي أن عزم الانحناء يكون ثابتاً على طول العتبة . وبالتالي فإن ذلك يعني أن قوة القص تساوي صفراً ، ولا يوجد أي إجهاد في مقاطع العتبة المختلفة سوى تلك الأجهادات الناتجة عن الانحناء ، ولكن إذا كان

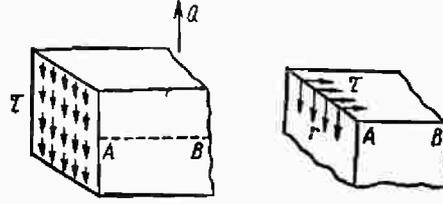
الانحناء غير منتظماً ، أي أن عزم الانحناء يتغير من مقطع إلى آخر فإن جميع مقاطع العتبة سوف تتعرض إلى قوة قص ينتج عنها أجهادات قص في المادة .

أن الانفعال والتشوه الناتج عن أجهادات القص يؤدي عادة كما هو معروف إلى اعوجاج مقاطع العتبة المختلفة بحيث تتحول المقاطع العرضية المستوية إلى مقاطع غير مستوية بعد الانحناء ، وهذا ما يعقد المسألة أكثر . وكما أشرنا سابقاً أن الدراسات والتحليلات المركزة بينت أن الأجهادات العمودية في العلاقة (6-9) لا تتأثر كثيراً بوجود أجهادات قص لذا فإن النظرية التي أشرنا إليها أعلاه لحساب الأجهادات العمودية والمبنية على أساس الانحناء الخالص يمكن استخدامها كذلك في حالة الانحناء غير المنتظم .

11.6 تحديد أجهادات القص في العتبات

رأينا في البنود السابقة أنه عندما تتعرض عتبة لحمولات عرضية ، فإن أي مقطع منها يتعرض لعزم انحناء M وقوة القص Q ، وكذلك بينا أن عزم الانحناء يمثل محصلة الأجهادات العمودية σ_x الموزعة خطياً على مقطع العتبة . وبالمثل فإن قوة القص Q_x على أي مقطع يجب أن إن تكون المحصلة لأجهادات القص τ والموزعة بصورة معينة على ذلك المقطع .

وبما أن الحالة العامة للانحناء تظهر في المقاطع العرضية للعتبة عزوم الانحناء وقوى عرضية ، وحيث أن عزم الانحناء مرتبط بالأجهادات العمودية التي تظهر في القاطع العرضية للعتبة والتي تحدد بواسطة العلاقة (6-9) . فإن وجود القوة العرضية أي قوة القص مرتبط بالأجهادات المماسية أو أجهادات القص التي تظهر في مقاطع العتبة العرضية وقانون ازدواج أجهادات القص في مقاطعها الطولية كما يبين الشكل (6-44) .



الشكل (6-44)

ولتحديد أجهادات القص نقوم بدراسة العتبة المستطيلة المقطع العرضي والمبينة في الشكل (6-45). ونأخذ جزء من العتبة طوله dz وعرضه مساو لعرض العتبة b ، حيث نجد أن هذا الجزء يؤثر عليه القوى التالية :

1- تؤثر الأجهادات العمودية على الوجه $3'3'$ والتي يمكن إيجادها من خلال العلاقة (6-9) حيث :

$$\sigma_1 = \frac{M_1}{I} y \dots\dots\dots(11-6)$$

حيث أن :

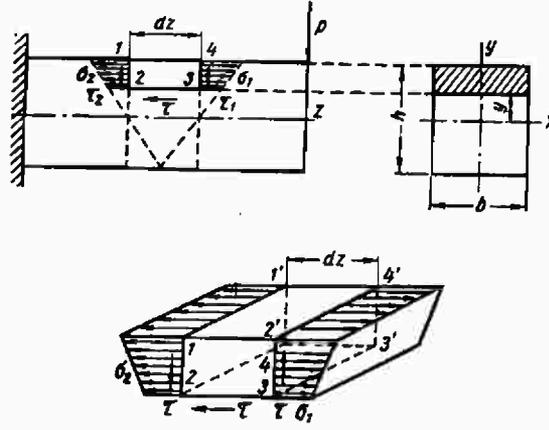
M_1 - عزم الانحناء في الوجه $3'3'$.

وعدا ذلك تؤثر في المقطع المذكور أجهادات قص مماسية τ ، وهي مجهولة ويمكن اعتبارها منتظمة التوزيع على عرض المقطع، نظراً لصغر عرض هذا المقطع.

2- وتؤثر على الوجه $1'1'$ أجهادات عمودية هي :

$$\sigma_2 = \frac{M_2}{I} y \dots\dots\dots(12-6)$$

وأجهادات قص هي τ .



الشكل (6-45)

3- وتؤثر على الوجه $3'2'2'$ أجهادات قص مماسية فقط ، وهي حسب قانون ازدواج القوى تساوي الأجهادات المماسية التي تؤثر على الوجوه العمودية . وبوضع معادلة الاتزان لجزء العتبة المقطوع ، وإسقاط القوى التي تؤثر في الجزء على الأحداثي الأفقي . ومن الطبيعي والبدهي أن لا تدخل في معادلة الاتزان المذكورة القوى المماسية التي تؤثر على الوجوه العمودية .

أن مسقط القوة المماسية المؤثرة على الوجه $2'2'2'$ يساوي القيمة الحقيقية $\tau b dz$. أما الأجهادات العمودية التي تؤثر على الوجه $3'2'2'$ ، وتكون حاصلتها :

$$N_1 = \int_A \sigma_1 dA$$

ومحصلة الأجهادات العمودية التي تؤثر على الوجه $1'2'2'$ هي :

$$N_2 = \int_A \sigma_2 dA$$

ويجب أن تحتوي هذه التكاملات مساحة القسم المقطوع ، أي مساحة الوجهين '1' 122 ، '3' 344 ، وباستخدام معادلة الاتزان $\sum Z = 0$ ، فإننا نحصل على :

$$N_1 - N_2 - \tau bdZ = 0$$

أو أن :

$$\int_A \sigma_1 dA - \int_A \sigma_2 dA - \tau bdZ = 0$$

وباستخدام العلاقتين (11-6) ، (12-6) نحصل على ما يلي :

$$\frac{M_1}{I} \int_A y \cdot dA - \frac{M_2}{I} \int_A \sigma_2 \cdot dA - \tau bdZ = 0$$

أن الحد $\int_A y \cdot dA = S_x$ يسمى العزم الأول لمساحة الجزء المقطوع أو العزم الإستاتيكي الأول لمساحة الجزء المقطوع بالنسبة للمحور المحايد أو محور التعادل ، وعليه فإن :

$$\frac{S_x}{I_x} (M_1 - M_2) = \tau bdZ$$

ولكن $M_1 - M_2 = dM_z$ هي زيادة عزم الانحناء على طول dZ ولهذا فمن الممكن كتابة العلاقة السابقة على النحو التالي :

$$\frac{S_x dM_z}{I_x} = \tau bdZ$$

ومن هنا نجد أن إجهاد القص يساوي :

$$\tau = \frac{S_x dM_z}{I_x bdZ}$$

وباستعمال العلاقة :

$$Q_z = \frac{S_x dM_z}{I_x bdZ}$$

نحصل على صيغة العالم جورا فسكي لتحديد إجهاد القص في العتبات حيث أن :

$$\tau = \frac{Q S_x}{I_x b}$$

ولبحث قانون توزيع الأجهادات المماسية على مقطع العتبة المستطيلة كما يبين الشكل (6-46) ، نحدد هذا القانون بواسطة تغير S_x لأن الحدود والمقايير الأخرى لهذا المقطع تعتبر ثابتة وعليه :

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

أن العزم الإستاتيكي للمساحة المظللة بالنسبة لمحور x يساوي :

$$S_x = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right)$$

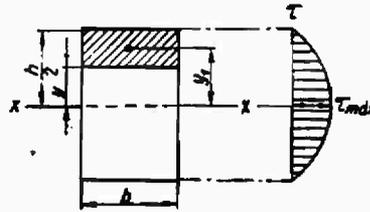
$$= \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

وهذه هي معادلة القطع المكافئ ، أما الأجهادات المماسية أو أجهادات القص فتعطى كما يلي :

$$\tau = \frac{Q b \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) . 12}{b h^3 . 2b}$$

$$= \frac{6Q}{b h^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

ثم نقوم برسم رسماً بيانياً بواسطة ثلاثة نقاط كما يبين الشكل (46-6) :



الشكل (46-6)

أن الشكل (46-6) يوضح الرسم البياني للإجهاد القص τ . أن أجهاد القص الأقصى للعتبة ذات المقطع المستطيل يكون في مستوى المحور المحايد أو ما يسمى بمحور التعادل ويساوي :

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2A}$$

أي أكثر بمرّة ونصف من ذلك الأجهاد الذي نحصل عليه ، ولو فرضنا أن الأجهادات المماسية أي أجهادات القص منتظمة التوزيع في المقطع .

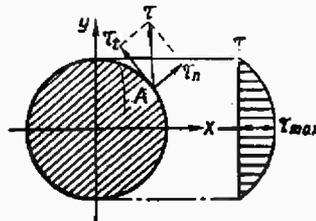
ويمكن استخدام صيغة العالم جورا فسكي بعد تقريبها ، وذلك لحساب الأجهادات المماسية في العتبات التي لها مقاطع عرضية مختلفة الأشكال . وبنفس الطريقة نحصل على الرسم البياني لأجهادات القص τ للمقطع الدائري المبين في الشكل (47-6) حيث تكون القيمة العظمى لمحور التعادل هي :

$$\tau_{\max} = \frac{4Q}{3A}$$

وللمقطع الحلقي :

$$\tau_{\max} = \frac{2Q}{A}$$

ومن المهم الإشارة إلى أن إجهاد القص أي الأجهاد المماسي الموازي لقوة القص يحدد بواسطة صيغة العالم جورا فسكي وفي مثل هذه الأشكال والمقاطع مثل الدائرة والمثلث وما شابه ذلك ، تظهر في النقاط الواقعة على سطح المقطع أجهادات مماسية متجهة باتجاه مماسي لمحيط المقطع .

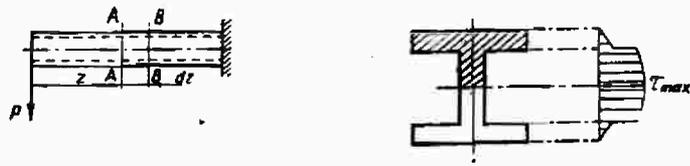


الشكل (47-6)

لنبحث مثلاً النقطة A ، القريبة من محيط المقطع الدائري المبين في الشكل (6-47) ، وفرضنا أننا حصلنا بواسطة صيغة العالم جورا فسكي على الأجهاد الكلي τ ، وعند تحليله إلى مركبته الأفقية والعمودية نجد أن المركبة العمودية على المحيط هي τ_n ومركبة أفقية مماسية τ_t .

وحسب شروط التحميل فإن سطح العتبة يكون خالي من الأجهادات ومنه فلا يمكن للإجهاد المماسي في النقطة A وكذلك في النقاط المحيطة الأخرى أن يكون باتجاه عمودي ، ويمكن أن يتجه باتجاه مماسي للمحيط ولذا وحسب الطريقة المذكورة سابقاً نقوم بتحديد فقط المركبة الرأسية أو العمودية ، وليس المقدار الكلي لإجهاد القص .

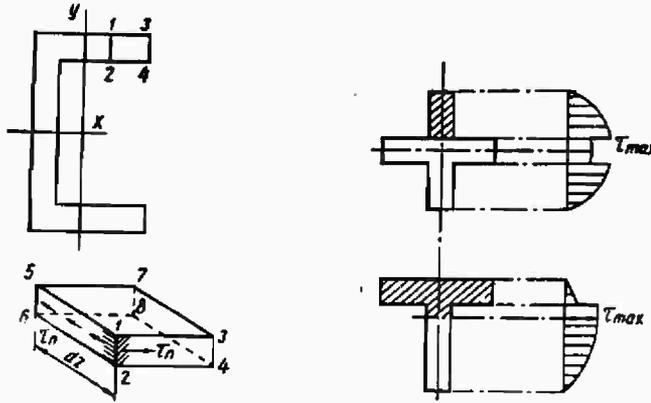
ومن المهم الإشارة أن العتبات التي لها مقطع I ، يكون عادة الرسم البياني لإجهاد القص τ متدرجاً ، وذلك نتيجة للتغيرات المفاجئة في عرض العتبة كما يبين الشكل (6-48) . حيث يكون إجهاد القص الأقصى للمقطع I في نقاط محور التعادل ، ويحدد بواسطة صيغة العالم جورا فسكي ، مع أخذ العزم الإستاتيكي للمساحة المظللة نصف مقطع .



الشكل (6-48)

وتجدر الإشارة إلى أنه توجد جداول خاصة لقيم العزم الإستاتيكي لنصف المقاطع التي تؤخذ على شكل I وعلى شكل L .

أن الشكل (6-49) يوضح أنواع الرسوم البيانية لجهود القص τ لبعض المقاطع الهندسية الأخرى .



الشكل (6-49)

ويعطى شرط المتانة أو ما يسمى بإجهاد القص المسموح به على النحو التالي :

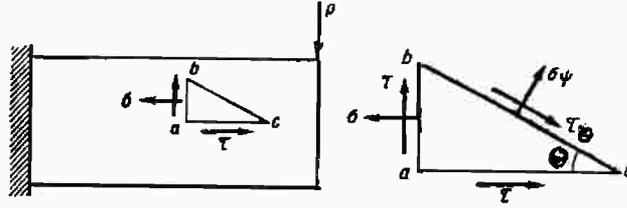
$$\tau_{\max} \leq [\tau]$$

حيث أن :

τ - هو إجهاد القص المسموح به . ويساوي مثلاً للعتبات الفولاذية $[\tau] \approx 0.62[\sigma]$.

12.6 الأجهادات الرئيسية في العتبات

لقد بينا في البند السابق أن الأجهادات العمودية والمماسية أي أجهادات القص تؤثر في مقاطع العتبة العرضية ، أما في المقاطع الطولية فتؤثر أجهادات القص فقط . وفي المقاطع المائلة للعتبة تظهر عادة الأجهادات العمودية والمماسية معاً . فمثلاً في المساحة abc كما يبين الشكل (6-50) تظهر أجهادات عمودية ومماسية ، يمكن حسابها باستخدام العلاقات التي تم استخدامها في الأبواب السابقة لحساب الأجهادات الرئيسية .



الشكل (50-6)

نستخدم العلاقة (11-6) لتحديد الأجهادات الرئيسية كما تم استخدامها في الأبواب السابقة حيث :

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \dots\dots\dots(11-6)$$

أما زاوية ميلان المساحات الرئيسية فيمكن تحديدها حسب العلاقة التالية :

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau}{\sigma} \dots\dots\dots(12-6)$$

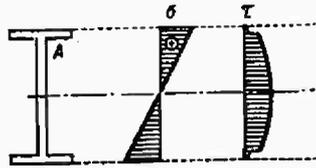
وكما اثرننا سابقاً أن أجهادات القص العظمى والدنيا التي تؤثر على المساحات والتي تشكل زاوية $\pm 45^\circ$ مع المساحات الرئيسية يمكن حسابها حسب العلاقة التالية :

$$\tau_{\frac{\max}{\min}} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \dots\dots\dots(13-6)$$

ويتبين من العلاقة (13-6) أن الأجهادات الرئيسية العمودية $\sigma_{\frac{\max}{\min}}$ ، واجهادات القص العظمى والدنيا $\tau_{\frac{\max}{\min}}$ ، سوف تحصل على القيم العظمى

في تلك النقاط من المقطع العرضي التي تكون لها أجهادات عمودية ومماسية كبيرة في وقت واحد .

فعلى سبيل المثال للمقطع I مثلاً تعتبر النقطة A إحدى هذه النقاط ، النقطة العليا أو السفلى للجدار أو المقطع كما يبين الشكل (6-51) ولكن ذلك لا يحدث بصورة دائمة ، فعندما تكون لاجهادات القص قيمة كبيرة ، فإنه عندئذ يمكن أن تكون الأجهادات الرئيسية قيمة كبرى ، تؤخذ في نقطة المقطع ، الواقعة تحت النقطة A .



الشكل (6-51)

ويمكن إيجاد موضع هذه النقطة والقيمة العظمى للاجهاد الرئيسي ، وذلك بجعل σ_{max} الأجهاد الأقصى في العلاقة (6-11) في الحالة الحدية ، وذلك لان الأجهاد العمودي σ يزداد حسب الابتعاد عن محور التعادل . أما أجهاد القص فيقل كما يبين الشكل (6-51) .

ومن المهم أيضا ، أنه يجب التأكد من الأجهادات الرئيسية على طول العتبة في تلك المقاطع التي يكون فيها لعزم الانحناء الذي يحدد الأجهاد العمودي σ ، وللقوة العرضية أي قوة القص التي تحدد τ قيمة كبيرة في نفس الوقت .

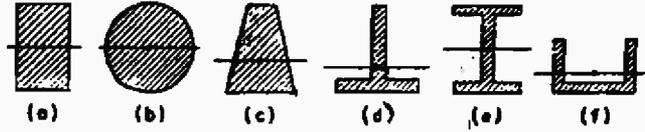
13.6 أشكال مقاطع العتبات المختلفة

في البند السابق تم دراسة الأجهادات التي تنشأ في حالة الانحناء للعتبات ، وتبين لنا أن أجهادات الشد أو الضغط القصوى في حالة الانحناء تتناسب عملياً مع بعد الألياف الخارجية عن المحور المحايد أو ما يسمى بمحور التعادل . فإذا كانت مقاومة المادة في حالة الشد مساوية لمقاومتها في حالة الضغط ، فإنه تستخدم في هذه الحالة مقاطع يكون مركز مقطعها في منتصف عمق العتبة ، وبهذه الطريقة نحصل على نفس عامل الأمان بالنسبة للألياف المعرضة للشد والضغط .

وهكذا يقع عادة الاختيار وبهذه الطريقة على المقاطع المتماثلة بالنسبة للمحور المحايد وذلك للمواد التي تتساوى فيها نقطة الخضوع في حالة الشد والضغط مثل مادة الفولاذ الإنشائي ، ومثل هذه المقاطع مبيّنة في الشكل (a.b.c-52-6) . أما إذا كان المقطع غير متماثل بالنسبة للمحور المحايد كمقطع قضبان السكة الحديدية مثلاً ، فإن المادة توزع في الغالب بين الجهتين العليا والسفلى بحيث يكون مركز المقطع بالقرب من منتصف ارتفاعه .

أما بالنسبة للمادة التي هي ذات مقاومة منخفضة في حالة الشد ومرتفعة في حالة الضغط . مثل مادتي الحديد الزهر والخرسانة ، فإن أفضل مقطع للعتبة هو ليس ذلك المتماثل بالنسبة للمحور المحايد وإنما المقطع التي تكون فيه المسافتان C_1 ، C_2 من المحور المحايد إلى الألياف الخارجية في حالة الشد والضغط هما كنسبة المقاومتين للمادة في حالة الشد والضغط .

وبهذه الطريقة نحصل على مقاومتين متساويتين في الشد والضغط . فمثلاً لمقطع على شكل T كما يبين الشكل (d.52-6) يمكننا أن نتحكم في موضع مركز الحركة وذلك عن طريق تغيير نسبة بعد الوترية إلى بعد الجدار .



الشكل (52-6)

وعند تصميم العتبات المعرضة للانحناء يجب مراعاة إلى جانب عوامل المقاومة الاقتصادية في وزن العتبة . فإذا وجد مقطعان متساويان من حيث معامل المقطع ، ومواصفات المقاومة اللازمة ، وعامل الأمان فإن المقطع الأصغر مساحة يكون هو الأكثر اقتصاداً ، ولمقارنة بعض الأشكال المختلفة لمقاطع العتبات نأخذ أولاً مقطع مستطيل عمقه h وعرضه b كما يبين الشكل (a.52-6) ، حيث أن معامل المقطع لهذا المستطيل يعطى كما يلي :

$$Z = \frac{bh^2}{6} = \frac{1}{6} Ah \dots \dots \dots (6-14)$$

حيث أن :

- A هي مساحة المقطع .
- h هو عمق المستطيل .

ويتضح من هذه العلاقة أنه كلما زاد العمق h يكون المقطع المستطيل أكثر اقتصاداً ، إلا أنه يوجد هناك حداً لهذه الزيادة إذ يقل عادة استقرار العتبة للمقاطع الرهيفة ذات المقطع المستطيل ، والتي قد تتعرض إلى الانهيار ليس نتيجة ضعف في مقاومة المادة بل نتيجة التحدب أيضاً ، أما بالنسبة لمقطع دائري قطره d كما يبين الشكل (d.52-6) فإن معامل المقطع يساوي :

$$Z = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{1}{8} Ad \dots\dots\dots (15 - 6)$$

فإذا قارنا مقطع دائري قطره d مع مقطع مربع مساوي له في المساحة طول ضلعه h نجد أن :

$$h = d \sqrt{\pi} / 2$$

وبالتعويض عن ذلك في معادلة معامل المقطع للمستطيل السابقة نجد أن :

$$Z = 0.148 Ad$$

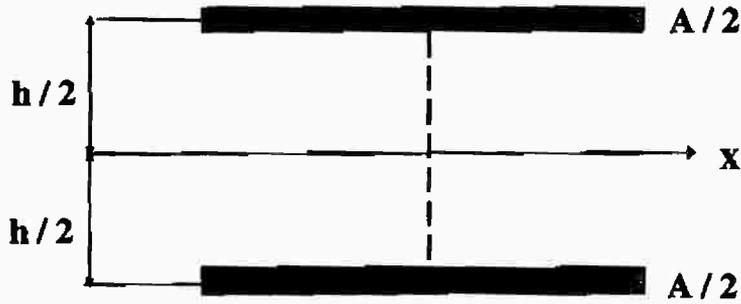
وبمقارنة هذه العلاقة مع معادلة معامل المقطع بالنسبة لمقطع دائري قطره d نستنتج أن المقطع المربع يكون أكثر اقتصاداً من المقطع الدائري .

من توزيع أجهادات الانحناء في مقطع العتبة المبينة في الشكل (6-42) يتضح لنا أنه للاقتصاد في التصميم يجب وضع معظم مادة العتبة أبعد ما يمكن عن المحور المحايد . حيث يكون الوضع الأمثل نظرياً لمقطع مساحته A وارتفاعه h هو أن توضع نصف المساحة على مسافة h/2 إلى الأعلى من المحور المحايد ، والنصف الآخر على مسافة h/2 إلى الأسفل من المحور المحايد كما يبين الشكل (6-53) وبالتالي نحصل على :

$$I = 2 \left(\frac{A}{2} \right) \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} A h^2$$

ويصبح معامل المقطع في هذه الحالة :

$$Z = \frac{1}{2} Ah \dots\dots\dots(16 - 6)$$



الشكل (53-6)

وعلى الرغم أن هذا الحد الامثل لا يمكن الوصول إليه وتحقيقه . إلا أنه يمكن الاقتراب منه عملياً باستخدام مقطع على شكل الحرف I أو مقطع عريض الجدار ، حيث تتواجد معظم المادة في الجدارين كما يبين الشكل (e.52-6) . وبسبب ضرورة وضع جزء المادة في الوتره ، فإنه من غير الممكن تحقيق الشرط الحدي الذي حصلنا عليه في العلاقة (16-6) ، إلا أنه بالنسبة للمقاطع ذات الجدران العريضة نجد أن :

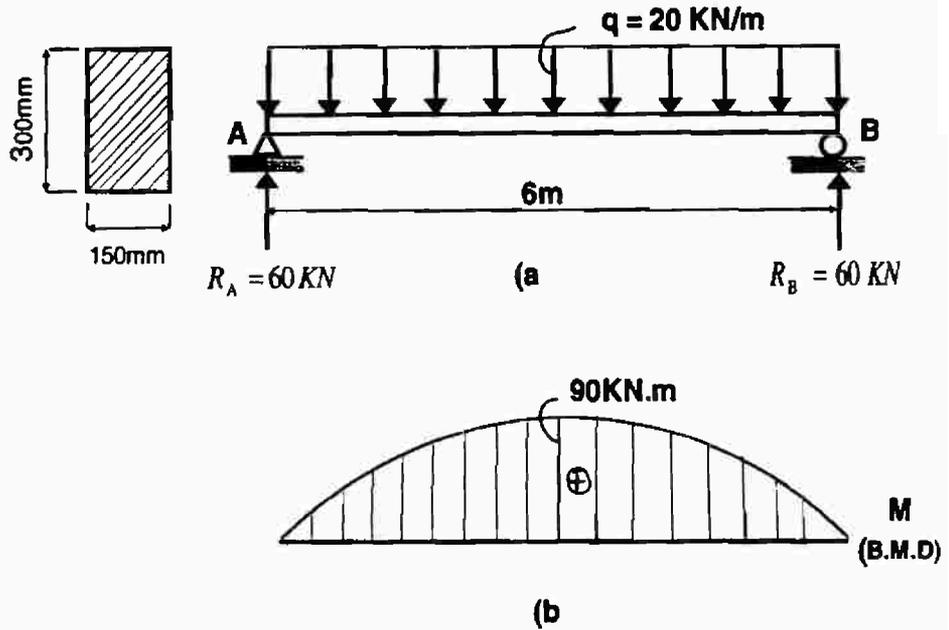
$$Z = \frac{1}{3} Ah \dots\dots\dots(17 - 6)$$

وبأجراء مقارنة بين العلاقتين (17-6) و (14-6) نجد أن مقطع على شكل I يكون أكثر اقتصاداً من مقطع مستطيل مساو له في العمق . كذلك فإن مقطع على شكل الحرف I يكون بسبب جداريه العريضين أكثر استقراراً بالنسبة للتحذب الجانبي من مقطع مستطيل مساو له في العمق وفي معامل المقطع .

ويستخدم دليل خاص لتصميم واختيار مقاطع العتبات يبين الخصائص المختلفة للمقاطع الإنشائية المختلفة مثل عزم القصور الذاتي ، ومعامل المقطع وغيرها من الخصائص اللازمة عند التصميم .

مثال (6-15)

الشكل (6-54) يبين عتبة معرضة لحمولة موزعة بانتظام مقدارها 20 KN/m ، وطولها 6m ومركزة ارتكازاً بسيطاً عند نهايتها A ، B ، إذا علمت أن المقطع المستعرض للعتبة مستطيل أبعاده $150 \times 300 \text{ mm}$. أوجد قيمة وموضع أجهاد الانحناء الأقصى في العتبة . ثم عين أجهاد الانحناء عند النقطة 50 mm أسفل السطح الأعلى للعتبة عند مقطع في منتصف المسافة بين المركزين .



الشكل (6-54)

الحل :

اشرنا في البند السابق أن الرسم البياني لمخطط عزم الانحناء لحمولة موزعة بانتظام تؤثر على عتبة بسيطة هو عبارة عن قطع ناقص يتغير من الصفر عند نهايتي العتبة إلى قيمة قصوى عند منتصفه . ونحسب قيمة عزم الانحناء في مركز العتبة كما يلي :

$$M = 60(3) - (20)(3)(1.5) \\ = 180 - 90 = 90 \text{ KN.m}$$

وبما أن القيمة القصوى لعزم الانحناء تكون عند منتصف العتبة فإن أجهاد الانحناء الأقصى يجب أن يحدث أيضا عند منتصف العتبة أي عند $x = 3\text{m}$ ، ويكون أجهاد الانحناء عند أي ليفة أو شريحة تقع على مسافة y من محور التعادل للمقطع مساويا :

$$\sigma = \frac{M y}{I} = 90 \times 10^3 y / I$$

وحيث أن I عزم القصور الذاتي للمقطع يساوي :

$$I = \frac{1}{12} b h^3 \\ = \frac{1}{12} (150) (300)^3 \\ = 33.7 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

وبالتعويض نجد أن عزم الانحناء في منتصف المقطع يساوي :

$$\sigma = 90 \times 10^3 (10^3) y / 33.7 \cdot 10^7$$

أن أجهاد الانحناء الأقصى عند أي من الشرائح الطرفية العليا أو السفلى . عند الشرائح السفلى أي عند $y = 150\text{mm}$ نجد أن :

$$\begin{aligned}\sigma &= 90 \times 10^3 (10^3) (150) / 33.7 \cdot 10^7 \\ &= 135 \cdot 10^8 / 33.7 \cdot 10^7 \\ &= 40 \text{ MPa}\end{aligned}$$

ونجد أن الألياف والشرائح على مدى السطح السفلي للعتبة تستطيل ، وبالتالي يكون الأجهاد في الشرائح في حالة شد . أما في الشرائح العليا عند $y = 150\text{mm}$ فإنه يوجد أجهاد ضغط بنفس القيمة .

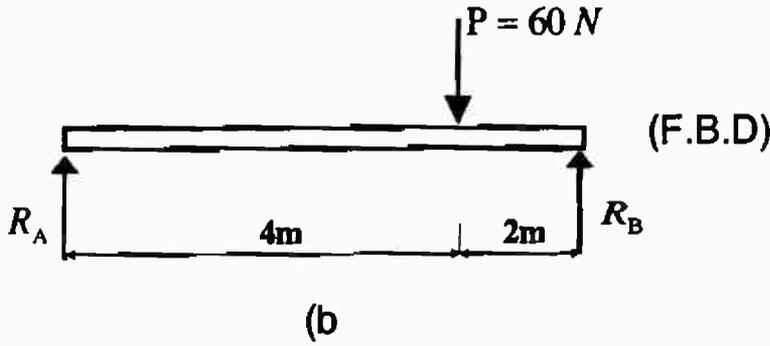
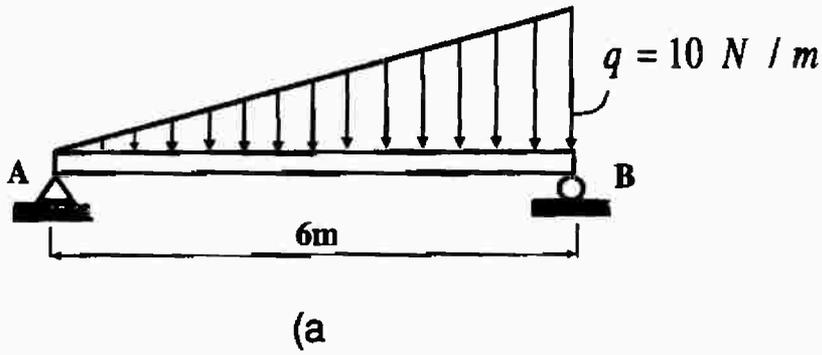
أما عند النقطة $x = 50\text{mm}$ أسفل السطح العلوي للعتبة فإن أجهاد الانحناء عند هذا المقطع في المنتصف يكون هو :

$$\begin{aligned}\sigma &= 33.7 \times 10^3 (10^3) (-100) / 33.7 \cdot 10^7 \\ &= 90 \cdot 10^8 / 33.7 \cdot 10^7 \\ &= -26.7 \text{ MPa}\end{aligned}$$

ويجب الإشارة إلى انه تم أخذ y سالبة في حساب الأجهاد σ حيث أن النقطة موضع الدراسة تقع فوق محور التعادل . وبالتالي فإن الأجهاد يكون أجهاد انحناء ضغط كما تبين الإشارة السالبة النهائية .

مثال (16-6)

الشكل (a.55-6) بين عتبة بسيطة معرضة إلى حمولة موزعة بانتظام كثافتها القصوى تساوي 10 N/m عند النهاية اليمنى للعتبة . فإذا كانت العتبة عبارة عن مقطع ذي شفة عريضة له الأبعاد المبينة في الشكل (55-6) حدد كثافة الحمولة القصوى q التي يمكن تطبيقها إذا كان الأجهاد المسموح به في حالة الشد والضغط يساوي 125 MPa .



الشكل (55-6)

الحل :

نقوم بتحديد ردود الأفعال R_B, R_A بدلالة q الحمولة المتغيرة بانتظام عن طريق استبدال هذه الحمولة بمحصلتها حيث أن :

$$P = \frac{1}{2} q \cdot e = \frac{1}{2} 10.6 = 30N$$

تؤثر خلال مركز ثقل الرسم البياني لمثلث الحمولة أي 4m على يمين المفصل A كما هم مبين في الشكل (b.55-6) . وبتطبيق شروط الاتزان الإستاتيكي نجد أن :

$$R_A = 20N \quad , \quad R_B = 40N$$

أن كيفية رسم الرسومات البيانية لمخططات قوة القص وعزم الانحناء قد تم عرضها في البند السابق من هذا الباب لمثل هذا النوع من الحمولات وهي مبينة في الشكل (56-6) .

وبأخذ محور مثل x ينطبق مع العتبة وتكون نقطة الأصل A . فأننا نحصل على كثافة الحمولة على مسافة مثل x إلى يمين رد الفعل الأيسر R_A من علاقة تشابه المثلثات لتكون $q = \left(\frac{x}{6}\right)$ ، وطبقاً للأمثلة التي تم حلها في البند السابق من هذا الباب .

أن قوة القص Q عند مقطع على مسافة x من الطرف الأيسر للمفصل A تعطى كما يلي :

$$\begin{aligned} Q &= 10 - \frac{1}{2} (x/6) 10 x \\ &= 10 - \frac{1}{2} (10) x^2 \end{aligned}$$

وتسري هذه العلاقة لجميع قيم x ويمكن منها رسم مخطط قوة القص كما هو مبين في الشكل (a.56-6). كما ويمكن إيجاد النقطة التي يكون عندها القص يساوي صفر وذلك من خلال مساواة الصيغة بالصفر حيث :

$$10 - \frac{1}{12} 10 x^2 = 0$$

ومنه نجد أن :

$$x = \sqrt{12} = 3.46m$$

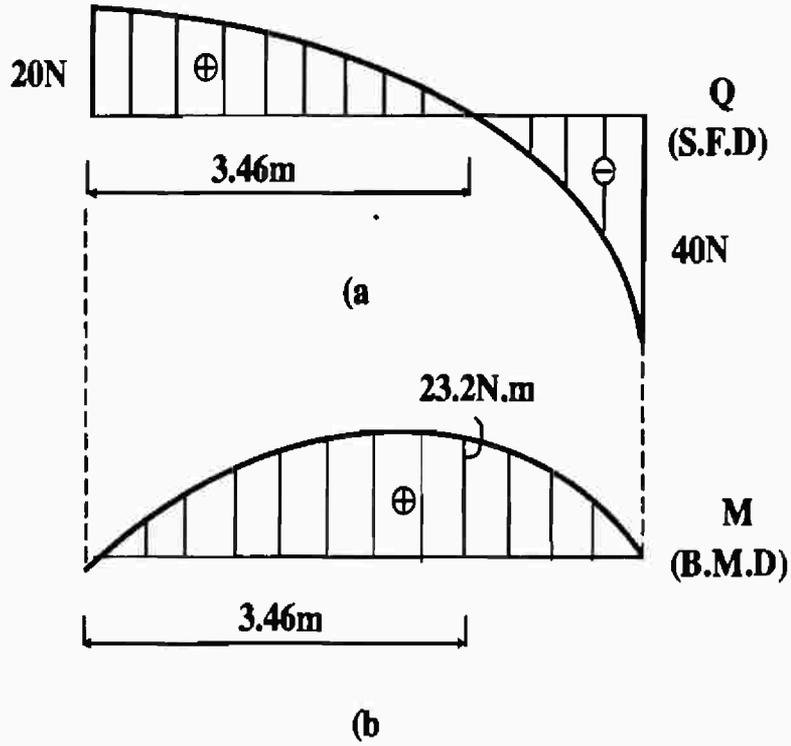
وهذه النقطة التي يكون فيها عزم الانحناء ذو قيمة قصوى . ويعطى عزم الانحناء M عند مقطع على مسافة x من الركيزة اليسرى A كالآتي :

$$\begin{aligned} M &= 10x - \frac{1}{2} (x/6) 10 \frac{x^3}{3} \\ &= 10x - \frac{1}{36} 10x^3 \end{aligned}$$

وتسري هذه المعادلة لجميع قيم x ، ومنها يمكن رسم الرسم البياني لمخطط عزم الانحناء على الشكل المبين (b.56-6) .

وعند النقطة $x = 3.46 m$ ، يمكن إيجاد عزم الانحناء بالتعويض في العلاقة السابقة حيث :

$$\begin{aligned} M &= 3.46(10) - \frac{1}{36} (10)(3.46)^3 \\ &= 23.2 N.m \end{aligned}$$



الشكل (56-6)

وهذا هو عزم الانحناء الأقصى في العتبة . أن أجهاد الانحناء على أي ليفة أو شريحة على مسافة y من محور التعادل للعتبة يعطى بالعلاقة التالية :

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

نجد أن عزم القصور الذاتي أو ما يسمى بالعزم الثاني للمساحة I للعتبة :

$$I = \frac{150 (250)^3}{12} - 2 \left[\frac{65 (210)^3}{12} \right]$$

$$= 95 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

أن أجهاد الشد الأقصى يحدث عند الشرائح والألياف السفلية للعتبة حيث :

$$y = 125 \text{ mm}$$

عند المقطع الذي يكون لعزم الانحناء عنده القيمة القصوى ، ويكون هذا الأجهاد 125 MPa ومنه نجد أن :

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

ومن هنا يمكننا إيجاد كثافة الحمولة القصوى التي يمكن تطبيقها اعتماداً على الأجهاد المسموح به :

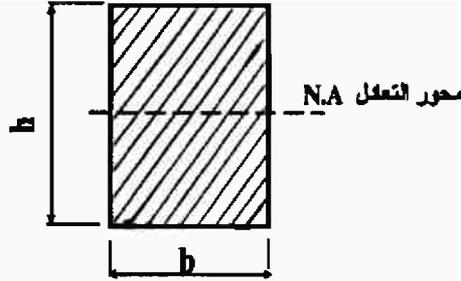
$$125 \times 10^6 = \frac{(2.32 \cdot q)(0.125)}{95 \times 10^6 (10^{-12})}$$

ومنه نجد كثافة الحمولة القصوى :

$$q = 41 \text{ KN/m}$$

مثال (6-17)

أوجد معامل أو معايير المقطع للعتبة ذات الشكل المستطيل والمبين في الشكل (6-57) .



الشكل (57-6)

الحل :

ترمز h إلى عمق العتبة و b إلى عرضها . وكما اشرنا سابقاً أن الانحناء الخالص يفترض أن يحدث حول المحور المحايد أو محور التعادل والذي يمر بمركز ثقل المقطع المستعرض للعتبة . أن عزم القصور الذاتي للمساحة المستطيلة حول محور التعادل يساوي :

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

وقد اشرنا أيضاً إلى أن المسافة عند الشرائح والألياف الخارجية إلى محور التعادل هي $h / 2$ والتي يرمز لها عادة بالرمز c ، وفي هذه الحالة يمكن إيجاد أجهادات الانحناء العظمى عند الشرائح والألياف الخارجية حسب العلاقة التالية :

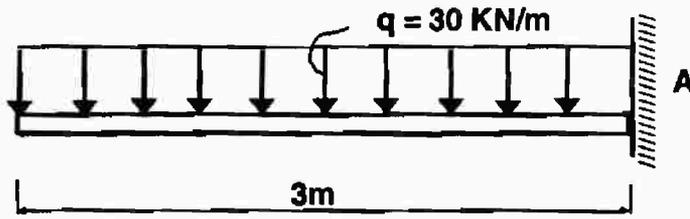
$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{I/c}$$

وتسمى النسبة I / c بمعامل أو معايير المقطع للعتبة ويرمز لهذه النسبة بالرمز Z . ومنه تصبح أجهادات الانحناء العظمى $\sigma_{\max} = \frac{M}{Z}$ للعتبة ذات المقطع المستعرض المستطيل ، ويمكن إيجاد Z بالتعويض عن قيمة I ، وقيمة c للمستطيل حيث :

$$Z = \frac{I}{c} = \frac{bh^3 / 12}{h / 2} = \frac{bh^2}{6}$$

مثال (18-6)

عتبة كابولية طولها 3m معرضة لحمولة موزعة بانتظام مقدارها 30kN/m ، الشكل (a.58-6) . إذا علمت أن قيمة الأجهاد المسموح به في حالة الشد أو الضغط تساوي 150MPa . إذا كان المقطع المستعرض للعتبة مستطيل ، حدد الأبعاد إذا كان ارتفاع العتبة هو ضعف عرضها .



(a)



(b)

الشكل (58-6)

الحل :

نقوم أولاً برسم الرسم البياني لمخطط الجسم الحر للعتبة ، وقد تم عرض ذلك في البنود السابقة من هذا الباب ، حيث وجد أن مخطط عزم الانحناء لهذه العتبة يكون على شكل قطع ناقص يتغير من الصفر عند النهاية الحرة للعتبة إلى قيمة قصوى عند المسند المثبت A كما يبين الشكل (b.58-6) . أن عزم الانحناء الأقصى عند المسند المثبت يمكن إيجاده من الشرط الثالث للتوازن أي عن طريق إيجاد العزم عند أي نقطة من العتبة ولتكن النقطة A مثلاً :

$$\sum M_{(A)}^+ = 0 ;$$

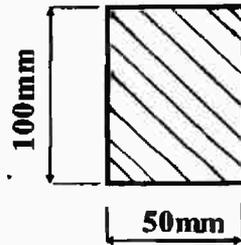
$$30(3)(1.5) + M_A = 0$$

ومنه :

$$M_A = -135 \text{ KN.m}$$

أن هذه المسألة تختلف عن المسائل السابقة لأنها تتضمن تصميم العتبة وليس تحليل الأجهادات المؤثرة في العتبات ذات الأبعاد المعروفة والمعرضة لحمولات مختلفة . وأن المقطع الوحيد المطلوب اعتباره لأغراض التصميم هو المقطع الذي تكون قيمة عزم الانحناء قيمة قصوى ، وهذه القيمة تكون عند المسند الثابت A .

وهكذا نريد تصميم عتبة مستطيلة تقاوم عزم انحناء مقداره 135KN.m مع أجهاد انحناء أقصى مقداره 150MPa . أن المقطع المستعرض للعتبة مبين في الشكل (59-6) ، حيث نرسم لعرض العتبة بالرمز b ، وللارتفاع بالرمز h = 2b طبقاً لمتطلبات المسألة .



الشكل (59-6)

نجد عزم القصور الذاتي للمساحة حول محور التعادل والذي يمر في مركز ثقل المقطع كما يلي :

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

وبالتعويض عن $h = 2b$ نجد أن :

$$I = \frac{b(2b)^3}{12} = \frac{2}{3}b^4$$

نقوم بإيجاد أجهاد الانحناء عند المقطع المستعرض للعتبة المجاور للمسند
الثابت حسب العلاقة :

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

أن إجهاد الانحناء الأقصى يحدث على مدى السطح العلوي للعتبة حيث أن
هذه الألياف والشرايح تستطيل قليلاً . وعند هذا
السطح $y = -b$ و $\sigma = 150MPa$ ، ومنه نجد أن :

$$\sigma = \frac{M y}{I}$$

$$150 = \frac{-135 \times 10^3 (10)^3 (-b)}{(2/3)b^4}$$

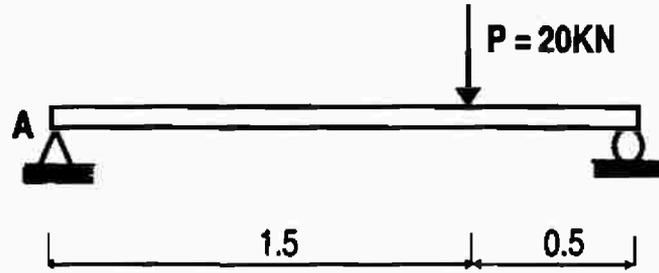
ومن هذه العلاقة يمكننا إيجاد إبعاد مقطع العتبة طبقاً لمواصفات المسألة
حيث أن :

$$b = 110mm \quad , \quad h = 2b = 220mm$$

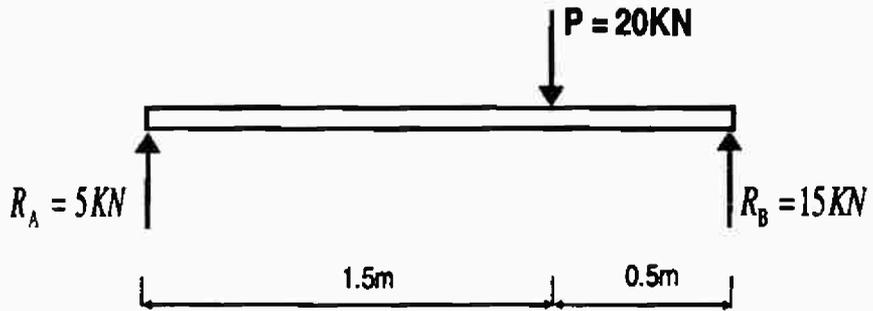
وهكذا استطعنا تحديد الأبعاد حسب المعطيات والمواصفات المطلوب
تحديدها .

مثال (19-6)

الشكل (60-6) يبين عتبة بسيطة ذات مقطع مستعرض مستطيل ومعرضة لقوة مركزة واحدة . والمطلوب تحديد أجهاد القص في العتبة . ومن ثم تحديد أجهاد القص أيضاً عند النقطة 25mm أسفل العتبة عند مقطع على بعد 1m على يمين المفصل A أي النهاية اليسرى للعتبة .



(a)



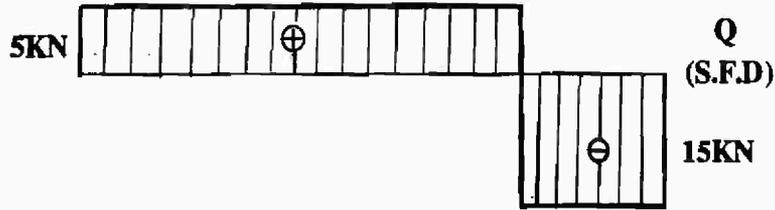
(b)

الشكل (60-6)

الحل :

نقوم برسم الرسم البياني لمخطط الجسم الحر للعتبة ، حيث يمكن بعد ذلك الحصول على قيم ردود الأفعال المبينة في (a.60-6) من شروط الاتزان

الثلاث ، بعد ذلك نقوم برسم الرسم البياني لمخطط قوة القص Q والذي يبينه الشكل (61-6) . وبدراسة هذا الرسم البياني لقوة القص نجد أن القيمة القصوى لهذه القوة تحدث عند جميع المقاطع المستعرضة على يمين الحمولة المركزة 20KN ، والتي تساوي 15KN .



الشكل (61-6)

وتكون القيمة المتوسطة لإجهاد القص المؤثرة على أي مقطع مستعرض في هذه المنطقة هي قوة القص مقسومة على مساحة المقطع المستعرض ، أي أن :

$$\tau_{\text{متوسط}} = \frac{20 \times 10^3}{0.1(0.05)} = 4 \text{ MPa}$$

ويكون إجهاد القص الأقصى أكبر من القيمة المتوسطة بمرة ونصف حسب العلاقة التالية :

$$\begin{aligned} \tau_{\text{max}} &= \frac{Qh^2}{8bh^3/12} = \frac{3Q}{2bh} \\ &= \frac{3}{2} (4) = 6 \text{ MPa} \end{aligned}$$

أن أجهاد القص هذا يحدث عند جميع النقاط على مدى محور التعادل للعتبة على يمين الحمولة 20KN .

من الرسم البياني لمخطط قوة القص نجد أن قوة القص المؤثرة على مسافة 1m يمين رد الفعل الأيسر تساوي 5KN ، وقد تم في البنود السابقة إيجاد أجهاد القص τ عند أي نقطة في هذا المقطع على مسافة y من محور التعادل حيث أن :

$$\tau = \frac{Q}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y_0^2 \right)$$

عند النقطة 25mm أسفل الألياف والشرائح العلوية للعتبة نجد أن :
 $y_0 = 26\text{mm}$

وحيث أن :

$$h = 100\text{mm}$$

فإن عزم القصور الذاتي يكون :

$$\begin{aligned} I &= \frac{bh^3}{12} = 50 (100)^3 / 12 \\ &= 4.167 \times 10^6 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

وبالتعويض عن قيمة عزم القصور الذاتي يمكن إيجاد أجهاد القص عند النقطة 25mm أسفل قمة العتبة عند مقطع على بعد 1m على يمين المفصل A نجد أن :

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{5 \times 10^3}{2 (4.167 \times 10^6)} \left(\frac{100^2}{4} - 25^2 \right) \\ &= 1.125 \text{ MPa} \end{aligned}$$

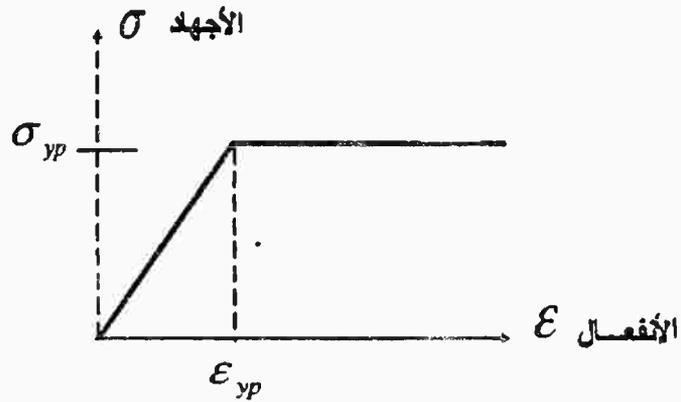
14.6 الانحناء اللدن للعتبات

قمنا في البند السابق بدراسة الانحناء المرن للعتبات ، حيث اشرنا إلى أنه إذا كان تصرف العتبة كامل المرونة عند محور التعادل أو ما يسمى أحياناً بمحور التعادل (Neutral Axis) يمر بمركز النقل للمقطع المستعرض لهذه العتبة . وكلما ازدادت الحمولات يبدأ التصرف اللدن بالظهور من الألياف والشرائح الخارجية بالانتشار إلى الداخل مما يؤدي إلى تحرك موضع التعادل من موضع إلى موضع آخر ، يمكن تحديده بإدراك أن القوة العمودية المحصلة على أي مقطع مستعرض تختفي .

وفي النهاية أي عندما يكون تصرف العتبة كامل اللدونة فإن محور التعادل يأخذ موضعاً بحيث تقسم المساحة الكلية للمقطع المستعرض إلى قسمين متساويين .

ولتوضيح ذلك نقوم بدراسة المراحل التالية لتصرف المادة والتي تتضمن أن تجهد ألياف عتبة ما حتى حد الخضوع للمادة ، وهذا ما يبينه منحنى الأجهاد والانفعال بشكله المبسط والمبين في الشكل (6-62) ، حيث يفترض في هذا المنحنى أن حد التناسب وحد الخضوع متطابقان .

وأن منطقة الخضوع أي الجزء الأفقي من هذا المخطط يمتد إلى ما لانهاية . ويسمى هذا التمثيل عادة لمخطط الأجهاد - والانفعال بالتصرف المرن كامل اللدونة ، حيث تمثل σ_{yp} حد الخضوع للمادة وتمثل E_{yp} الانفعال المناظر لهذا الأجهاد ، على افتراض أن خواص المادة متشابهة في حالة الشد والضغط .

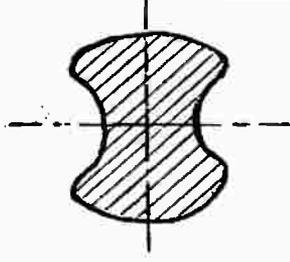


الشكل (62-6)

أن التصرف المرن واللدن يحدث عندما تتعرض العتبة لعزم انحناء كبير بحيث تجهد الألياف الداخلية في المجال المرن بينما تصل الألياف الخارجية إلى حد الخضوع للمادة . وعند زيادة عزم الانحناء فإن تصرف العتبة يقترب من الحالة التي يكون عندها جميع الألياف مجهدة إلى حد الخضوع للمادة .

يسمى عزم الانحناء المناظر للتصرف كامل اللدونة للعتبة بعزم الانحناء كامل اللدونة ويرمز له عادة بالرمز M_p . أن ارسم البياني لمخطط الأجهاد والانفعال المبين في الشكل (62-6) يفترض أنه لا يمكن أن ينشأ عزم انحناء أكبر من هذا العزم .

ولتحديد عزم الانحناء المؤثر على العتبة عندما تصل جميع الشرائح والألياف على مسافة l من محور التعادل إلى حد الخضوع للمادة ، نقوم بدراسة عتبة ذات مقطع مستعرض اختياري متمائل حول محوريه كما يبين الشكل (63-6) ومعرضة لانحناء صرف .



الشكل (63-6)

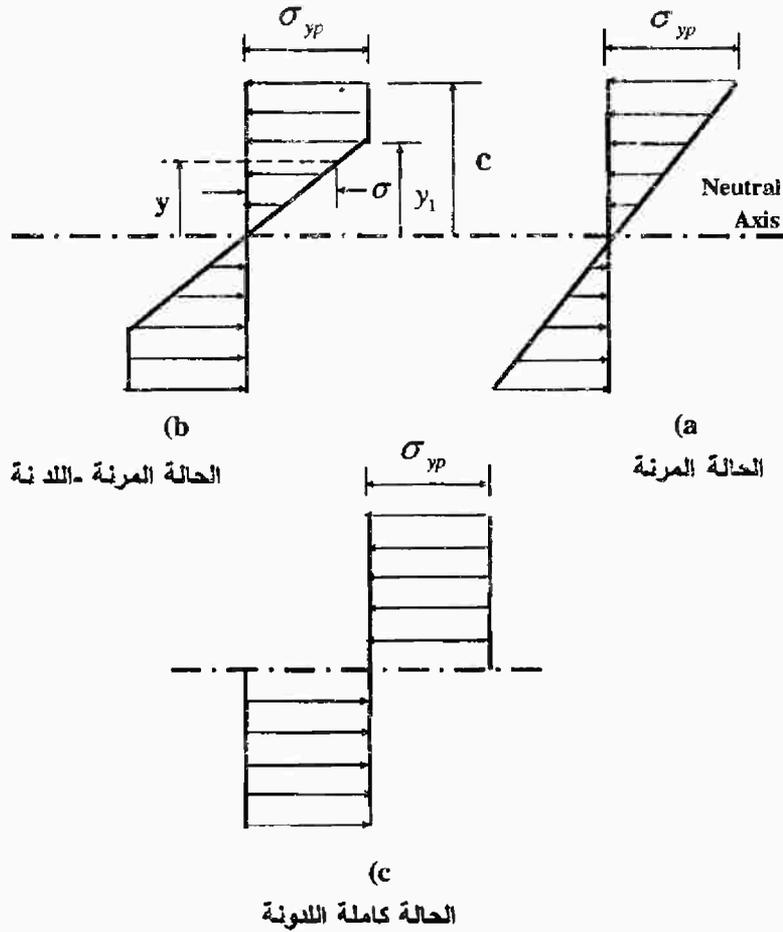
أن المادة تعتبر مرنة كاملة اللدونة عندما يكون الرسم البياني للإجهاد - والانفعال كما هو مبين في الشكل (62-6) ، وتكون خصائص الأجهاد - والانفعال في الشد والضغط متماثلة ومتشابهة .

وبلاحظ هنا أنه على الرغم من أن انحناء العتبة قد تسبب في خضوع الشرائح والألياف الخارجية فإنه يظل منطقياً افتراض أن المقاطع المستوية للعتبة العمودية على المحور قبل تأثير الحملات تبقى مستوية وعمودية على المحور بعد التحميل ، وبالتالي تظل الانفعالات لشرائح والألياف الطولية للعتبة تتغير خطياً مع مسافة الشريحة من محور التعادل .

وبازدياد قيمة العزم المؤثر فإن الشرائح والألياف المتطرفة للعتبة تصل أولاً لحد خضوع المادة وتبدأ الأجهادات العمودية بالتغير على جميع الشرائح الداخلية خطياً على مسافة الشريحة من محور التعادل ، وتلك الحالة يبينها الشكل (a.64-6) .

وعند الزيادة الإضافية في قيمة العزم تصل شرائح داخلية عند حد الخضوع مع تقديم الخضوع من الشرائح الداخلية إلى الداخل ، أي أن منحنى الأجهاد والانفعال يبدأ بالتغير كما يبين الشكل (b.64-6) . في الحالة النهائية

أي في النهاية عندما تجهد جميع الشرائح إلى حد الخضوع فإن منحنى توزيع الأجهاد يكون على النحو المبين في الشكل (c.64-6). ويسمى الانحناء المناظر في هذه الحالة بالعزم كامل اللدونة .



الشكل (64-6)

بالعودة إلى العتبة المعرضة لانحناء صرف كما اشرنا سابقاً فإن محصلة القوى العمودية يجب أن تختفي وتتلاشى على المقطع المستعرض للعتبة . ويكون واضحاً بالتالي من خلال دراستنا لمنحنى توزيع الأجهاد المبين في الشكل (b.64-6) أنه للمقطع المتمائل حول محوريه يجب أن يمر محور

التعادل لمركز الثقل لهذا المقطع أي يجب أن تساوي المساحة فوق محور التعادل المساحة أسفل ذلك المحور .

ومع ذلك ففي الحالة العامة أي عند دراسة مقطع مستعرض غير متماثل حول محوريه ، فإن محور التعادل بعد خضوع شرائح وألياف معينة لا يظل كما هو في حالة التصرف خالص المرونة للعتبة حيث يمر محور التعادل لمركز ثقل المقطع المستعرض . ومن الشكل (6-64.b) نلاحظ أنه عند $y < y_1$ يمكن إيجاد الأجهاد ، من تشابه المثلثين نجد أن :

$$\frac{\sigma}{y} = \frac{\sigma_{yp}}{y_1}$$

ومنه نجد أن الأجهاد σ يساوي :

$$\sigma = \frac{y}{y_1} \sigma_{yp}$$

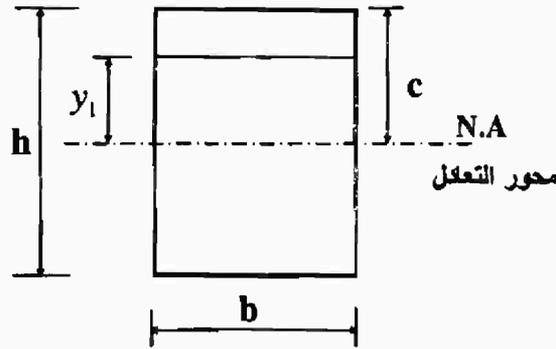
وعندما يكون الأجهاد يساوي الأجهاد كامل اللدونة أي $\sigma = \sigma_{yp}$ فإنه يمكننا إيجاد عزم الانحناء باستخدام التكامل لمساحة منحنى توزيع الأجهاد حيث :

$$\begin{aligned} M &= \int \sigma y \cdot dA = 2 \int_0^{y_1} \frac{y}{y_1} \cdot \sigma_{yp} \cdot dA + 2 \int_{y_1}^c \sigma_{yp} \cdot y dA \\ &= \frac{2\sigma_{yp}}{y_1} \int_0^{y_1} y^2 \cdot dA + 2\sigma_{yp} \int_{y_1}^c y dA \end{aligned}$$

وهكذا باستخدام التكامل نستطيع أن نجد صيغة لحساب عزم الانحناء في حالة تصرف اللدن للعتبة .

مثال (20-6)

أوجد قيمة العزم عندما تصل جميع الألياف والشرائح على مسافة y_1 من محور التعادل إلى حد الخضوع لمادة عتبة ذات مقطع مستطيل مبيّنة في الشكل (65-6).



الشكل (65-6)

الحل :

اعتماد على شكل المقطع المستعرض للعتبة الشكل المستطيل نجد أن :

$$M = \frac{2\sigma_{yp}}{y_1} \left(\frac{1}{3} b y_1^3 \right) + 2\sigma_{yp} b (c - y_1) \left(\frac{c + y_1}{2} \right)$$

$$= \left(b c^2 - \frac{b}{3} y_1^2 \right) \sigma_{yp}$$

وكما اشرنا في البند السابق أنه في النهاية أي عند $y_1 = 0$ كما يوضح الشكل (64-6) يكون العزم كامل اللدونة لهذه العتبة المستطيلة ومنه نجد أن :

$$M_P = b c^2 \sigma_{yp} = \frac{b h^2}{4} \sigma_{yp}$$

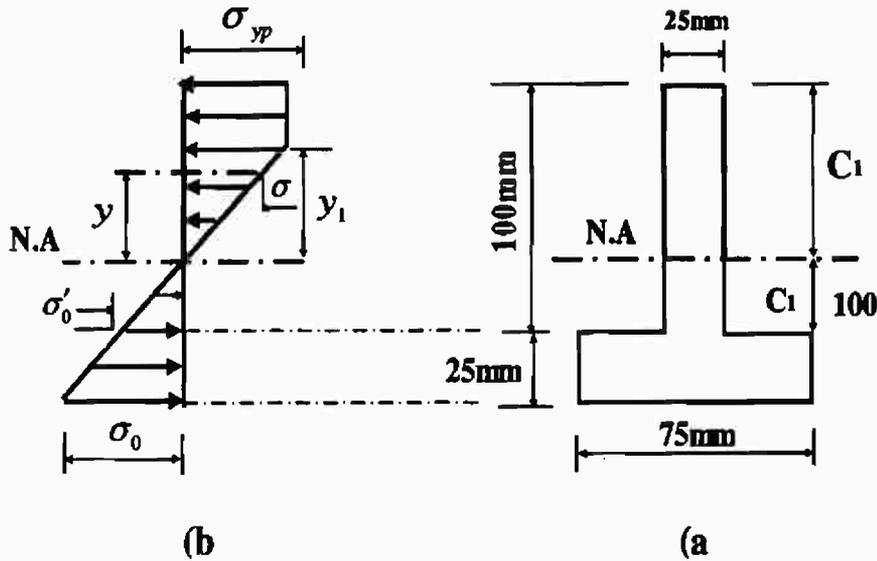
ويجب ملاحظة أن أقصى عزم مرن محتمل ، أي بمجرد وصول الألياف المتطرفة لحد الخضوع ، بينما تظل جميع الشرائح الداخلية في مجال التصرف المرن فإن :

$$M_e = \frac{bh^3}{6} \sigma_{yp}$$

وهكذا للمقطع المستعرض المستطيل يكون العزم المستطيل يكون العزم كامل اللدونة أكبر بـ 50% من قيمة العزم المرن الأقصى الممكن .

مثال (6-21)

الشكل (6-6) يبين مقطع مستعرض لعتبة من الصلب اللدن على شكل T ونو حد خضوع يساوي 200MPa . ارتفاعه 200mm وعرض شفتيه 150mm وسمكه 15mm . أوجد العزم كامل اللدونة ومن ثم قارنه مع أقصى عزم مرن ممكن يستطيع أن يحمله نفس المقطع .



الشكل (6-6)

الحل :

أن العزم كامل اللدونة M_p يمكن الحصول عليه بالعلاقة التالية :

$$M_p = \sigma_{yp} Z_p$$

حيث أن Z_p هو معامل المقطع اللدن ويمكن الحصول عليه من الجداول الخاصة الملحقة بالمقاطع المختلفة للعتبات حيث أنه يساوي للمقطع تحت الدراسة :

$$Z_p = 5.25 \times 10^5 \text{ mm}^3$$

ومنه نجد أن :

$$\begin{aligned} M_p &= (200 \times 10^6) (5.25 \times 10^5) (10^{-9}) \\ &= 105 \text{ KN.m} \end{aligned}$$

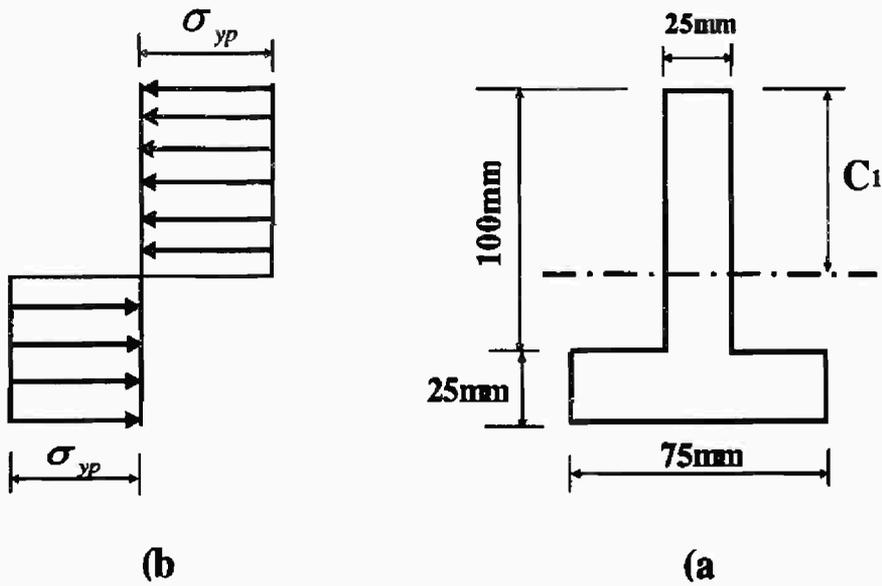
أما أقصى عزم مرن ممكن فيمكن الحصول عليه كما يلي :

$$\begin{aligned} M_e &= (200 \times 10^6) (4.47 \times 10^5) (10^{-9}) \\ &= 89.4 \text{ KN.m} \end{aligned}$$

وهكذا نجد أن العزم اللدن أكبر بمقدار 17% فقط من أقصى عزم مرن لهذا المقطع بالذات وفي الواقع فإن العزم كامل المرونة يزيد عادةً عن أقصى عزم مرن ممكن بحوالي 12% إلى 15% لأغلب المقاطع عريضة الشفة .

مثال (6-22)

الشكل (6-67.a) يبين عتبة نو مقطع على شكل حرف T . حدد موضع محور التعادل عندما يكون تصرف العتبة كامل اللدونة على كل المقطع المستعرض . ثم عين قدرة حمل العزم للتصرف كامل اللدونة وقارنه مع العزم المرن الأقصى .



الشكل (6-67)

الحل :

نقوم برسم الرسم البياني لمخطط القوة العمودية والمبين في الشكل (6-67.b) . ومن اتزان القوة العمودية على المقطع المستعرض نجد أن :

$$-\sigma_{yp} (25)(c_1) + [\sigma_{yp} (125 - c_1)(50)] = 0$$

ومنه نجد أن :

$$c_1 = 87.5 \text{ mm}$$

وهكذا نجد أن محور التعادل يقسم المعرض المستعرض إلى مساحتين متساويتين في حالة التصرف كامل اللدونة لمادة العتبة . أما العزم الذي يناظر التصرف كامل اللدونة للعتبة فيمكن الحصول عليه كما يلي :

$$\begin{aligned} M_p &= \int \sigma y dA \\ &= \int_0^{c_1} \sigma_{yp} (y) (25) dy + \int_0^{(125-c_1)} \sigma_{yp} (y) (75) dy - \int_0^{(100-c_1)} \sigma_{yp} (y) (50) dy \\ &= 25 \sigma_{yp} [c_1^2 - 175c_1 + 1.35 \times 10^4] \end{aligned}$$

وعند $c_1 = 87.5 \text{ mm}$ نحصل على :

$$M_p = (1.46 \times 10^{-4}) \sigma_{yp}$$

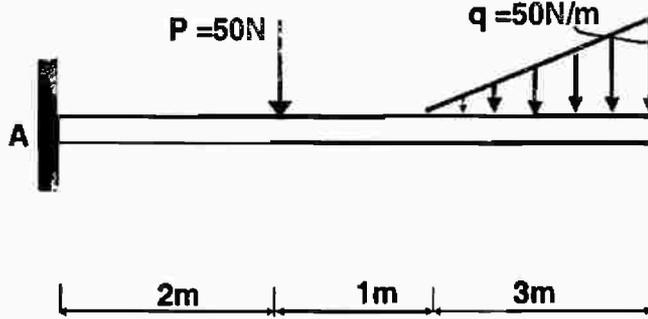
وبوضع $y_1 = c_1$ نستطيع أن نجد محور التعادل لحالة أقصى عزم ممكن ، والذي يكون عند $c_1 = 76.8 \text{ mm}$ أي أن محور التعادل يمر بمركز ثقل المقطع المستعرض للعتبة . ومنه نحصل على أقصى عزم ممكن :

$$M_e = (8.29 \times 10^{-5}) \sigma_{yp} \text{ (N.m)}$$

وهكذا نجد أن العزم كامل اللدونة يزيد بنسبة 75% عن أقصى عزم مرن ممكن .

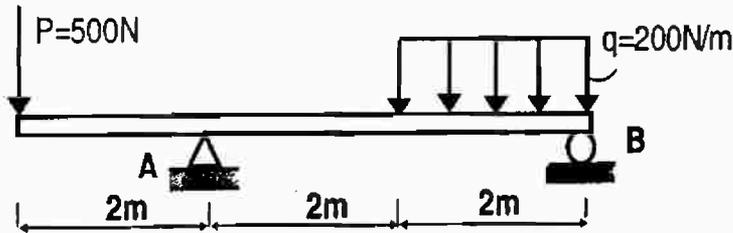
15.6 تمارين

س1: الشكل (68-6) يبين عتبة كابولية مثبتة عند النقطة A بمسند مثبت ، ومعرضة لقوة مركزة مقدارها 50N ، وحمولة موزعة متغيرة بانتظام إلى قيمة قصوى مقدارها 100N/m . أوجد ردود الأفعال في المسند المثبت A على العتبة .



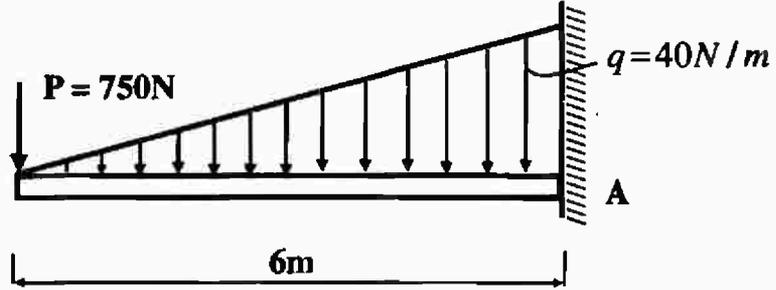
الشكل (68-6)

س2: عتبة بسيطة ذات بروز جانبية مساط عليها قوة مركزة مقدارها 500N ، وحمولة موزعة بانتظام مقدارها 200N/m ، ومثبتة عند المفصل عند A ومسند متدرج عند B ، كما يبين الشكل (69-6) . أوجد ردود الأفعال في المسند المتدرج B والمفصل A على العتبة .



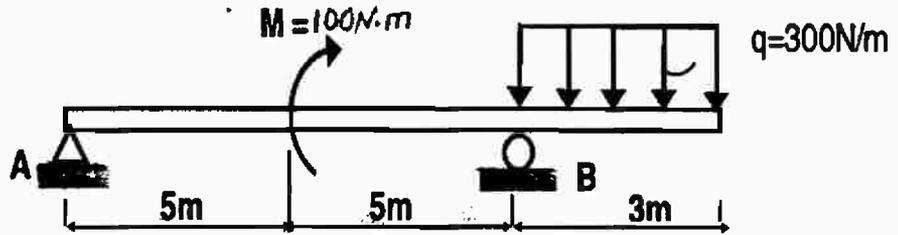
الشكل (69-6)

س3: الشكل (6-70) يبين عتبة كابولية مثبتة عند أحد طرفيها حائط رأسي في النقطة A ، ومعرضة عند نهايتها الحرة إلى قوة مركزة مقدارها 750N ، وحمولة موزعة ومتغيرة بانتظام من الصفر عند النهاية اليسرى إلى قيمة قصوى مقدارها 40N/m . أوجد ردود الأفعال عند النقطة A على العتبة .



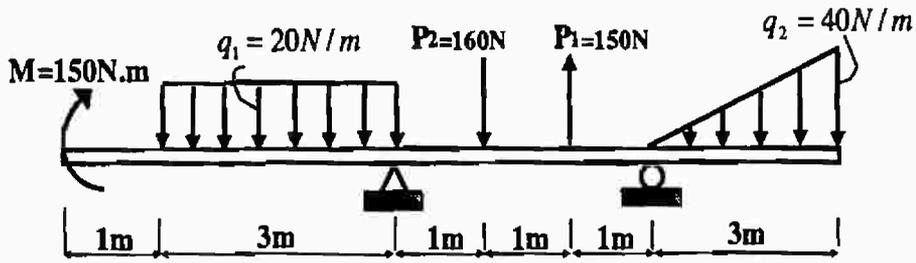
الشكل (6-70)

س4: عتبة بسيطة مثبتة عند A بمفصل وعند B بمسند متدرج كما هو موضح في الشكل (6-71) . ومعرضة إلى حمولة موزعة بانتظام مقدارها 300N/m وعزم ازدواج مقداره 100N.m . أوجد ردود الأفعال عند المسند المتدرج A والمفصل B على العتبة .



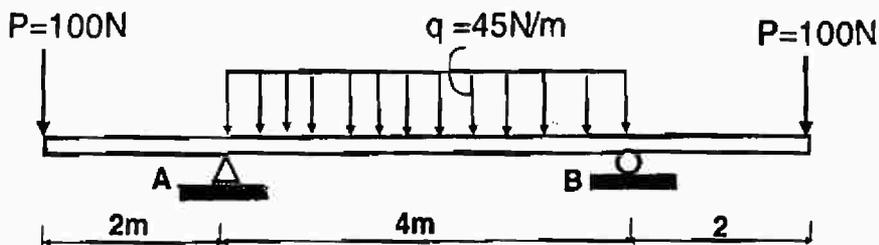
الشكل (6-71)

س5: في الشكل (6-72) العتبة مثبتة عند النقطة A بمفصل وعند النقطة B بمسند متدرج ، ومعرضة إلى قوتين مركبتين الأولى اتجاهها إلى الأعلى ومقدارها 150N والثانية متجهة إلى الأسفل ومقدارها 160N ، وعزم ازدواج عند نهايته اليسرى مقداره 150N.m ، وحمولة موزعة بانتظام مقدارها 20N/m ، وحمولة موزعة ومتغيرة مقدارها 40N/m . أوجد ردود الأفعال في A ، B على العتبة .



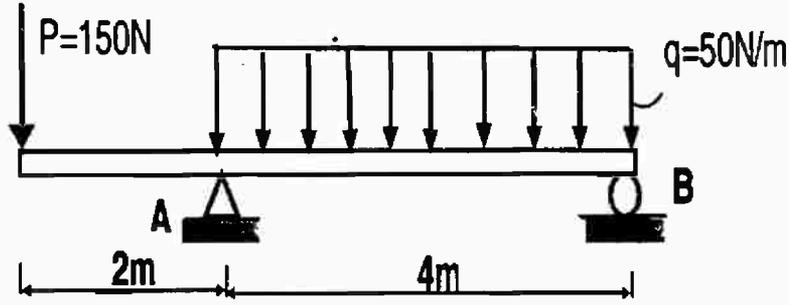
الشكل (6-72)

س6: الشكل (6-73) يبين عتبة بسيطة ذات بروز من الطرفين مثبتة عند النقطة A بمفصل وعند النقطة B بمسند متدرج ، ومعرضة لحمولة موزعة بانتظام مقدارها 45N/m ، وقوتين مركبتين مقدار كل منها 100N . أوجد ردود الأفعال عند المفصل A والمسند المتحرك B على العتبة .



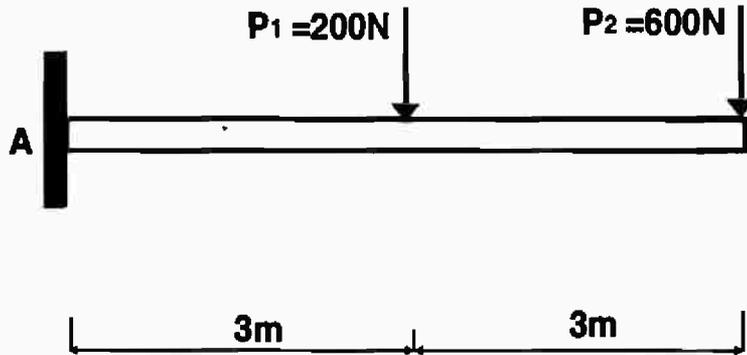
الشكل (6-73)

س7: الشكل (6-74) يبين عتبة بسيطة مثبتة عند A بمفصل وعند B بمسند متدحرج . ومعرضة لحمولة موزعة بانتظام مقدارها 50N/m وقوة مركزية مقدارها 150N . أرسم الرسومات البيانية لقوة القص وعزم الانحناء .



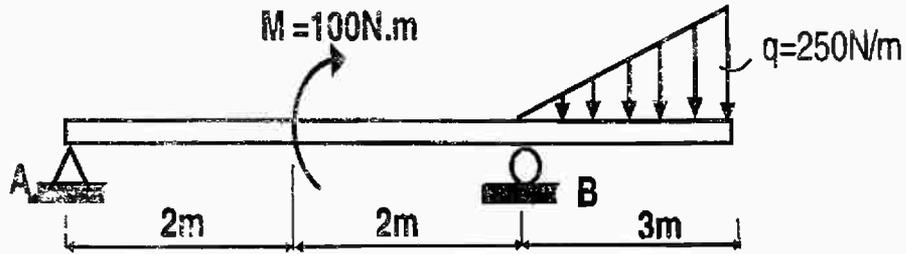
الشكل (6-74)

س8: عتبة كابولية مثبتة عند النقطة A بمسند مثبت كما هو موضح في الشكل (6-75) ، ومعرضة لقوتين مركبتين الأولى مقدارها $P_1=200\text{N}$ ، والثانية تساوي $P_2=600\text{N}$. ارسم الرسوم البيانية لمخططات قوة القص وعزم الانحناء .



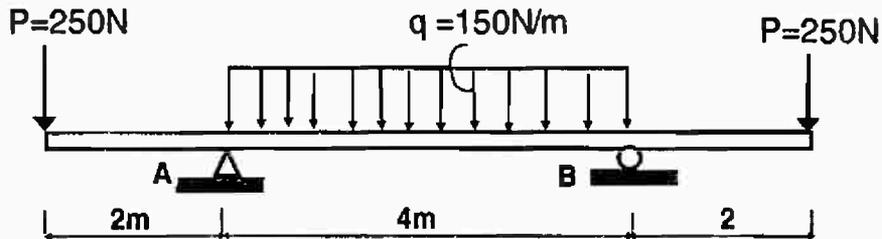
الشكل (6-75)

س9: عتبة بسيطة مثبتة عند A بمتصل وعند B بمسند متدرج ، ومعرضة إلى حمولة موزعة ومتغيرة بانتظام مقدارها 250N/m وعزم ازواج مقداره 100N.m كما يبين الشكل (76-6) . ارسم الرسوم البيانية لمخططات قوة القص وعزم الانحناء .



الشكل (76-6)

س10: عتبة بسيطة مثبتة عند A بمفصل وعند B بمسند متدرج ذات بروز معرضة لحمولة موزعة بانتظام مقدارها 150N/m وقوتين مركزتين مؤثرتين على طرفيها مقدار الواحدة منها 250N كما هو موضح في الشكل (77-6) . ارسم الرسوم البيانية لمخططات قوة القص وعزم الانحناء .



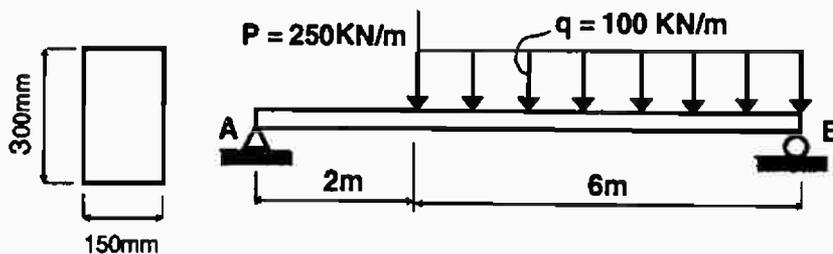
الشكل (77-6)

س11: عتبة من الحديد الصلب طولها 4m ومثبتة عند نهايتها تثبيتاً بسيطاً ومعرضة لحمولة مركزة مقدارها 200KN مؤثرة على مسافة 2m من أحد المسندين . أوجد أجهادات الانحناء القصوى الناشئة في العتبة لو أن المقطع المستعرض مستطيل ارتفاعه 200mm وعرضه 100mm .

س12: أوجد معايير المقطع إذا كان أقصى عزم انحناء يمكن تأثيره على عتبة يساوي 100KN.m ، وتم اختيار مقطع تجاري وكان أقصى أجهاد مسموح به في الشد أو الضغط يساوي 220MPa .

س13: عتبة كابولية من الصلب طولها 4m معرضة لحمولة مركزة عند نهايتها الحرة مقدارها 45N ، إذا علمت أن إجهاد الانحناء الأقصى يجب أن لا يزيد عن 134MPa ، أوجد القطر المطلوب إذا كان مقطع العتبة دائري الشكل .

س14: الشكل (6-78) يبين عتبة بسيطة معرضة لحمولة موزعة بانتظام مقدارها 100KN/m ، وقوة مركزة مقدارها 250K ، إذا علمت أن المقطع المستعرض للعتبة مستطيل أبعاده 150×300mm . أوجد قيمة وموضع أجهاد الانحناء الأقصى في العتبة . ثم عين أجهاد الانحناء عند النقطة 50mm أسفل السطح الأعلى للعتبة عند مقطع في منتصف المسافة بين المركزين .



الشكل (6-78)

المراجع

1. مبادئ مقاومة المواد . تيموشنكو، ترجمة د.مجددي ابراهيم غبريال، د.باسم محمود كلور- الجامعة التكنولوجية - بغداد.
2. مقاومة المواد . وليم أ.ناش - ترجمة د.عمرو عزت سلامة قسم العلوم الإنشائية - جامعة حلوان - مصر الطبعة الخامسة 2000 .
- 3 . سلسلة ملخصات شوم "نظريات ومسائل في مقاومة المواد" . وليم أ.ناش - دار ماكجروهيل للنشر - دار الرائد العربي بيروت - لبنان - الطبعة الثانية 1994.
- 4 . مقاومة المواد . د.فيصل محمد حسن - الجامعة التكنولوجية - بغداد - 1978 .
- 5 . مقاومة المواد . د. ب ستوبين - ترجمة د. داود سليمان المنير - دار مير للطباعة والنشر - موسكو 1968.
- 6 . تحليل الأجهادات ونظرية الإنشاءات . د.عبدالفتاح ديوان ، د. احمد فهمي عبد الرحمن - الجزء الأول ، والجزء الثاني - دار الراتب الجامعية 1986.
- 7 . تصميم المباني الخرسانية. د. علاء محمود التميمي - الدار العربية للموسوعات - بيروت لبنان 1999 .
- 8 . مسائل في الميكانيكا النظرية .أ. ف. ميشرسكي - موسكو - دار مير للطباعة والنشر 1977 .

9 . ميكانيكا المواد . ايان جون هيران - بريطانيا برمنكهام ترجمة
د. صلاح محمد جميل - جامعة الموصل 1989 .

10. الوحدات الدولية " SI " - جداول التحويل - الثوابت الفيزيائية.
د. إبراهيم إبراهيم شريف دار الراتب الجامعية - بيروت لبنان .

11. مبادئ ميكانيكا الأجسام الصلبة - أيكورلي بوبون - جامعة كاليفورنيا.
ترجمة د. خزعل ياسين - جامعة صلاح الدين العراق 1989 .

12 - " Engineering Mechanics Volume I - Static " Meriam
J .L and L .G. Kraige 2nd Edition , SI - Version, John
Wiley and Sons , New York - 1987 .

13- " Vector Mechanics for Engineers " (STATICS). Ferdinand
P . Beer , E . Russel Johanston 2nd Edition - 1990 .