

الباب الثالث

مقاييس التشتت

(Measures of Dispersion)

- 1.3 مقدمة .
- 2.3 المدى .
- 3.3 الانحراف الربيعي .
- 4.3 الانحراف المتوسط .
- 1.4.3 الخواص العامة للانحراف المتوسط .
- 2.4.3 طرق حساب الانحراف المتوسط .
- 5.3 الانحراف المعياري .
- 6.3 إيجاد الانحراف المعياري للبيانات المبوبة .
- 7.3 إيجاد الانحراف المعياري بطريقة الانحرافات .
- 8.3 إيجاد الانحراف المعياري بطريقة الانحرافات المختصرة .
- 9.3 معامل الاختلاف .
- 10.3 الوحدات المعيارية .
- 11.3 المنحنى التكراري المتماثل والتوزيعات الاعتدالية .
- 12.3 الحيود عن التوزيع الاعتدالي .
- 13.3 تمارين .

يعرف التشتت (Dispersion) في أي مجموعة من القيم على أنه درجة التفاوت أو الاختلاف بين قيم هذه المجموعة ، فإذا كانت قيم المجموعة متقاربة من بعضها البعض يكون التشتت صغيراً وإذا كانت متباعدة عن بعضها البعض أي متباينة يكون التشتت كبيراً .

ولمقارنة مجموعتين من البيانات لا نكتفي بمقاييس التوسط التي سبق لنا دراستها حيث قد يكون للمجموعتين نفس المتوسط الحسابي ولكنهما يختلفان في درجة التشتت ، فقد نجد أن مفردات إحدى المجموعتين متجمعة حول متوسط المجموعة بينما مفردات المجموعة الأخرى متناثرة ومتباعدة عن متوسطاتها ، وعندئذ يقال أن المجموعة الأولى أقل تشتتاً من المجموعة الثانية كما يتضح من المثال التالي :

$$x : 12 , 17 , 20 , 25 , 26$$

$$y : 8 , 12 , 20 , 26 , 34$$

حيث نجد أن المتغيرين x , y لهما نفس المتوسط الحسابي ونفس الوسيط ولكنهما يختلفان في درجة التشتت حيث يتضح أن المتغير x أقل تشتتاً من المتغير y .

مما سبق يتبين أن التشتت هو مقياس لقوة تجمع البيانات حول بعضها أو اختلافها عن بعضها ، فإذا كانت القيم متباعدة فإن مقياس التشتت يكون كبيراً أما إذا كانت القيم متقاربة من بعضها فإن مقياس التشتت يكون صغيراً ، وهناك عدة مقاييس تصلح لمقياس درجة التشتت أهمها المدى ، الانحراف الربيعي ، الانحراف المتوسط ، والانحراف المعياري وسنقوم بدراسة كل من هذه المقاييس مع توضيح كيفية حسابها واستخداماتها .

1.3 المدى (Range)

يعرف المدى على أنه الفرق بين أقل قيمة وأكبر قيمة في المجموعة . ويعتبر من أبسط مقاييس التشتت وأسهلها حساباً ، غير أنه يعاب عليه اعتماده على القيمتين الطرفيتين فقط واللتين كثيراً ما تكونا شائنتين عن قيم المجموعة ، فإذا كانت القيمتين الطرفيتين من القيم الشاذة وكانت أحدهما كبيرة جداً والأخرى صغيرة جداً فإن المدى سوف يبالغ في إظهار تشتت هذه القيم ويظهره أكثر من حقيقته .

المدى = أكبر قيمة - أصغر قيمة (Range = Max.Value - Min.Value)

أما في حالة البيانات المبوبة فإن المدى يحسب كما يلي :

المدى = الحد الأعلى للفتة الأخيرة - الحد الأدنى للفتة الأولى

ويكون المدى مضللاً أيضاً في حالة مقارنة المجموعات التي يختلف عدد مفرداتها اختلافاً كبيراً هذا بالإضافة إلى صعوبة حسابه من الجداول التكرارية وخاصة إذا كانت مفتوحة .

مثال (1-3)

أوجد المدى للقيم التالية :

93 ، 70 ، 35 ، 65 ، 40 ، 99 ، 55

الحل :

المدى = أعلى قيمة - أصغر قيمة

99 - 35

= 64 درجة .

مثال (2-3)

الجدول (1-3) يبين ثلاثة مجموعات من البيانات . والمطلوب إجراء مقارنة بين تشتت هذه المجموعات باستخدام المدى .

جدول (1-3)

6	6	6	6	6	المجموعة الأولى
8	7	6	5	4	المجموعة الثانية
13	10	6	1	0	المجموعة الثالثة

الحل :

نلاحظ أن المجموعات الثلاثة لها نفس المتوسط الحسابي والوسيط ، فكليهما في جميع المجموعات يساوي القيمة 6 وذلك بالرغم من وجود اختلاف واضح بين المجموعات الثلاثة في انتشار القيم وتباعدها . ففي المجموعة الأولى نلاحظ عدم وجود اختلاف أو تشتت بين القيم فكل القيم متساوية ، وتساوي قيمة المتوسط الحسابي وهي القيمة 6 . أما في المجموعة الثانية فنلاحظ أن القيم تختلف عن بعضها البعض وعن متوسطها الحسابي ولكن ليس اختلافاً كبيراً ، أي أن تشتت القيم داخل هذه المجموعة صغير بينما في المجموعة الثالثة نلاحظ أن القيم تختلف عن بعضها البعض وعن متوسطها الحسابي اختلافاً كبيراً ، أي أن تشتت القيم داخل هذه المجموعة أكبر . بالنسبة لمدى المجموعات الثلاثة يكون كما يلي :

$$\text{مدى المجموعة الأولى} = 6 - 6 = \text{صفر} .$$

$$\text{مدى المجموعة الثانية} = 4 - 8 = 4 .$$

$$\text{مدى المجموعة الثالثة} = 0 - 13 = 13 .$$

بما أن مدى المجموعة الأولى هو صفر ، فذلك يعني أنه لا يوجد اختلاف أو تشتت بين قيم هذه المجموعة أي أن كل قيم هذه المجموعة متساوية ، أما المجموعتين الثانية والثالثة فنلاحظ أن مدى المجموعة الثالثة أكبر من مدى المجموعة الثانية وهذا يعني أن تشتت المجموعة الثالثة أكبر من تشتت الثانية .

مثال (3-3)

قارن بين تشتت درجات مادة الإحصاء لثلاث مجموعات من الطلبة المبينة في الجدول (2-3) .

جدول (2-3)

---	---	80	45	70	30	62	50	المجموعة الأولى
35	77	82	65	55	70	0	20	المجموعة الثانية
75	65	63	60	50	85	49	54	المجموعة الثالثة

الحل :

مدى المجموعة الأولى = $30 - 80 = 50$ درجة .

مدى المجموعة الثانية = $0 - 82 = 82$ درجة .

مدى المجموعة الثالثة = $49 - 85 = 36$ درجة .

نلاحظ أن المجموعة الثالثة أقل تشتتاً تليها المجموعة الأولى ثم الثالثة .

3.3 الانحراف الربيعي (The Quartile Deviation)

أشرنا إلى أن من عيوب المدى اعتماده على القيم الطرفية التي غالباً ما تكون متطرفة وشاذة ، ويمكن التغلب على هذا السبب بحذف بعض القيم الطرفية فإذا أهملنا الربع الأول والربع الأخير من هذه القيم فإنه يمكن

الحصول على مقياس للتشتت يعتبر أفضل من المدى ويعتمد في حسابه على كل من الربيعين الأدنى والأعلى ويسمى بالانحراف الربيعي وهو عبارة عن نصف المدى الربيعي أي أن :

$$\text{الانحراف الربيعي} = \frac{\text{الربيع الاعلى} - \text{الربيع الادنى}}{2}$$

أو بمعنى آخر :

$$Q.D. = \frac{R_3 - R_1}{2} \dots\dots\dots(1-3)$$

حيث أن :

- . Q.D - الانحراف الربيعي .
- . R₃ - الربيع الأعلى .
- . R₁ - الربيع الأدنى .

ويمكن الحصول عليه بيانياً وذلك برسم منحنى التكرار المتجمع الصاعد أو النازل واستخراج قيمة الربيعين من الرسم ثم حساب نصف المدى بينهما .

ولغرض استنتاج الانحراف الربيعي لدرجات اختبار الذكاء للخمسين مهندس العينة العشوائية التي تم دراستها في الباب الأول الجدول(1-6) أو الشكل (1-7) لغرض حساب قيمة الربيعين الربيع الأدنى والربيع الأعلى ، ومن الفقرة (2 - 9) في الباب السابق فقد تم مسبقاً حساب قيمة كل من الربيع الأدنى والربيع الأعلى لدرجات اختبار الذكاء للخمسين مهندس ووجد أنهما يساويان الآتي :

أما ترتيب الربيع الأعلى (R_3) فتساوي :

$$\frac{3(n+1)}{4} = \frac{3(1+7)}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

إن قيمة الربيع الأعلى هي القيمة السادسة في الترتيب التصاعدي أي أن الربيع الأعلى يساوي 39 ومنه :

$$\therefore Q.D. = \frac{R_3 - R_1}{2} = \frac{39 - 22}{2} = \frac{17}{2} = 8.5$$

مثال (5-3)

أحسب الانحراف الربيعي للبيانات والمبينة في الجدول (3-3) .

جدول (3-3)

البيانات	التكرار	التكرار المتجمع الصاعد
- 50	1	1
-56	6	7
-62	12	19
- 68	15	34
-74	22	56
-80	10	66
-86	6	72
92 - 98	4	76

الحل :

عدد القيم مساوي 76 ورتبة الربيع الأدنى تساوي :

$$\frac{76}{4} = 19$$

$$\therefore R_1 = L + \frac{\frac{n}{4} - k_1}{k_2 - k_1} = 62 + \frac{19 - 7}{19 - 7} \times 6 = 62 + 6 = 68$$

أما رتبة الربيع الأعلى فتساوي :

$$57 = \frac{(76)(3)}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore R_3 &= L + \frac{\frac{3n}{4} - k_1}{k_2 - k_1} \\ &= 80 + \frac{57 - 56}{66 - 56} \times 6 \\ &= 80 + \frac{1}{10} \times 6 = 80 + 0.6 = 80.6 \end{aligned}$$

إن الانحراف الربيعي مساوي :

$$\frac{R_1 - R_3}{2} = \frac{68 - 80.6}{2} = \frac{12.6}{2} = 6.3$$

أن الانحراف الربيعي وإن كان أفضل من المدى كمقياس للتشتت إلا أنه يعتمد على قيمتين فقط وهما الربيع الأدنى R_1 والربيع الأعلى R_3 ولا يضع في اعتباره كل القيم المتضمنة ومن ثم كانت هناك حاجة إلى مقاييس أفضل سنقوم بدراستها في البنود اللاحقة من هذا الباب .

4.3 الانحراف المتوسط (The Mean Deviation)

يمكن دراسة درجة تشتت أي مجموعة من القيم تبعاً لقرب مفرداتها من أو بعدها عن المتوسط العام للمجموعة فإذا استخدمنا الوسط الحسابي نظراً لأنه أكثر المتوسطات حساسية للتغيرات في أي قيمة من قيم المجموعة نجد أن مجموع انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي يساوي صفرأ ، وذلك من خواص المتوسط الحسابي كما أشرنا إلى ذلك سابقاً ، مهما كانت درجة التشتت والسبب في ذلك هو وجود انحرافات موجبة وأخرى سالبة تلاشي بعضها البعض ، فلو استبعدنا الإشارات أي أخذنا القيمة العددية لهذه الانحرافات نجدها تكبر كلما زاد انتشار القيم وبعدت عن متوسط المجموعة وتقل كلما قل تشتت القيم . لذلك يمكننا أن نأخذ متوسط القيمة العددية لانحرافات القيم عن متوسطها الحسابي كمقياس للتشتت وهذا المقياس يعرف بالانحراف المتوسط ويرمز له (M.D.) .

1.4.3 الخواص العامة للمتوسط (Properties of Mean Deviation)

- يأخذ في حسابه كل القيم .
- يمكن حسابه عن طريق الانحرافات .
- لا يمكن حسابه من الجداول المفتوحة .
- يتأثر بالقيم المتطرفة .

2.4.3 طرق حساب الانحراف المتوسط

أولاً : في حالة البيانات المفردة

يحسب الانحراف المتوسط المطلق في هذه الحالة بعد حساب المتوسط الحسابي ، ومن ثم نطرح كل القيم من المتوسط الحسابي ونأخذ القيمة المطلقة أي الموجبة للانحراف وبعد جمع الانحرافات المطلقة نقسمها على عدد القيم فنحصل على الانحراف المتوسط أي أن :

$$M.D. = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n} \dots\dots\dots (2-3)$$

حيث أن :

$|x_i - \bar{x}|$ - هي القيمة العددية المطلقة لانحرافات القيم عن وسطها الحسابي .
 n - هي عدد المفردات .

فإذا توفرت لدينا القيم التالية مثلاً :

26 , 25 , 20 , 17 , 12

فإن المتوسط الحسابي لهذه القيم هو :

$$\bar{x} = \frac{12 + 17 + 20 + 25 + 26}{5} = \frac{100}{5} = 20$$

إن انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي هو :

6 , 5 , 0 , 3 - , 8 -

$$\therefore \sum [x - \bar{x}] = 8 + 3 + 0 + 5 + 6 = 22$$

أي أن الانحراف المتوسط يساوي :

$$\frac{22}{5} = 4.4$$

مثال (3-6)

أوجد الانحراف المتوسط للأعداد :

77 , 85 , 63 , 45 , 70

الحل:

نجد أولاً المتوسط الحسابي للقيم ويساوي :

$$\bar{x} = \frac{45 + 63 + 70 + 77 + 85}{5} = \frac{340}{5} = 68$$

ثم بترتيب القيم والحدود كما يبين الجدول (4-3) حيث

جدول (4-3)

القيمة المطلقة	الانحراف عن الوسط الحسابي	الوسط الحسابي \bar{x}	القيمة
23 = 23-	23 - = 68 - 45	68	45
5 = 5-	5 - = 68 - 63	68	63
2 = 2	2 = 68 - 70	68	70
9 = 9	9 = 68 - 77	68	77
17 = 17	17 = 68 - 85	68	85
56	—————	Total	المجموع

$$\therefore M . D . = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{56}{5} = 11.2$$

ثانياً : في حالة البيانات المبوبة

لإيجاد الانحراف المتوسط في حالة التوزيعات التكرارية تتبع الخطوات التالية :

(a) يتم تحديد مراكز الفئات أو الفترات \bar{x}_i .

(b) يحسب الوسط الحسابي كما في السابق من المعادلة

$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}_i f_i}{\sum f_i}$$

(c) تستخدم المعادلة التالية لحساب الانحراف المتوسط :

$$M.D. = \frac{\sum_{i=1}^n f_i |\bar{x}_i - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^n f_i} \dots\dots\dots(3-3)$$

إن الجدول (5-3) يبين حساب الانحراف المتوسط لدرجات اختبار الذكاء للخمسين مهندس الذي تم حساب المتوسط الحسابي له مسبقاً في الجدول رقم(2-1) في الباب الثاني وكانت قيمته 116 .

جدول (3 - 5)

إيجاد الانحراف المتوسط لدرجات الذكاء للخمسين مهندس

الفئات x_i	تكرار الفئة f_i	مركز الفئة \bar{x}_i	$ \bar{x}_i - \bar{x} $	$f_i \bar{x}_i - \bar{x} $
- 90	3	95	21	63
- 100	14	105	11	154
- 110	16	115	1	16
- 120	11	125	9	99
- 130	4	135	19	76
150- 140	2	145	29	78
المجموع	50	—	—	466

ولحساب الانحراف المتوسط من الجدول التكراري (3-5) نوجد الوسط الحسابي كما ذكرنا سابقاً ، بإحدى الطرق التي تمت مناقشتها في الباب السابق ثم نوجد القيمة العددية للانحرافات عن المتوسط الحسابي $|\bar{x}_i - \bar{x}|$ وأخيراً نضرب كل قيمة من هذه القيم في التكرار المناظر لنحصل على $f_i |\bar{x}_i - \bar{x}|$ ثم نجمع حاصل الضرب وبالقسمة على مجموع التكرارات نحصل على الانحراف المتوسط بالشكل التالي :

$$M .D. = \frac{\sum_{i=1}^n f_i |\bar{x}_i - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{466}{50} = 9.32$$

مثال (3-7)

أحسب الانحراف المتوسط لدرجات 50 طالب والمبينة في الجدول (3-6) :

جدول (3-6)

60- 50	- 40	- 30	- 20	-10	-0	الفئات
1	4	20	12	10	3	التكرار

الحل :

نرتب الجدول (3-6) بالشكل الموضح في الجدول (3-7) ونوجد كل من المتوسط الحسابي أولاً ثم الانحراف المتوسط ثانياً حيث :

جدول (7-3)

الفئة x	التكرار f_i	المركز \bar{x}_i	$\bar{x}_i f_i$	$\bar{x}_i - \bar{x}$	$ \bar{x}_i - \bar{x} $	$f_i \bar{x}_i - \bar{x} $
0 -	3	5	15	23 -	23	69
10 -	10	15	150	13 -	13	130
20 -	12	25	300	3 -	3	36
30 -	20	35	700	7	7	140
40 -	4	45	180	17	17	68
50 - 60	1	55	55	27	27	27
المجموع	50	—	1400	—	—	470

من الجدول نجد أن المتوسط الحسابي يساوي :

$$\bar{X} = \frac{\sum \bar{x}_i f_i}{\sum f_i} = \frac{1400}{50} = 28$$

إن الانحراف المتوسط يساوي :

$$M.D = \frac{\sum f_i |\bar{x}_i - \bar{x}|}{\sum f_i} = \frac{470}{50} = 9.4$$

5.3 الانحراف المعياري (δ The Standard Deviation)

وهو من أهم مقاييس التشتت وأكثرها استخداماً وذلك لدخوله في حساب الكثير من المقاييس الإحصائية الأخرى . وهو مثل الانحراف المتوسط في اعتماده على كل قيم المجموعة ، ونحصل عليه بتربيع انحرافات القيم عن وسطها الحسابي بدلاً من إهمال الإشارات كما في حالة الانحراف المتوسط وبذلك نحصل على :

$$s^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n} \dots\dots\dots(4-3)$$

وهذه الصيغة تعطي لنا ما يسمى بالتباين (Variance) ، وهو عبارة عن متوسط مربعات انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي ولكي نحصل على مقياس للتشتت يكون بنفس وحدات المتغير x نأخذ الجذر التربيعي فنحصل على الانحراف المعياري من المعادلة التالية :

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (x - \bar{x})^2} \dots\dots\dots(5-3)$$

أي أن الانحراف المعياري (S) هو الجذر التربيعي للتباين (S^2) ، ومن الواضح أن الحساب بالطريقة الحسابية يحتاج لحسابات كثيرة وخاصة إذا كثر عدد تلك المفردات (n) وإذا أحتوى المتوسط الحسابي (\bar{x}) على كسور مما ينتج عنه احتواء الانحرافات على كسور أيضاً ومن ثم صعوبة حساب مربعاتها لذلك كان من الأفضل استخدام صيغة أخرى لحساب التباين لا تتضمن هذه العمليات الحسابية كما يلي :

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n} = \frac{1}{n} \sum (x - \bar{x})^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum (x^2 - 2x\bar{x} + \bar{x}^2) \\ &= \frac{1}{n} (\sum x^2 - \sum 2x\bar{x} + \sum \bar{x}^2) \\ &= \frac{\sum x^2}{n} - 2\bar{x} \frac{\sum x}{n} + \frac{n\bar{x}^2}{n} = \frac{\sum x^2}{n} - 2\bar{x} \frac{\sum x}{n} + \bar{x}^2 \end{aligned}$$

وبما أن :

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

أنن :

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{\sum x^2}{n} - 2 \left(\frac{\sum x}{n} \right) \left(\frac{\sum x}{n} \right) + \left(\frac{\sum x}{n} \right)^2 \\ &= \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n} \right)^2 \dots\dots\dots (6-3) \end{aligned}$$

أي أن التباين هو متوسط المربعات ناقص مربع المتوسط ، ونستنتج من ذلك صيغة سهلة لحساب الانحراف المعياري وهي :

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n} \right)^2} \dots\dots\dots (7-3)$$

وإذا أردنا تسهيل العمليات الحسابية أكثر من ذلك يمكن اختيار وسط فرضي من بين القيم ونحسب الانحرافات عن هذا الوسط الفرضي . فإذا كان هذا الوسط الفرضي هو (a) نجد أن التباين :

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum [(x - a) - (\bar{x} - a)]^2 \dots\dots\dots (8-3)$$

وهنا نجد أن :

$x - a = d$ هي انحرافات القيم عن الوسط الفرضي a ومن دراستنا للمتوسط الحسابي سبق أن رأينا أن :

$$\bar{x} = a + \frac{\sum d}{n} = a + \bar{d} \quad \dots\dots\dots(9-3)$$

$$\therefore (\bar{x} - a) = \bar{d} \quad \dots\dots\dots(10-3)$$

$$\therefore S^2 = \frac{1}{n} \sum (d - \bar{d})^2 \dots\dots\dots(11-3)$$

أي أنه يمكن أن نستبدل قيم المفردات (x) بانحرافات هذه القيم عن الوسط الفرضي دون أن يؤثر ذلك على حساب التباين والانحراف المعياري فنجد أن :

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum \bar{d}}{n}\right)^2} \quad \dots\dots\dots(12-3)$$

ويسمى استخدام الطريقة الأخيرة بالصيغة المختصرة (Shortcut Formula) بينما تعرف الصيغة السابقة بالطريقة المطولة (Prolongated Method) وفيما يلي استخدام الطريقتين لحساب الانحراف المعياري للبيانات التالية :

26 , 25 , 20 , 17 , 12

أولاً بالطريقة المطولة :

$$\sum x = 12 + 17 + 20 + 25 + 26 = 100$$

$$\sum x^2 = 144 + 289 + 400 + 625 + 676 = 2134$$

$$\therefore S^2 = \sqrt{\left(\frac{2134}{5}\right) - \left(\frac{100}{5}\right)^2} = \sqrt{426.8 - 400} = \sqrt{26.8} = 5.177$$

ثانياً بالطريقة المختصرة :

بما أن $n = 5$ وبأخذ القيمة 17 كوسط فرضي نجد أن انحرافات القيم عن الوسط الفرضي هي - 5 , 0 , 3 , 8 , 9 لذلك :

$$\sum d = -5 + 0 + 3 + 8 + 9 = 15$$

$$\sum d^2 = 25 + 0 + 9 + 64 + 81 = 179$$

$$\therefore S = \sqrt{\left(\frac{179}{5}\right) - \left(\frac{15}{5}\right)^2} = \sqrt{35.8 - 9} = \sqrt{26.8} = 5.177$$

ويبين المثال التالي بعض الخصائص العامة للانحراف المعياري التي

تساعد في تسهيل العمليات الحسابية :

يحتوي العمود الأول على عشرة من القيم وقد أشتقت من هذه القيم الأصلية قيم أخرى مرة بإضافة رقم ثابت (10 مثلاً) ومرة أخرى بطرح الرقم الثابت ومرة أخرى بالضرب في الرقم الثابت وفي العمود الأخير بالقسمة على الرقم الثابت كما هو مبين في الجدول (8-3) :

جدول (8-3)

$x + 10$	$(x) (10)$	$x - 10$	$x + 10$	x
0.1	10	6 -	11	1
0.5	50	5 -	15	5
0.7	70	3 -	17	7
0.8	80	2 -	18	8
1.2	120	2	22	12
1.5	150	5	25	15
1.6	160	6	26	16
2.0	200	10	30	20
2.2	220	12	32	22
3.4	340	24	44	34
14.0	1400	40	240	140
28.04	280400	1004	6604	2804
1.4	140	4	24	14
0.844	8440	84.4	84.4	84.4
0.9187	9187	9.187	9.187	9.187

مجموع التكرار
مجموع مربعات التكرار
مكوسط التكرار
التباين
الانحراف المعياري

يتضح من النتائج السابقة المبينة أسفل الجدول (3-8) أن كلاً من التباين والانحراف المعياري لا يتأثران بإضافة أو طرح رقم ثابت من القيم الأصلية ، بينما يتأثران بعمليات الضرب والقسمة فقط فإذا قسمت القيم الأصلية على رقم ثابت ، فإنه لا بد وأن نضرب تباين القيم المختصرة في مربع الرقم الثابت وأن نضرب الانحراف المعياري للقيم المختصرة في الرقم الثابت وذلك لنستنتج التباين والانحراف المعياري للقيم الأصلية .

فمثلاً لكي نستنتج التباين للقيم الأصلية يجب ضرب قيمة التباين المحسوب في العمود الأخير في 100 . ولكي نستنتج الانحراف المعياري للقيم الأصلية يجب ضرب قيمة الانحراف المعياري للقيم المختصرة في العمود الأخير في 10 .

6.3 إيجاد الانحراف المعياري للبيانات المبوبة

(Standard Deviation for Data Set)

لإيجاد الانحراف المعياري للبيانات المبوبة في جداول تكرارية تصبح صيغة التباين بالشكل التالي :

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum f(x - \bar{x})^2 \dots\dots\dots(13-3)$$

حيث :

$$\sum f = n = \text{عدد المفردات}$$

\bar{x} : هي مراكز الفئات ولصعوبة استخدام هذه الصيغة يمكن وضعها على

الصورة التالية :

$$S = \sqrt{\frac{\sum \bar{x}_i^2 f_i}{\sum f_i} - \left(\frac{\sum \bar{x}_i f_i}{\sum f_i} \right)^2} \dots\dots\dots(14-3)$$

وتسمى طريقة الانحراف المعياري باستخدام هذه الصيغة بالطريقة المطولة .

جدول (3 - 9)

إيجاد الانحراف المعياري لدرجات الذكاء للخمسين مهندس

$\bar{x}_i^2 f_i$	$\bar{x}_i f_i$	مركز الفئة \bar{x}_i	التكرار f_i	الفئات x_i
27075	285	95	3	- 90
154350	1470	105	14	- 100
211600	1840	115	16	- 110
171875	1375	125	11	- 120
72900	540	135	4	- 130
42050	290	145	2	150- 140
679850	5800	—	50	المجموع

ولحساب الانحراف المعياري لدرجات الذكاء للخمسين مهندس باستخدام البيانات المدرجة في الجدول (3-3) ، نجد كل من التباين والانحراف المعياري كما يلي :

$$S^2 = \frac{679850}{50} - \left(\frac{5800}{50} \right)^2 = 13597 - 13456 = 141$$

$$\therefore S = \sqrt{141} = 11.874$$

إن التباين يساوي 141 والانحراف المعياري يساوي 11.874 .

7.3 إيجاد الانحراف المعياري بطريقة الانحرافات

(Standard Deviation Using Divergence Method)

لتسهيل العمليات الحسابية يمكن اختيار وسط فرضي من بين مراكز الفئات وتحسب الانحرافات عن هذا الوسط الفرضي وفي هذه الحالة يمكن كتابة الصيغة السابقة على الشكل التالي :

$$S = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 f_i}{\sum f_i} - \left(\frac{\sum d_i f_i}{\sum f_i}\right)^2} \dots\dots\dots(15-3)$$

واضح أن هذه العلاقة أفضل وأسهل كثيراً من العلاقة (14-3) ، لذلك يجب استخدامها دائماً لتسهيل العمليات الحسابية . ويلاحظ أنه عند استخدام هذه الصيغة تتبع نفس الخطوات التي سبق شرحها عند حساب الوسط الحسابي ثم نزيد على الجدول عموداً واحداً هو $(d_i^2 f_i)$ كما يتضح من الجدول (10-3) ، وتسمى هذه الطريقة " طريقة الانحرافات " نظراً لاعتمادها على حساب الانحرافات عن الوسط الفرضي الذي نختاره لتسهيل العمليات الحسابية .

جدول (10-3)

إيجاد الانحراف المعياري لدرجات الذكاء للخمسين مهندس باستخدام وسط فرضي

الفئات	التكرار f_i	مركز الفئة \bar{x}_i	الانحراف d_i	$d_i f_i$	$d_i^2 f_i$
- 90	3	95	- 20	- 60	1200
- 100	14	105	- 10	- 140	1400
- 110	16	115	صفر	صفر	صفر
- 120	11	125	10	110	1100
- 130	4	135	20	80	1600
150 - 140	2	145	30	60	1800
المجموع	50	—	—	50	7100

ولحساب الانحراف المعياري لدرجات الذكاء بطريقة الانحرافات أختارنا القيمة 115 كوسط فرضي من بين مراكز الفئات ، ثم حسبنا الانحرافات عنه كما يبين الجدول (10-3) حيث نجد أن :

$$S = \sqrt{\frac{7100}{50} - \left(\frac{50}{50}\right)^2} = \sqrt{142 - 1} = \sqrt{141} = 11.874$$

8.3 إيجاد الانحراف المعياري بطريقة الانحرافات المختصرة (Standard Deviation by Shortcut Deviations Method)

في حالة التوزيعات التكرارية المنتظمة أي الجداول التكرارية ذات الفئات المتساوية الطول يمكننا استخدام الانحرافات المختصرة وذلك بقسمة انحرافات القيم عن الوسط الفرضي على طول الفئة أي أن :

$$\frac{d_i}{L} = \bar{d}_i$$

حيث أن :

\bar{d}_i - هو الانحراف المختصر .

L - هو طول الفئة .

بذلك نجد أن العلاقة (15-3) لحساب الانحراف المعياري تصبح على

الصورة التالية :

$$S = L \sqrt{\frac{\sum \bar{d}_i^2 f_i}{\sum f_i} - \left(\frac{\sum \bar{d}_i f_i}{\sum f_i}\right)^2} \dots\dots\dots(16-3)$$

وهذه العلاقة وإن كانت أسهل من العلاقة السابقة إلا أنها لا يمكن أن تستخدم إلا في حالات التوزيعات المنتظمة ، أي في حالة تساوي أطوال الفئات .

جدول (11-3)

إيجاد الانحراف المعياري لدرجات الذكاء لخمسين مهنس باستخدام طريقة
الانحرافات المختصرة

الفئات	التكرار f_i	مركز الفئة \bar{x}_i	الانحراف d_i	\bar{d}_i	$\bar{d}_i f_i$	$\bar{d}_i^2 f_i$
- 90	3	95	- 20	- 2	- 6	12
- 100	14	105	- 10	- 1	- 14	14
- 110	16	115	صفر	صفر	صفر	صفر
- 120	11	125	10	1	11	11
- 130	4	135	20	2	8	16
150-140	2	145	30	3	6	18
المجموع	50	—	—	—	5	71

ولحساب الانحراف المعياري للمثال السابق باستخدام الانحرافات
المختصرة نتبع نفس الخطوات التي سبق دراستها عند حساب المتوسط
الحسابي ثم نضيف عموداً آخرًا هو $(\bar{d}_i f_i)$ كما موضح في الجدول (11-3)
ثم نوجد قيمة الانحراف المعياري حيث :

$$\begin{aligned}
 S &= 10 \sqrt{\frac{71}{50} - \left(\frac{5}{50}\right)^2} = \sqrt{1.42 - 0.01} \\
 &= \sqrt{1.41} \\
 &= 11.874
 \end{aligned}$$

مثال (8-3)

احسب الانحراف المعياري لدرجات 70 طالب في مادة الإحصاء والمبينة في الجدول (12-3).

جدول (12-3)

65-60	-55	-50	-45	-40	-35	-30	-25	-20	-15	-10	الفئات
1	2	4	6	8	10	15	13	7	3	1	التكرار

الحل :

عدد الفئات هو فردي لذلك فإن فئة الوسط الفرضي هي (40-35) ، أي أن الوسط الفرضي هو مركز تلك الفئة = 37.5 ومن الجدول (12-3) نجد أن $n = 70$ وطول الفئة = 5 ، ثم نحسب الانحرافات كما يبين الجدول (13-3) :

جدول (13-3)

$\bar{d}_i^2 f_i$	$\bar{d}_i f_i$	معدل الانحراف \bar{d}_i	الانحراف d_i	مركز الفئة	التكرار f_i	الفئات
25	5-	5-	25-	12.5	1	-10
48	12-	4-	20-	17.5	3	-15
63	21-	3-	15-	22.5	7	-20
52	26-	2-	10-	27.5	13	-25
15	15-	1-	5-	32.5	15	-30
0	0	0	0	37.5	10	-35
8	8	1	5	42.5	8	-40
24	12	2	10	47.5	6	-45
36	12	3	15	52.5	4	-50
32	8	4	20	57.5	2	-55
25	5	5	25	62.5	1	65-60
328	34-	—	—	—	70	المجموع

$$\therefore S = (5) \sqrt{\frac{328}{70} - \left(\frac{-34}{70}\right)^2} = (5) \sqrt{4.686 - (0.486)^2}$$

$$= (5) \sqrt{4.686 - 0.2362} = (5)(2.11) = 10.553$$

مثال (9-3) :

أوجد كل من الانحراف المتوسط والانحراف الربيعي والانحراف المعياري للتوزيع التكراري وكما هو مبين في الجدول (14-3) :

جدول (14-3)

الفئات	- 20	- 30	- 40	- 50	- 60	70 وأقل من 80
التكرار	10	15	30	22	14	9

الحل:

أولاً لإيجاد الانحراف المتوسط نحسب المتوسط الحسابي وننظم الجدول (14-3) على النحو المبين في الجدول (15-3) :

جدول (15-3)

الفئات	التكرار f_i	مركز الفئة \bar{x}_i	$\bar{x}_i f_i$	$ \bar{x}_i - \bar{x} $	$f_i \bar{x}_i - \bar{x} $
20-	10	25	250	24.2	242
30-	15	35	525	14.2	213
40-	30	45	1350	4.2	126
50-	22	55	1210	5.8	127.6
60-	14	65	910	15.8	221.2
70- 80	9	75	675	25.8	232.2
المجموع	100	—	4920	—	1162

بما أن المتوسط الحسابي للبيانات :

$$\bar{x} = \frac{4920}{100} = 49.2$$

إن الانحراف المتوسط

$$M.D. = \frac{1162}{100} = 11.62$$

ثانياً لإيجاد الانحراف الربيعي نحسب كلاً من الربيع الأدنى والأعلى وهذا يتطلب تكوين جدول التكرار المتجمع الصاعد كما يلي:

نجد ترتيب الربيع الأدنى حيث :

$$\frac{100}{4} = 25$$

وحيث أن هذه القيمة موجودة بجدول التكرار المتجمع الصاعد لذلك فإن الربيع الأدنى يساوي 40 ، وهي القيمة المقابلة لترتيب الربيع بالجدول (3-16) :

جدول (3-16)

حدود الفئات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من 20	صفر
أقل من 30	10
أقل من 40	25
أقل من 50	55
أقل من 60	77
أقل من 70	91
أقل من 80	100

ترتيب الربيع الأعلى يساوي : $100 \times 3/4 = 75$

وينضح من جدول التكرار المتجمع الصاعد (3-16) ، أن فئة الربيع الأعلى هي (50 وأقل من 60) والتكرار المتجمع الصاعد السابق لترتيب الربيع الأعلى يساوي 55 والتكرار المتجمع الصاعد اللاحق يساوي 77 وعلى هذا الأساس فإن الربيع الأعلى :

$$R_3 = 50 + \left(\frac{75-55}{77-55} \right) (10) = 50 + \frac{(20)(10)}{22} = 50 + 9.1 = 59.1$$

أي أن الانحراف الربيعي :

$$\frac{R_1 - R_3}{2} = \frac{19.1}{2} = \frac{40 - 59.1}{2} = 9.55$$

ثالثاً لإيجاد الانحراف المعياري باستخدام طريقة الانحرافات المختصرة نكون الجدول (3-17) ، ثم نختار للبيانات وسطاً فرضياً وبما أن عدد الفئات هو 6 أي زوجي لذلك قيمة الوسط الفرضي هي مركز الفئة المقابل لأعلى تكرار ويساوي 45 .

جدول (3-17)

$\bar{d}_i^2 f_i$	$\bar{d}_i f_i$	الانحرافات المختصرة \bar{d}_i	الانحرافات d_i	مركز الفئة	التكرار	الفئات
40	20 -	2 -	20 -	25	10	- 20
15	15 -	1 -	10 -	35	15	- 30
0	0	0	0	45	30	- 40
22	22	1	10	55	22	- 50
56	28	2	20	65	14	- 60
81	27	3	30	75	9	80 - 70
214	42	—	—	—	100	المجموع

$$\begin{aligned} \therefore S &= (10) \sqrt{\frac{214}{100} - \left(\frac{42}{100}\right)^2} = (10) \sqrt{2.14 - (0.42)^2} \\ &= (10) \sqrt{2.14 - 0.1764} = (10)(1.4013) = 14.013 \end{aligned}$$

9.3 معامل الاختلاف (Coefficient of Variation)

عند مقارنة التوزيعات التكرارية تقابلنا عادةً صعوبة وهي الاختلاف في وحدة القياس . فإذا أردنا مثلاً مقارنة تشتت أطوال مجموعة من الأشخاص بتشتت توزيع أوزانهم نجد أن وحدات القياس المستخدمة في الحالة الأولى هي السنتيمترات ، بينما الوحدات المستخدمة في الحالة الثانية هي الكيلوجرامات وللتخلص من هذه المشكلة يمكن استخدام مقياس نسبي للتشتت لا يتأثر بوحدات القياس المستخدمة في كل من التوزيعين . فإذا قسمنا الانحراف المعياري لكل توزيع على الوسط الحسابي لنفس التوزيع نحصل على مقياس نسبي للتشتت يعرف بمعامل الاختلاف D حيث أن :

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{الوسط الحسابي}} \times 100$$

$$\therefore D = \frac{S}{\bar{x}} \times 100 \dots\dots\dots(17-3)$$

واستخدام التشتت النسبي لا يقتصر فقط على التخلص من وحدات القياس ولكن أيضاً لمقارنة التوزيعات التي يوجد فرق كبير بين متوسطاتها ، حتى ولو كانت مقاسة بنفس وحدات القياس . فمثلاً إذا كان المتوسط الحسابي لقوة التحمل لنوع معين من الأسلاك هو 128.64 باوند بانحراف معياري 15.37 باوند ، والمتوسط الحسابي لقوة التحمل لنوع آخر من الأسلاك هو 87.66 باوند بانحراف معياري 14.12 باوند ، وأردنا مقارنة درجة التشتت

للتوعين من الأسلاك فلا يمكن مقارنة القيم المطلقة لتشتت النوعين نظراً لاختلاف متوسطيهما . لذلك نحسب معامل الاختلاف لكل من النوعين حيث :

معامل الاختلاف للنوع الأول يساوي :

$$\frac{15.37}{128.64} \times 100 = 11.95 \%$$

أما معامل الاختلاف للنوع الثاني فيساوي :

$$\frac{14.12}{87.66} \times 100 = 16.11 \%$$

وهكذا نجد أن التشتت النسبي مقاساً بمعامل الاختلاف يشير إلى أن النوع الأول أقل تشتتاً من النوع الثاني ، وهذه النتيجة التي نحصل عليها تخالف تماماً النتيجة التي نحصل عليها بالاعتماد على المقياس المطلق للتشتت الانحراف المعياري فقط .

وفي حالة الجداول التكرارية المفتوحة لا يمكن حساب كل من المتوسط الحسابي والانحراف المعياري . لذلك تستخدم صيغة أخرى تعتمد على الربيعين الأعلى والأدنى . ولما كان معامل الاختلاف عبارة عن مقياس للتشتت مقسوماً على مقياس المتوسط فإنه يمكن إيجاده بقسمة الانحراف الربيعي على الوسيط وباعتبار أن الوسيط يساوي الوسط الحسابي للربيعين :

$$\therefore \text{معامل الاختلاف} = \frac{\text{الربيع الأعلى} - \text{الربيع الأدنى}}{\text{الربيع الأعلى} + \text{الربيع الأدنى}} \times 100 \quad \text{أو}$$

$$D = \frac{R_3 - R_1}{R_3 + R_1} \times 100 \dots\dots\dots (18-3)$$

وتستخدم هذه الصيغة أيضاً إذا أردنا إيجاد معامل الاختلاف بيانياً حيث يمكن حساب قيمة الربيعين الأعلى والأدنى من منحني التكرار المتجمع الصاعد.

10.3 الوحدات المعيارية (Standard Units z – Score)

إذا كان لدينا مجموعة من المفردات ثم حسبنا المتوسط الحسابي \bar{x} ، والانحراف المعياري S لهذه المجموعة ، ثم طرحنا قيمة المتوسط الحسابي من كل مفردة من مفردات المجموعة وقسمنا الناتج على قيمة الانحراف المعياري فإن القيم الجديدة التي نحصل عليها تكون مقياسة بوحدات تعرف بالوحدات المعيارية فإذا رمزنا للقيم الجديدة بالرمز z نجد أن :

$$z = \frac{x - \bar{x}}{S} \dots\dots\dots(19-3)$$

حيث أن الوسط الحسابي للقيم \bar{x} يساوي صفرأ والانحراف المعياري لها يساوي الواحد الصحيح .

وتفيدنا الصيغة المعيارية (6-19) في أنها تمكننا من مقارنة قيم المجموعات المختلفة وذلك بتحويل الوحدات المستخدمة في كل مجموعة إلى وحدات معيارية وذلك باستخدام الوسط الحسابي والانحراف المعياري .

مثال (3-9)

قامت باحثة في مجال التغذية بدراسة كميات البروتين المتناولة من قبل عدد من الأشخاص البالغ عددهم مائة شخص . ووجدت أن المتوسط الحسابي لمأخذ البروتين لهؤلاء الأشخاص هو 77 gm ، وكان الانحراف المعياري لمأخذ البروتين للأشخاص هو 8.8 gm . أحسب الوحدة المعيارية لمأخذ بروتين يساوي 93 gm .

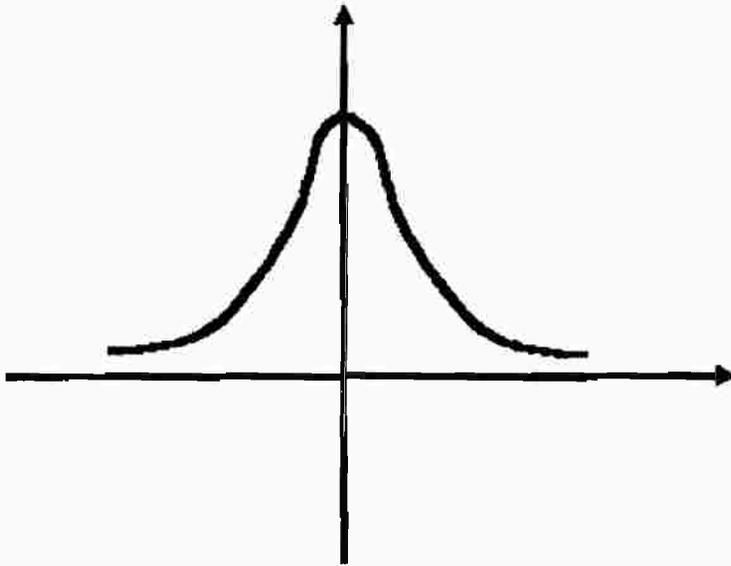
الحل :

نقوم بحساب الوحدة المعيارية بتطبيق العلاقة (3 - 19) نحصل على :

$$z = \frac{x - \bar{x}}{S} = \frac{93 - 77}{8} = \frac{16}{8} = 2$$

11.3 المنحنى التكراري المتماثل والتوزيعات الاعتدالية (Symmetric Distribution Curve & Moderate Distribution)

يكون التوزيع التكراري المتماثل متوازناً بحيث إن نصفي المنحنى الذي يمثله يكون كل منهما صورة انعكاسية للأخر بالنسبة للخط الرأسى المار بقمة المنحنى كما موضح في الشكل (3-1) .



الشكل (3-1)

منحنى تكراري متماثل

وإذا كان المنحنى المتماثل يشبه الجرس (Bell - Shaped) وكانت معظم الحالات تتجمع حول مركز التوزيع وتقل تحت طرفي المنحنى وذلك بنسب معينة فإن التوزيع يسمى توزيعاً اعتدالياً . ومن الناحية النظرية فإن توزيع البيانات الخاصة بأية صفة من صفات مجتمع ما أو أي عينة غير متحيزة تتبع التوزيع الاعتدالي ، مثل توزيع درجات الذكاء للخمسين مهندس ومن الخواص الهامة في منحنى التوزيع التكراري أن :

المتوسط الحسابي (Arithmetic Mean) يساوي الوسيط (Median) ويساوي المنوال (Mode) ، كما أن المساحة الواقعة تحته تتوزع بنسب مرتبطة بالوسط الحسابي وبالانحراف المعياري للتوزيع .

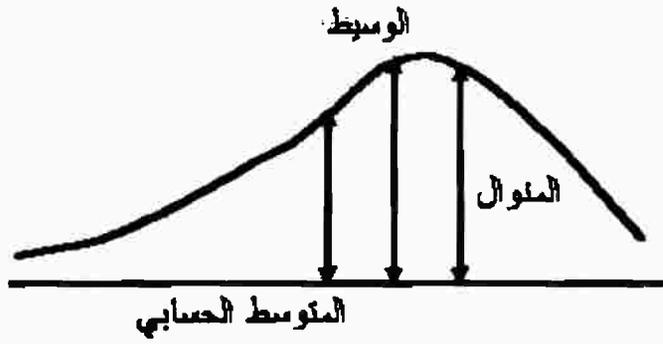
12.3 الحيود عن التوزيع الاعتدالي

(Diffraction from Moderate Distribution)

من الناحية العملية ، نجد أن الكثير من البيانات تحيد توزيعاتها عن الاعتدال في التوزيعات التكرارية ومنها :

(a) الالتواء (Skewness)

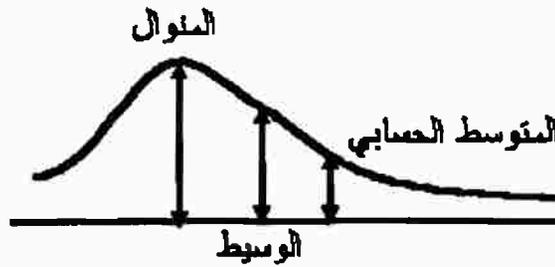
قد ينحرف التوزيع عن الاعتدال بحيث يصبح شكل المنحنى غير متماثل وذلك عندما تزداد القيم الكبرى مثلاً في التوزيع التكراري ، فيلتوي منحنى التوزيع تجاه اليسار حيث يجذب المتوسط الحسابي تجاه القسم الشاذة الصغيرة ، بينما يكون المنوال والوسيط في صالح الأغلبية من الحالات ذات القيم الكبيرة كما موضح في الشكل (2-3) .



الشكل (3-2)

المنحنى ذو الالتواء السالب

كذلك قد يزداد في التوزيع عدد القيم الصغرى فيلتوي منحنى التوزيع تجاه اليمين حيث يجذب المتوسط الحسابي تجاه القيم الشاذة الكبيرة بينما يكون المنوال والوسيط في صالح الأغلبية من الحالات ذات القيم الصغيرة كما موضح في الشكل (3-3).



الشكل (3-3)

منحنى ذو التواء موجب

وهناك عدة مقاييس للالتواء نذكر منها المقياس التالي :

$$\text{معامل الالتواء} = \frac{3(\text{الوسيط الحسابي} - \text{الوسيط})}{\text{الانحراف المعياري}}$$

$$\text{Skewness Factor} = \frac{3(\bar{x} - M)}{\delta} \dots\dots\dots(20-3)$$

ومن الواضح من هذه العلاقة أنه :

- 1- معامل الالتواء يساوي صفر في حالة المنحني المتمائل .
- 2- معامل الالتواء أكبر من صفر في حالة الالتواء تجاه القيم الكبرى .
- 3- معامل الالتواء أصغر من صفر في حالة الالتواء تجاه القيم الصغرى .

مثال (11-3)

أحسب معامل الالتواء للتوزيع التكراري المعطى في المثال (8-3) ثم
أرسم شكل منحني التوزيع .

الحل:

ننظم جدول التكرار المتجمع الصاعد للفئات كما هو مبين في الجدول (18-3):

جدول (18-3)

التكرار المتجمع الصاعد	الحدود العليا للفئات
0	أقل من 10
1	أقل من 15
4	أقل من 20
11	أقل من 25
24	أقل من 30
39	أقل من 35
49	أقل من 40
57	أقل من 45
63	أقل من 50
67	أقل من 55
69	أقل من 60
70	أقل من 65

من الجدول (3-18) نلاحظ أن :

نجد رتبة الوسيط تساوي $35 = 70 / 2$ ، ومن ثم نجد معامل الالتواء حيث :

$$\begin{aligned}\therefore M &= 30 + \frac{35 - 24}{15} \times 5 \\ &= 30 + \frac{(5)(11)}{(15)} \\ &= 30 + \frac{11}{3} \\ &= 33.7\end{aligned}$$

أن الوسط الحسابي من المثال (3-8) يحسب كما يلي :

$$\bar{x} = 37.5 + \frac{(-34)(5)}{70} = 37.5 - 2.4 = 35.1$$

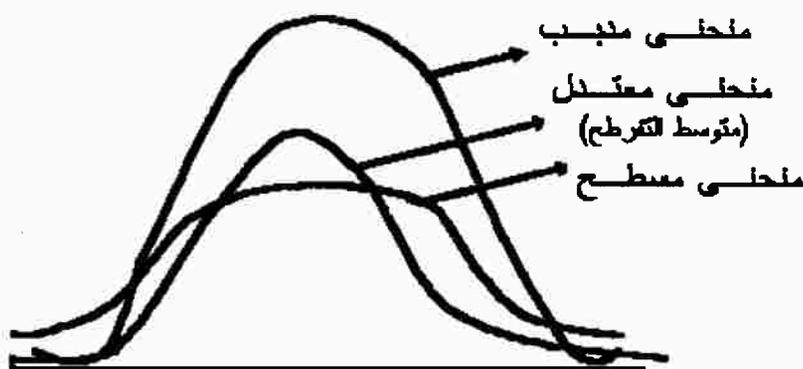
أما الانحراف المعياري من نفس المثال فيساوي $S = 10.5$ ، إذن معامل الالتواء يساوي :

$$0.4 = \frac{(33.7 - 35.1)(3)}{10.5}$$

وهذا يعني أن المنحني يعاني من التواء موجب بسيط . أما رسم شكل منحني التوزيع فنتركه كتمرين للطالب .

(b) التفرطح (Oblation)

قد يكون شكل منحنى التوزيع متمائلاً ولكن التوزيع نفسه قد لا يكون اعتدالياً ، وذلك لاختلاف نسب التوزيع بين المركز والأطراف فقد يكون المركز ذا قيمة رفيعة حيث تزداد الحالات المتجمعة حول المركز وتزداد الحالات عند الطرفين . ويقاس ذلك بمقياس يسمى معامل التفرطح . فإذا كان التوزيع ذا قمة رفيعة سمي التوزيع مدبب التفرطح وإذا كان ذا قمة عريضة سمي التوزيع مسطح التفرطح كما موضح في الشكل (4-3) .



الشكل (4-3)

وهناك عدة مقاييس للتفرطح نذكر منها المقياس التالي :

$$\text{معامل التفرطح} = \frac{\text{الربع الأعلى} - \text{الربع الأدنى}}{2(\text{المئين التسعين} - \text{المئين العاشر})}$$

أو بالرموز :

$$\text{Oblation Factor} = \frac{R_3 - R_1}{2(P_{90} - P_{10})}$$

حيث أن :

- . R_1 - الربع الأدنى .
- . R_3 - الربع الأعلى .
- . P_{10} - المئين العاشر .
- . P_{90} - المئين التسعين .

وطبقاً لهذه المقاييس فإن منحنى التوزيع يكون :

- 1- اعتدالياً (Moderate) إذا كان معامل التفرطح يساوي 0.263 .
- 2- مسطحاً (Flatten) إذا كان معامل التفرطح أكبر من 0.263 .
- 2- مدبباً (Sharpened) إذا كان معامل التفرطح أقل من 0.263 .

مثال (3- 12)

أحسب معامل التفرطح في التوزيع المعطى في المثال (3- 8) .

الحل :

أن ترتيب P_{10} يساوي $70/10 = 7$ ومنه :

$$\begin{aligned}\therefore P_{10} &= 20 + \frac{7 - 4}{11 - 4} \times 5 \\ &= 20 + \frac{(5)(3)}{(7)} \\ &= 22.857\end{aligned}$$

أما ترتيب الربع الأدنى فهو :

$$R_1 = 70/4 = 17.5$$

$$\begin{aligned} \therefore R_1 &= 25 + \frac{17.5 - 11}{24 - 11} \times 5 \\ &= 25 + \frac{(5)(6.5)}{(13)} \\ &= 27.5 \end{aligned}$$

أما ترتيب الربع الأعلى فيساوي $R_3 = 3 \times 70 / 4$ ومنه :

$$\begin{aligned} \therefore R_3 &= 40 + \frac{52.5 - 49}{57 - 49} \times 5 \\ &= 40 + \frac{(5)(3.5)}{(8)} \\ &= 42.185 \end{aligned}$$

أما ترتيب فيساوي :

$$\begin{aligned} P_{90} &= 70 \times 9 / 10 \\ &= 63 \end{aligned}$$

إذن $P_{90} = 50$ وعلى هذا الأساس فإن معامل التفرطح يساوي :

$$\begin{aligned} \therefore \text{Oblation Factor} &= \frac{R_3 - R_1}{2(P_{90} - P_{10})} \\ &= \frac{(42.185 - 27.5)}{2(50 - 22.857)} = 0.2702 \end{aligned}$$

ومن هذا نرى أن لهذا التوزيع منحنى مسطحاً قليلاً بالنسبة لمنحنى التوزيع الاعتيادي .

13.3 تمارين

س1: أحسب كل من المدى والانحراف المتوسط والانحراف المعياري لكل مجموعة من البيانات ، وبعد ذلك أحسب معامل الاختلاف للمجموعة الثانية (b) :

a) 12 , 6 , 13 , 5 , 14 , 7 , 2

b) 11 , 1 , 2 , 9 , 6 , 4 , 7 , 3 , 5 , 2

س2: أوجد معامل الاختلاف للتوزيع التكراري المبين في الجدول (3-19) :

جدول (3-19)

الفئات	أقل من 20	- 20	-25	- 30	35 وأقل من 40
التكرار	8	25	26	22	9

س3: الجدول (3-20) يبين التوزيع التكراري لمائة عامل من عمال أحد المصانع حسب فئات الأجر الأسبوعي بالدنانير .

جدول (3-20)

فئات الأجر	- 20	- 30	- 40	- 50	60 وأقل من 70
عدد العمال	26	40	18	10	3

المطلوب هو إيجاد كل من الربيع الأعلى والأدنى بيانياً ، ثم استنتاج معامل الاختلاف ، وحساب الانحراف المتوسط والانحراف المعياري .

س4: الجدول (21-3) يبين التوزيع التكراري لدخل 100 عائلة بالدنانير في الأسبوع .

جدول (21-3)

الفتات	- 5	- 10	- 15	- 20	- 25	- 30	- 35	40 - 45
التكرار	4	22	28	18	12	9	4	3

أوجد ما يلي :

(a) حساب المتوسط الحسابي .

(b) حساب الانحراف المعياري .

س5: في عينة من 200 شخص في إحدى القرى وجد أن التوزيع التكراري للرجال المتزوجين حسب أعمارهم بالسنين كما يبينه الجدول (22-3) والمطلوب :

(a) أوجد الانحراف المعياري والانحراف المتوسط للبيانات .

(b) أحسب معامل الاختلاف للبيانات .

جدول (22-3)

الفتات	- 15	- 25	- 35	- 45	- 55	65 وأقل من 75
التكرار	49	65	41	26	16	3

س6: حصل طالب على 84 درجة في أحد الامتحانات النهائية في مادة الاستاتيكا ، حيث كان متوسط درجات جميع الطلبة في هذه المادة 76 درجة بانحراف معياري 10 درجات ، وفي امتحان مادة خواص المواد حصل نفس الطالب على 90 درجة حيث كان متوسط درجات جميع الطلبة في هذه المادة 82 بانحراف معياري 16 درجة . في أي المادتين كان الطالب أكثر تفوقاً .

س7: أرسم منحنى التكرار المتجمع الصاعد للتوزيع المبين في الجدول (23-3) ثم أستنتج منه ما يلي :

(a) الانحراف المعياري .

(b) معامل الالتواء ومعامل التفرطح .

جدول (23-3)

الفئات	-50	-60	-70	-80	-90	-100	-110	-120	-130	150-140
التكرار	8	10	17	34	42	32	22	15	11	9

س8: أدرس التوزيع المبين في الجدول (24-3) ، إذا كان المنحنى متماثلاً أم غير متمائل ، ثم أحسب المتوسط الحسابي والانحراف المعياري والدرجة المعيارية لمراكز الفئات التي يشملها هذا التوزيع .

جدول (24-3)

الفئة	-50	-60	-70	-80	-90	-100	120-110
التكرار	10	15	30	50	25	20	10

س9: أوجد كلاً من التشتت المطلق والتشتت النسبي للتوزيع التكراري المبين في الجدول (25-3) :

جدول (25-3)

الفئات	أقل من 5	- 5	- 10	- 20	40 فأكثر
التكرار	8	32	50	7	3

وذلك باستخدام كل من :

(a) الطريقة البيانية .

(b) الطريقة الحسابية .

س10: أسفرت الدراسة التي أجريت عن الأجور الأسبوعية بالدنانير لعدد من العمال في مصنعين يعملان في صناعة واحدة عن النتائج الدرجة في الجدول (26-3) :

جدول (26-3)

المقياس	المصنع الأول	المصنع الثاني
الوسط الحسابي	62	54
الانحراف المعياري	16	15

المطلوب مقارنة تشتت الأجور الأسبوعية للعمال في المصنعين .

س11: إن الجدول التوزيع التكراري (27-3) يمثل درجات التحصيل في مادتي اللغة العربية والرياضيات لمائة طالب .

جدول (27-3)

الفترة	-10	-20	-30	-40	-50	-60	-70	-80	90 - 100
اللغة العربية	1	3	2	13	29	31	13	4	2
الرياضيات	2	4	10	15	19	20	15	4	1

والمطلوب ما يلي :

1- قارن بين تشنتي الدرجات في التوزيعين عن طريق رسم مدرجين تكرارين لهما.

2- أحسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لكل من التوزيعين .

س12: قارن بين تشنتي المجموعتين A و B في كل من الحالات التالية المبينة في الجدول (28-3) باستخدام معامل الاختلاف مع التعليق على كل حالة من الحالات .

جدول (28-3)

S	\bar{x}	المقياس
10	100	A
4	50	B

S	\bar{x}	المقياس
5	100	A
5	120	B

S	\bar{x}	المقياس
5	65	A
10	65	B

س13: الجدول (29-3) يمثل توزيع المرتبات في إحدى الدوائر الحكومية مقدره بالدنانير لعدد 140 مستخدم فيها :

جدول (29-3)

الفئات	-70	-90	-110	-130	-150	-170	-190	210 - 230
التكرار	8	12	25	40	20	17	13	5

والمطلوب ما يلي :

(a) أحسب التشنت والانحراف الربيعي والمتوسط للبيانات .

(b) أحسب الانحراف المعياري للبيانات أعلاه .

(b) أحسب معامل الالتواء ومعامل التفرطح للبيانات .