

الباب الخامس

مبادئ نظرية الاحتمالات

(Probabilities Principles)

- 1.5 مقدمة .
- 2.5 فضاء العينة .
- 3.5 النماذج الرياضية .
- 4.5 الاحتمالات القبلية .
- 5.5 الحدث .
- 6.5 احتمال الحدث .
- 7.5 التعريف التقليدي للاحتمال .
- 8.5 التعريف الإحصائي للاحتمال .
- 9.5 التعريف الحديث للاحتمال .
- 10.5 احتمال اجتماع حدثين .
- 11.5 الاحتمالات المرعبة .
- 12.5 قوائم الاحتمالات .
- 13.5 الاحتمال المشروط .
- 14.5 الأحداث المستقلة .
- 15.5 التكرار النسبي والاحتمالات التجريبية .
- 16.5 التوقع الرياضي .
- 17.5 قاعدة حساب القيمة المتوقعة .
- 18.5 التحليل التوافقي .
- 19.5 التباديل والترتيبات والتوافيق .
- 20.5 تمارين .

1.5 مقدمة (Introduction)

في الأبواب السابقة تم دراسة كيفية وصف مجموعة من البيانات الإحصائية وتبويبها ، وطريق تمثيلها وعرضها بمدرجات أو مضلعات أو منحنيات تكرارية . كما تم دراسة طرق حساب المقاييس الإحصائية المختلفة وتحليلها مثل مقاييس النزعة المركزية ومنها الوسط الحسابي والمنوال والوسيط ، ومقاييس والتشتت ومنها الانحراف المعياري والتباين والانحراف المتوسط وغيرها من المقاييس .

وبعد ذلك تم التعرض لدراسة موضوع الارتباط والانحدار لمجموعة البيانات ، وبمعنى آخر ما تم دراسته وعرضه هو وصف لبيانات إحصائية متوفرة لدينا ، وهذا كله يعتبر على قدر من الأهمية لمتتبع الطرق الإحصائية . أما في هذا الباب فسوف نقوم بدراسة مبادئ نظرية الاحتمالات نظراً لارتباطها القوي والوثيق بعلم الإحصاء في الوقت الحاضر .

وتعود بدايات نظرية الاحتمالات إلى القرن السابع عشر نتيجة لدراسة بعض الألعاب الحظ المختلفة ، على الرغم أن تاريخ نظرية الاحتمالات قديم وكبير . إلا أن هذه النظرية لم توضع لها مسلمات إلا في نهاية الثلاثينات من القرن العشرين . وأصبحت تعرف على أنها العلم الذي يدرس الظواهر العشوائية ، وقد تطورت نظرية الاحتمالات تلبية لمتطلبات الحياة العملية مثلها مثل أجزاء العلوم الطبيعية المختلفة .

أن العلاقة المبنية بين نظرية الاحتمالات ومتطلبات العلوم الطبيعية الأخرى توضح بأفضل ما يمكن تلك الأسباب التي جعلت نظرية الاحتمالات في السنوات الأخيرة من أسرع فروع الرياضيات تقدماً وتقدماً . فالنتائج النظرية الجديدة تعمل على فتح آفاقاً جديدة لاستخدام طرق نظرية الاحتمالات

في العلوم الطبيعية المختلفة ، وتقوم الدراسة الشاملة للظواهر الطبيعية بدفع نظرية الاحتمالات إلى الكشف عن قوانين ومسلمات جديدة ولدت عن طريق الصدفة .

وفي السنوات الأخيرة كبرت أهمية ارتباط نظرية الاحتمالات بعلم الإحصاء بفعل التطور الصناعي والتقني السريع . ونتيجة لذلك فقد زاد الاهتمام بنتائج نظرية الاحتمالات في تنظيم عمليات الإنتاج والتصنيع ، والرقابة الإحصائية وبذات المتعلقة بمشاكل التحقق من نوعية المنتجات ، وبالتالي ظهرت نظرية الطرق الإحصائية لرقابة القبول العميقة بمحتواها ، والهامة بتطبيقاتها العملية والمبنية على الاستخدام الواسع لنظرية الاحتمالات .

ولقد كبرت أهمية نظرية الاحتمالات بكثرة في الوقت الراهن ، حيث تدخل الآن أفكار الاحتمالات والإحصاء في أغلب الاتجاهات مثل الاقتصاد والطب وعلم النفس وإدارة الأعمال والعلوم التربوية وكافة مجالات الفروع والتخصصات الهندسية . أن الهدف الرئيسي من هذا الباب هو عرض المبادئ الرئيسية لنظرية الاحتمالات ببساطة ووضوح وذلك من خلال دراسة الظواهر الطبيعية المختلفة .

فمثلاً عندما نحصل على معدل سقوط الأمطار فوق أحد الدول خلال الثلاثين سنة الماضية ، فإنه يمكننا التحدث عن تلك الثلاثين سنة الماضية ، ولكن يبقى السؤال هو ماذا يمكننا التحدث بخصوص السنوات الثلاثين القادمة . إن المعلومات التي لدينا لا تتحدث شيئاً عن السنوات القادمة ، فهل يمكننا التنبؤ بمعدل سقوط الأمطار خلال العام القادم . وأيضاً عندما نلقي قطعة من النقود مائة مرة متتالية ونجد أن عدد مرات ظهور الصورة كانت 54 مرة ، وعدد مرات ظهور الكتابة كانت 46 مرة ، فهل

يمكننا التنبؤ بشي* عن نتيجة إلقاء قطعة النقود هذه الآن . وكمثال آخر سجلت إحدى مستشفيات الولادة عدد المواليد الذكور لألف حادثة ولادة فكان العدد 495 . هل يمكن أن نقول شيئاً عن جنس المولود في حادثة ولادة جديدة ، للوصول إلى جواب حول أية من هذه الأسئلة أو أي أسئلة أخرى مماثلة يلزم دراسة مفهوم الاحتمال ونظرياته .

ويجب الإشارة إلى أنه عند اختيار عدد من العينات من " مجتمع " ما نجد أن صفات العينة تختلف من واحدة لأخرى بطريقة لا يمكن التنبؤ بها ، ونعبر عن ذلك بأن نقول إن نتائج الاختيار عشوائية أو إنها عرضة للصدفة . غير إن الباحثين قد وجدوا بالخبرة أن فكرة الاحتمالات تعطي طريقة تتضمن إجراء العديد من التجارب ذات النتائج المتوقعة على الصدفة . وقد طور علماء الرياضيات نظرية للاحتتمالات تقدم نموذجاً رياضياً (Mathematical Model) مناسباً لوصف وتقدير فئة معينة من الظواهر المشاهدة التي تقوم على أساس الصدفة .

2.5 فضاء العينة (Sample Space)

في علم الإحصاء تستخدم كلمة تجربة للدلالة على أية عملية نقودنا إلى مجموعة من البيانات . فمثلاً عند إلقاء قطعة من النقود نجد أمامنا نتيجتين محتملتين هما " ظهور الصورة " أو " ظهور الكتابة " ، وأيضاً عندما نسجل عدد الطائرات التي تهبط في مطار عمان مثلاً يومياً نجد أننا نحصل على سبعة أعداد يدل كل منها على عدد الطائرات التي هبطت في أحد أيام الأسبوع . وفي الحقيقة عندما نقوم بتجربة إحصائية ، لا نهدف إلى معرفة نتائج التجربة فحسب ، بل نتطلع من وراء هذه التجربة إلى النتائج التي نحصل عليها لو كررنا التجربة ثانياً لعدد من المرات .

إن ظهور الصورة عند إلقاء قطعة النقود لا يدل مطلقاً على أننا لو كررنا التجربة ثانية فالصورة ستظهر بالتأكيد . وإن ظهور الصورة في الحالة الأولى هو محض صدفة ، وبالتالي لا يمكن التنبؤ بظهورها ثانية بالتأكيد عند تكرار التجربة ، أو إن امرأة ما حين تضع مولوداً نكراً في الولادة الأولى لا يعني مطلقاً بأنها ستضع مولوداً نكراً في الولادة الثانية . وكل هذا يقودنا إلى تعريف فضاء العينة .

يعرف " فضاء العينة " على أنه مجموعة كل النتائج الممكنة لتجربة إحصائية ما ، ويرمز لها بالحرف S ، أي أن S هو مجموعة النتائج التي يمكن أن نحصل عليها من تنفيذ التجربة لمرة واحدة .

فمثلاً في تجربة رمي قطعة النقود لو رمزنا مثلاً بالرمز " H " لظهور الصورة وبالرمز " T " لظهور الكتابة فإن فضاء العينة لهذه التجربة يكون هو :

$$S = \{H, T\}$$

ولو رمزنا بالرمز B للمولود الذكر و الرمز G للمولود الأنثى في حالة ولادة امرأة ما ، فإن فضاء العينة لهذه التجربة يكون :

$$S = \{G, B\}$$

مثال (1-5)

نفرض أن التجربة الإحصائية هي إلقاء حجر النرد ، وأن الهدف من هذه التجربة هو الحصول على الوجه العلوي لحجر النرد ، وعليه فإن فضاء العينة يكون :

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

أما إذا كان الهدف من التجربة الاهتمام بنوع الرقم الظاهر مثلاً زوجي (Even) أو فردي (Odd) فإن فضاء العينة عندئذ سيكون :

$$S' = \{ odd , even \}$$

إن المثال السابق يدل وجود أكثر من فضاء واحد للعينة يمكنه وصف النتائج التي يمكن عليها من خلال تكرار تجربة إحصائية معينة .

إن فضاء العينة S في المثال السابق يعطي معلومات أكثر مما قد نحصل عليه من فضاء العينة S' وهو فردي في هذه الحالة ، وذلك لأننا لو علمنا أن الرقم الذي يظهر على الوجه العلوي عند إلقاء حجر النرد هو الرقم 4 مثلاً لحكمنا على أن العنصر هو من الفئة S' أما العكس فهو غير صحيح . فلو عرفنا أن الرقم الذي ظهر على الوجه العلوي لحجر النرد كان " زوجياً " فلا يمكننا قط الجزم بأنه كان الرقم 2 أو 4 أو 6 ، لذا فإنه بصورة عامة نرغب في استخدام فضاء عينة يعطينا معلومات أوسع عن النتائج الممكنة للتجربة التي ندرسها .

مثال (2-5)

نفرض أن التجربة هي إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية فإن فضاء العينة هو :

$$S = \{ HHH, HTH, THH, HHT, TTH, THT, HTT, TTT \}$$

ويمكن أيضاً أن يكون اهتمامنا منصباً على عدد الصور الظاهرة خلال التجربة السابقة فيكون فضاء العينة عندئذ هو :

$$S = \{ 0, 1, 2, 3 \}$$

3.5 النمذج الرياضية (Mathematical Models)

عند استخدام الرياضيات في وصف إحدى الظواهر الطبيعية تحت الدراسة ، فإننا ننشئ نموذجاً رياضياً مبسطاً للمعالم الحقائق ويكون صورة مثالية للصفات المميزة للظاهرة التي ندرسها . ومثال على ذلك هو إدخال الإنسان فكرة النقاط والحروف والخطوط والأشكال الهندسية ومن هذه وبعض البديهيات يتكون النموذج الرياضي .

وباستخدام المنطق أستنتج علماء الرياضيات النظريات الهندسية التي ما هي إلا نظريات عن هذا النموذج الرياضي . وفي إطار هذا النموذج نجد أن النتائج الهندسية صحيحة تماماً . فمثلاً مجموع زوايا المثلث الهندسي يساوي 180° بالضبط . من المعلوم أن هذا النموذج الرياضي مفيد جداً ، ولذلك ندرس الهندسة .

وكمثال آخر نأخذ قانون نيوتن الثاني للحركة والمبني على نموذج رياضي معين . والذي ينص على أنه إذا أثرت قوة (F) على جسم كتلته (m) فإنها تزيد سرعته في اتجاه تأثيرها بمقدار (a) كل ثانية حسب العلاقة الآتية :

$$F = m a$$

ويتكون النموذج الرياضي هنا من الأعداد التي تمثل مقادير القوة (F) والكتلة (m) والعجلة (a) مع العلاقة التي تربطها . أما القانون فينص على أن هذا النموذج الرياضي يمكن أن يستعمل لوصف ظواهر طبيعية معينة . ومع أن إثبات هذا القانون رياضياً مستحيل ، إلا التجربة قد أثبتت فائدته إلى حد كبير جداً .

ويلاحظ أن قانون نيوتن الثاني للحركة يحدد قيم (a) أي معدل زيادة السرعة بالنسبة للزمن عندما تكون قيمتي القوة المؤثرة على الجسم (F) وكتلة الجسم (m) معلومة ، ولذلك نقول عن النموذج الرياضي الذي بنى قانون نيوتن على أساسه على أنه نموذج تحديدي (Deterministic) . وفي دراسة الميكانيكا والفيزياء الطبيعية (Physics) ، كثيراً ما ننشئ نماذج رياضية من هذا النوع . وعندما يكون من الضروري معرفة توزيع الحرارة المنتقلة خلال أحد الأجسام الصلبة فلا بد من الوصول إلى نموذج رياضي مناسب يوضح كيفية هذا التوزيع .

على أنه غالباً ما نقابلنا ظواهر يكون من الصعب فيها ارتباط المتغيرات مع بعضها بحيث تجعل من الصعب الحصول على نموذج رياضي تحديدي ، كالذي أستنتج في قانون نيوتن الثاني للحركة . ومع ذلك ففي مثل هذه الحالات نجد أنه من المفضل إنشاء نموذج رياضي تتوقف فيه النتيجة على الصدفة ، وبذلك نجد أنفسنا في بداية طريق يقودنا إلى ما نسميه النماذج الاحتمالية (Probability Models) .

4.5 الاحتمالات القبلية (Priority Probabilities)

عند دراسة واحداً من أبسط الأمثلة على تجارب الصدفة وهو إلقاء قطعة نقود في الهواء كما أوضحنا سابقاً . يكون من الواضح أنه لا يمكن لأحد أن يتنبأ بالنتيجة ، أن كانت هل تظهر الصورة أو الكتابة على الوجه الأعلى ، فإذا فرضنا أن القطعة سليمة وأنها ستلقى كيفما أتفق فليس هناك ما يجعلنا نتوقع ظهور أحد الوجهين أكثر مما نتوقع ظهور الوجه الآخر . وهنا ننشئ نموذجاً رياضياً تتساوى فيه فرصة ظهور الصورة والكتابة ومنتصور فيه هذا التساوي للفرص بأن نخصص فيه عددين متساويين في النتيجة .

وإذا ما أخذنا بعين الاعتبار أن يكون مجموع العددين يساوي 1 فإن العدد المخصص لكل نتيجة نسميه احتمال هذه النتيجة . ويكون في هذه الحالة احتمال ظهور الصورة يساوي $\frac{1}{2}$ واحتمال ظهور الكتابة يساوي $\frac{1}{2}$ أيضاً .

وكمثال آخر على تجارب الصدفة ندرس تجربة إلقاء حجر النرد حيث يكون لدينا 6 نتائج ممكنة وهي ظهور الأعداد 1 , 2 , 3 , 4 , 5 و 6 على الوجه العلوي للنرد ، ولا يمكن بطبيعة الحال التنبؤ بالنتيجة مقدماً . ولكن إذا افترضنا أن الحجر سليم وأنه سيققى كيفما أتفق فليس هناك ما يجعلنا نتوقع ظهور أحد الأعداد أكثر مما نتوقع ظهور العدد الآخر ، ومنه ننشئ نموذجاً رياضياً تتساوى فيه فرصة ظهور أي من الأعداد الستة 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 مع أي عدد آخر منها ونصور هذا التساوي للفرص أي نخصص أعداداً مساوية للنتائج الستة .

وإذا راعينا أن يكون مجموع هذه الأعداد يساوي 1 فإن العدد المخصص لكل نتيجة نسميه احتمال هذه النتيجة ، ويكون احتمال ظهور العدد 1 يساوي احتمال ظهور العدد 2 يساوي احتمال ظهور العدد 6 ويساوي $\frac{1}{6}$.

ولا بد أن كلاً منا قد لاحظ أن النموذج الذي أنشأناه في كل من المثالين السابقين مبني على اعتبارات لا تتضمن تجربة فعلية . ففي المثال الأول نجد أن الاحتمال يوجد قبل إلقاء قطعة النقود أي في الواقع بدون أي إلقاء لقطعة النقود . وفي المثال الثاني أوجدنا الاحتمال قبل إلقاء حجر الزهر ، والاحتمالات التي من هذا النوع تسمى الاحتمالات القبلية ومن الواضح أنها مبنية على أفكار رياضية . ولا يمكننا إلا بالتجربة وحدها أظهار فيما إذا كان للاحتمال القبلي أي معنى في مثل الحالات التي سبق الإشارة إليها .

على أننا كثيراً ما نواجه حالات لا تؤدي فيها الاعتبارات القبلية إلى تعريف كامل لنموذج احتمالي . فمن المستحيل مثلاً إيجاد احتمال أن ماكينة معينة سوف تنتج سلعة معيوبة قبل مشاهدة أداء تلك الماكينة ، وهذا ما يجعلنا ندخل نوعاً آخرًا من الاحتمالات مبنياً على اعتبارات ما بعد المشاهدة وهو ما يسمى الاحتمالات التجريبية (Empirical Probabilities) وسنقوم بدراستها لاحقاً . أما حالياً فسنعوم بدراسة الاحتمالات القبلية .

عند إجراء إحدى محاولات أو تجارب الصدفة فإن الحاصل (Result) يكون أحد النتائج الأولية (Elementary Outcomes) ، فمثلاً عندما نقوم بإلقاء حجر النرد يكون الحاصل هو 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 وعند إلقاء قطعة نقود في الهواء يكون الحاصل أحد النتيجتين الأوليتين صورة وكتابة وعند سحب ورقة من مجموعة أوراق اللعب الكوتشينة نجد أن هناك 52 نتيجة أولية يكون الحاصل واحداً منها .

مثال (5-3)

أفرض أن لدينا كيساً به ثلاث كرات إحداها بيضاء والأخرى صفراء والثالثة زرقاء . وكانت التجربة تتكون من سحب كرتين عشوائياً من الكيس . أن النتائج الممكنة هي سحب الكرتين البيضاء والصفراء وسحب الكرتين الصفراء والزرقاء وسحب الكرتين الصفراء والزرقاء وإذا رمزنا للكرة البيضاء بالرمز (White) W وللكرة الصفراء بالرمز (Yellow) Y وللكرة الزرقاء بالرمز (Blue) B ، وإذا رمزنا للنتيجة الأولى على شكل زوج ثنائي مرتب هو (W, Y) وللنتيجة الثانية بالرمز (W, B) وللنتيجة الثالثة بالرمز (Y, B) فإن فضاء العينة S هو :

$$S = \{ (W, Y), (W, B), (Y, B) \}$$

5.5 الحدث (Event)

يعرف الحدث على أنه مجموعة محددة من العناصر في فضاء العينة S لتجربة من تجارب الصدفة . فمثلاً في المثال (1-5) نجد أن الحدث هو عدد زوجي يتكون من مجموعة العناصر $\{2,4,6\}$. وفي المثال (3-5) نجد أن الحدث :

$$\{(W, B), (Y, B)\}$$

هو الحدث الذي يقع عند ظهور الكرة الزرقاء في السحب .

وإذا ما أجريت التجربة وكان الحاصل إحدى النتائج الأولية التي يتكون منها الحدث لقلنا أن الحدث قد وقع أو نجح ، وألا فإننا نقول أن الحدث لم يقع أو قد فشل فمثلاً في المثال (1-5) إذا ظهر العدد 2 أو العدد 4 أو العدد 6 لقلنا أن الحدث عدد زوجي قد وقع .

ويجب أن نلاحظ أن مجموعة النتائج الممكنة التي يتكون منها الحدث يمكن أن توصف بإحدى طريقتين :

- (a) بوضعها في قائمة مثل الحدث $\{2,4,6\}$ كما في المثال (1-5) .
- (b) بذكر خاصية مشتركة بينها كأن نقول عدد زوجي في نفس المثال .

مثال (4-5)

في المثال (1-5) إذا رمزنا للعدد الذي يظهر على الوجه العلوي بالرمز x من قبل الحدث $|x > 4|$ هو الحدث $\{5,6\}$.

أن الأمثلة السابقة تقودنا إلى التعريفات الهامة التالية :

- 1- الحدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة .
- 2- الحدث الابتدائي هو مجموعة جزئية من فضاء العينة ذات عنصر وحيد وقد يدعى بالحدث البسيط (Simple Event) .

مثال (5-5)

في تجربة إلقاء ثلاث قطع نقود أو قطعة واحدة ثلاث مرات متتالية إذا كان الحدث A هو ظهور الصورة على إحدى القطع والكتابة على القطعتين الباقيتين حيث :

$$A = \{ HHT, THH, TTH \}$$

والحدث B هو جميع الوجوه ذات شكل واحد حيث :

$$B = \{ TTT, HHH \}$$

من المهم الملاحظة هنا أنه عند إجراء التجربة الإحصائية مرة واحدة فقط فإننا نحصل على نتيجة واحدة فقط . فمثلاً لو كانت النتيجة التي حصلنا عليها هي x فإننا نقول عن الحدث الابتدائي $\{x\}$ بأنه قد وقع ، كما نقول عن أي حادث تنتمي إليه بأنه قد وقع .

فمثلاً لو رمينا حجر النرد وظهر الرقم 3 على الوجه العلوي فإننا نقول عن الحدث :

$$A = \{ 1, 2, 3 \}$$

بأنه قد وقع .

كذلك الحال بالنسبة للحدث :

$$B = \{3,6\}$$

أو الحدث :

$$C = \{3,4,5\}$$

لنفرض أن A و B حدثين موافقين لتجربة إحصائية ما . بمعنى آخر A و B فنتين جزئيتين من فضاء عينة ما S فإن A/B هو حدث أيضاً وكذلك $A \cup B$.

إن الحدث A/B هو الحدث الذي يقع إذا فقط إذا وقع كل من A و B بينما الحدث $A \cup B$ فهو الحدث الذي يقع إذا فقط إذا وقع أي من الحادثين A أو B أي بمعنى أبسط أن يقع أحدهما على الأقل .

مثال (5-6)

في تجربة سحب ورقة من أوراق الكوتشينة وعددها 52 ورقة . لو فرضنا أن A الحدث الذي يقع إذا كانت الورقة المسحوبة تحمل الرقم 3 . و فرضنا أن B هو الحدث الذي يقع إذا كانت الورقة المسحوبة من النوع الديناري فإن :

(A/B) - هو الحدث الذي يقع إذا كانت الورقة المسحوبة تحمل العدد 3 ونوعها ديناري .

$(A \cup B)$ - أما الحدث فهو يعني إذا كانت الورقة المسحوبة تحمل الرقم 3 أو نوعها ديناري .

ولقد أشرنا أن الحدث هو أي فئة أو مجموعة جزئية من فضاء العينة S وأن هذا الحدث يقع إذا فقط إذا كانت نتيجة التجربة " وهو عنصر واحد من فضاء العينة " تنتمي إلى هذا الحادث وحيث إن :

$$S \subseteq S$$

فإن S هو حدث أيضاً وهو مؤكد الحدوث لأن أية نتيجة نحصل عليها من تنفيذ التجربة تنتمي إلى S وذلك حسب تعريف فضاء العينة S ، لذا فإن هذا الحدث يسمى بالحادث الأكيد أو المؤكد . كذلك نعلم بأن الفئة الخالية ϕ محتواة في أية مجموعة أي أن :

$$\phi \subseteq S$$

لذا فإنها تعتبر حدث ولكن وقوعه مستحيلاً لأن نتيجة التجربة لا تنتمي إلى ϕ مهما تكن هذه النتيجة ، لذلك ندعوه بالحادث المستحيل (Impossible Event) .

وهذا يقودنا إلى تعريف الإحداث المتنافية حيث أنه يقال عن الحدثان اللذان يستحيل وقوعهما معاً يدعيان "حادثين متنافيين " إذا كان :

$$A / B = \phi$$

مثال (7-5):

في تجربة رمي زهر النرد لنفرض أن الحادث A الذي يقع إذا كان الناتج رقماً زوجياً و B هو الحادث الذي يقع إذا كان الناتج عدداً فردياً فإن :

$$A = \{2, 4, 6\}$$

وأن الحدث :

$$B = \{1,3,5\}$$

وبالتالي فإن :

$$A/B = \phi$$

وعلى هذا الأساس فإن الحادثين A و B متنافيان .

أما الحادثان المتتامان (Complementary Events) فهما الحادثان اللذان يقع أحدهما إذا وفقط إذا لم يقع الآخر . أي أن الحدث A والحدث B متتامان إذا وفقط إذا كان :

$$A/B = \phi$$

وحيث :

$$A \cup B = S$$

أي أن :

$$B = S - A = \bar{A}$$

مثال (8-5)

الحادثان المذكوران في المثال السابق متتامان . وكذلك الحال في المثال (3-5) حيث أن الحدث M يقع إذا وفقط إذا ظهرت صورتان على الأقل والحدث N يقع إذا وفقط إذا ظهرت صورة واحدة على الأكثر هما حادثان متتامان لأن :

$$M = \{ HTH , HHT , THH , HHH \}$$

$$N = \{ HTT , THT , TTH , TTT \}$$

وواضح أن :

$$M \cap N = \phi$$

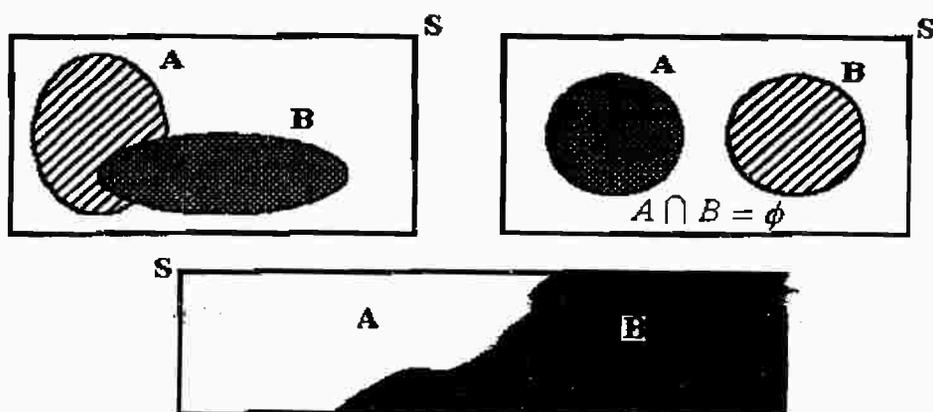
وحيث أن :

$$M \cup N = S$$

أي أن :

$$\overline{M} = N$$

ومن الممكن توضيح فضاء العينة والحوادث بأشكال فن (Venn Diagrams) ، حيث يمكن تمثيل فضاء العينة S بمستطيل وتمثيل الحوادث بدوائر أو أشكال هندسية أخرى منتظمة مثلث ، شبه منحرف وغيرها ، واقعة داخل هذا المستطيل أو بمناطق جزئية من هذا المستطيل كما يوضح الشكل (1-5) .



الشكل (1-5)

تمثيل الحوادث بأشكال فن

6.5 احتمال الحدث (Probability of the Event)

لقد أشرنا سابقاً أن الباحث الإحصائي يهتم عادةً بالوصول إلى قرارات أو استنتاجات من التجارب التي يجريها ، ويهتم بأن يكون استنتاجه أو قراره معقولاً إلى درجة ما ، لذا ينبغي أن يلم بالقواعد الأساسية لمفهوم الاحتمال .

ولأجل ذلك ندرس العبارات التي عادة ما نسمعها يومياً مثل احتمال فوز فريق بكرة القدم على فريق آخر ضمن بطولة الدوري هو 0.7 . واحتمال أن يكون المولود القادم ذكراً هو 0.6 ، أو احتمال أن يتعين في وظائف أكثر من نصف خريجي العام الحالي هو 0.4 .

إن كل من العبارات السابقة تعبر عن نتيجة غير مؤكدة لتجربة إحصائية معينة ، لكن فهمنا لطبيعة التجربة واعتمادنا على معلومات سابقة مكونة من دراستنا لمجموعة بيانات إحصائية حول مثل هذه التجربة يجعلنا على درجة من اليقين نتيج لنا الحكم بالنتيجة المقبلة . لذا سنقوم بذكر ثلاث تعاريف لمفهوم الاحتمال تعتمد جميعها على مفهوم فضاء العينة S والحدث A .

7.5 التعريف التقليدي للاحتمال (Probability's Classical Definition)

أشرنا سابقاً أن نظرية الاحتمالات هي نظرية دراسة التجارب العشوائية وقد بدأت من الناحية التاريخية بدراسة بعض ألعاب الحظ مثل الروليت والورق ، فإذا رمي حجر النرد في الهواء فمن المؤكد أنه سوف يسقط على الأرض ولكن ليس من المؤكد مثلاً أن العدد 6 سوف يظهر ، ولكن إذا فرضنا أننا كررنا هذه التجربة في رمي حجر النرد وأن S هو عدد مرات النجاح أي

عدد مرات ظهور العدد 6 ، وأن n هو عدد رميات حجر النرد فقد لوحظ تجريبياً أن النسبة $f = S / n$ والتي تسمى بالتكرار النسبي تصبح مستقرة في المدى الطويل أي أنها تقترب من نهاية ما ، حيث يعتبر هذا الاستقرار هو أساس نظرية الاحتمالات .

ولقد عرف الاحتمال P لحدث A كلاسيكياً كما يلي : أن كان الحدث A يمكن أن يقع بطرق عددها n من بين طرق كلية عددها s بشرط أن تكون لهذه الطرق نفس الفرصة في الوقوع فإن :

$$P(A) = \frac{s}{n}$$

فمثلاً عند ألقاء حجر النرد فإن الأعداد الفردية يمكن أن تقع بثلاث طرق من ست طرق لها نفس فرصة الوقوع ، إذ أن $P = 3/6 = 1/2$. وهذا التعريف التقليدي أو الكلاسيكي للاحتمال هو بالضرورة تعريف دائري ، إذ أن تعبير له نفس فرصة الظهور هو تعبير له نفس الاحتمال .

وعليه عندما تكون النتائج الأولية لإحدى المحاولات أو تجارب الصدفة محدودة العدد وتكون متفقرين على أنها متساوية الوقوع (Equally Likely) أي يكون لها نفس الفرصة في الوقوع فإننا نخصص لكل حدث مثل (A) عدداً نسبيته احتمال وقوع أو نجاح A كما يلي :

$$\text{احتمال وقوع } (A) = \frac{\text{عدد النتائج الأولية التي يتكون منها}}{\text{عدد النتائج الأولية في التجربة}}$$

أو :

$$P(A) = \frac{M}{M + N} \dots\dots\dots(1-5)$$

حيث إن :

$P(A)$ - احتمال وقوع الحدث (A)

M - عدد النتائج الأولية التي يتكون منها الحدث (A) .

N - عدد النتائج الأولية التي لا يتكون منها الحدث (A) .

أما الحدث الذي يتكون من النتائج الأولية التي لا تدخل في (A) ، فإننا نسميه الحدث (\bar{A}) ومن الواضح أن وقوعه يعني الفشل أو عدم حصول الحدث وبذلك يكون :

$$\text{احتمال وقوع } (\bar{A}) = \frac{\text{عدد النتائج الأولية التي لا تدخل في } A}{\text{عدد النتائج الأولية في التجربة}}$$

لو :

$$P(\bar{A}) = \frac{N}{M + N} \dots\dots\dots(2-5)$$

ومن تعريف احتمال وقوع (A) واحتمال عدم وقوعه نجد المسلمة التالية :

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \dots\dots\dots(3-5)$$

ومن هذه المسلمة نحصل على النتيجتين التاليتين :

النتيجة الأولى : احتمال وقوع حادث مستحيل الوقوع يساوي صفر .

النتيجة الثانية : احتمال وقوع حادث مؤكد الوقوع يساوي الواحد .

مثال (9-5)

عند سحب ورقة لعب من أوراق الكوتشينة التي عددها 52 فإن احتمال وقوع الحادث A الذي يقع إذا فقط إذا كانت الورقة المسحوبة دينارية هو :

$$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

كما أن احتمال وقوع الحادث B الذي يقع إذا فقط إذا كانت الورقة المسحوبة تحمل الرقم 5 هو:

$$P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

أما احتمال أن لا تكون الورقة المسحوبة تحمل الرقم 5 :

$$P(\bar{B}) = \frac{40}{52} = \frac{10}{13}$$

8.5 التعريف الإحصائي للاحتمال

(Statistical Definition of Probability)

أن ما يعيب التعريف الكلاسيكي التقليدي للاحتمال أن عبارة " كل منها له نفس الفرصة في الظهور " هي عبارة غامضة نوعاً ما ، وقد تبدو أنها مرادفة للعبارة " كل منها له نفس الاحتمال " وبذلك نكون قد عرفنا الاحتمال بدلالة نفسه . ولهذا فإن البعض يلجأ عادةً إلى إعطاء الاحتمال تعريفاً إحصائياً بحتاً .

وهذا كله ما يقودنا إلى التعريف الذي أشرنا إليه سابقاً وهو إن احتمال حدث ما هو التكرار النسبي لوقوع هذا الحدث عندما يكون عدد المشاهدات كبيراً جداً أي أنه نهاية التكرار النسبي لوقوع هذا الحادث عندما يؤول عدد المشاهدات إلى المالانهاية .

مثال (5-10)

إذا أقيت قطعة نقود 1000 مرة وحصلنا على 529 صورة فإن التكرار النسبي للصورة هو :

$$\frac{529}{1000} = 0.529$$

ثم إذا قذفنا قطعة النقود 1000 مرة أخرى وحصلنا على 493 صورة فإن التكرار النسبي للصورة في 2000 رمية هو :

$$\frac{493 + 529}{2000} = 0.511$$

وإذا قمنا بتكرار التجربة مرات ومرات فإننا نقرب أكثر فأكثر من عدد نسميه احتمال ظهور الصورة في رمية واحدة لقطعة النقود .

ونلاحظ هنا أننا نقرب من العدد 0.5 ، بعد إجراء كل تجربة ، ولكن للوصول إلى عدد دقيق يجب إعادة التجربة مرات ومرات .

9.5 التعريف الحديث للاحتمال

(The Modern Definition of Probability)

إن التعريف الإحصائي يبدو مفيداً من الناحية العملية ، لكنه صعب التحقيق من وجهة النظر الرياضية لأنه يتطلب تكرار التجربة عدداً كبيراً جداً من المرات للوصول إلى نهاية للتكرار النسبي وقد لا نصل أحياناً إلى هذه النهاية . كما إن اعتماد التعريف التقليدي يتطلب فضاء عينة عناصرها كلها متساوية الاحتمال .

إن التعريف الحديث للاحتمال هو فرضي بحت (Purely Axiomatic) حيث يجب أن نذكر أولاً تعريف التابع الاحتمالي (Probability Function) لفضاء عينة فنة . فمثلاً لتكن S فضاء عينة ما ولتكن P هي دالة من مجموعة أجزاء من S إلى مجموعة الأعداد الحقيقية R فإن P يسمى تابعاً احتمالياً إذا حققت الشروط التالية :

مهما يكن :

$$A \leq S$$

فإن :

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

وإن :

$$P(S) = 1$$

من أجل حدثين متنافيين مثل A و B فإن :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \dots \dots \dots (4 - 5)$$

وذلك بفرض S فضاءاً منتهياً ، أي نو عدد محدد من العناصر ، واعتماداً على التعريف السابق وبفرض S ذات عدد n من العناصر وهي x_1, x_2, k, x_n ، ويمكن أن نستنتج أن :

$$P(S) = \sum_{i=1}^n P(x_i) \dots\dots\dots (5-5)$$

فإذا كانت جميع الحوادث الابتدائية $\{x_i\}$ متساوية الاحتمال فإن :

$$P(x_i) = \frac{1}{n} \dots\dots\dots (6-5)$$

وبالتالي فإن احتمال حدث A عدد عناصره k هو :

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

كما ينتج مباشرة من هذا التعريف أن :

$$P(\phi) = 0$$

مثال (11-5)

عند إلقاء قطعة نقود متوازنة مرتين متتاليتين أوجد احتمال ظهور صورة واحدة على الأقل .

الحل :

بما أن قطعة النقاد متوازنة فإن احتمال ظهور الكتابة وظهور الصورة متساويا الإمكانية في الظهور أي إن فضاء العينة هو :

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

وعناصر S كلها متساوية الاحتمال ، إن الحدث الذي يقع إذا ظهرت صورة واحدة على الأقل هو :

$$A = \{HH, HT, TH\}$$

وبالتالي فإن :

$$P(A) = \frac{3}{4}$$

مثال (12-5)

عائلة لديها ثلاثة أطفال ، ما احتمال أن يكون عددهم صبيان وبنت علماً أن للبنيت وللصبي نفس الفرصة بالولادة .

الحل :

نقوم بوضع فضاء العينة S حيث :

$$S = \{GGG, GGB, GBG, BGG, GBB, BGB, BBG, BBB\}$$

إن الحدث المطلوب هو :

$$A = \{GBB, BBG, BGB\}$$

وبالتالي احتمال أن يكون لهذه العائلة صبيان وبنت :

$$P(A) = \frac{3}{8}$$

مثال (5-13)

ألقي زهر نرد بطريقة ما بحيث أن فرصة ظهور العدد الزوجي تساوي ضعف فرصة ظهور العدد الفردي . ما هو احتمال الحدث A الذي يقع إذا فقط إذا كان الناتج أقل من 4 ، وما هو احتمال الحدث B الذي يقع إذا فقط إذا كان الناتج يقبل القسمة على 3 ، ثم ما هو احتمال الحدث C الذي يقع إذا فقط إذا كان الناتج عدداً زوجياً .

الحل :

إن فضاء العينة S هو :

$$S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

فإذا فرضنا أن فرصة ظهور العدد الفردي هي x ، فإن احتمال ظهور العدد الزوجي ستكون $2x$ وبالتالي فإن :

$$P(S) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\})$$

$$1 = x + 2x + x + 2x + x + 2x \Rightarrow \therefore 1 = 9x \rightarrow \therefore x = \frac{1}{9}$$

وعلى هذا الأساس فإن الحدث هو :

$$A = \{ 1, 2, 3 \}$$

واحتماله هو :

$$P(A) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\})$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

أما الحدث B أي ظهور عدد يقبل القسمة على ثلاثة فهو :

$$B = \{ 3, 6 \}$$

واحتماله هو :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(\{3\}) + P(\{6\}) \\ &= \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

والحدث C أي إذا كان الناتج عدد زوجي هو :

$$C = \{ 2, 4, 6 \}$$

واحتماله هو :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) \\ &= \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

10.5 احتمال اجتماع حدثين

(Probability of the Union of Two Events)

مبرهنة 1:

ليكن A و B حدثين غير متنافيين أي أن $A \cap B \neq \emptyset$ فإن :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \dots\dots\dots(7-5)$$

البرهان :

إن الحدث A والحدث $B - (A/B)$ حدثان متافيان فإن :

$$A \cup B = A \cup [B - (A/B)]$$

وبالتالي فإن:

$$(1) P(A \cup B) = P(A) + P[B - (A/B)]$$

ولكن A/B و $B - (A/B)$ حدثان متافيان :

$$B = (A/B) \cup [B - (A/B)]$$

إن :

$$(2) P(B) = P(A/B) + P[B - (A/B)]$$

$$\therefore P[B - (A/B)] = P(B) - P(A/B)$$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A/B)$$

مثال (5 - 14)

سحبت ورقة لعب من شدة عدد أوراقها 52 . ما هو احتمال أن تكون
دينارية أو ملك .

الحل :

ليكن A الحدث الذي يقع إذا فقط إذا كانت الورقة المسحوبة دينارية ، و B الحادث الذي يقع إذا فقط إذا كانت الورقة المسحوبة هي ملك وبالتالي فإن A/B هو الحادث الذي يقع إذا فقط إذا كانت الورقة المسحوبة ملك ديناري .

أن احتمال الحدث A هو :

$$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

وا احتمال الحدث B هو :

$$P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

وأن :

$$P(A/B) = \frac{1}{52}$$

وعلى هذا الأساس فإن :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A/B)$$

$$\therefore P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{13} - \frac{1}{52} = \frac{13+4-1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

11.5 الاحتمالات المركبة (Compound Probabilities)

في كثير من الأحيان قد تتكون التجربة من تجربتين بسيطتين ، فمثلاً قد نقوم عند إجراء التجربة البسيطة رمي قطعة نقود ، بأجراء التجربة البسيطة رمي حجر النرد ، وبذلك نحصل على التجربة المركبة أو الاحتمالية المركبة وهي " رمي قطعة نقود ورمي حجر النرد بنفس الوقت " ، وإذا رمزنا للتجربة البسيطة الأولى بالرمز C_1 ، والتجربة البسيطة الثانية بالرمز C_2 فإن التجربة المركبة تكون هي الزوج المرتب (C_2, C_1) . وهنا يجب أتباع القواعد التالية :

القاعدة الأولى :

إذا أمكن أن يكون للتجربة C_1 نتائج عددها n_1 ، والتجربة C_2 نتائج عددها n_2 ، فإنه يكون للتجربة المركبة C_1, C_2 نتائج عددها $n_2 \times n_1$. فمثلاً للتجربة " رمي قطعة نقود " نتيجتان هما " صورة وكتابة " وللتجربة رمي زهر النرد 6 نتائج فإذا رمزنا للصورة بالرمز x والكتابة بالرمز y فإن للتجربة المركبة نتائج عددها 6×2 وهي :

$(x,1), (x,2), (x,3), (x,4), (x,5), (x,6)$

$(y,1), (y,2), (y,3), (y,4), (y,5), (y,6)$

حيث أن $(x,1)$ تعني الصورة على ظهر قطعة النقود والعدد 1 على الحجر ، وهكذا $(y,2)$ يعني ظهور الكتابة على ظهر قطعة النقود والعدد 2 على الحجر . كذلك إذا ألقى حجراً نرد زهر معاً فإن لهذه التجربة المركبة نتائج عددها 36 وهي موضحة في الجدول (1-5) .

جدول (1-5)

نتائج التجربة المركبة من رمي حجرى نرد زهر

| | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| (1, 6) | (1, 5) | (1, 4) | (1, 3) | (1, 2) | (1, 1) |
| (2, 6) | (2, 5) | (2, 4) | (2, 3) | (2, 2) | (2, 1) |
| (3, 6) | (3, 5) | (3, 4) | (3, 3) | (3, 2) | (3, 1) |
| (4, 6) | (4, 5) | (4, 4) | (4, 3) | (4, 2) | (4, 1) |
| (5, 6) | (5, 5) | (5, 4) | (5, 3) | (5, 2) | (5, 1) |
| (6, 6) | (6, 5) | (6, 4) | (6, 3) | (6, 2) | (6, 1) |

حيث أن x , y تعني ظهور العدد x على الزهر الأول والعدد y على الزهر الثاني .

القاعدة الثانية :

إذا كان للتجربة C_1 نتائج أولية متساوية فرصة الوقوع عددها n_1 وللتجربة C_2 نتائج متساوية فرصة الوقوع عددها n_2 فإن النتائج الأولية للتجربة المركبة " C_2 , C_1 " والتي عددها $n_2 \times n_1$ تكون أيضا متساوية في فرص الحدوث والوقوع .

مثال (5 - 15)

يلقى لاعب حجرى نرد معاً مرة واحدة . أوجد احتمال أن يحصل على مجموع أقل من 4 أو أكثر من 10 .

الحل :

يكون المجموع أقل من 4 أو أكثر من 10 إذا ظهر على أحد الوجهين العلويين للحجرين عدنان كما في أحد الحالات الستة المبينة في الجدول (2-5) .

الجدول (2-5)

| | | | | | | |
|----|----|----|---|---|---|------------------------|
| 6 | 6 | 5 | 2 | 1 | 1 | العدد على الحجر الأول |
| 6 | 5 | 6 | 1 | 2 | 1 | العدد على الحجر الثاني |
| 12 | 11 | 11 | 3 | 3 | 2 | المجموع |

عدد النتائج الأولية للتجربة يساوي $6 \times 6 = 36$ ، ومن هذه النتائج المتساوية الإمكان حسب القاعدة السابقة توجد 6 احتمالات ينجح فيها الحادث " المجموع أقل من 4 أو أكثر من 10 " . ومنه يكون الاحتمال المطلوب يساوي :

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

12.5 قوانين الاحتمالات (Probabilities Laws)

1.12.5 قانون جمع الاحتمالات (Addition Law)

تعريف

يقال للحدين A و B أنهما مانعان بالتبادل (Mutually Exclusive) إذا كان وقوع أحدهما يتنافى مع وقوع الآخر . ومن الواضح أن هذا يعني أن

الحدث A والحدث B يسميان مانعين بالتبادل إذا كانت النتائج التي يتكون منها A لا تتداخل في النتائج التي يتكون منها B .

فمثلاً إذا ألقى زهر النرد فإن النتائج $(3,1)$ لا تتداخل مع النتائج $\{6,4,2\}$ لذا فإن الحدث $\{odd\ number\}$ أو عدد فردي والحدث $\{even\ number\}$ أو عدد زوجي مانعان بالتبادل .

ومن الواضح أنه إذا كان A و B مانعان بالتبادل فإن عدد النتائج في الحدث $A \cup B$ أي $A \vee B$ ، تعني A أو B وهي أحد أدوات الربط المنطقية يساوي مجموع عدد النتائج في A وعدد النتائج في B . ففي مثال إلقاء حجر النرد نجد أن عدد نتائج الحادث فردي أو زوجي يساوي $3 + 3 = 6$ ومن هذا سوف ينتج أن :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \dots\dots\dots (8 - 5)$$

أما إذا كان الحدثين غير مانعين بالتبادل فإن :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \dots\dots\dots (9 - 5)$$

13.5 الاحتمال المشروط (Conditional Probability)

ذكرنا أنه توجد في أساس احتمال مجموعة معينة من الظروف . وأن لم تكن هناك أية ظروف أخرى عند حساب الاحتمال لحدث ما مثل A ما عدا الظروف الأساسية المذكورة سابقاً فإن هذه الاحتمالات تسمى عندئذ بالاحتمالات اللاشرطية (Unconditional Probability) .

ولكن نضطر في بعض الحالات إلى إيجاد الاحتمال بشرط إضافي ينحصر في وقوع الحدث B . وتسمى مثل هذه الاحتمالات بالاحتمالات الشرطية (Conditional probability) ، ويرمز لها بالرمز $P(A / B)$ وهذا يعني احتمال الحدث A بشرط وقوع الحدث B . وفي الحقيقة عند الحديث بصورة دقيقة ، فإن الاحتمالات اللاشرطية هي أيضاً احتمالات شرطية لأنه عند بناء نظرية الاحتمالات أفترض وجود مجموعة معينة ثابتة من الشروط .

نفرض أن شخصاً ألقى زهر نرد ثم أخبرنا أن العدد الذي ظهر زوجي ، فما هو احتمال أن يقبل هذا العدد القسمة على 3 . نفرض أن الحدث A هو الحدث الذي يمثل {عدد يقبل القسمة على 3} ، وليكن B هو الحدث الذي يمثل {عدد زوجي} ، والسؤال المطروح ما هو احتمال وقوع الحادث A مع العلم بأن B قد وقع .

وسنرمز لهذا الاحتمال بالرمز $P(A/B)$ ويعني احتمال A بفرض أن الحدث قد وقع B ، أو بعبارة أخرى الاحتمال المشروط للحدث A عند وقوع B ونسميه احتمالاً شرطياً .

فمثلاً عند إلقاء حجر النرد نجد أن الحدث {عدد زوجي} له النتائج 2, 4, 6، وعددها 3 ، والحدث {يقبل القسمة على 3} له النتائج 3, 6 .

إذن الحادث {عدد زوجي ويقبل القسمة على 3} له النتيجة 6 وعددها 1 ، فعلى فرض تساوي فرص الوقوع فإن :

$$P(\text{زوجي} | \text{يقبل القسمة على 3}) = \frac{\text{عدد نتائج } \{\text{عدد زوجي ويقبل القسمة على 3}\}}{\text{عدد نتائج } \{\text{عدد زوجي}\}} = \frac{1}{3}$$

وبصورة عامة فإنه إذا كان A و B هما حادثين غير مانعين بالتبادل أو غير متنافيين كما تم الإشارة سابقاً فإن :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \dots\dots\dots(10-5)$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) \quad \dots\dots\dots(11-5)$$

مثال (5-16)

توجد ثلاثة أكياس متشابهة بها كرات بعضها أبيض والآخر أسود . في الكيس الأول 30 كرة وفي الثاني 20 كرة وفي الثالث 10 كرات . عدد الكرات البيضاء في كل كيس 5 بالضبط . وقد اختير أحد الأكياس كيفما اتفق وسحبت منه كرة . أوجد احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الكيس الأول وتكون بيضاء في نفس الوقت .

الحل:

احتمال أن تكون الكرة من الكيس الأول يساوي $\frac{1}{3}$ ، وذلك بفرض تساوي فرص السحب لكل من الأكياس الثلاثة . أما احتمال سحب كرة بيضاء من الكيس الأول فيساوي :

$$\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

على هذا الأساس فإن احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الكيس الأول وبيضاء هو :

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$$

مثال (5-17)

في إحدى الكليات الهندسية وجد أن 25% من الطلبة رسبوا في مادة مقاومة المواد ، ووجد أيضاً أن 15% من الطلبة رسبوا في مادة الرياضيات ، وأن 10% رسب في مادتي مقاومة المواد والرياضيات . إذا اختير أحد الطلبة بطريقة عشوائية فأوجد ما يلي :

- 1- احتمال أن يكون راسباً في الرياضيات إذا كان راسباً في مقاومة المواد .
- 2- احتمال أن يكون راسباً في مقاومة المواد إذا كان راسباً في الرياضيات .
- 3- احتمال أن يكون راسباً في المادتين أي في مقاومة المواد والرياضيات .

الحل :

نفرض أن الحدث A هو الرسوب في مادة مقاومة المواد . والحدث B هو الرسوب في مادة الرياضيات ، فيكون لدينا :

$$P(A)=0.25$$

$$P(B)=0.15$$

$$P(A \cap B)=0.10$$

أولاً : احتمال أن يكون الطالب راسباً في مقاومة المواد علماً بأنه راسباً في الرياضيات هو احتمال مشروط يمكن الحصول عليه كما يلي :

$$\begin{aligned} P(A/B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{0.10}{0.15} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

ثانياً : احتمال أن يكون الطالب راسباً في الرياضيات علماً بأنه راسب في مادة مقاومة المواد هو :

$$\begin{aligned}P(B/A) &= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{0.10}{0.25} = \frac{2}{5}\end{aligned}$$

ثالثاً : أما احتمال أن يكون راسباً في المادتين فهو :

$$\begin{aligned}P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0.25 + 0.15 - 0.10 \\ &= 0.3\end{aligned}$$

أن هذا المثال يقودنا إلى تعريف نظرية الضرب للاحتمال المشروط ، ففي العلاقة المستخدمة في حل المثال السابق نجد أن :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

إذا ضربنا الطرفين في الوسطين نحصل على العلاقة التالية :

$$P(A \cap B) = P(B) P(A/B)$$

وتسمى هذه العلاقة بنظرية الضرب للاحتمال المشروط ، ويمكن تعميم هذه النظرية بالاستنتاج الرياضي التالي :

لأي مجموعة من الإحداث مثل A_1, A_2, \dots, A_n :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \\ = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2) \dots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

مثال (18-5)

صندوق يحتوي على 12 كرة سلة ، منها 4 كرات معيبة ، إذا اختيرت بطريقة عشوائية ثلاث كرات من هذا الصندوق واحدة تلو الأخرى ، أوجد الاحتمال P أن تكون الثلاث كرات سليمة .

الحل :

أن احتمال أن تكون الكرة الأولى سليمة يساوي $8/12$ ، حيث أن هناك 8 كرات سليمة من بين 12 كرة موجودة في الصندوق . إذا كانت الكرة الأولى سليمة فإن احتمال أن تكون الكرة الثانية سليمة يساوي $7/11$ حيث أن هناك 7 كرات فقط سليمة من بين 11 كرة باقية في الصندوق .

إذا كانت الكرة الأولى والكرة الثانية سليمتين فإن احتمال أن تكون الكرة الأخيرة سليمة هو $6/10$ حيث أن هناك 6 كرات فقط سليمة من بين 10 وحدات باقية في الصندوق . أنن باستخدام نظرية حاصل الضرب للاحتتمال المشروط نجد أن :

$$P = \frac{8}{12} \times \frac{7}{11} \times \frac{6}{10} = \frac{14}{55}$$

أن دراسة الاحتمال المشروط ونظرية الضرب للاحتمال المشروط تقودنا إلى دراسة التجزيئات ونظرية "العالم ببيز" والتي تتضمن ما يلي :

نفرض أن الأحداث A_1, A_2, \dots, A_n تمثل مجموعات جزئية لفضاء العينة S ، أي أن الأحداث متنافية واتحادهما يعطينا فضاء العينة S ، ونفرض أن الحدث B هو أي حدث آخر فيكون :

$$\begin{aligned} B &= S \cap B = (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \cap B \\ &= (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B) \end{aligned}$$

وبما أن الأحداث $A_i \cap B$ متنافية أنن :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

وباستخدام نظرية حاصل الضرب للاحتمال المشروط نجد أن :

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + \dots + P(A_n)P(B/A_n)$$

ومن ناحية أخرى لكل i يكون الاحتمال المشروط للحدث A_i عند وقوع B هو :

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

وللوصول إلى نظرية العالم ببيز سوف نقوم بالتعويض في هذه المعادلة عن $P(B)$ من العلاقة السابقة ونعوض عن $P(A_i \cap B)$ بالمقدار $P(A_i)P(B/A_i)$.

نظرية بيز :

نفرض أن الأحداث A_1, A_2, \dots, A_n تمثل مجموعات جزئية لفضاء العينة S ، أي تجزئتي لفضاء العينة S ، ونفرض أن الحدث B هو أي حدث آخر فيكون لكل i :

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i)P(B / A_i)}{P(A_1)P(B / A_1) + P(A_2)P(B / A_2) + \dots + P(A_n)P(B / A_n)}$$

أن هذه النظرية تعتبر من النظريات والقواعد الهامة في علم الاحتمالات . والمخطط العام لاستخدام هذه النظرية في حل المسائل العملية هو أن نفرض أنه يمكن أن يجري الحدث B في ظروف مختلفة ، ويمكن لطبيعتها وضع n من الفرضيات A_1, A_2, \dots, A_n . ولسبب من الأسباب عرفنا الاحتمالات $P(A_i)$ ، ونعلم أيضا أن الفرضية A_i تكسب الحدث B احتمالا مقداره $P(B / A_i)$. وأجريت تجربة وقع فيها الحدث B فإن هذا يقودنا في النهاية إلى إعادة تقدير احتمالات الفرضيات A_i ، حيث تقوم نظرية بيز بحل هذه المسألة من الناحية الكمية وأن الأمثلة الآتية سوف توضح لنا أهمية هذه النظرية في التطبيقات العملية .

مثال (5-19)

في أحد المراكز الخاصة بالتدريب البدني وجد أن 4% من الطلبة الرجال و 1% من الطلبة النساء أطول من 1.75m . وكان 60% من طلبة هذا المركز من النساء . فإذا اختير أحد الطلبة بطريقة عشوائية ووجد أنه أطول من 1.75m . أوجد احتمال أن يكون ها الطالب امرأة .

الحل :

نفرض أن الحدث A هو أطول من 1.75m ، والمطلوب هو إيجاد احتمال أن يكون الطالب المختار امرأة بمعلومية أنه أطول من 1.75m أي المطلوب إيجاد $P(W/A)$. من نظرية بيبز يمكننا إيجاد الاحتمال المطلوب حيث :

$$\begin{aligned} P(W / A) &= \frac{P(W)P(A / W)}{P(W)P(A / W) + P(M)P(A / M)} \\ &= \frac{(0.60)(0.02)}{(0.60)(0.02) + (0.40)(0.40)} \\ &= \frac{3}{11} = 0.27 \end{aligned}$$

وهذا هو احتمال أن يكون الطالب المختار بطريقة عشوائية امرأة وأطول من 1.75m .

مثال (20-5)

في شركة صناعية كبرى متخصصة بصناعة الرقائق الكترونية تنتج ثلاث الآلات A , B , C على التوالي 60% ، 30% ، 4% من الإنتاج الكلي للشركة . فإذا كان نسبة إنتاج الرقائق المعيبة لهذه الآلات هي على التوالي 2% ، 3% ، 4% . فإذا اختيرت رقيقة الكترونية بطريقة عشوائية ووجدت أنها معيبة . أوجد احتمال أن تكون هذه الرقيقة من إنتاج الآلة C .

الحل :

نفرض أن الحدث M هو أن تكون الرقيقة معيبة . والمطلوب إيجاد أن الرقيقة من إنتاج الآلة C ، أي إيجاد $P(C/M)$. باستخدام نظرية بيبز نجد أن :

$$\begin{aligned}
 P(C/M) &= \frac{P(C)P(M/C)}{P(A)P(M/A) + P(B)P(M/B) + P(C)P(M/C)} \\
 &= \frac{(0.10)(0.04)}{(0.60)(0.02) + (0.30)(0.30) + (0.10)(0.04)} \\
 &= \frac{4}{25} = 0.16
 \end{aligned}$$

مثال (21-5)

ثلاثة صناديق A , B , C ، في الصندوق الأول A ثلاثة كرات حمراء وخمسة كرات بيضاء ، في الصندوق الثاني B كرتان من اللون الأحمر وكرة بيضاء ، وفي الصندوق الثالث C كرتان من اللون الأحمر وثلاثة كرات من بيضاء . إذا اختير صندوق بطريقة عشوائية وسحبت منه كرة ووجد أن الكرة حمراء فما هو احتمال أن تكون من الصندوق الأول A .

الحل :

من معطيات السؤال نجد أننا نبحث عن احتمال الصندوق A بمعلومية أن الكرة حمراء . أي أن المطلوب إيجاد $P(A/R)$. من أجل إيجاد هذا الاحتمال أي $P(A/R)$ ، يجب علينا أولاً حساب $P(A \cap R)$ ، $P(R)$ ، أن احتمال أن يكون الصندوق الأول A قد اختير وأن تكون الكرة الحمراء قد سحبت منه يساوي :

$$\frac{1}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$$

أي أن :

$$P(A \cap R) = 1/8 = 0.125$$

وحيث أنه توجد ثلاث طرق تؤدي إلى ظهور كرة حمراء فإن احتمال $P(R)$ يمكن الحصول عليه كما يلي :

$$\begin{aligned} P(R) &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \\ &= \frac{173}{360} \\ &= 0.48 \end{aligned}$$

ومنه نجد الاحتمال المطلوب وهو $P(A \cap R)$:

$$\begin{aligned} P(A / R) &= \frac{P(A \cap R)}{P(R)} \\ &= \frac{0.125}{0.48} \\ &= 0.26 \end{aligned}$$

كما يمكن إيجاد قيمة الاحتمال المطلوب أي أن يكون الصندوق الأول A قد اختير بمعلومية أن الكرة حمراء باستخدام نظرية بييز حيث أن :

$$\begin{aligned} P(A / R) &= \frac{P(A)P(R / A)}{P(A)P(R / A) + P(B)P(R / B) + P(C)P(R / C)} \\ &= \frac{(0.33)(0.375)}{(0.33)(0.375) + (0.33)(0.6) + (0.33)(0.4)} \\ &= 0.26 \end{aligned}$$

وهكذا حصلنا على نفس قيمة الاحتمال باستخدام نظرية بييز .

14.5 الأحداث المستقلة (Independent Events)

يقال لمجموعة من الأحداث بأنها مستقلة إذا كان وقوع أحدهما أو عدم وقوعه لا يؤثر في وقوع أي من باقي الأحداث . ومعنى هذا أنه يقال أن الحدث B مستقل عن الحدث A إذا كان احتمال حدوث B لا يتأثر بحدوث أو عدم حدوث A أو بمعنى آخر إذا كان احتمال B يساوي الاحتمال المشروط للحدث B عند وقوع الحدث A : $P(B/A)$. وبالتعويض عن قيمة $P(B/A)$ بالمقدار $P(B)$ في نظرية حاصل الضرب :

$$P(A \cap B) = P(A) P(B/A)$$

ومنه نحصل على :

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

وسوف نستخدم هذه العلاقة في التعريف الرياضي للاستقلال الحوادث حيث :

* يقال للحدثان A , B أنهما مستقلان إذا تحقق الشرط :

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

وإذا لم يتحقق هذا الشرط قيل أنهما غير مستقلين .

يتضح من التعريف مباشرة أن الحادثين A و B مستقلان إذا كان :

$$P(A/B) = P(B).P(A) \dots\dots\dots(12-5)$$

وذلك لأن :

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) = P(B) \cdot P(A)$$

كما نلاحظ أن الشرطين :

$$P(B/A) = P(B) \quad \text{و} \quad P(A/B) = P(A)$$

متكافئان لأن :

$$P(A/B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$$

فأحدهما يقضي بحدوث الآخر أي عند التعويض عن قيمة أحدهما في المعادلة أعلاه سوف نجد قيمة الآخر .

مثال (22-5)

صندوق فيه 20 مصباح كهربائي 5 منها تالفة . سحبنا عشوائياً مصباحين على التوالي دون إعادة . ما هو احتمال أن يكون كلا المصباحين تالفين .

الحل :

نفرض أن الحادث A الذي يقع إذا فقط إذا كان المصباح الأول تالفاً ،
ومن الواضح أن :

$$P(A/B) = P(A)$$

لأنه لا علاقة بين تلف المصباح الأول وتلف المصباح الثاني إذن يتحقق الشرط :

$$P(A/B) = P(B) \cdot P(A)$$

وبما أن :

$$P(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \quad , \quad P(B) = \frac{4}{19}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(A/B) &= P(A) \cdot P(B) \\ &= \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{4}{19}\right) = \frac{1}{19} \end{aligned}$$

لاحظ أنه لو كان المصباح بعد سحبه يعاد إلى الصندوق ثم يعاد إلى السحب ثانية بعد إعادة ترتيب المصابيح عشوائياً فإنه عندئذ نحصل على :

$$P(A) = \frac{1}{4} \quad , \quad P(B) = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(A/B) &= P(A) \cdot P(B) \\ &= \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

مثال (5-23)

في تجربة إطلاق على هدف ما إذا كان احتمال أن يصيب الشخص الأول A يساوي 0.25 ، واحتمال أن يصيب الشخص الثاني B هو 0.4 . ما هو احتمال إصابة الهدف إذا صوب كل من A ، B نحو الهدف مرة واحدة .

الحل :

من معطيات السؤال نجد أن لدينا :

$$P(A) = 0.25$$

$$P(B) = 0.40$$

ونلاحظ أيضا أن احتمال أن يصيب A أو احتمال أن يصيب B لا يتأثر بنتيجة الآخر ، وذلك يعني أن الحدث A يصيب الهدف مستقل عن الحدث B يصيب الهدف أي أن :

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

ومنه نجد أن :

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A) P(B) \\ &= 0.25 + 0.4 - (0.25 \times 0.4) \\ &= 0.55 \end{aligned}$$

وهكذا نجد أن احتمال إصابة الهدف إذا صوب كل من A و B نحو الهدف مرة واحدة يساوي 0.55 .

مثال (5-24)

إذا كان احتمال أن يعيش رجل 15 سنة أخرى هو 0.25 ، واحتمال أن تعيش زوجته 15 سنة أخرى هو 0.33 أوجد :

- 1- احتمال أن يعيش الزوج والزوجة 15 سنة أخرى .
- 2- احتمال أن يعيش احدهما على الأقل 15 سنة أخرى .
- 3- احتمال أن يموت الاثنان خلال الخمسة عشر سنة .
- 4- أن تعيش الزوجة 15 سنة .

الحل :

نفرض أن الحدث A هو أن يعيش الرجل 15 سنة ، والحدث B أن تعيش الزوجة 15 سنة وعليه فإن :

$$P(B) = 0.33 \quad , \quad P(A) = 0.25$$

1- لإيجاد احتمال أن يعيش الزوج والزوجة 15 سنة أخرى يجب علينا البحث عن $P(A \cap B)$ ، وحيث أن الحدثان مستقلان فإن :

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) P(B) \\ &= 0.25 \times 0.33 = 0.083 \end{aligned}$$

2- احتمال أن يعيش أحدهما على الأقل يعني أنه يجب البحث عن $P(A \cup B)$ حيث :

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0.25 + 0.33 - 0.083 = 0.49 \end{aligned}$$

3- أما احتمال أن يموت الاثنان خلال 15 سنة فيعني أنه يجب إيجاد $P(A^c \cap B^c)$ حيث أن :

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 0.25 = 0.75$$

$$P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - 0.33 = 0.66$$

وحيث أن A^c ، B^c حدثان مستقلان أيضاً فإن :

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= P(A^c) P(B^c) \\ &= 0.75 \times 0.66 = 0.49 \end{aligned}$$

4- أما احتمال أن تعيش الزوجة 15 سنة فيعني أنه يجب البحث عن $P(A^c \cap B)$ ، وحيث أن $P(A^c) = 0.75$ ، والحدثان A^c ، B مستقلان فإن :

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(A^c) P(B) \\ &= 0.75 \times 0.33 = 0.247 \end{aligned}$$

مثال (5-25)

في مسابقة رماية للسيدات على هدف متحرك إذا كان احتمال أن تصيب ثلاث سيدات هو 0.15 ، 0.25 ، 0.35 على التوالي . وكان كل منهم يصوب مرة واحدة على الهدف فأوجد :

- 1- احتمال أن تصيب سيدة واحدة منهم فقط الهدف .
- 2- احتمال أن تكون السيدة الأولى هي التي أصابت الهدف إذا أصيب الهدف من قبل سيدة واحدة فقط .

الحل :

نفرض أن الحدث C هو السيدة الأولى تصيب الهدف ، وأن الحدث D هو السيدة الثانية تصيب الهدف ، والحدث E هو السيدة الثالثة تصيب الهدف وعليه فإن :

$$P(C)=0.15 \quad , \quad P(D)=0.25 \quad , \quad P(E)=0.35$$

وهذه الأحداث الثلاثة مستقلة ، ونجد أيضا أن :

$$P(C^c)=0.85 \quad , \quad P(D^c)=0.75 \quad , \quad P(E^c)=0.65$$

أولاً : نفرض أن الحدث W هو حدث سيدة واحدة تصيب الهدف أنن :

$$W=(C \cap D^c \cap E^c) \cup (C^c \cap D \cap E^c) \cup (C^c \cap D^c \cap E)$$

أي أنه إذا كانت سيدة واحدة فقط قد أصابت الهدف فلا بد أن تكون الأولى فقط أي :

$$(C \cap D^c \cap E^c)$$

أو أن تكون السيدة الثانية فقط أي :

$$(C^c \cap D \cap E^c)$$

أو أن تكون السيدة الثالثة أي :

$$(C^c \cap D^c \cap E)$$

وبما أن هذه الأحداث الثلاثة متنافية فإننا نحصل على احتمال أن تصيب سيدة واحدة منهم الهدف هو :

$$\begin{aligned} P(W) &= P(C \cap D^c \cap E^c) \cup P(C^c \cap D \cap E^c) \cup P(C^c \cap D^c \cap E) \\ &= P(C)P(D^c)P(E^c) + P(C^c)P(D)P(E^c) + P(C^c)P(D^c)P(E) \\ &= (0.15)(0.75)(0.65) + (0.85)(0.25)(0.65) + (0.85)(0.75)(0.35) \\ &= 0.073 + 0.138 + 0.223 \\ &= 0.44 \end{aligned}$$

ثانياً : أما احتمال أن تكون السيدة الأولى هي التي أصابت الهدف فقط فإنه يعني أن علينا البحث عن $P(C/W)$ وهو احتمال أن تصيب السيدة الأولى الهدف بمعلومية أن سيدة واحدة قد أصابت الهدف ، وحيث أن :

$$C \cap W = C \cap D^c \cap E^c$$

هو حدث إصابة السيدة الأولى فقط للهدف ، فإن احتمال ذلك يساوي :

$$\begin{aligned} P(C \cap W) &= P(C \cap D^c \cap E^c) \\ &= 0.073 \end{aligned}$$

أما احتمال أن تصيب الهدف سيدة فقط $P(W)$ فقد تم حسابه في المطلوب الأول ويساوي 0.44 ، وعليه نجد الاحتمال المشروط والمطلوب حيث :

$$P(C \cap W) = \frac{P(C \cap W)}{P(W)}$$

$$= \frac{0.073}{0.44} = 0.17$$

مثال (5-26)

تطلق طائرة صواريخ ضد أهداف معينة ، إذا كان احتمال إصابة الهدف لهذه الصواريخ يساوي 0.4 فما هو عدد الصواريخ التي يجب إطلاقها لكي يكون احتمال إصابة الهدف المطلوب على الأقل 90% .

الحل :

نفرض أن A هو حدث إصابة الهدف ، وعليه فإن $P(A) = 0.4$ ، ومنه فإن احتمال عدم إصابة الهدف هو $P(A^c) = 0.6$. لذا لإيجاد احتمال أن يخطأ عدد من الصواريخ n هو $(0.6)^n$ ، لذلك يجب علينا أن نبحث عن أصغر عدد صحيح n بحيث يكون :

$$1 - (0.6)^n > 0.9$$

أو أن :

$$(0.6)^n < 0.1$$

$$(0.6)^1 = 0.6 , (0.6)^2 = 0.36 , (0.6)^3 = 0.21 , (0.6)^4 = 0.13 , (0.6)^5 = 0.07$$

وهكذا يجب أن يكون عدد الصواريخ اللازم إطلاقها خمسة لكي يكون احتمال إصابة الهدف على الأقل 90% .

15.5 التكرار النسبي والاحتمالات التجريبية (Relative Frequency and Empirical Probabilities)

أشرنا سابقاً إلى أنه لوحظ تجريبياً أن النسبة $f = s/n$ ، والتي تسمى التكرار النسبي تصبح مستقرة في المدى الطويل أي أنها تقترب من نهاية ما ، ويعتبر هذا الاستقرار هو أساس نظرية الاحتمالات . وأن الأمثلة التالية سوف تساعدنا على فهم فكرة الاحتمالات التجريبية .

مثال (5-27)

لندرس بعض الافتراضات التالية :

- (a) تتكون أسرة معينة من أب وأم و 4 أطفال دون سن 16 سنة .
- (b) وتعيش هذه الأسرة في قرية فيها 400 طفل دون سن 16 سنة .
- (c) وتقع هذه القرية في محافظة بها 400,000 طفل دون سن 16 سنة .

أوجد نسبة الذكور من الأطفال في كل من a , b , c في كل من الافتراضات الثلاث الموجودة .

الحل :

يمكن أن نبني الحكم على مشاهداتنا السابقة ، حيث أنه لا بد أن كلاً منا شاهد أسرة كل أطفالها من الذكور وأخرى كل أطفالها من الإناث وغيرها وعليه فإن نسبة الذكور إما أن تكون صفرًا أو 25 % أو 50% أو 75 % ، 100% ، وأخرى كل أطفالها من الإناث وغيرها .

في الافتراض الثاني لا نستطيع أن نصدق بناءً على مشاهداتنا السابقة أن يكون جميع أطفال القرية ذكوراً أو جميعهم إناثاً بل لا نستطيع أن نصدق أن نسبة الذكور من أطفال القرية هي 25 % أو 75 % ، حيث نتوقع أن تكون

نسبة الذكور واقعة بين 45% - 55% مثلاً من أطفال القرية ما لم تحدث هجرة للأطفال الذكور أو الأطفال الإناث .

وفي الافتراض الثالث إذا قيل لنا أن نسبة الذكور في المحافظة 54% أو 46% فإن ذلك سوف يكون غريباً نوعاً ما حيث أننا ننتظر أن تكون النسبة قريبة جداً من 50% أو 51% .

ومن دراستنا للإحصائيات السابقة ومن مشاهداتنا نعرف أنه كلما زاد عدد الأسر التي تأخذ بيانات عنها ، كلما اقتربت نسبة الذكور لجميع هؤلاء الأطفال من نسبة 50% أو 51% ، حيث تبدو هذه النسبة طبيعية وسوف لن تكون غريبة ، حتى ولو وجدنا فيها ابتعاداً كبيراً عن هذه القيمة بخصوص أسرة معينة .

مثال (5 - 28)

لندرس الافتراضات التالية :

- يبلغ عمر رجل معين 40 عاماً .
 - ويعيش هذا الرجل في قرية بها 75 رجلاً في نفس السن .
 - تقع القرية في محافظة بها 75,000 في نفس السن .
- فكم ننتظر أن يكون عدد الأحياء من الرجال الموجودين بعد مضي سنة في كل من الافتراضات السابقة .

الحل :

في الافتراض الأول لا نستطيع أن نجزم بشيء فقد يعيش الرجل إلى العام القادم وقد يموت قبل ذلك . وفي الافتراض الثاني لن نستغرب إذا مات واحد مثلاً من الرجال خلال سنة . ولكننا لا نتوقع موت نسبة كبيرة منهم في سنة واحدة إلا إذا حدثت كارثة .

أما في الافتراض فإننا نميل إلى الاعتقاد بأن نسبة معينة من رجال المحافظة الذين عمرهم اليوم 40 سنة تماماً سيموتون خلال سنة . فلو كانت هذه النسبة مثلاً تساوي (0.006) ، لوجدنا أن عدد الوفيات يساوي :

$$75000 \times \frac{6}{1000} = 450$$

مثال (5-29)

في أحد المعاهد المهنية العليا قام طلبة ثلاثة فصول بإجراء تجربة ، حيث قام كل طالب برمي قطعة نقود فضية في الهواء وعندما استقرت القطع تم إحصاء عدد القطع التي كسان بوجهها العلوي صورة . وقد كرر كل طالب هذه التجربة 10 مرات ، وهذا يكفي رمي الطالب قطعة نقود 100 مرة ، وكانت النتيجة كما موضحة في الجدول (5-3) .

جدول (5-3)

نتائج مشاهدة لتجارب قطعة نقود

| الفصل | عدد الطلبة | عدد الرميات | عدد الصور | نسبة الصور |
|------------|------------|-------------|-----------|------------|
| الأول | 232 | 232000 | 11821 | 50.9% |
| الثاني | 325 | 325000 | 16582 | 51.0% |
| الثالث | 152 | 152000 | 7450 | 49% |
| ثلاثة فصول | 709 | 709000 | 35853 | 50.6% |

فما الذي يمكننا أستنتاجه من هذه التجربة .

الحل :

من الواضح أنه إذا كان عدد رميات قطعة نقود من النوع الذي أجريت عليه التجربة كبيراً فإن ظهور الصورة في أعلى القطعة بعد استقرارها يميل إلى الحدوث في نصف الرميات تقريباً . وهذا ما يقودنا إلى التعريف التالي :

تعريف

إذا تعرض حدث للتجربة لعدد n من المرات وكانت نتيجة كل تجربة هي أن يقع الحادث أو لا يقع ، وكانت s هي عدد مرات وقوعه فإن النسبة $f = s/n$ تسمى التكرار النسبي (Relative Frequency) لوقوع الحدث في هذه المجموعة من التجارب أي أن :

$$\text{التكرار النسبي} = \frac{\text{عدد مرات وقوع الحدث}}{\text{عدد مرات تعرض الحدث للتجربة}} \dots\dots\dots (13-5)$$

وبين الجدول (5-4) التكرار النسبي لظهور الصورة في تجربة رمي قطعة النقود وظهور الصورة .

جدول (5 - 4)

التكرار النسبي لظهور الصورة في عدد من محاولات إلقاء قطعة النقود

| الفقرة | الفصل الأول | الفصل الثاني | الفصل الثالث | الفصول الثلاثة |
|---|-------------|--------------|--------------|----------------|
| عدد التجارب (n) | 232000 | 325000 | 152000 | 709000 |
| عدد مرات وقوع (w) | 11821 | 17450 | 16582 | 35853 |
| التكرار النسبي $\left(\frac{w}{n}\right)$ | 0.509 | 0.510 | 0.490 | 0.506 |

وقد أدت هذه الاعتبارات والافتراضات أي استباق الحدث قبل وقوعه إلى ظهور ما يسمى بنظرية التكرار والتي تنص على أنه إذا تعرض حدث لتجربة لعدة مرات فإنه يمكن أخذ قيمة التكرار النسبي كتقدير لقيمة احتمال وقوع ذلك الحدث . إن الاحتمالات بهذا المعنى تدعى " الاحتمالات التجريبية " ونلاحظ أن القيم المستنتجة تساوي تقريباً الاحتمالات القبلية التي تم عرضها سابقاً .

16.5 التوقع الرياضي (Mathematical Expectation)

قبل البدء بدراسة التوقع الرياضي يجب علينا توضيح مفهوم المتغير العشوائي (Random Variable) . نفرض أن S فضاء عينة لتجربة ما ، وأردنا تخصيص عدد معين لكل ناتج ، مثل طول عمر مصباح كهربائي بالأيام ، مجموع العددين عند إلقاء حجر الزهر وغيرها ، حيث نلاحظ مما سبق دراسته أن نواتج التجربة أي نقط المعاينة في S لا تكون أعداداً دائماً .

ويسمى مثل هذا التخصيص بشكل عام بالمتغير العشوائي ، و يرمز له بالرمز X ويعرف على أنه دالة من S إلى مجموعة الأعداد الحقيقية R ، بحيث تكون الصورة العاكسة لأي فترة من مجموعة الأعداد الحقيقة R حدثاً في فضاء العينة S . ويجب الإشارة هنا إلى أنه إذا كان فضاء العينة S فضاءً متقطعاً حيث تعرف كل مجموعة جزئية حدثاً فإن كل دالة حقيقية على S هي متغير عشوائي .

فلو كان X هو متغير عشوائي معرف على فضاء العينة S بحيث تكون صورته مجموعة منتهية $X(S)$:

$$X(S) = \{ x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \}$$

ووجدنا من $X(S)$ فضاء احتمال بتعريف احتمال x_i على أنه $P(X = x_i)$ ويكتب عادة على شكل دالة $f(x_i)$ ، وتسمى هذه الدالة f المعرفة على $X(S)$ $f(x_i) = P(X = x_i)$ بدالة التوزيع أو دالة الاحتمال المتغير X وتعطى عادة على صورة جدول وتحقق دالة التوزيع f الشروط التالية :

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n f(x_i) = 1$$

$$(2) \quad f(x_i) \geq 0$$

وكان X متغيراً عشوائياً له دالة توزيع فإن التوقع أو القيمة المتوقعة للمتغير X والذي يرمز له بالرمز $E(X)$ يعرف حسب العلاقة التالية :

$$E(X) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \dots + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i)$$

ويمكن أيضاً تعريف التوقع الرياضي $E(X)$ على أنه الوسط المرجح أو المقيم للقيم الممكنة للمتغير العشوائي ، حيث ترجح كل قيمة من المتغير باحتمالها . أن مفهوم ومعنى التوقع الرياضي أو القيمة المتوقعة ستتوضح أكثر من خلال حلول الأمثلة والتجارب التالية .

مثال (30-5)

توجد قطعة نقود معدنية مثقلة من أحد وجهيها بحيث إذا رميت مرات عديدة ظهرت الصورة في 0.3 من الرميات وظهرت الكتابة في 0.7 من الرميات . وقد أتفق A مع B على أن يرمي طفل قطعة النقود ويأخذ B من A مبلغ مقداره خمسون ديناراً إذا ظهرت الصورة ، ولا يأخذ شيئاً إذا ظهرت الكتابة فإذا أعيدت التجربة لعدة مرات فما هو متوسط المبلغ الذي يأخذه B في الرمية .

الحل :

إذا رميت قطعة النقود عدد n من المرات وكانت S كبيرة بدرجة كافية ،
يكون عدد مرات ظهور الصورة يساوي $0.3S$. إذن مجموع ما يأخذه B
يساوي $50 \times 0.3S$ ، وبالقسمة على S يكون متوسط ما يأخذه B في الرمية
الواحدة هو :

$$\frac{0.3 S \times 50}{S} = 50 \times 0.3 = 15$$

ويسمى هذا المتوسط بالقيمة المتوقعة (Expected Value) وهو المبلغ
الذي يأخذه A من B في الرمية . في هذا المثال نلاحظ ما يلي :

أولاً - للتجربة نتيجتان ممكنتان وهما :

ظهور الصورة واحتمال حدوث هذه النتيجة 0.3 أو ظهور الكتابة
واحتمال حدوث النتيجة الأخرى 0.7 .

ثانياً - ربطنا المبلغ خمسون دينار بظهور الصورة ولم نربط شيئاً
بظهور الكتابة .

ثالثاً - وجدنا أن القيمة المتوقعة للمبلغ الذي يأخذه B من A يساوي 0.3×50
أي يساوي المبلغ الذي ربطناه بظهور الصورة \times احتمال ظهور الصورة .

مثال (5-31)

في المثال السابق إذا أتفق كل من C و D على أن يرمي طفل قطعة النقود
المذكورة ويأخذ C من D مبلغ خمسون ديناراً إذا ظهرت الصورة ، ومبلغ 20
ديناراً إذا ظهرت الكتابة . فإذا أعيدت هذه التجربة مرات عديدة فما هو
متوسط المبلغ الذي يأخذه C من D في الرمية الواحدة .

الحل :

إذا رميت قطعة النقود عدد n من المرات وكانت n كبيرة يكون عدد مرات ظهور الصورة يساوي $0.3n$ وعدد مرات ظهور الكتابة يساوي $0.7n$ فإن مجموع ما يأخذه C يساوي :

$$50 \times 0.3n + 20 \times 0.7n$$

وبالقسمة على n يكون متوسط ما يأخذه C في الرمية يساوي :

$$0.7 \times 20 + 0.3 \times 50 = 14 + 15 = 29$$

إن هذا المتوسط هو ما نسميه القيمة المتوقعة وهو المبلغ الذي يأخذه C في الرمية وفي هذا المثال نلاحظ ما يلي :

أولاً - للتجربة نتيجتان ممكنتان :

ظهور الصورة واحتمال حدوث هذه النتيجة 0.3 أو ظهور الكتابة واحتمال حدوث النتيجة الأخرى 0.7 .

ثانياً - ربطنا المبلغ 50 دينار باحتمال ظهور الصورة وربطنا المبلغ 20 دينار باحتمال ظهور الكتابة .

ثالثاً - وجدنا أن القيمة المتوقعة للمبلغ الذي يأخذه C من D يساوي :

$$0.7 \times 20 + 0.3 \times 50$$

أي ما يعادل المبلغ الذي ربطناه باحتمال ظهور الصورة ضرب احتمال ظهور الصورة مضافاً إليه المبلغ الذي ربطناه باحتمال ظهور الكتابة ضرب احتمال ظهور الكتابة .

مثال (5-32)

أتفق شخصان A , B على رمي حجر نرد عادي بحيث يأخذ الشخص الأول A من الشخص الثاني B عدداً من الدنانير يساوي مربع العدد الذي يظهر على الوجه العلوي لحجر النرد . فإذا أعيدت هذه النتيجة لعدة مرات فكم هو متوسط المبلغ الذي يأخذه الشخص الأول من الشخص الثاني في الرمية .

الحل :

إذا أعيدت التجربة لعدد n من المرات وكانت n كبيرة بدرجة كافية فإننا نتوقع أن تكون عدد مرات ظهور العدد 1 يساوي :

$$\frac{1}{6}n$$

إن مجموع ما يأخذه الشخص الأول A عند ظهور العدد 1 يساوي :

$$1^2 \times \frac{1}{6}n$$

وبالمثل مجموع ما يأخذه الشخص الأول A عند ظهور العدد 2 يساوي :

$$2^2 \times \frac{1}{6}n$$

إن مجموع ما يأخذه الشخص الأول A في n من الرميات يعادل التالي :

$$1^2 \times \frac{1}{6}n + 2^2 \times \frac{1}{6}n + 3^2 \times \frac{1}{6}n + 4^2 \times \frac{1}{6}n + 5^2 \times \frac{1}{6}n + 6^2 \times \frac{1}{6}n$$

وبالقسمة على n نحصل على :

$$\begin{aligned}
& 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{6} + 4^2 \times \frac{1}{6} + 5^2 \times \frac{1}{6} + 6^2 \times \frac{1}{6} \\
&= 1 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 9 \times \frac{1}{6} + 16 \times \frac{1}{6} + 25 \times \frac{1}{6} + 36 \times \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{9}{6} + \frac{16}{6} + \frac{25}{6} + \frac{36}{6} \\
&= \frac{1+4+9+16+25+36}{6} \\
&= \frac{91}{6} = 15\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

وهذا المتوسط يمثل المبلغ الذي يأخذه الشخص الأول A من الشخص الثاني B . وفي هذا المثال نلاحظ ما يلي :

أولاً - للتجربة 6 نتائج محتملة الظهور وهي العدد 1 أو العدد 2 ,..., أو العدد 6 واحتمال ظهور أي من هذه النتائج يساوي $\frac{1}{6}$.
ثانياً - ربطنا بظهور أي عدد مبلغاً من القروش يساوي مربع هذا العدد .
ثالثاً - وجدنا أن القيمة المتوقعة للمبلغ الذي يأخذه الشخص الأول A من الشخص الثاني B يساوي القيمة :

$$1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{6} + 4^2 \times \frac{1}{6} + 5^2 \times \frac{1}{6} + 6^2 \times \frac{1}{6}$$

أي يساوي المبلغ الذي ربطناه بظهور العدد 1 ضرب احتمال ظهور العدد 1 مضافاً إليه المبلغ الذي ربطناه بظهور العدد 2 ضرب احتمال ظهور العدد 2 + المبلغ الذي ربطناه بظهور العدد 6 ضرب احتمال ظهور العدد 6 .

مثال (5-33)

في تجربة سحب ورقة بورقة من مجموعة أوراق الكوتشينة بدون إعادة الورقة المسحوبة حتى تظهر صورة الولد السباتي . أوجد متوسط عدد الأوراق التي تسحب حتى تظهر تلك الصورة .

الحل :

نفرض تساوي فرص السحب لكل أوراق المجموعة . حيث أنه يوجد 52 ورقة في مجموعة أوراق اللعب ، فإن احتمال ظهور الصورة المسحوبة في أي سحب معين يساوي $\frac{1}{52}$ ومعنى هذا إذا اعتبرنا أن سحب ورقة بورقة من مجموعة أوراق اللعب لغاية ظهور الولد السباتي تجربة ، فإنه إذا أجريت التجربة لعدد مساوي لـ n من المرات فإننا نتوقع ما يلي :

ظهور الصورة المطلوبة في مرة واحدة $S \frac{1}{52}$ من التجارب أو ظهور الصورة المطلوبة بعد :

$$2 \times \frac{1}{52} S$$

أو بعد :

$$3 \times \frac{1}{52} S$$

وهكذا لغاية الوصول إلى :

$$52 \times \frac{1}{52} S$$

فيكون المجموع يساوي :

$$1 \times \frac{1}{52} S + 2 \times \frac{1}{52} S + 3 \times \frac{1}{52} S + \dots + 52 \times \frac{1}{52} S$$

وبالقسمة على S يكون متوسط الأوراق المسحوبة في التجربة لغاية ظهور صورة الولد السباتي مساوي إلى :

$$\begin{aligned} & 1 \times \frac{1}{52} + 2 \times \frac{1}{52} + 3 \times \frac{1}{52} + 4 \times \frac{1}{52} + \dots + 52 \times \frac{1}{52} \\ &= \frac{1}{52} + \frac{2}{52} + \frac{3}{52} + \frac{4}{52} + \frac{5}{52} + \dots + \frac{52}{52} \\ &= \frac{1378}{52} = 26 \frac{26}{52} = 26.5 \end{aligned}$$

17.5 قاعدة حساب القيمة المتوقعة

(Expected Value Approximation Rule)

من البند السابق نجد أنه إذا ربطت قيمة ما n بحدث A احتمال وقوعه P فإن القيمة المتوقعة للحدث يساوي الاحتمال $x.P(A)$ عدد مرات الوقوع n ، وقد استخدم نمط التوقع (Expectation) بدلاً من القيمة المتوقعة .

وعليه إذا ربطت القيم $n_1, n_2, n_3, \dots, n_m$ بالأحداث $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$ فإن التوقع الرياضي أو القيمة المتوقعة تعطى حسب العلاقة التالية :

$$E = P_1(A).n_1 + P_2(A).n_2 + \dots + P_m(A).n_m \dots \dots \dots (14-5)$$

وهكذا نجد من هذه العلاقة أن التوقع الرياضي E هو الوسط المرجح أو المقيم للقيم الممكنة للمتغير العشوائي ، حيث ترجح كل قيمة من المتغير باحتمالها كما تم الإشارة إليه سابقاً .

مثال (5-34)

إذا ألقى حجر نرد مرة واحدة . فأوجد احتمال ظهور عدد أقل أو يساوي 4 واحتمال ظهور عدد أكبر من 4 .

الحل :

الحدث أقل أو يساوي 4 هو الحدث :

$$\{1,2,3,4\}$$

ويتكون من أربعة عناصر من العناصر الستة لفضاء العينة أثناء إلقاء حجر النرد والحدث أكبر من 4 هو الحدث :

$$\{5,6\}$$

إذن :

$$P(n > 4) = \frac{2}{6} \quad \text{و} \quad P(n \leq 4) = \frac{4}{6}$$

لاحظ أن مجموع الاحتمالين يساوي 6 لأن الحدث الثاني لا يقع إذا ما وقع الحدث الأول ونعبر عن هذا بان نقول أن الحدثين هما شاملين ومانعين بالتبادل .

وعلى وجه العموم إذا كانت نتائج تجربة صدفة تحتويها الأحداث الشاملة المانعة بالتبادل $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$ فإن :

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_m) = 1 \quad \dots\dots(15-5)$$

وصيغة الشمول هنا معناها أنه لا يمكن أن يقع أي حادث آخر نتيجة التجربة .

مثال (35-5)

إذا ألقى حجراً مرة واحدة وكان P_R هو الحادث الذي يقع إذا كان المجموع على الوجهين العلويين مساوياً لـ R فالمطلوب بيان العناصر التي يتكون منها كل من الأحداث $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{21}$ ثم إيجاد قيمة كل من :

- (a) احتمال الحصول على مجموع زوجي .
- (b) احتمال الحصول على مجموع يقبل القسمة على 3 .
- (c) احتمال الحصول على مجموع زوجي ويقبل القسمة على 3 .
- (d) احتمال الحصول على مجموع زوجي أو يقبل القسمة على 3 .
- (e) احتمال أن يكون المجموع يقبل القسمة على 3 إذا علم أنه زوجي .

الحل :

نفرض أن (x, y) رمزاً للحادث حيث أن العدد على الحجر الأول x ، والعدد على الحجر الثاني y .

$\sum R$ - رمزاً للحادث ، المجموع على الحجرين يساوي r .

A - رمزاً للحادث ، المجموع عدد زوجي .

B - رمزاً للحادث ، المجموع يقبل القسمة على 3 .

$P(R)$ - رمزاً لاحتمال الحصول على مجموع يساوي R .

أن الجدول (5-5) يحتوي على جميع النتائج الممكنة لإلقاء حجر النرد
معاً وقد جمعت النتائج التي تكون الحدث (P_R) معاً حيث :

$$(R = 1, 2, 3, \dots, 12)$$

فمثلاً الحدث P_2 يتكون من النتيجة الوحيدة (1,1) بينما الحادث P_3 سوف
يتكون من النتيجتين (2,1) , (1,2) وهكذا .

(a) احتمال الحصول على مجموع زوجي هو :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(2) + P(4) + P(6) + P(8) + P(10) + P(12) \\ &= \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{3}{36} + \frac{1}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(b) احتمال الحصول على مجموع يقبل القسمة على 3 هو :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(3) + P(6) + P(9) + P(12) \\ &= \frac{2}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{1}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(c) احتمال الحصول على مجموع زوجي ويقبل القسمة على 3 هو :

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(6) + P(12) \\ &= \frac{5}{36} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

جدول (5-5)

الحوادث الشاملة المانعة بالتبادل التي يحدث وقوعها إذا ألقى حجرًا نرد لمرّة واحدة فقط

| P_R | R | P_R | R |
|--|----|--|----|
| (1,2); (2,1) | 3 | (1,1) | 2 |
| (1,4); (2,3); (3,2); (4,1) | 5 | (1,3); (2,2); (3,1) | 4 |
| (4,3); (5,2); (6,1) (1,6); (2,5); (3,4) | 7 | (5,1); (4,2); (5,1) (1,5); (2,4); (3,3) | 6 |
| (3,6); (4,5); (5,4); (6,3) | 9 | (4,4); (5,3); (6,2) (2,6); (3,5) | 8 |
| (5,6); (6,5) | 11 | (4,6); (5,5); (6,4) | 10 |
| | | (6,6) | 12 |

(d) احتمال الحصول على مجموع زوجي أو يقبل القسمة على 3 هو :

$$\begin{aligned}
 P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} \\
 &= \frac{3+2-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

(e) احتمال الحصول على مجموع يقبل القسمة على 3 إذا علم أنه زوجي هو :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= \frac{1/6}{1/2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

ويجب ملاحظة أنه يمكن إيجاد الإجابات السابقة من الجدول (4-5) مباشرة . فمثلاً تقع جميع الأحداث التي يكون فيها المجموع عدداً زوجياً في النصف الأيمن من الجدول وعدد نتائجها معاً 18 ، وبذلك يكون الاحتمال المطلوب في البند (a) يساوي $\frac{18}{36}$.

والنتائج التي تعطي مجموعاً يقبل القسمة على 3 هي نتائج الحوادث P_3 ، P_6 ، P_{12} و P_9 وعددها :

$$1 + 4 + 5 + 3 = 12$$

و يكون الاحتمال المطلوب في البند (b) في أعلاه هو $\frac{12}{36}$. ونترك للطالب إيجاد بقية الاحتمالات من الجدول .

مثال (5-36)

أنتفق شخصان على أن يرمي الأول قطعة نقود 3 مرات بطريقة عشوائية ، ويأخذ من الثاني عدداً من الدنانير يساوي مربع عدد الصور التي تظهر . أوجد القيمة المتوقعة للمبلغ الذي يأخذه الأول من الثاني .

الحل :

لو رمزنا لظهور الصورة (Head) بالرمز H والكتابة (Tail) بالرمز T فإن إحدى النتائج الممكنة هي (H , H , T) أي ظهور الصورة في المرة

الأولى وظهورها في المرة الثانية وظهور الكتابة في المرة الثالثة . ويحتوي الجدول (5-6) على جميع النتائج الممكنة لتجربة إلقاء قطعة نقود 3 مرات متتالية .

جدول (5-6)

النتائج الممكنة لإلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية حيث $x =$ عدد مرات ظهور الصورة في الرميات الثلاثة

| النتائج الممكنة أو المحتملة | X |
|---------------------------------|---|
| (T, T, T) | 0 |
| (T, T, H); (T, H, T); (H, T, T) | 1 |
| (T, H, H); (H, T, H); (H, H, T) | 2 |
| (H, H, H) | 3 |

ويلاحظ أن عدد النتائج الممكنة كلها 8 ، فإذا اعتبرنا أن كل هذه النتائج متساوية الإمكان فإن احتمال حدوث أي نتيجة معينة منها يساوي $1/8$. والسؤال هو ما هو احتمال الحصول على صورة واحدة بالضبط في الرميات الثلاثة بغض النظر عن موضع الرمية التي ظهرت فيها . للإجابة على هذا السؤال نلاحظ أن الحدث صورة واحدة في الرميات الثلاثة يمكن أن يتم بإحدى ثلاث نتائج مانعة بالتبادل كما يبين الجدول عند $x = 1$ واحتمال كل من هذه النتائج يساوي $1/8$.

فإذا كتبنا $P(x)$ يساوي احتمال الحصول على x بالضبط من الصور في الرميات الثلاث فإن احتمال الحصول على صورة واحدة هو :

$$P(1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

وبنفس الطريقة يمكن إكمال الجدول (7-5) .

جدول (7-5)

احتمال الحصول على كل عدد ممكن من الصور عند إلقاء قطعة نقود 3 مرات متتالية

| | | | | |
|---------------|---------------|---------------|---------------|------|
| 3 | 2 | 1 | 0 | X |
| $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | P(X) |

نلاحظ أن مجموع الاحتمالات يساوي 1 . إذن القيمة المتوقعة المطلوبة في المسألة تحسب بالشكل التالي :

$$\begin{aligned} & (0)^2 \times P(0) + (1)^2 \times P(1) + (2)^2 \times P(2) + (3)^2 \times P(3) \\ &= (0) \frac{1}{8} + (1) \frac{3}{8} + (4) \frac{3}{8} + (9) \frac{1}{8} \\ &= \frac{3}{8} + \frac{12}{8} + \frac{9}{8} = \frac{24}{8} = 3 \end{aligned}$$

أن هذا الجواب يعني أنه إذا تكررت التجربة مرات عديدة بدرجة كافية فإن متوسط ما يأخذه A من B بعد إلقاء قطعة النقود ثلاث مرات يساوي تقريباً 3 قروش .

مثال (5-37)

يحتوي صندوق على 4 كرات صفراء و 6 زرقاء ويحتوي صندوق آخر على 3 كرات صفراء و 5 زرقاء . وكل الكرات متشابهة فيما عدا اللون . وقد طلب من طفل أن يسحب كرة عشوائياً من كل صندوق . وأتفق شخص مع شخص آخر على أن يدفع الأول للثاني مبلغ 20 دينار إذا كانت الكرتان المسحوبتان من لون واحد وأن يدفع 40 دينار إذا كانت الكرتان من لونين مختلفين . أوجد القيمة المتوقعة للمبلغ الذي يدفعه الشخص الأول .

الحل :

نفرض أن $P(Y)$ رمزاً لاحتمال سحب كرة صفراء من الصندوق الأول ونفرض $P(B)$ لاحتمال سحب كرة زرقاء منه . وسنكتب $P'(Y)$ و $P'(B)$ للاحتمالين المناظرين للصندوق الثاني فيكون :

$$P(Y) = \frac{4}{10}, P(B) = \frac{6}{10}$$

$$P'(Y) = \frac{3}{8}, P'(B) = \frac{5}{8}$$

وبما أن نتيجة السحب من الصندوق الثاني لا تتوقف على نتيجة السحب من الصندوق الأول فإن احتمال سحب كرة صفراء من الصندوق الأول وكرة صفراء من الصندوق الثاني هو :

$$P(Y) \cdot P'(Y) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{8} = \frac{12}{80} = \frac{6}{40}$$

احتمال سحب كرة زرقاء من الكيس الأول وكرة زرقاء من الكيس الثاني هو:

$$P(B).P'(B) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{8} = \frac{30}{80} = \frac{15}{40}$$

فإذا رمزنا للحدث سحب كرتين صفراوين بالرمز A والحدث سحب كرتين زرقاوين بالرمز B فيكون الحدث كرتان من لون واحد هو الحدث $A \vee B$ (A أو B) مع ملاحظة أن A ، B مانعان بالتبادل . إذن احتمال الحصول على كرتين من لون واحد هو :

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= \frac{6}{40} + \frac{15}{40} \\ &= \frac{21}{40} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

وا احتمال الحصول على كرتين من لونين مختلفين يساوي :

$$\frac{19}{40} = \frac{21}{40} - 1$$

إن القيمة المتوقعة للمبلغ الذي يدفعه الأول يساوي احتمال سحب كرتين من لون واحد ضرب 20 مضافاً إليه احتمال سحب كرتين من لونين مختلفين ضرب 40 أي يساوي :

$$20 \times \frac{21}{40} + 40 \times \frac{19}{40} = \frac{21}{2} + 19 = 10.5 + 19 = 29.5$$

مع ملاحظة احتمال أن تكون الكرتان من لونين مختلفين .

القيمة المتوقعة للمبلغ يساوي احتمال أن تكون الكرة الأولى صفراء والثانية زرقاء مضافاً إليه احتمال أن تكون الكرة الأولى زرقاء والثانية صفراء أو ما يساوي :

$$\frac{4}{10} \times \frac{5}{8} + \frac{6}{10} \times \frac{3}{8} = \frac{10}{40} + \frac{9}{40} = \frac{19}{40}$$

وهي نفس القيمة المحسوبة للاحتمال بالاعتماد على احتمال سحب كرتين من لون واحد .

18.5 التحليل التوافقي (The Harmonic Analysis)

إن إيجاد عدد عناصر فضاء العينة قد يكون سهلاً في بعض الأحيان وقد يصبح صعباً في أحيان أخرى . إذ أن فضاء العينة قد يحتوي على عدداً كبيراً من العناصر . لذا سنقوم في البنود القادمة بعرض بعض القواعد الرياضية المساعدة والمفيدة في حساب عدد عناصر فضاء العينة ، وبالتالي في حساب احتمال حدث ما .

1.18.5 المبدأ الأساسي في العد

(Fundamental Principles of Counting)

في هذا البند سوف نقوم بعرض بعض طرق تحديد عدد النواتج الممكنة لتجربة معينة أو عدد العناصر في مجموعة معينة بغير طريقة العد المباشرة المعروفة . وهذه الطرق تسمى كما أشرنا سابقاً بالتحليل التوافقي . ويمكن التعبير عن المبدأ الأساسي في العد بالشكل التالي :

إذا كان لدينا A_1, A_2, \dots, A_k فئات مختلفة عدد عناصرها على الترتيب هو n_1, n_2, \dots, n_k ، فإن عدد الطرق الممكنة لاختيار عنصر واحد من كل منها هو :

$$n_1.n_2.n_3.KK n_k = n! \dots\dots\dots(16 - 5)$$

إن الرمز $n!$ يسمى بمضروب العدد n ، ويظهر في أحيان كثيرة في الرياضيات عند إيجاد حاصل ضرب الأعداد الصحيحة الموجبة من العدد 1 حتى العدد n ويعرف على النحو التالي :

$$n! = 1.2.3.4.5\dots\dots\dots(n - 2)(n - 1)n$$

ومن المفيد أن نعرف أن $0! = 1$.

19.5 التباديل والترتيب والتوافيق

(Permutations , Arrangements and Combinations)

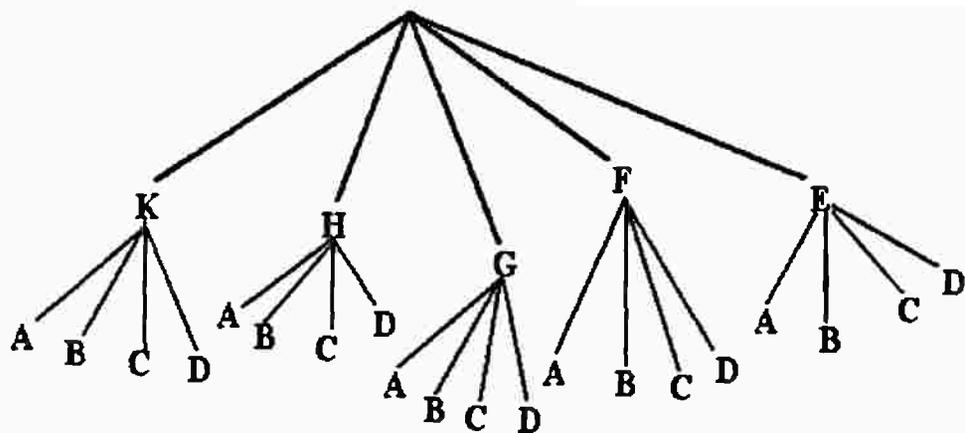
تستخدم هذه الطرق في تحديد عدد النواتج الممكنة لتجربة معينة أو عدد العناصر في مجموعة معينة بغير طريقة العد المباشر ، وتوضح من خلال دراسة الأمثلة التالية :

مثال (5-38)

أعلنت شركة تجارية عن وظيفتين شاغرتين فتقدم 5 رجال و4 سيدات لملئ هاتين الوظيفتين . أوجد بكم طريقة يمكن تعيين رجل وامرأة في هاتين الوظيفتين .

الحل :

نفرض أن النساء هن A, B, C, D والرجال هم E, F, G, H و K وعليه فإن اختيار الشجرة البيانية (Graphical Tree) يكون على النحو الموضح في الشكل (5-2) .



الشكل (5 - 2)

الشجرة البيانية للاحتتمالات المتوقعة لتعيين رجل وامرأة لوظيفتين شاعرتين

نلاحظ أن هناك 20 طريقة مختلفة لاختيار رجل وامرأة من المرشحين

التسعة .

1.19.5 التباديل (Permutations)

يسمى وضع n من الأشياء في ترتيب معين بأنه تبديل لهذه الأشياء بشرط ان تؤخذ جميع هذه الأشياء ، ويسمى وضع a عدد مثل r حيث r أقل أو يساوي a من هذه الأشياء في ترتيب معين بأنه تبديل العدد n من الأشياء مأخوذة r في كل مرة ، وسيرمز لعدد التباديل من الأشياء المأخوذة r كل مرة بالرمز :

$$P(n, r)$$

مثال (5-39)

ليكن لدينا ثلاثة عناصر هي a, b, c يمكن تشكيل ستة ثلاثيات مرتبة من هذه العناصر مع ملاحظة عدم تكرار العنصر في الثلاثية الواحدة . كم هو عدد تباديل هذه العناصر .

الحل :

العناصر الثلاثة ترتب بالشكل التالي :

$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)$

إن هذه العناصر تبادلت المواقع فيما بينها فكان عدد الأوضاع المختلفة الممكنة هو 6 أي أن عدد التباديل يساوي 6 .

مثال (5-40)

قطار مكون من 10 عربات وقاطرة . أوجد بكم طريقة يمكن ترتيب هذه العربات خلف القاطرة .

الحل :

$$P_{10} = 10! = (10)(9)(8)(7)(6)(5)(4)(3)(2)(1) = 3628800$$

وهكذا نجد أنه يمكن ترتيب العشر عربات خلف القاطرة بـ 3628800 طريقة .

نتيجة : عدد تباديل n من الأشياء مأخوذة جميعها بنفس الوقت هو $n!$.

مثال (5-41)

ما هو عدد تباديل ثلاثة عناصر مثل a, b, c مأخوذة جميعها بنفس الوقت .

الحل :

من النتيجة السابقة نجد أنه يوجد لدينا ثلاث تباديل وعليه فإن :

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

وهذه التباديل هي :

$abc, acb, bac, bca, cab, cba$

ويمكننا الآن اشتقاق الصيغة العامة للمقدار $P(n, r)$ بنفس الطريقة المتبعة في الأمثلة السابقة حيث يمكننا اختيار العنصر الأول في تبديل عناصر عددها n مأخوذة r كل مرة بطرق مختلفة عددها n ، وبعد ذلك يمكن اختيار العنصر الثاني في هذا التبديل بطرق عددها $n-1$ ، وبالاستمرار على هذا النحو يمكن اختيار العنصر الأخير الذي يكون ترتيبه r بطرق عددها هو :

$$n-(r-1) = n-r + 1$$

ومنه نجد أن :

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \dots\dots\dots(17-5)$$

وفي بعض الحالات الخاصة $r = n$ نجد أن :

$$P(n, n) = n(n-1)(n-2) \dots\dots\dots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

2.19.5 الترتيب (Arrangements)

يعرف الرمز $\binom{n}{r}$ لعددين صحيحان موجبان n, r بحيث يكون $r \leq n$ كما يلي :

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots\dots\dots (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots\dots\dots (r-1)r}$$

وتسمى هذه الأعداد بمعاملات ذات الحدين . كما سيتم توضيحه عند تعريف نظرية ذات الحدين لاحقاً .

مثال (5-42)

أوجد قيمة المعامل $\binom{10}{4}$.

الحل :

$$\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

ويمكن الحصول من العلاقة والتعريف السابق على صيغة هامة من خلال

ملاحظة أنه يوجد r معامل في كل من البسط والمقام للعدد $\binom{n}{r}$ ، حيث :

$$\begin{aligned} \binom{n}{r} &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (r-1)r} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)(n-r)!}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (r-1)r(n-r)!} \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \end{aligned}$$

وبفضل هذه العلاقة أو الطريقة الثانية نستطيع توفير الوقت والعمليات الحسابية .

مثال (5-43)

أوجد قيمة المعامل $\binom{10}{7}$.

الحل :

باستخدام الطريقة الثانية نجد أن :

$$\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

بالمقارنة مع الصيغة الأولى حيث :

$$\binom{10}{7} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

مثال (44-5)

ليكن لدينا 4 عناصر هي a, b, c, d . أوجد كم ثنائية مرتبة يمكن تشكيلها من هذه العناصر مع عدم تكرار العنصر الواحد في الثنائية الواحدة .

الحل :

إن عدد هذه الثنائيات هو 12 وهي كما يلي :

$$(a, b), (c, a), (c, d), (b, a), (b, c), (b, d) \\ (c, b), (a, c), (a, d), (d, a), (d, b), (d, c)$$

مثال (45-5)

إذا كان عدد المهندسين المرشحين للعمل في مصنع هو 12 مهندس وذلك لشغل أربعة وظائف مختلفة . أوجد بكم طريقة يمكن ملء هذه الوظائف الأربعة .

الحل :

$$A_n^k = A(n, k) = \frac{12!}{4!} \\ = 19958400$$

3.19.5 التوافيق (Combinations)

نفرض أن لدينا تجمعاً من n من الأشياء . يعرف توافيق (Combinations) هذه الأشياء والتي عددها n مأخوذة r كل مرة (r - توافيق) بأنه أي مجموعة جزئية بها r من الأشياء . وبمعنى آخر فإن التوافيق r هو أي اختيار لعدد r شيء من بين هذه الأشياء ودون اعتبار لطريقة الترتيب .

فإذا رمزنا بالرمز $\binom{n}{r}$ أو بالرمز C_r^n أو بالرمز $C(n, r)$ لعدد توافيق r عنصر مأخوذة معاً من n عنصر فإن :

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \dots\dots (19-5)$$

وأيضاً فإن:

$$A_r^n = n! C_r^n \dots\dots\dots (20-5)$$

ويجب الإشارة إلى أن معاملات ذات الحدين $\binom{n}{r}$ قد عرفت بأنها :

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

وسوف نستمر باستخدام $C(n, r)$ و $\binom{n}{r}$ بنفس المعنى .

مثال (5-46)

لنكن لدينا العناصر a, b, c, d . أوجد بكم طريقة يمكن تشكيل فئات تضم عنصرين فقط منها .

الحل :

إن الفئات المشكلة هي :

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$$

وعدد هذه الفئات يساوي 6 .

مثال (5-47)

أوجد بكم طريقة يمكن اختيار أربعة أوراق من أوراق الكوتشينة الشدة نو الاثنتان وخمسون ورقة .

الحل :

عدد الطرق الممكنة لاختيار أربعة أوراق يمكن الحصول عليها باستخدام العلاقة (5-19) حيث :

$$C_{52}^4 = \frac{52!}{(4!)(48!)} = \frac{(52)(51)(50)(49)(48!)}{(4)(3)(2)(1)(48!)} = 270725$$

وهكذا نجد أنه يمكن اختيار أربعة أوراق من أوراق الكوتشينة الشدة بـ 270725 طريقة .

مثال (5-47)

أوجد كم لجنة رباعية يمكن تكوينها من ثمانية أشخاص .

الحل :

أن كل لجنة تعتبر توافق من الثمانية أشخاص مأخوذة منهم ثلاثة كل مرة

إذا يوجد :

$$C(8, 4) = \binom{8}{4} = \frac{8.7.6.5}{4.3.2.1} = \frac{1680}{24} = 70$$

وهكذا بسبعين طريقة يمكن تشكيل لجنة رباعية مختلفة من ثمانية أشخاص .

مثال (5-48)

في أحد المصانع يختار كل عام وفد من أربعة مهندسين عاملين في هذا المصنع لتمثيل المصنع في معرض المنتجات الدولي الذي يقام سنوياً في بلد ما لوجد :

(1) عدد الطرق التي يمكن اختيار الوفد بها إذا كان عدد المهندسين المرشحين لذلك وتتوفر بهم الشروط هو 16 مهندس .

(2) عدد الطرق التي يمكن الاختيار إذا كان اثنان من المهندسين المرشحين لا يستطيعان حضور المعرض في نفس الوقت أو بمعنى آخر معاً .

الحل :

أولاً : يمكن اختيار المهندسين الأربعة عن طريقة إيجاد توافق أي عن طريق إيجاد :

$$\binom{16}{4} = \frac{16.15.14.13}{4.3.2.1} = 1820$$

ثانياً : نفرض أن المهندسين اللذان لا يمكن اختيارهما معاً هما D , C فيكون هناك طريقتان للحل ، الطريقة الأولى هي أنه إذا لم يتكون الوفد من C ولا من D . وفي هذه الحالة يمكن اختيار الوفد كما يلي :

$$\binom{14}{4} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1001$$

أما إذا تكون الوفد من C أو من D ولكن ليس منهما معاً فإن الوفد يمكن اختياره بطرق عددها :

$$2 \cdot \binom{14}{3} = 2 \cdot \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 728$$

وبذلك تكون الطرق الكلية لاختيار الوفد هي :

$$1001 + 728 = 1729$$

أما الحل بالطريقة الثانية فيتضمن أنه إذا تكون الوفد من المهندسين D و C معاً فإن المهندسين الآخرين يمكن اختيارهما بطرق عددها :

$$\binom{14}{2} = \frac{14 \cdot 13}{2 \cdot 1} = 91$$

وبذلك يكون عدد الطرق التي يمكن اختيار الوفد بها إذا لم يتكون الوفد من D , C معاً هو :

$$1820 - 91 = 1729$$

وهكذا حصلنا على نفس عدد الطرق والتي تساوي 1729 وهي النتيجة نفسها . ولكن الريق الثانية في الحل تعتبر أبسط وأسرع .

في إحدى الشركات الكبرى إذا كان امتحان القبول لشغل وظيفة ما يتكون من عشرة أسئلة ، وكان يجب على المتقدم لشغل هذه الوظيفة أن يجيب على سبعة أسئلة فقط أوجد :

- (1) عدد الطرق التي يجب على المتقدم أن يختار بها الاسئلة .
- (2) عدد الطرق التي يمكنه الاختيار إذا كانت الاسئلة الاربعة الاولى إجبارية .
- (3) عدد الطرق التي يمكنه الاختيار إذا كان من الضروري أن يجيب على أربعة أسئلة من الاسئلة الخمسة الاولى .

الحل :

أولاً : يمكن للمتقدم اختيار الاسئلة السبعة بطرق عددها كما يلي :

$$\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10.9.8}{3.2.1} = 120$$

ثانياً : إذا قام المتقدم بالاجابة على الاسئلة الاربعة الاولى ، فيمكنه بعد ذلك أن يختار الاسئلة الثلاثة الاخرى من بين الاسئلة الستة الاخيرة بطرق عددها :

$$\binom{6}{3} = \frac{6.5.4}{3.2.1} = 20$$

ثالثاً : إذا أجاب المتقدم على الاسئلة الخمسة الاولى فيمكنه اختيار السؤالين الآخرين من بين الخمسة أسئلة الاخيرة بطرق عددها :

$$\binom{5}{2} = \frac{5.4}{2.1} = 10$$

ومن ناحية أخرى إذا أجاب المتقدم على أربعة أسئلة فقط من بين الأسئلة الخمسة الأولى فيمكنه اختيار الأسئلة الثلاثة الأخرى من بين الأسئلة الخمسة الأخيرة بطرق عددها :

$$\binom{5}{3} = \frac{5.4.3}{3.2.1} = 10$$

وبذلك يمكنه اختيار الأسئلة السبعة بطرق عددها $10 \cdot 10 = 100$ ويكون عدد الاختيارات الكلية 105 اختيار .

مثال (5-49)

أوجد بكم طريقة يمكن اختيار فريق رياضي يتكون من ثلاث رجال وسيدتين من بين سبعة رجال وخمس سيدات .

الحل :

أولاً - يمكن اختيار السيدتين من بين الخمس سيدات بطرق عددها $\binom{5}{2}$ ، كما ويمكن اختيار الثلاث رجال من بين السبعة رجال بطرق عددها $\binom{7}{3}$ ، وبذلك طيمكننا اختيار الفريق المطلوب بطرق عددها :

$$\binom{7}{3} \times \binom{5}{2} = \frac{7.6.5}{3.2.1} \cdot \frac{5.4}{2.1} = 350$$

وهكذا نجد أنه يوجد 350 طريقة يمكن فيها اختيار الفريق الرياضي المطلوب .

$\binom{n}{r}$ أشرنا في السابق إلى معاملات ذات الحدين وأوضحنا أن الرمز $\binom{n}{r}$ لعدنان صحيحان موجبان n, r بحيث يكون $r \leq n$ كما يلي :

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1.2.3.4\dots(r-1)r}$$

وتسمى هذه الأعداد بمعاملات ذات الحدين . وبالعودة إلى هذا الموضوع لتوضيح نظرية ذات الحدين نجد أن هذه النظرية تعطى بالاستنتاج الرياضي للصورة العامة لمفكوك الحد $(a + b)^n$. أن نظرية ذات الحدين (Binomial Theorem) تعطى رياضياً كما يلي :

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

$$= a^n + n \cdot a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} b^2 + \dots + nab^{n-1} + b^n$$

ويجب ملاحظة الخواص التالية لمفكوك $(a + b)^n$:

1- يتناقص أس a حداً بعد حد من n إلى الصفر ، ويزيد أس b حداً بعد حد من الصفر إلى n .

2- معامل كل حد هو $\binom{n}{k}$ حيث k هو أس أي من a أو b .

3- تتساوى معاملات الحدود التي تبعد عن بداية المفكوك ونهاية المفكوك بنفس المقدار .

4- مجموع أسى a و b في كل حد هو n .

5- يوجد في المفكوك حدوداً عددها $n + 1$.

مثال (50-5)

أوجد مفكوك الحد الرياضي باستخدام نظرية ذات الحدين $(x+y)^5$.

الحل :

نستخدم التعريف الرياضي لنظرية ذات الحدين لإيجاد مفكوك هذا

الحد حيث :

$$\begin{aligned}(x+y)^5 &= (x)^5 + \frac{5}{1}(x)^4(y)^1 + \frac{5.4}{2.1}(x)^3(y)^2 + \frac{5.4}{2.1}(x)^2(y)^3 + \frac{5}{1}(x)(y)^4 + (y)^5 \\ &= x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5\end{aligned}$$

مثال (51-5)

أوجد مفكوك المقدار $(x^2 - 2y)^6$ وبعد ذلك اختصر المقدار الى

أبسط صورة .

الحل :

باستخدام نظرية ذات الحدين حيث :

$$(x^2 - 2y)^6 = (x^2)^6 + \frac{6}{1}(x^2)^5(-2y) + \frac{6.5}{2.1}(x^2)^4(-2y)^2 + \frac{6.5.4}{3.2.1}(x^2)^3(-2y)^3$$

$$+ \frac{6.5}{2.1}(x^2)^2(-2y)^4 + \frac{6}{1}(x^2)(-2y)^5 + (-2y)^6$$

$$= x^{12} - 12x^{10}y + 60x^8y^2 - 160x^6y^3 + 240x^4y^4 - 192x^2y^5 + 64y^6$$

وهكذا باستخدام نظرية ذات الحدين نجد أنه يمكننا إيجاد مفكوك المقادير

كثيرة الحدود ، وأن هذه النظرية سوف تساعدنا في دراسة التوزيعات

الاحتمالية في الباب الاحق .

20.5 تمارين

س1: أكتب فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد زهر ، الأول أخضر والثاني أحمر .

س2: أكتب فضاء العينة في تجربة إلقاء قطعة نقود فإذا كان الناتج صورة وأعدنا إلقاءها ثانية ، أما إذا كتابة فإننا نلقي حجر النرد الزهر .

س3: أربعة طلاب انتخبوا عشوائياً من فصل دراسي ما ، فأذا رمز بالرمز M للطلاب ورمز للطالبة بالرمز F ، أكتب فضاء العينة S_1 . ثم أكتب فضاء عينة ثاني S_2 عناصره تمثل عدد الإناث المنتخبة .

س4: افرض أن A , B , C أحداثاً معينة ، والمطلوب التعبير عن وتكوين شكل فن للحاث التالية :

- وقوع حدث واحد بالضبط من هذه الاحداث .
- عدم وقوع أي حدث منهما .
- وقوع الحدث B والحدث C وعدم وقوع الحدث A .
- وقوع حدثين على الأقل منهما .

س5: بالعودة إلى السؤال الاول أوجد :

(a) أكتب عناصر الحدث A الذي يقع إذا كان المجموع أقل من 5 ثم أحسب احتمال A .

(b) أحسب احتمال الحدث B الذي يقع إذا ظهر العدد 2 على الحجر الأخضر .

(c) أحسب احتمال الحادث C الذي يقع إذا ظهر العدد 6 على أحد حجري النرد .

(d) أحسب احتمال الحادث B/C .

(e) أحسب احتمال الحادث $AUBUC$.

س5: تقدم رجلان وامرأتان بطلباتهم لمل* وظيفتين شاغرتين مختلفتين في إحدى المؤسسات . أختار المدير عشوائياً شخصاً للوظيفة الأولى وآخر للوظيفة الثانية أوجد ما يلي :

(a) فضاء العينة S .

(b) احتمال الحادث A الذي يقع إذا كان رجلاً قد شغل الوظيفة الأولى .

(c) احتمال الحادث B الذي يقع إذا كانت وظيفة واحدة فقط قد شغلت من قبل رجل .

(d) احتمال الحادث C الذي يقع إذا كانت الوظيفتان قد شغلنا من قبل امرأتين .

س6: في لعبة حظ هناك صندوق يحتوي على 500 ظرف ، 50 منها تحتوي على 50 دينار في كل ظرف ، 100 ظرف منها تحتوي على 25 دينار في كل ظرف ، 350 ظرف منها تحتوي على 10 دنانير في كل ظرف . إذا تم دفع 25 دينار يمكن سحب أحد الظروف .

(a) أحسب احتمال أن يحتوي الظرف المسحوب على 50 دينار .

(b) أحسب احتمال أن يحتوي الظرف المسحوب على أقل من 50 دينار .

س7: سحبت ورقة من شدة كوتشينة عادية عددها 52 . إذا كان A يمثل الحدث الذي يقع إذا كانت الورقة المسحوبة حمراء . B يمثل الحدث الذي يقع إذا كانت الورقة المسحوبة تحمل رقماً أكبر من 2 وأقل من 9 ، أحسب ما يلي :

(a) احتمال الحدث A .

(b) احتمال الحدث B .

(c) احتمال وقوع الحدث A بشرط إذا كان الحدث B قد وقع أي $P(A/B)$.

(d) $P(A \cup B)$.

س8: سحب كرة عشوائياً من كيس يحتوي على ثلاثة كرات حمراء (R) و 4 كرات خضراء (G) و 5 كرات صفراء (Y) أوجد :

(a) احتمال أن لا تكون الكرة المسحوبة صفراء اللون .

(b) احتمال كون الكرة المسحوبة صفراء أو حمراء .

س9: في استفتاء تلفزيوني تلقت إدارة التلفزيون 2000 جواب موزعة كما هو مبينة في الجدول (5-8) .

جدول (5-8)

| المجموع | كلا | نعم | المرسل |
|---------|------|-----|---------|
| 800 | 560 | 240 | ذكر |
| 1200 | 930 | 270 | أنثى |
| 2000 | 1490 | 510 | المجموع |

(a) سحب ظرف عشوائياً فكانت النتيجة نعم ، ما احتمال أن يكون المرسل ذكراً .

(b) سحب ظرف إجابة عشوائياً بعد إعادة الأول فكانت المرسل أنثى ، ما احتمال أن يكون الجواب كلا .

س10: مجموعة من الطلاب العرب 10 أردنيين و30 لبناني و10 عراقيين تقدموا لامتحان نهاية العام فنجح 3 أردنيون و 10 لبنانيون و5 عراقيون . اختيار طالب عشوائياً من هذه المجموعة فكان من الناجحين . ما احتمال أن لا يكون هذا الطالب عراقياً .

س11: صندوق يحتوي على 8 كرات حمراء (R) و3 كرات بيضاء (W) و9 كرات زرقاء (B) . سحبت ثلاث كرات عشوائياً ، أوجد الاحتمالات التالية :

- احتمال أن تكون الكرات الثلاثة حمراء .
- احتمال أن تكون كرة حمراء وكرتين بيضاء .
- احتمال أن تكون كرة من كل لون .
- احتمال أن تكون الأولى حمراء والثانية بيضاء والثالثة زرقاء .

س12: مجموعة عشوائية مؤلفة من n شخص ، ما احتمال أن يكون بينها أي شخصين لهما نفس تاريخ الميلاد . وبفرض أن 23 يساوي n ما قيمة هذا الاحتمال ، وما احتمال أن يكون هناك شخصان على الأقل لهما نفس تاريخ الميلاد مع العلم أن $n = 23$ أيضاً .

س13: أوجد الاحتمالات لكل من الحوادث التالية :

- احتمال الحصول على عدد فردي عند رمي حجر النرد لمرة واحدة .
- احتمال الحصول على مجموع 9 عند رمي حجرين نرد .
- احتمال أن يكون مجموع ناتج الوجهين العلويين للحجر أكبر من 10 أو أقل من 5 .

س14: فصل به 12 تلميذاً خمسة منهم ذكور والبقية إناث . فإذا اخترنا تلميذاً واحداً بطريقة عشوائية فما هو احتمال :

- (a) أن يكون التلميذ المختار فتاة .
(b) إذا اخترنا تلميذين عشوائياً فما هو احتمال أن تكونا فتاتين .

س15: سحب كارتان من ورق اللعب فأوجد احتمال أن يكون كل منهما آس حسب الشروط التالية :

- (a) في حالة إرجاع الكارت الأول وخط السورق جيداً قبل سحب الكارت الثاني .
(b) في حالة عدم إرجاع الكارت الأول .

س16: من مجموعة من الكرات مرقمة من 1 إلى 17 سحبت كرة عشوائياً فما هو احتمال :

- (a) أن يكون الرقم المدون عليها يقبل القسمة على 2 أو 7 .
(b) أن يكون الرقم المدون عليها يقبل القسمة على 3 أو 5 .

س17: إذا سحبت كرتان عشوائياً من كيس به خمس كرات بيضاء (W) وثمانية كرات سوداء (B) فما هو احتمال :

- (a) أن تكون الكرتان المسحوبتان من لونين مختلفين .
(b) أن تكون الكرتان المسحوبتان من لون واحد .
(c) أن تكون واحدة على الأقل من الكرتين سوداء .

س18: يحتوي صندوق على أربع كرات بيضاء (W) وثلاث كرات سوداء (B) ويحتوي صندوق آخر على ثلاث كرات بيضاء وخمس كرات سوداء وسحبت كرة من كل صندوق ، أوجد احتمال أن تكون :

(a) كل منهما بيضاء .

(b) كل منهما سوداء .

س19: إذا اشترى شخص ورقة يانصيب حيث الجائزة الأولى 50 ديناراً والجائزة الثانية 20 ديناراً باحتمال 0.001, 0.003 على الترتيب . فما هو السعر العادل الذي يدفعه لهذه الورقة .

س20: لوحظ أن متوسط المسامير التالفة نسبة لمواصفات معينة التي تنتجها آلة محددة في مصنع هو 20% . فإذا اخترنا 10 مسامير عشوائياً من الإنتاج اليومي لهذه الآلة . أوجد احتمال وجود ما يلي :

(a) مساميرين تالفين فقط .

(b) مساميرين تالفين أو أكثر .

(c) أكثر من خمسة مسامير تالفة .

س21: إذا كان احتمال أن يعيش سعيد 20 عاماً آخرأ هو 60% واحتمال أن تعيش زوجة سعيد 20 عاماً آخرأ أيضاً هو 80% ، فما هو احتمال أن يظل الاثنان على قيد الحياة 20 عاماً .

س22: في مدينة ما إذا علم أن 40% من المواطنين لهم شعر بني اللون و 20% لهم عيون بنية اللون و 10% لهم شعر بني عيون بنية . فإذا أختير مواطن بطريقة عشوائية من هذه المدينة فأوجد كل من الاحتمالات التالية :

(a) إذا كانت عينيه بنية فما هو احتمال أن يكون شعره ليس بنياً .

(b) ما هو احتمال ان لا يكون شعره بنياً وأن لا تكون عينيه بنية .

(c) إذا كان شعره بني فما هو احتمال ان تكون ايضاً عيناه بنيتان .

س23: في فصل دراسي 12 طالب و 4 طالبات ، إذا أختير 3 طلبة من الفصل بطريقة عشوائية فما هو احتمال أن يكونوا جميعاً طلاباً .

س24: في إحدى كليات الهندسة وجد أن 35% من الطلبة رسبوا في امتحان خواص المواد ، ورسب 20% من الطلبة في امتحان الميكانيكا النظرية ، ورسب 15% في امتحان خواص المواد والميكانيكا النظرية . أختير أحد الطلبة بطريقة عشوائية أوجد ما يلي :

- (a) إذا كان راسباً في خواص المواد فما هو احتمال أن يكون راسباً في الميكانيكا النظرية .
- (b) ما هو احتمال أن يكون راسباً في خواص المواد والميكانيكا النظرية .
- (c) إذا كان راسباً في الميكانيكا النظرية فما هو احتمال أن يكون راسباً في خواص المواد .

س25: تنتج ثلاث ماكينات A , B , C على التوالي 20% و 35% و 5% من الانتاج الكلي لمصنع انتاج الرقائق الالكترونية الخاصة بتصنيع الحاسوب ، فإذا كانت نسبة الانتاج للرقائق المعيبة لهذه الماكينات هي على التوالي 4% ، 8% ، 3% . إذا أختيرت رقيقة الكترونية بطريقة عشوائية ووجدت أنها معيبة ، أوجد احتمال أن تكون الوحدة من انتاج الماكينة B .

س26: قام رجل بزيارة زوجين لهما طفلان ، فدخل أحد الطفلين وهو ولد إلى حجرة الجلوس ، أوجد احتمال أن يكون الطفل الآخر ولداً أيضاً إذا كان :

- (a) من المعلوم أن الطفل الآخر هو الأصغر .
- (b) إذا لم يكن لدينا أية معلومات عن الطفل الآخر .

س27: أوجد عدد الطرق التي يمكن أن تصف بها عشرة كتب من الحجم الكبير وستة كتب من الحجم المتوسط وأربعة كتب من الحجم الصغير على أحد الرفوف بشرط أن تكون جميع الكتب ذات الحجم الواحد مرتبة معاً .

س28: أوجد كم عدد الطرق التي يمكن أن يجلس بها خمسة أشخاص في سيارة إذا كان اثنان منهم يجيدون القيادة .

س29: رجل له ستة أصدقاء وأراد أن يدعوهم الى حفلة عيد ميلاده أوجد بكم طريقة يمكن أن :

(a) يدعو أربع أصدقاء الى هذه الحفلة .

(b) يدعو خمسة أصدقاء منهم إذا كان اثنان منهم متزوجون ولا بد من حضورهما .

س30: إذا كان مطلوب من أحد المهندسين المتقدمين لشغل وظيفة ما في أحد المصانع أن يجيب على عشرة أسئلة من بين أربعة عشر سؤالاً أوجد :

(1) كم عدد الطرق التي يمكن لهذا المهندس اختيار اسئلته .

(2) بكم طريقة يمكن للمهندس اختيار الاسئلة إذا كان لا بد أن يجيب على السؤالين الاولين .

(3) بكم طريقة يمكنه الاختيار إذا لزم بالاجابة على ثلاثة أسئلة من بين الاسئلة الستة الاولى على الاقل .

س31: أحسب كلا من المقادير التالية :

$$1) \binom{19}{14} , \quad 2) \binom{13}{2} , \quad 3) \binom{30}{10}$$

س32: أختص كلاً من المقادير التالية :

$$1) \frac{(n-1)!}{(n+2)!}$$

$$2) \frac{(n-r+1)!}{(n-r-1)!}$$

$$3) \frac{n!}{(n-2)!}$$

$$4) \frac{(n+2)!}{n!}$$

س33: أوجد مفكوك كل من الحدود الآتية ثم أختصر كلاً منها :

$$1) (2x + y^2)^5$$

$$2) (x^2 - 3y)^7$$

$$3) (2x^2 - y)^4$$

س34: أوجد الحد الذي يحتوي على x^6 في مفكوك المقدار :

$$(2x^2 + 1/2y^3)^8$$

س35: تلقى قطعة نقود حتى تظهر الصورة لأول مرة أو تظهر الكتابة خمس مرات متتالية ، أوجد القيمة المتوقعة E لعدد مرات ألقاء القطعة .

س36: صندوق يحتوي على 10 وحدات إنتاجية لاحدى المصانع من بينها ثلاث وحدات معيبة ، أختار مهندس ثلاث وحدات من الصندوق ، أوجد توقع عدد الوحدات المعيبة التي أختارها هذا المهندس .