

## الباب الأول

### المعادلات التفاضلية الاعتيادية

- 1.1 مقدمة
- 2.1 الدرجة والرتبة .
- 3.1 المعادلة الخطية وغير الخطية .
- 4.1 المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى .
  - 1.4.1 اختزال الثوابت الاختيارية .
  - 2.4.1 طريقة فصل المتغيرات .
  - 3.4.1 المعادلات المتجانسة .
    - 4.4.1 المعادلات التامة .
    - 5.4.1 العوامل التكاملية .
  - 6.4.1 المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى .
  - 7.4.1 المعادلات التفاضلية اللاخطية- معادلة برنولي .
- 5.1 المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة العليا (الرتبة  $n$ ) .
  - 1.5.1 المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية بمعاملات ثابتة.
  - 2.5.1 الحلول العامة للمعادلات التفاضلية المتجانسة من الرتبة الثانية.
  - 3.5.1 الحل العام للمعادلة التفاضلية ذات المعاملات المتغيرة معادلة (كوش-اديلر) .
    - 4.5.1 الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة .
      - 1.4.5.1 طريقة المعاملات غير المعينة .
      - 2.4.5.1 إيجاد الحل العام للمعادلة غير المتجانسة .
      - 3.4.5.1 طريقة تغير البارومترات لإيجاد الحل الخاص للمعادلة اللامتجانسة .
        - 5.5.1 المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية .
        - 6.5.1 المعادلات المتجانسة من الدرجة الثانية .
  - 6.1 أمثلة وتمارين .

## 1.1 مقدمة

أن النموذج الرياضي المتمثل في معادلة تفاضلية بشروط ابتدائية معطاة يمكن أن يصنف عمليات طبيعية أو كيميائية أو فيزيائية أو اقتصادية ، وبحل المعادلة التفاضلية يمكننا الحصول على تصور واضح لخواص وطبيعة العملية المناظرة بل ومستقبل سيرها . إن المعادلة التي تربط بين متغير تابع مع متغير أو أكثر من المتغيرات المستقلة عن طريق المعاملات التفاضلية تدعى " بالمعادلة التفاضلية " . وإذا وجد متغير مستقل واحد مع المتغير التابع فإن تلك المعادلة تدعى " بالمعادلة التفاضلية الاعتيادية " ، أما إذا احتوت تلك المعادلة على أكثر من متغير مستقل فتدعى " بالمعادلة التفاضلية الجزئية " .

أن المعادلات التفاضلية الاعتيادية هي المعادلات التي يكون فيها جميع المشتقات اعتيادية لمتغير تابع واحد فقط نسبة لمتغير مستقل واحد فقط ايضاً فمثلا المعادلة التالية:-

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x^3\left(\frac{dy}{dx}\right) + 4y = 4e^x \cos x \dots\dots\dots(1-1)$$

هي معادلة تفاضلية اعتيادية بينما المعادلة التالية :-

$$C_{pp} \frac{\partial T}{\partial \theta} = k \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \dots\dots\dots(2-1)$$

هي معادلة تفاضلية جزئية حيث أنها تحتوي على المعاملات التفاضلية الجزئية للمتغير (T) بالنسبة إلى كل من المتغيرات  $\theta$  ,  $x$  ,  $y$  ,  $z$  . أما المعادلة

-(3-1) :-

$$\frac{dy}{dx} = e^x + \sin x \dots\dots\dots(3-1)$$

فهي معادلة اعتيادية خطية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى ، أما المعادلة رقم (4-1) :-

$$y'' - 2y' + y = \cos x \dots\dots\dots(4-1)$$

فهي معادلة تفاضلية اعتيادية خطية من الرتبة الثانية والدرجة الأولى ، أما المعادلة رقم (5-1) :-

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \dots\dots\dots(5-1)$$

فهي معادلة جزئية خطية من الرتبة الثانية والدرجة الأولى، أما المعادلة رقم (6-1) :-

$$3x^2 + 2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \dots\dots\dots(6-1)$$

فهي معادلة تفاضلية اعتيادية غير خطية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى .

وبشكل عام يمكن تقسيم المعادلات التفاضلية على هذا الأساس إلى اعتيادية وجزئية:-

1- المعادلة التفاضلية الاعتيادية :

وهي المعادلة التي تكون فيها جميع المشتقات اعتيادية لمتغير تابع واحد فقط نسبة لمتغير مستقل واحد فقط أيضا .

2 - المعادلة التفاضلية الجزئية :-

وهي المعادلة التي تحتوي على الأقل مشتقة جزئية واحدة لبعض المتغيرات المستقلة . و أيضا تصنف المعادلات التفاضلية نسبة إلى رتبتهـا ودرجتهـا .

## 2.1 الرتبة والدرجة (Order and Degree)

إن رتبة المعادلة التفاضلية هي مرتبة أعلى معامل تفاضلي تحويه ولذلك فإن رتبة المعادلة (1-1) هي الثالثة لأن أعلى معامل تفاضلي فيها هو  $(\frac{d^3y}{dx^3})$  أما رتبة المعادلة (2-1) فهي الأولى.

إن درجة المعادلة تعني قيمة الأس المرفوع إليه أعلى معامل تفاضلي وعلى هذا الأساس فإن درجة المعادلة (1-1) هي الأولى على الرغم من احتوائها على المعامل  $(\frac{dy}{dx})^2$  والمرفوع لأس 2 أما المعادلة رقم (2-1) فهي معادلة من الدرجة الأولى أيضا.

## 3.1 المعادلة الخطية وغير الخطية (Linear & non-Linear Equation)

عندما يكون المتغير التابع أو أحد معاملات المعادلة التفاضلية مرفوع لأس أكبر من الواحد الصحيح فيقال عندئذ إن المعادلة التفاضلية غير خطية ، أما إذا كان الأس المرفوع إليه أعلى معامل تفاضلي في المعادلة هو 1 فنقول إن المعادلة التفاضلية هي معادلة خطية ، وعلى هذا الأساس فإن المعادلات التالية :-

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \sin x \dots\dots\dots (7-1)$$

$$\left[ \frac{d^2y}{dx^2} \right]^2 + \frac{dy}{dx} + y = 0 \dots\dots\dots (8-1)$$

هي معادلات غير خطية .

وهكذا فإن المعادلات التالية هي معادلات لا خطية :-

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \sin x \dots\dots\dots(9-1)$$

$$\left[ \frac{d^2 y}{dx^2} \right]^3 + \frac{dy}{dx} + y = 0 \dots\dots\dots(10-1)$$

فالمعادلة (9-1) هي لا خطية لأن التابع  $y$  يظهر بصيغة  $y^2$  بينما المعادلة (10 - 1) هي لا خطية أيضا لأن أعلى معامل تفاضلي فيها هو من الدرجة الثانية ومرفوع للأس 3. إذن جميع المعادلات أعلاه هي لا خطية.

مثال (1-1)

حدد رتبة ودرجة المعادلات التفاضلية التالية ، وبين هل هي اعتيادية أم جزئية ، خطية أو لا خطية مع توضيح السبب ؟

$$1) y'' + 4xy' + 2y = \cos x$$

$$2) \frac{d^3 y}{dx^3} + 4x \frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + 5y = \sin 2x$$

$$3) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + xy = \sin t$$

$$4) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial t} + u^2 + v = \sin u$$

الحل:-

المعادلة الأولى هي معادلة تفاضلية اعتيادية خطية من الرتبة الثانية والدرجة الأولى لأن رتبة أعلى معامل تفاضلي فيها هو 2 والأس المرفوع إليه هذا المعامل هو 1 وهي لا تحتوي على معامل لـ  $y$  أكبر من 1 . المعادلة الثانية هي معادلة تفاضلية اعتيادية خطية من الرتبة الثالثة والدرجة الأولى.

المعادلة الثالثة هي معادلة تفاضلية جزئية خطية من الرتبة الثانية لأن المشتقة للمتغير  $y$  نسبة لـ  $x$  هي الثانية ودرجتها هي الأولى و لا تحتوي على معامل أعلى من 1 .

المعادلة الرابعة هي معادلة تفاضلية جزئية غير خطية من الرتبة الثانية والدرجة الثانية.

#### 4.1 المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى

(First Order Differential Equation)

إن المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى لا تحتوي على مشتقات أعلى من الرتبة أو الدرجة الأولى وهي تربط بين متغير تابع مع متغير أو متغيرين مستقلين ولا يوجد حل عام لهذه المعادلات ولكن يمكن تصنيف المعادلات التفاضلية من هذا النوع بطريقة خاصة وهي:-

- 1- المعادلات التفاضلية التي يمكن فصل متغيراتها ( Variables Separation ) .
  - 2- المعادلات المتجانسة ( Homogeneous Equations ) .
  - 3- المعادلات التامة ( Exact Equations ) .
  - 4 - المعادلات التي تحل بتكامل المعامل ( Integral Factor ) .
- من هنا نرى أن النوع الرابع من المعادلات هو الأكثر أهمية ومع ذلك سيتم تناول كل النقاط أعلاه بصورة مفصلة .

#### 1. 4.1 اختزال الثوابت الاختيارية (Reduction Of Optional Constants)

عند احتواء الدالة الأصلية على ثابت أو أكثر يمكن الحصول على المعادلة التفاضلية المرافقة للحل العام بمفاضلة الحل العام عدة مرات إلى أن يتم التخلص من الثوابت الاختيارية ومن ثم ترتيب المعادلة التفاضلية المحصل عليها .

مثال (2-1)

أوجد المعادلة التفاضلية المرافقة للحل العام :  $y = C_1x + 2$

الحل :-

نلاحظ هنا إن عدد الثوابت هو 1 وهي  $C_1$  ولذلك سنقوم بمفاضلة

المعادلة لمرة واحدة لاختزال الثابت  $C_1$  وبالشكل التالي :-

$$y = C_1x + 2 \rightarrow \frac{dy}{dx} = C_1 \dots\dots\dots(11-1)$$

$$C_1 = \frac{y-2}{x} \dots\dots\dots(12-1)$$

من المعادلتين أعلاه ينتج أن :

$$y' = \frac{y-2}{x} \dots\dots\dots(13-1)$$

وبترتيب المعادلة ( 7-1 ) نحصل على :

$$x y' = y - 2$$

$$x \frac{dy}{dx} - y + 2 = 0 \dots\dots\dots(14-1)$$

وهي المعادلة التفاضلية المرافقة للحل العام .

مثال (3-1)

أوجد المعادلة التفاضلية المرافقة للحل العام  $y = C_1 + C_2 e^x$

الحل :-

نلاحظ هنا إن عدد الثوابت في الحل العام هو 2 وهي  $C_1, C_2$  لذلك ..

نفاضل مرتين كما يلي :-

$$y = C_1 + C_2 e^x$$

$$y' = C_2 e^x$$

$$y'' = C_2 e^x$$

$$y' = y'' \text{ or } y'' - y' = 0$$

وهي المعادلة التفاضلية المرافقة للحل العام .

مثال (4-1)

بين إن الدالة التالية  $y = e^{-x/2}$  تكون حلا للمعادلة التفاضلية

$$2y' + y = 0$$

الحل :-

نشتق الحل العام وبذلك نحصل على :

$$y' = -\frac{1}{2} e^{-x/2}$$

نعوض في المعادلة التفاضلية فنحصل :-

$$2(-\frac{1}{2} e^{-x/2}) + e^{-x/2} = 0 , -e^{-x/2} + e^{-x/2} = 0$$

الطرف الأيمن = الطرف الأيسر ولذلك فإن الدالة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية أعلاه .

مثال (4-1)

بين إن الدالة المعطاة  $y = 5 \tan 5x$  تمثل حلا " للمعادلة التفاضلية

$$y' = 25 + y^2$$

الحل :-

$$y = 5 \tan 5x$$

$$y' = 25 \sec^2 5x$$

وبالتعويض في طرفي المعادلة التفاضلية :-

$$\begin{aligned} 25 \sec^2 5x &= 25 + (5 \tan 5x)^2 \\ 25 \sec^2 5x &= 25 + 25 \tan^2 5x \\ 25 \sec^2 5x &= 25 (1 + \tan^2 5x) \\ \sec^2 5x &= 1 + \tan^2 5x \\ 25 \sec^2 5x &= 25 \sec^2 5x \end{aligned}$$

إن الطرف الأيمن = الطرف الأيسر ولذلك فإن الدالة هي حل للمعادلة التفاضلية أعلاه .

#### 2.4.1 طريقة فصل المتغيرات

إن المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى تكتب على الصورة التالية :-

$$M_{(x,y)} dx + N_{(x,y)} dy = 0 \dots\dots\dots(15-1)$$

حيث إن كل من  $M$  ,  $N$  هي دوال متصلة في  $x$  ,  $y$  وكمثال المعادلة

$$y dx + x^2 y^2 dy = 0$$

هي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى حيث إن :-

$$M(x, y) = y, N(x, y) = x^2 y^2$$

مثال (5.1)

المعادلة التفاضلية  $x y' + 2 y^2 = 0$  هي معادلة من الرتبة الأولى

حيث بترتيب المعادلة نحصل على  $x \frac{dy}{dx} + 2y^2 = 0$  وبالضرب في

dx نحصل على :  $x dy + 2 y^2 dx = 0$  ومن مقارنة المعادلة مع المعادلات من الرتبة الأولى يتبين أن :-

$$M(x, y) = 2 y^2, N(x, y) = x$$

طرق حل المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى - طريقة فصل المتغيرات:-  
إذا تم كتابة المعادلة التفاضلية المرقمة (9-1) على صورة:-

$$M(x) dx + N(y) dy = 0 \dots\dots\dots(16-1)$$

حيث إن M هي دالة لـ (x) فقط , N هي دالة لـ (y) فقط  
ففي هذه الحالة يقال أن المعادلة (10) مفصولة المتغيرات ويمكن إيجاد حلها العام بالتكامل لكل حد على حدة . وإذا كتبت المعادلة على الصورة :

$$A(x)B(y) dx + C(x)D(y) dy = 0 \dots\dots\dots(17-1)$$

فإن المتغيرات في هذه الحالة تكون قابلة للفصل وبالقسمة على  
:-  $B(y), C(x)$

$$\frac{A(x)}{C(x)} dx + \frac{D(y)}{B(y)} dy = 0 \dots\dots\dots(18-1)$$

أو

$$P(x) dx + Q(y) dy = 0 \dots\dots\dots(19-1)$$

مثال (6-1)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية باستخدام طريقة فصل

$$x dx - dy = 0 \quad \text{المتغيرات:}$$

الحل :

المعادلة هنا هي مفصولة المتغيرات ولذلك تكامل الحدود مباشرة

وكما يلي :-

$$\int x dx - \int dy = \int 0$$
$$\frac{x^2}{2} - y = C$$

وهو الحل العام للمعادلة

مثال (7.1)

أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية بطريقة فصل المتغيرات

$$x(1 + y^2) dx + dy = 0$$

الحل :-

بقسمة طرفي المعادلة التفاضلية على  $(1+y^2)$  نحصل على :-

$$x dx + \frac{dy}{1 + y^2} = 0$$

$$\int x dx + \int \frac{dy}{1 + y^2} = \int 0$$

أن الحل العام للمعادلة هو :-

$$\frac{x^2}{2} + \tan^{-1} y = C$$

### 3.4.1 المعادلات المتجانسة Homogeneous Equations :-

تعريف :- تسمى الدالة  $f(x, y)$  دالة متجانسة من الدرجة  $n$  إذا كان :

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

وكمثال على ذلك فإن الدالة :-

$$f(x, y) = x^2 - xy$$

هي دالة متجانسة من الدرجة الثانية لأن :-

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 - (\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2 x^2 - \lambda^2 xy = \lambda^2(x^2 - xy) \\ = \lambda^2 \cdot f(x, y)$$

مثال آخر :-

$$f(x, y) = x^2 + 2xy - \frac{y^3}{x} \quad \text{..... الدالة}$$

هي دالة متجانسة من الدرجة الثانية لأن :-

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + 2(\lambda x)(\lambda y) - \frac{(\lambda y)^3}{\lambda x}$$

$$= \lambda^2 x^2 + 2\lambda^2 xy - \frac{\lambda^3 y^3}{\lambda x}$$

$$= \lambda^2 \left( x^2 + 2xy - \frac{y^3}{x} \right) = \lambda^2 \cdot f(x, y)$$

تعريف :-

يقال للمعادلة التفاضلية المرقمة (15-1) أو

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

بأنها متجانسة إذا كانت كل من  $M$ ,

$N$  دوال متجانسة من نفس الدرجة .

مثال (8.1)

ناقش المعادلة التفاضلية التالية من حيث التجانس

$$2xydx - (x^2 + y^2)dy = 0$$

الحل :-

$$M(\lambda x, \lambda y) = 2(\lambda x)(\lambda y) = 2\lambda^2 xy = \lambda^2(2xy) = \lambda^2 \cdot M(x, y)$$

$$N(\lambda x, \lambda y) = -[(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2] = -[\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2] = \lambda^2[-(x^2 + y^2)]$$

$$= \lambda^2 N(x, y)$$

ولذلك فإن كلا " من  $M$  ,  $N$  هي دوال متجانسة من نفس الدرجة وبالتالي تكون المعادلة التفاضلية معادلة متجانسة من الرتبة الأولى .

إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة باستخدام خطوات الحل

التالية:-

1 - بفرض أن  $y = vx$  حيث ان  $v$  هي دالة لـ  $x$  ومنها نستنتج أن  
 $dy = v dx + x dv$

2 - يتم التعويض في المعادلة التفاضلية الأصلية عن كل من  $y$  ,  $dy$  حتى  
نصل إلى معادلة قابلة للفصل بالنسبة لكل من  $x$  ,  $v$  .

3 - إيجاد الحل العام للدالة  $v$  ومن ثم التعويض عن  $v = y/x$  لغاية  
الحصول على الحل العام في  $y$  .

مثال (9.1)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة التالية :

$$(y^2 + yx)dx - x^2 dy = 0$$

الحل :-

بما أن المعادلة متجانسة أصلاً " يفرض أن

$$y = vx , \quad dy = v dx + x dv$$

$$v^2 x^2 + vx^2 dx - x^2(v dx + x dv) = 0, v^2 x^2 dx + v x^2 dx - v x^2 dx - x^3 dv = 0$$

أو  $v^2 x^2 dx - x^3 dv = 0$  ، وبقسمة الطرفين على  $v^2 x^3$  نحصل على :

$$\frac{dx}{x} + \frac{dv}{v^2} = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dv}{v^2} = \int 0$$

وبالتكامل ينتج أن :

$$\ln |x| - \frac{1}{v} = C$$

$$\ln |x| - \frac{x}{y} = C$$

وهو الحل العام للمعادلة المتجانسة .

مثال (10-1) أثبت أن المعادلة التفاضلية التالية :-

$$-y dx + (x + \sqrt{xy}) dy = 0$$

متجانسة وأوجد حلها العام .

الحل :

$$M(\lambda x, \lambda y) = -\lambda y = \lambda(-y) = \lambda \cdot M(x, y)$$

$$\begin{aligned} N(\lambda x, \lambda y) &= \lambda x + \sqrt{\lambda^2 xy} \\ &= \lambda x + \lambda \sqrt{xy} = \lambda [x + \sqrt{xy}] = \lambda \cdot f(x, y) \end{aligned}$$

$N, M$  دوال متجانسة من درجة واحدة وبذلك تكون المعادلة التفاضلية

متجانسة و لإيجاد الحل العام لها :-

نفرض إن  $y = vx$  : إذن  $dy = v dx + x dv$  ونعوض كلا من  $y$  ,  
 $dy$  في المعادلة التفاضلية :  
 $-vxdx + [x + \sqrt{vx^2}][vdx + xdv] = 0, -vxdx + vxdx + x^2 dv + vx\sqrt{v}dx + x^2\sqrt{v}dv = 0$

$$, x^2 v\sqrt{v} \text{ و بالقسمة على } \frac{xdx}{x^2} + \left[ \frac{1 + \sqrt{v}}{v\sqrt{v}} \right] dv = 0 ,$$

$$\text{أو } vx\sqrt{v}dx + (1 + \sqrt{v})x^2 dv = 0$$

$$\text{و بالتكامل نحصل على : } \frac{dx}{x} + (v^{-3/2} + v^{-1})dv = 0$$

$$v = \frac{y}{x} \text{ حيث } \ln|x| - \frac{2}{\sqrt{v}} + \ln|y| = C$$

#### 1.4.4 المعادلات التامة (Exact Equations)

تعريف :-

تسمى المعادلة التفاضلية (15.1) :

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

معادلة تامة إذا وجدت دالة مثل  $u(x, y)$  بحيث يكون :

$$u(x, y) = C \text{ ويكون الحل العام لها } \frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y), \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$$

وكمثال فإن المعادلة التفاضلية  $0 = ydx + xdy$  هي معادلة تامة لأنه

توجد دالة مثل  $u(x, y) = xy$  ويكون في هذه

الحالة  $N = x = \frac{\partial u}{\partial y}$  ,  $M = y = \frac{\partial u}{\partial x}$  و يكون حلها العام هو  $xy = C$  وإذا

كانت المعادلة التفاضلية تامة فإن :  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

لذا فإن المعادلة التفاضلية أعلاه هي معادلة تامة و ذلك لأن :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1, \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{أي أن :}$$

مثال (11.1)

أثبت أن المعادلة التفاضلية:  $xy^2 e^{x^2} dx + y e^{x^2} dy = 0$  هي تامة .

الحل :-

بمقارنة المعادلة أعلاه مع المعادلة (15-1) نستنتج أن :

$$M = xy^2 e^{x^2}, N = y e^{x^2}$$

نفاضل  $M$  جزئيا " نسبة لـ  $y$  ونفاضل  $N$  جزئيا " أيضا " نسبة لـ  $x$  أي:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xye^{x^2}, \frac{\partial N}{\partial x} = 2xye^{x^2}$$

وهذا يعني أن :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

أي إن المعادلة المذكورة هي معادلة تامة .

إيجاد الحل العام للمعادلة التامة :-

1- من التعريف توجد دالة مثل  $u(x, y)$  بحيث أن :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M \dots\dots\dots(20-1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N \dots\dots\dots(21-1)$$

2 - نختار أحد المعادلتين (16-1) ، (17-1) فمثلا " في حالة اختيار المعادلة رقم (16-1) ، نحفظ بـ  $y$  ثابتة و نكامل نسبة لـ  $x$  فنحصل على:

$$u(x,y) = \int M dx = M(x) + g(y) \dots \dots \dots (22-1)$$

3 - نشق المعادلة (16-1) بالنسبة لـ  $y$  ونساويها للمعادلة (17-1)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \bar{g}(y) = N \dots \dots \dots (23-1)$$

$$\therefore g(y) = \int N dy \dots \dots \dots (24-1)$$

4 - التعويض في المعادلة (16-1) عن قيمة  $g(y)$  فنحصل على حل المعادلة العام وهو :

$$u(x, y) = C$$

مثال (12-1)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التامة التالية :-

$$(x^2 y + 3x) dx + \left(\frac{1}{3} x^3 + e^y\right) dy = 0$$

الحل :-

حيث أن المعادلة تامة من المسألة ، من التعريف توجد دالة وهي :

$u(x, y)$  بحيث أن :-

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = \frac{1}{3} x^3 + e^y \quad \text{و} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = M = x^2 y + 3x$$

ولذلك سنحفظ بـ  $y$  ثابتة و نكامل  $u$  بالنسبة لـ  $x$  فنحصل على :

$$u(x,y) = \int (x^2 y + 3x) dx = \frac{1}{3} x^3 y + \frac{3}{2} x^2 + g(y) \dots \dots \dots (I)$$

نشق المعادلة (I) بالنسبة لـ  $y$  ونساويها لـ  $N$  فنحصل على :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^3}{3} + \bar{g}(y) = \frac{x^3}{3} + e^y, \therefore \bar{g}(y) = e^y$$

$$g(y) = \int \bar{g}(y) dy = \int e^y dy = e^y + k$$

وبتعويض قيمة  $g(y)$  في المعادلة (1) نحصل على الحل العام للمعادلة وكما يلي :

$$\frac{x^3 y}{3} + \frac{3}{2} x^2 + e^y + k = C$$

$$\frac{x^3 y}{3} + \frac{3}{2} x^2 + e^y = c$$

حيث إن الثابت C يحتوي الثابت k .

مثال (13-1)

أثبتت إن المعادلة التفاضلية التالية هي تامة ثم أوجد حلها العام :

$$(x + \sin y)dx + (x \cos y + \sin y)dy = 0$$

الحل :

من مقارنة المعادلة أعلاه مع المعادلة (9-1) يتبين أن :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M = x + \sin y \dots\dots\dots (1-12-1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = x \cos y + \sin y \dots\dots\dots (2-12-1)$$

من معادلة (2-12-1) نحتفظ بـ x ثابتة و نكامل بالنسبة لـ y فنحصل على:

$$u(x, y) = \int (x \cos y + \sin y) dy = x \sin y - \cos y + f(x) \dots\dots\dots (3-12-1)$$

نشتق المعادلة (3-12-1) بالنسبة لـ x ونساويها للمعادلة (1-12-1):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sin y + \bar{f}(x) = x + \sin y \rightarrow \bar{f}(x) = x \Rightarrow f(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2} + k$$

وبالتعويض عن قيمة  $f(x)$  في المعادلة (3-12-1) نحصل على  
الحل العام للمعادلة وهو :-

$$x \sin y - \cos y + \frac{x^2}{2} + k = C \Rightarrow x \sin y - \cos y + \frac{x^2}{2} = C$$

### 5.4.1 العوامل التكاملية (Integral Factors)

لو كانت المعادلة

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad \dots\dots\dots(15-1)$$

غير تامة، فمن الضروري أن توجد دالة مثل  $\mu(x, y)$  بحيث إذا ضربت تلك الدالة في المعادلة (15) تصبح الدالة تامة، في هذه الحالة تسمى  $\mu(x, y)$  بالعامل التكامل للمعادلة أو (I.F) وكمثال على ذلك فالمعادلة  
 $-y dx + x dy = 0$

ليست تامة لأنه

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -1, \frac{\partial N}{\partial x} = 1 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

لكن لو تذكرنا العلاقة :

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2}$$

لوجدنا أن الدالة  $\frac{1}{x^2}$  هي عامل تكامل للمعادلة التفاضلية،

وكذلك لو تذكرنا العلاقة :

$$d\left(\frac{-x}{y}\right) = \frac{-ydx + xdy}{y^2}$$

لوجدنا أن الدالة  $\frac{1}{y^2}$  هي أيضا عامل تكاملي للمعادلة التفاضلية. من المثال السابق نلاحظ إنه قد يوجد أكثر من عامل تكاملي لنفس المعادلة التفاضلية كما يلاحظ وجود صعوبة أيضا في إيجاد العامل التكاملي .

إيجاد العامل التكاملي بالطريقة المباشرة :

لو كانت المعادلة التفاضلية :

$$\mu \cdot M \cdot dx + \mu \cdot N \cdot dy = 0$$

معادلة تامة فإن:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu \cdot M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu \cdot N)$$

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

$$\mu \cdot \frac{\partial M}{\partial y} - \mu \frac{\partial N}{\partial x} = N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y}$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y}}{\mu}$$

$$\therefore \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{M}{N} \frac{\partial \mu}{\partial y}$$

و لو فرضنا أن الدالة أن  $\mu$  :

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dx}, \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$$

بالتعويض في العلاقة أعلاه ينتج أن :

$$f(x) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} \Rightarrow f(x) dx = \frac{\partial \mu}{\mu} \Rightarrow \int f(x) dx = \int \frac{d\mu}{\mu} \text{ أو } \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

$$\ln \mu = \int f(x) dx$$

حيث أن :

$$f(x) = \frac{M_{(y)} - N_{(x)}}{N}$$

مثال (14-1)

أوجد العامل التكامل للمعادلة التفاضلية التالية وجد حلها العام:

$$(2y+4)dx + xdy = 0$$

الحل :

المعادلة غير تامة لأن :  $N = x$  ,  $M = 2y+4$  , حيث

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2$  ,  $\frac{\partial N}{\partial x} = 1$  ولذلك يجب أن نحصل على الدالة  $\mu(x,y)$  وقبلها يجب

أن نحصل على  $f(x)$  :

$$f(x) = \frac{M(y) - N(x)}{N} = \frac{2 - 1}{x} = \frac{1}{x}$$

$$\mu(x) = e^{\int f(x) dx} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

وبضرب العامل التكامل في المعادلة التفاضلية الأصلية نحصل على :

$$[ (2y+4)dx + xdy = 0 ] (x)$$

$$(2xy+4x)dx + x^2dy = 0$$

وهي معادلة تامة لأن :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x, \frac{\partial N}{\partial x} = 2x,$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

وحيث أن المعادلة أعلاه هي تامة , فتوجد دالة هي  $u(x,y)$  بحيث إن :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M = 2xy + 4x \dots\dots\dots (1-13-1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = x^2 \dots\dots\dots (2-13-1)$$

من معادلة (1-13-1) نحفظ بـ  $y$  ثابتة و نكامل بالنسبة لـ  $x$

$$u(x, y) = \int (2xy + 4x) dx = \frac{2x^2 y}{2} + \frac{4x^2}{2} + g(y) = x^2 y + 2x^2 + g(y) \dots\dots\dots (3-13-1)$$

نشتق المعادلة (3-13-1) بالنسبة إلى  $y$  ونساويها للمعادلة (2-13-1) :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + \bar{g}(y) = x^2 = N \Rightarrow \bar{g}(y) = 0 \rightarrow \therefore g(y) = k$$

بالتعويض في المعادلة (3-13-1) عن قيمة  $g(y)$  نحصل على :

$$x^2 y + 2x^2 + k = c$$

$$x^2 y + 2x^2 = C$$

أو

ملاحظة عامة : إذا كانت  $\mu$  دالة في  $y$  فقط فإن العامل التكامل في هذه الحالة

يكون :

$$g(y) = \frac{M(y) - N(x)}{-M} \quad \text{حيث أن} \quad \mu(y) = e^{\int g(y) dy}$$

مثال (15-1)

أوجد العامل التكاملي للمعادلة التفاضلية  $2ydx + xdy = 0$

الحل :-

$$g(y) = \frac{M(y) - N(x)}{-M} = \frac{2 - 1}{-2y} = \frac{-1}{2y}$$

$$\mu(y) = e^{\int g(y) dy} = e^{-\int \frac{1}{2y} dy} = e^{-\frac{1}{2} \int \frac{1}{y} dy}$$

$$\therefore \mu(y) = e^{-\frac{1}{2} \ln y} = e^{\ln y^{-\frac{1}{2}}} = y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

إذن العامل التكاملي هو :  $\frac{1}{\sqrt{y}}$

حالات خاصة لاستخدام العوامل التكاملية عن طريق الملاحظة

مثال (16-1)

بين أن  $\frac{1}{x^2 + y^2}$  هو عامل تكاملي للمعادلة التفاضلية التالية ثم أوجد

حلها العام

$$(x^2 + y^2 - x) dx - y dy = 0$$

الحل :-

من مقارنة المعادلة أعلاه مع المعادلة (15) يتبين أن :

$M = x^2 + y^2 - x$  ,  $N = -y$  والمعادلة ليست تامة لأن

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y, \frac{\partial N}{\partial x} = -1 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

وبضرب المعادلة التفاضلية في المقدار التالي

$$\frac{1}{x^2 + y^2}$$

و بعد ترتيبها بالشكل التالي نحصل على :-

$$[(x^2 + y^2 - x)dx - ydy = 0] \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right)$$

$$\left( 1 - \frac{x}{x^2 + y^2} \right) dx - \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) dy = 0$$

$$M = 1 - \frac{x}{x^2 + y^2}, N = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{2xy}{x^2 + y^2}, \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

أصبحت المعادلة الآن تامة وبإعادة الترتيب نستنتج :-

$$dx - \frac{xdx}{x^2 + y^2} - \frac{ydy}{x^2 + y^2} = 0$$

$$dx - \left( \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} \right) = 0 \quad \therefore x - \frac{1}{2} \ln|x^2 + y^2| = C$$

$$\int dx - \int \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \int 0$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية

مثال (17-1)

أوجد عامل تكاملي مناسب للمعادلة التفاضلية

$$ydx + (x^2y^3 + x)dy = 0$$

الحل :

$$\text{وهذا يعني أن المعادلة ليست } \frac{\partial M}{\partial y} = 1.0, \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy^3 + 1$$

تامة وهي من الحالات الخاصة للعامل التكاملي لأنها تحتوي المقدار

$$(x^2y^3) \text{ ولذلك نقوم بترتيب المعادلة ونضربها بالمقدار } \frac{1}{x^2y^2}$$

فحصل على :

$$ydx + x^2 y^3 dy + xdy = 0$$

$$xdy + ydx + x^2 y^3 dy = 0$$

وبضرب المعادلة في العامل التكامل  $\frac{1}{x^2 y^2}$  يصبح لدينا الحل العام

للمعادلة بالشكل الآتي :

$$[d(xy) + x^2 y^3 dy = 0] \left( \frac{1}{x^2 y^2} \right)$$

$$\int \frac{d(xy)}{(xy)^2} + \int ydy = \int 0 \Rightarrow -\frac{1}{xy} + \frac{y^2}{2} = C$$

نستنتج مما سبق أنه :

1. إذا احتوت المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى على الترتيب  $(xdx+ydx)$  فيجب تجربة الدوال من النوع  $(x^2+y^2)$  أو  $\frac{1}{x^2+y^2}$  كعامل تفاضلي تضرب به المعادلة .

2. إذا احتوت المعادلة على الترتيب  $[xdy+ydx = d(xy)]$  , فيجب تجربة دوال من نوع  $(xy)$  أو  $\frac{1}{xy}$  كعامل تكاملي تضرب به المعادلة .

3 . أما إذا احتوت المعادلة على الترتيب  $(xdy - ydx)$  أو  $(ydx - xdy)$  فيجب تجربة دوال من نوع  $\frac{1}{x^2}$  أو  $\frac{1}{y^2}$  كعامل تكاملي تضرب فيه المعادلة.

### الحل الخاص للمعادلات التفاضلية

في كل الحالات السابقة التي تم نكرها والحالات القادمة يكون الحل الخاص للمعادلة التفاضلية هو بمعرفة قيمة معينة للثابت (C) ولذلك يتوجب الأمر أن يكون معلوما لدينا قيم لكل من  $x$  ,  $y$  وحسب عدد الثوابت الموجودة في الحل العام .

مثال (18-1)

أوجد عامل تكاملي للمعادلة التفاضلية  $x dy - y dx - (4x^2 + y^2) dy = 0$  وحل

المعادلة .

الحل :

$$x dy - y dx = (4x^2 + y^2) dy$$

هذه المعادلة تختلف عن سابقتها لأنها تحتوي المعامل  $(4x^2 + y^2)$  ولذلك لا يمكن حلها بالطرق التقليدية ولذلك سنقوم بتحويل المعادلة إلى الصيغة من نوع  $d\left(\frac{y}{x}\right)$  و إكمال الحل بالشكل التالي :-

$$\therefore d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x dy - y dx}{x^2}, d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y dx - x dy}{y^2}$$

$$\therefore [x dy - y dx = (4x^2 + y^2) dy] \left[ \frac{1}{x^2} \right]$$

$$\therefore \frac{x dy - y dx}{x^2} = \frac{(4x^2 + y^2) dy}{x^2}$$

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \left(4 + \frac{y^2}{x^2}\right) dy$$

$$\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{4 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = dy \Rightarrow \int \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{4 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \int dy \rightarrow \therefore \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{y}{2x}\right) = y + C$$

مثال (19-1)

أوجد الحل الخاص بالمعادلة التفاضلية :

$$(x^2 + 3y^2) dx - 2xy dy = 0$$

إذا كان :

$$x = 4, y = 3$$

الحل :- إن المعادلة أعلاه هي من المعادلات المتجانسة لأن :

$$M(\lambda x, \lambda y) = [(\lambda x)^2 + 3(\lambda y)^2] = \lambda^2 x^2 + 3\lambda^2 y^2 = \lambda^2 (x^2 + 3y^2) = \lambda^2 M(x, y)$$

$$N(\lambda x, \lambda y) = -2(\lambda x)(\lambda y) = -2\lambda^2 xy = \lambda^2 (-2xy) = \lambda^2 N(x, y)$$

ولذلك فإن حل المعادلة يكون بفرض أن :

$$y = v x$$

$$dy = v dx + x dv$$

إذن :

أي أن :

$$(x^2 + 3v^2 x^2) dx - 2x^2 v (x dv + v dx) = 0$$

$$x^2 dx + 3v^2 x^2 dx - 2x^3 v dv - 2v^2 x^2 dx = 0$$

$$\therefore x^2 dx + v^2 x^2 dx - 2x^3 v dv = 0$$

$$x^2 (1 + v^2) dx - 2x^3 v dv = 0 \dots\dots\dots (I)$$

وبقسمة المعادلة الأخيرة على المقدار  $[x^3(1+v^2)]$  نحصل على المعادلة

التالية :

$$\frac{dx}{x} - \frac{2v dv}{1+v^2} = 0 \rightarrow \int \frac{dx}{x} - \int \frac{2v dv}{1+v^2} = \int 0$$

وعند التكامل ينتج :

$$\ln |x| - \ln |1 + v^2| = C$$

$$\ln |x| - \ln \left| 1 + \frac{y^2}{x^2} \right| = C$$

$$\ln \left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} \right| = C \rightarrow x = 4, y = 3 \Rightarrow C = \ln \frac{64}{25}$$

والحل الخاص للمعادلة التفاضلية يكون :

$$\frac{x^3}{x^2 + y^2} = \frac{64}{25}$$

### 1. 6.4 المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى .

المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى تكتب على الصورة التالية :

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \dots \dots \dots (25-1)$$

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y) \dots \dots \dots (26-1)$$

حيث أن  $P, Q$  دوال متصلة في  $x, y$ . إن المعادلة (19) يمكن أن تكتب

على الصورة التالية :

$$(Py - Q) dx + dy = 0$$

$$f(x) = \frac{P - 0}{1} = P$$

$$\mu(x) = e^{\int f(x) dx} = e^{\int P(x) dx}$$

وبضرب المعادلة (19-1) في المعامل التكامل المأخوذ من المعادلة الأخيرة

نحصل على :

$$e^{\int P(x) dx} \frac{dy}{dx} + e^{\int P(x) dx} P(x)y = e^{\int P(x) dx} Q(x)$$

$$\frac{d}{dx} (ye^{\int P(x) dx}) = e^{\int P(x) dx} Q(x)$$

وبتكامل الطرفين بالنسبة لـ  $x$  نحصل على :-

$$ye^{\int P(x)dx} = \int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx + C$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية .

مثال (20-1)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية التالية :

$$\frac{dy}{dx} + 2 \frac{y}{x} = 4x$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

الحل:

بمقارنة المعادلتين نستنتج أن :

$$P(x) = \frac{2}{x}, Q(x) = 4x$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{2 \int \frac{1}{x} dx} = e^{2 \ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$$

بالتعويض في الصيغة العامة لإيجاد الحل العام :

$$yx^2 = \int x^2 \cdot 4x dx + C$$

$$yx^2 = x^4 + C$$

$$y = x^2 + \frac{C}{x^2}$$

مثال (21-1)

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية :

$$1 - \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = e^x$$

$$2 - x \frac{dy}{dx} + y = x^2 \cos x$$

الحل :

من مقارنة المعادلة الموجودة في الفرع رقم 1 نجد أن :

$$P(x) = \frac{1}{x}, Q(x) = e^x$$

إن العامل التكامل للمعادلة الأولى هو

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

وبالتعويض في صيغة الحل العام :

$$ye^{\int P(x) dx} = \int e^{\int P(x) dx} Q(x) dx + C$$

$$yx = \int xe^x dx + C \Rightarrow yx = xe^x - \int e^x dx \rightarrow yx = xe^x - e^x + C$$

وهو الحل العام لمعادلة الفرع الأول .

أما بالنسبة لحل معادلة الفرع رقم 2 فهو كالتالي :

$$x \frac{dy}{dx} - y = x^2 \cos x$$

$$x \frac{dy}{dx} - y = x^2 \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x \cos x$$

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x}$$

$$\mu(x) = e^{\ln x^{-1}} = \frac{1}{x} \quad \text{أذن :}$$

بالتعويض في صيغة الحل العام :

$$y \frac{1}{x} = \int \frac{1}{x} (x \cos x) dx + C \Rightarrow \frac{y}{x} = \sin x + C$$

### 1 - 4 - 7 المعادلات اللاخطية " معادلة برنولي "

هذه المعادلات تكون على الصيغة :-

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, n \neq 0,1$$

الفكرة تكمن هنا في تحويل المعادلة غير الخطية إلى معادلة خطية

والطريقة هي :

نضع :  $z = y^{1-n}$  و ثم نشتق  $z$  نسبة لـ  $x$ .

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx}$$

وبالتعويض في معادلة برنولي :

$$\frac{1}{(1-n)y^{-n}} \frac{dz}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)y^{-n} \cdot P(x)y = (1-n)y^n Q(x)y^{-n}$$

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)y^{1-n} = (1-n)Q(x)$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

مثال (22-1)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية اللاخطية التالية :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = xy^2$$

الحل :

بالتعويض عن  $z = y^{-n}$  في المعادلة الأصلية كما سبق شرحه .

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x), n = 2$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} - \frac{2}{x}z = -x$$

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x} dx} = e^{-2 \int \frac{dx}{x}} = e^{-2 \ln x} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

بالتعويض في صيغة الحل العام :

$$z \frac{1}{x^2} = \int \frac{1}{x^2} (-x) dx + C$$

$$\frac{z}{x^2} = - \int \frac{1}{x} dx + C$$

$$\frac{z}{x^2} = - \ln |x| + C$$

$$\frac{1}{x^2 y^2} = - \ln |x| + C$$

مثال (23-1) :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية اللاخطية التالية :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^3 y^3}$$

الحل :

بما أن  $n = 3$  , نضع

$$z = y^{1-n} = y^{1-(-3)} = y^4$$

$$\frac{dz}{dx} = 4y^3 \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4y^3} \frac{dz}{dx}$$

بالتعويض في معادلة برنولي :-

$$\frac{1}{4y^3} \frac{dz}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^3 y^3}$$

$$\frac{dz}{dx} + \frac{4}{x} y^4 = \frac{4}{x^3}$$

$$\frac{dz}{dx} + \frac{4}{x} z = \frac{4}{x^3}$$

$$\mu(x) = e^{4 \int \frac{1}{x} dx} = e^{4 \ln x} = e^{\ln x^4} = x^4$$

بالتعويض في صيغة الحل العام :

$$z \cdot x^4 = \int x^4 \cdot \frac{4}{x^3} dx + C \rightarrow zx^4 = \int 4x dx + C = 4 \int x dx + C \Rightarrow zx^4 = 2x^2 + C$$

أو :

$$x^4 y^4 = 2x^2 + C$$

## 5-1 المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة العليا ( الرتبة n )

المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة العليا تكتب على الصورة التالية :

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + a_2(x)y^{(n-2)}(x) + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \dots (27-1)$$

حيث أن:  $a_n, \dots, a_1, a_0$ ،  $f$  هي دوال متصلة في  $x$  والمعادلة أعلاه يمكن أن تكتب كما يلي :

$$a_0(x)D_x^n y(x) + a_1(x)D_x^{n-1} y(x) + \dots + a_{n-1}(x)Dy(x) + a_n(x)y = f(x) \dots (28-1)$$

حيث أن  $D_x$  هو مؤثر تفاضلي يشير إلى أن الدالة التي يؤثر عليها يجب مفاضلتها نسبة لـ  $x$  ، وكمثال على ذلك فإن :

$$D_{(x)}(\sin x) = \cos x$$

$$D_x^2(\sin x) = -\sin x$$

لنأخذ المعادلة التفاضلية التالية من الرتبة الثانية كمثال آخر حيث أن :

$$D^2 y(x) + y(x) = e^x$$

تعني أن :

$$y''(x) + y(x) = e^x$$

و إذا استخدمنا المؤثر الخطي  $L$  حيث أن  $L$  تساوي :

$$L = D^n + D^{n-1} + \dots + \dots + D.$$

فإن المعادلة (27) يمكن أن تكتب على الصورة التالية :-

$$Ly(x) = f(x)$$

وإذا كانت  $n = 2$  فإن المعادلة (27) يمكن كتابتها بالشكل أدناه :

$$a_0(x)D^2 y(x) + a_1(x)Dy(x) + a_2(x)y(x) = f(x)$$

وإذا فرضنا أن  $a_0(x) \neq 0$  وبالقسمة على  $a_0(x)$  ينتج :

$$D^2 y(x) + \frac{a_1(x)}{a_0(x)} Dy(x) + \frac{a_2(x)}{a_0(x)} y(x) = \frac{f(x)}{a_0(x)}$$

$$D^2 y(x) + P(x)Dy(x) + q(x)y(x) = S(x) \dots \dots \dots (29-1)$$

$$y''(x) + P(x)y'(x) + q(x)y(x) = S(x)$$

حيث أن  $P, q, S$  هي دوال متصلة في  $x$  . وإذا كانت  $S(x) = 0$  فإن

المعادلة (27-1) تصبح :-

$$D^2 y(x) + P(x)Dy(x) + q(x)y(x) = 0 \dots \dots \dots (30-1)$$

وتسمى هذه المعادلة بالمعادلة التفاضلية المتجانسة من الرتبة الثانية .

مبرهنة 1:

إذا كان كل من  $y_1, y_2$  حل للمعادلة التفاضلية المتجانسة المرقمة (30-1)

فإن:

$$y_3 = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

تعرف أيضا حل "علما" أن  $C_1, C_2$  هما ثابتان اختياريان .

البرهان :

باستخدام المؤثر الخطي  $L$  ينتج أن :

$$Ly_3 = L(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1 (Ly_1) + C_2 (Ly_2)$$

$$= 0 + 0 = 0 \rightarrow y_3$$

هو حل للمعادلة

مثال (24-1)

إذا كان  $y_2 = \cos x, y_1 = \sin x$  حلان للمعادلة التفاضلية فإن :

$$D^2 y(x) + y(x) = 0 \dots \dots \dots (1-27-1)$$

ولذلك فإن  $y_3 = C_1 \sin x + C_2 \cos x$  تعرف أيضا حل وذلك لأن :

$$y_3' = C_1 \cos x - C_2 \sin x$$

$$y_3'' = -C_1 \sin x - C_2 \cos x$$

وبالتعويض في المعادلة (1-27-1) نحصل على :-

$$-C_1 \sin x - C_2 \cos x + C_1 \sin x + C_2 \cos x = 0$$

### الاستقلال الخطي

تعريف :

تكون الدوال  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$  , مستقلة خطيا إذا كان فقط :

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \dots + C_n y_n = 0 \text{ بشرط أن } C_1 = C_2 = \dots = 0$$

وفي حالة  $n = 2$  فإن الدالتان  $y_1, y_2$  تكون مستقلتان خطيا إذا كان  $C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0$  أي  $C_1 = C_2 = 0$  وهذا ما يسمى بالاستقلال الخطي :

للدالتين فمثلا إن أحد الدوال لا تكون بضعف قياس الدالة الأخرى أي أن  $\frac{y_1}{y_2}$

هي نسبة غير ثابتة .

ملاحظة : الدالتان غير المستقلتان خطيا تسميان بالدالتان المرتبطتان خطيا .

مثال (1-25)

بين أن الدالتان  $y_1 = \sin x, y_2 = \cos x$  هما مستقلتان خطيا .

الحل :

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

وهي نسبة غير ثابتة أي أن الدالتان مستقلتان خطيا.

مثال 1-26 :

أثبت أن الدالتان  $y_1 = x$  ,  $y_2 = 1$  مستقلتان خطيا .

الحل :

الدالتان مستقلتان خطيا لأن :  $\frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{x}$  وهي نسبة غير ثابتة .

مثال (1-27)

ناقش حالة الدوال التالية من حيث الاستقلال الخطي :

$$y_2 = 3 - 3\cos^2 x, y_1 = \sin^2 x$$

الحل :

$$y_2 = 3 - 3\cos^2 x = 3(1 - \cos^2 x) = 3\sin^2 x$$

أي أن :

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\sin^2 x}{3\sin^2 x} = \frac{1}{3}$$

وهي نسبة ثابتة , لذلك فإن الدالتين مرتبطتان خطيا.

طريقة محدد فرونسكي (Wronski Determinant Method)

إن الاختبار المبسط للتعرف على عدة دوال في كونها مستقلة أم غير

مستقلة خطيا هي طريقة محدد فرونسكي ويستعان فيها بالدالة  $W$  وهي دالة في

$x$  وتعرف كالاتي :

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_2 \\ \bar{y}_1 & \cdots & \bar{y}_2 \end{vmatrix}$$

أو ما يساوي  $W(x)$

### مبرهنة 1-1:

إذا كان  $y_1, y_2$  دالتين فإن  $y_1, y_2$  تسميان مستقلتان خطيا إذا كان :

$$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_2 \\ \bar{y}_1 & \dots & \bar{y}_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

وتسميان مرتبطتان خطيا إذا كان :

$$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_2 \\ \bar{y}_1 & \dots & \bar{y}_2 \end{vmatrix} = 0$$

### مثال (1-28)

باستخدام محدد فرونسكي أثبت أن الدالتان  $y_2 = e^{3x}, y_1 = e^{2x}$  مستقلتان خطيا .

الحل :

$$y_1 = e^{2x}, \bar{y}_1 = 2e^{2x}, y_2 = e^{3x}, \bar{y}_2 = 3e^{3x}$$

باستخدام محدد فرونسكي نجد أن :

$$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = 3e^{5x} - 2e^{5x} = e^{5x} \neq 0$$

### مبرهنة 2-1 :

إذا كان  $y_1, y_2$  حلان مستقلان خطيا للمعادلة التفاضلية المتجانسة من الرتبة الثانية فإن :

$$y_3 = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

تعرف أيضا حل .

## 1-5-1 المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية بمعاملات ثابتة

وهي من النوع :

$$D^2y(x) + a(x)Dy(x) + b(x)y(x) = S(x) \dots\dots\dots(31-1)$$

حيث أن :

$P = a$  ,  $q = b$  . و إذا كانت  $S = 0$  تصبح المعادلة بالشكل التالي :

$$D^2y(x) + a(x)Dy(x) + b(x)y(x) = 0 \dots\dots\dots(32-1)$$

الحلول العامة للمعادلة التفاضلية المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة :

الطريقة :

نبحث عن الحل العام للمعادلة في الصورة  $y = e^{rx}$  ومنها نستنتج أن

$$y' = r e^{rx}$$

$$y'' = r^2 e^{rx}$$

بالتعويض في المعادلة ( 32-1 ) نحصل على :

$$r^2 e^{rx} + a e^{rx} + b e^{rx} = 0$$

و منها على :

$$e^{rx} (r^2 + ar + b = 0) \text{ حيث أن } e^{rx} \neq 0 \text{ فنحصل على :}$$

$$r^2 + ar + b = 0 \dots\dots\dots(33-1)$$

وهذا يعني أن الدالة  $y = e^{rx}$  هي حل للمعادلة التفاضلية ( 32-1 ) إذا كان

فقط  $r$  هو جذر المعادلة رقم ( 32-1 ) .

طريقة إيجاد جذور المعادلة ( 1 - 32 ) :

باستخدام طريقة المميز

$$r = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \dots \dots \dots (34 - 1)$$

نستطيع معرفة قيمة  $r$

وهنا توجد ثلاث حالات :

(1) الجذور حقيقية وغير متساوية إذا كان الجذر التربيعي :  $\sqrt{a^2 - 4b} > 0$

(2) الجذور حقيقية ومتساوية إذا كان الجذر :  $\sqrt{a^2 - 4b} = 0$

(3) الجذور غير حقيقية " تخيلية " إذا كان :  $\sqrt{a^2 - 4b} < 0$

والمعادلة ( 34-1 ) تسمى بالمعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية برقم ( 32-1 )

### الحالات

أولا :

الجذران حقيقيان وغير متساويان : إذا كان  $r_1$  ,  $r_2$  جذران حقيقيان وغير

متساويان للمعادلة المميزة المرقمة (33-1) فإن

:  $y_1 = e^{r_1 x}$  ,  $y_2 = e^{r_2 x}$  هما حلان مستقلان خطيا للمعادلة التفاضلية

رقم ( 1 - 32 ) و "طبقا" للمبرهنة يكون  $y_c = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$  هو

الحل العام للمعادلة (32-1).

مثال (28-1)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية باستخدام المؤثر التفاضلي

$$y'' - 3y' + 2 = 0$$

الحل :

المعادلة أعلاه يمكن أن تكتب بالشكل التالي  $(D^2 - 3D + 2)y(x) = 0$

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

أو

$$(r - 2)(r - 1) = 0$$

أو

$$r_1 = 2, r_2 = 1$$

أي أن

$$y_1 = e^{2x}, y_2 = e^x$$

أو

وبالتعويض في المعادلة ( 32-1 ) نحصل على الحل العام وهو :

$$y_c = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$$

مثال (29-1)

برهن أن كل من الدالتين  $y_1 = e^x$  و  $y_2 = e^{-2x}$  هما حلين للمعادلة

التفاضلية التالية :

$$D^2 y(x) + Dy(x) - 2y(x) = 0$$

وأثبت أن الحل العام هو

$$y_3 = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

حيث  $C_1, C_2$  ثوابت.

الحل :

$$D^2 y(x) + Dy(x) - 2y(x) = 0$$

$$y_3 = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$$

$$y_3' = C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x}$$

$$y_3'' = C_1 e^x + 4e^{-2x}$$

وبالتعويض في المعادلة :  $D^2y(x)+Dy(x)-2y(x) = 0$  نحصل على :

$$C_1e^x + 4C_2e^{-2x} + C_1e^x - 2C_2e^{-2x} - 2[C_1e^x + C_2e^{-2x}] =$$

$$C_1e^x + 4C_2e^{-2x} + C_1e^x - 2C_2e^{-2x} - 2C_1e^x - 2C_2e^{-2x} =$$

$$2C_1e^x + 4C_2e^{-2x} - 2C_1e^x - 4C_2e^{-2x} = (2C_1e^x - 2C_1e^x) + (4C_2e^{-2x} - 4C_2e^{-2x}) = 0 + 0 = 0$$

مثال (1-30)

بين أن الدالتان التاليتان  $y_2 = \cos 2x, y_1 = \sin 2x$  مستقلتان خطيا ثم أكتب الحل

العام للمعادلة

الحل :

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \tan 2x$$

وهي نسبة غير ثابتة لذلك فإن الدالتان مستقلتان خطيا .

الحل العام لها هو :

$$y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$$

### 2.5.1 الحل العام للمعادلات التفاضلية المتجانسة من الرتبة الثانية

الحالة الأولى :

جنور المعادلة حقيقية ومختلفة أي أن  $r_1 \neq r_2$  ، يكون الحل العام للمعادلة

التفاضلية في هذه الحالة

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} \dots\dots\dots(35-1)$$

### مثال (31-1)

عين الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :

$$(D^2y - 7Dy + 12)y_{(x)} = 0$$

الحل :

$$r^2 - 7r + 12 = 0$$

المعادلة المميزة هي :

وهي معادلة جبرية قابلة للتحويل إلى العوامل الأولية وعند تحليلها نحصل على :

$$(r - 4)(r - 3) = 0$$

وعلى هذا الأساس فإن :

$$r_1 = 4, r_2 = 3$$

أي أن الحل العام للمعادلة هو :

$$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{3x}$$

### مثال (32-1)

أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية مستخدماً المؤثر التفاضلي :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

الحل :

$$D^2y + 5Dy + 6y = 0 \rightarrow r^2 + 5r + 6 = 0 \Rightarrow (r+3)(r+2) = 0 \rightarrow r_1 = -3, r_2 = -2$$

أي أن الحل العام :

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x}$$

الحالة الثانية :

جنور المعادلة حقيقية ومتساوية ( مكررة ) أي أن :

$$r = r_1 = r_2 = \dots = r_n$$

وفي هذه الحالة يكون الحل العام :

$$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx} + C_3 x^2 e^{rx} + \dots + C_n x^{n-1} e^{rx} = e^{rx} (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_n x^{n-1}) \quad (36-1)$$

مثال (33-1)

أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية بطريقة المؤثر التفاضلي

$$(D^2 + 4D + 4)y(x) = 0$$

الحل :

المعادلة المميزة هي :

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \text{ أو } (r + 2)^2 = 0$$

أي أن :

$$r_1 = r_2 = -2$$

وبذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية هو :

$$y_c = (C_1 + C_2 x) e^{-2x}$$

مثال (34-1) :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية بطريقة المؤثر التفاضلي :

$$(D^3 - 3D - 2)y(x) = 0$$

الحل :

المعادلة المميزة هي :

$$r^3 - 3r - 2 = 0$$

ومن الملاحظ أن أحد جذور المعادلة المميزة هو  $r = 2$  وهي القيمة التي تجعل الطرف الأيسر من المعادلة التفاضلية مساويا للصفر أي أن أحد عوامل المعادلة هو  $(r - 2)$  ولذلك نحصل على ما يلي باستخدام القسمة :

$$r^3 - 3r - 2 = (r - 2)(r^2 + 2r + 1)$$

أي أن :

$$r_1 = 2, r_2 = r_3 = -1$$

و يكون الحل العام :

$$y_c = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$$

أي أن الحل العام هو :-

$$y_c = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x}$$

الحالة الثالثة :

جنور المعادلة غير حقيقية " تخيلية " ويكون الحل العام للمعادلة كما يلي :

نفرض أن :

$$r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$$

هما جذري المعادلة حيث أن  $\alpha, \beta$  عدنان حقيقيان .

$$y_1 = e^{r_1 x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^\alpha \cdot e^{i\beta x} = e^\alpha [\sin \beta x + i \cos \beta x] \dots\dots (37 - 1)$$

$$y_2 = e^{r_2 x} = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^\alpha \cdot e^{-i\beta x} = e^\alpha [\sin \beta x - i \cos \beta x] \dots\dots (38 - 1)$$

$$\therefore y_c = y_1 + y_2 = e^{\alpha x} [C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x] \dots\dots\dots (39 - 1)$$

حيث أن :

$$r = \alpha \pm i\beta$$

و إذا كانت  $\alpha = 0$  فإن :

$$y_c = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x \quad \text{و} \quad r = \pm i\beta$$

مثال (35-1) :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية

$$(D^2 - 4D + 13)y(x) = 0$$

الحل :

المعادلة المميزة هي:

$$r^2 - 4r + 13 = 0$$

أي أن :

$$a = -4, b = 13$$

$$r = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - (4)(13)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$$

أي أن :

$$\alpha = 2, \beta = 3$$

إن الحل العام هو

$$y_c = e^{\alpha x} [C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x]$$

$$y_c = e^{2x} [C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x]$$

مثال (36-1) :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :

$$(D^2 - 6D + 34)y(x) = 0$$

الحل :

المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية أعلاه هي :

$$\left. \begin{aligned} r^2 - 6r + 34 &= 0 \\ \therefore r &= \frac{6 \pm \sqrt{(6)^2 - (4)(34)}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 136}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-100}}{2} \\ &= \frac{6 \pm 10i}{2} = 3 \pm 5i \Rightarrow \therefore \alpha = 3, \beta = 5 \\ \therefore y_c &= e^{3x} [C_1 \sin 5x + C_2 \cos 5x] \end{aligned} \right\}$$

مثال (37-1) :

عين الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية مستخدما المؤثر التفاضلي :

$$(D^2 + 1)y(x) = 0$$

الحل:

نعوض بالمعادلة المميزة وهي :

$$r^2 + 1 = 0$$

ومنها نستنتج أن :

$$r = \pm j \quad \text{أو} \quad r = \pm\sqrt{-1}$$

أي أن

$$\alpha = 0, \beta = \pm 1$$

ومنها نستنتج أن الحل العام هو

$$y_c = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

3-5-1 الحل العام للمعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة

معادلة كوش - أديلر :-

من المعلوم أن المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات

المتغيرة تكتب بالشكل التالي :-

$$L(x) = [a_0(x)D^2 + a_1(x)D + a_2(x)]y(x) = S(x) \dots (40-1)$$

وهذه المعادلة صعبة الحل بصورة عامة إذا كانت المعاملات  $a_n, \dots, a_2, a_1$

متغيرة ولكن في بعض الأحيان يمكن تحويل المعادلة التفاضلية ذات المعاملات

المتغيرة إلى معادلة تفاضلية بمعاملات ثابتة وذلك بإستخدام تعويض مناسب

للمتغيرات وتعطي معادلة " كوش - أديلر " التفاضلية التالية مثلا توضيحيا على

ذلك .

$$L_y(x) = (x^n D_x^n + a_1 x^{n-1} D_x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x D_x + a_0) y(x) = S(x) \dots \dots (41-1)$$

حيث أن كل من  $x$  ,  $D_x$  لهما نفس الأس في كل حد ويتم حذف المتغير  $x$  عن طريق التعويض التالي :

$$x = e^t \text{ أو } t = \ln x$$

ثم نرمز إلى الرمز  $\frac{d}{dt}$  بالحرف  $D$  وملاحظة أن  $\frac{1}{x} = \frac{dt}{dx}$  سنحصل على:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} * \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} * \frac{1}{x} = \frac{1}{x} Dy$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dt} * \frac{1}{x} \right) = \frac{dy}{dt} \left( -\frac{1}{x^2} \right) + \frac{1}{x} \frac{d^2 y}{dx dt} = -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2} \frac{d^2 y}{dt^2} \\ &= \frac{1}{x^2} \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x^2} D(D-1)y \dots \dots \dots (42-1) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{1}{x^3} D(D-1)(D-2)y \dots \dots \dots (43-1)$$

$$\therefore \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1}{x^n} D(D-1)(D-2) \dots \dots (D-n+1)y \dots \dots \dots (44-1)$$

مثال (39-1)

عين الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :

$$x^2 y'' + xy' = 0$$

الحل :

$$x^2 \cdot \frac{1}{x^2} D(D-1)y + x \cdot \frac{1}{x} Dy = 0$$

أي أن :

$$D(D-1)y + Dy = 0$$

أو :

$$D^2 y = 0$$

أي :

$$r^2 = 0, \quad r_1 = r_2 = 0$$

وبذلك يكون الحل العام للمعادلة هو :

$$y_c = C_1 + C_2 \ln x \quad \text{أو} \quad y_c = C_1 + C_2 t$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية .

مثال (40-1)

عين الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$x^3 y''' + 5x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$$

الحل :

$$x^3 \cdot \frac{1}{x^3} D(D-1)(D-2)y + 5x^2 \cdot \frac{1}{x^2} D(D-1)y + 2x \frac{1}{x} Dy - 2y = 0$$

$$[D(D-1)(D-2)y + 5D(D-1)y + 2Dy - 2y] = 0$$

$$[D(D-1)(D-2) + 5D(D-1) + 2D - 2]y = 0$$

$$[D(D^2 - 3D + 2) + 5D^2 - 5D + 2D - 2]y = 0$$

$$[D^3 - 3D^2 + 2D + 5D^2 + 2D - 2]y = 0$$

$$[D^3 + 2D^2 - D - 2]y = 0$$

المعادلة المميزة هي :

$$r^3 + 2r^2 - r - 2 = 0$$

وبتحليل المعادلة ينتج أن :

$$(r-1)(r^2 + 3r + 2) = 0$$

$$(r-1)(r+2)(r+1) = 0$$

ان جذور المعادلة أعلاه هي :

$$r_1 = 1, r_2 = -2, r_3 = -1$$

وبذلك يكون الحل العام للمعادلة هو :

$$y_c = C_1 e^t + C_2 e^{-2t} + C_3 e^{-t}$$

$$y_c = C_1 e^{\ln x} + C_2 e^{-2 \ln x} + C_3 e^{-\ln x}$$

$$y_c = C_1 x + C_2 e^{\ln x^{-2}} + C_3 e^{\ln x^{-1}}$$

$$\therefore y_c = C_1 x + C_2 x^{-2} + C_3 x^{-1} = C_1 x + \frac{C_2}{x^2} + \frac{C_3}{x}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية .

#### 4-5-1 الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة

##### 1-4-5-1 طريقة المعاملات غير المعينة

لنفرض أن لدينا المعادلة من الرتبة الثانية  $(D^2 + pD + q)y(x) = S(x)$  ,  
تطبق هذه الطريقة إذا كانت  $S(x)$  تركيبية خطية من النوع  $x^m e^{\alpha x} \cos \beta x$  أو  $x^m e^{\alpha x} \sin \beta x$  حيث  $\alpha, \beta$  حقيقيان و  $m$  هو عدد صحيح غير سالب .  
فمثلا "  $S(x)$  يمكن أن تكون  $x^2$  أو  $\cos 3x$  أو  $\sin 2x$  أو  $e^{-x}$  ولكن  
الدوال مثل  $x^{-2}$  أو  $x^{1/2}$  أو  $\tan x$  ,  $\sec x$  , ..... لا يمكن حلها بهذه الطريقة.

مثال (1-41)

عين حل خاص للمعادلة التفاضلية التالية

$$(D^2 - D - 2)y(x) = 8e^{3x}$$

الحل :

يمكن كتابة المعادلة بالشكل التالي :

$$y'' - y' - 2y = 8e^{3x}$$

وسنفترض أن الحل يكون بالشكل التالي :

$$y_p = 9Ae^{3x}, \dot{y}_p = 3Ae^{3x}, y_p = Ae^{3x}$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية الأصلية ومشتقاتها نحصل على :

$$9Ae^{3x} - 3Ae^{3x} - 2Ae^{3x} = 8e^{3x}$$

أي أن :

$$A = 2 \text{ أو } 4A = 8$$

إن الحل الخاص للمعادلة هو :

$$y_p = 2e^{3x}$$

مثال (1-42) :

عين الحل الخاص للمعادلة التفاضلية :

$$(D^2 - 7D + 12)y(x) = 12x^2 + 10x - 11$$

الحل :-

الدالة  $S(x)$  الواقعة في يمين المعادلة من النوع الذي يمكن تخمين الحل الخاص بالمعادلة التفاضلية ولذلك سنفرض أن الحل الخاص يكون

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

على صورة

إنن :

$$\dot{y}_p = 2Ax + B$$

$y''_p = 2A$  وبالتعويض في المعادلة التفاضلية الأصلية عن  $y_p$  ومشتقاتها :

$$2A - 14Ax - 7B + 12Ax^2 + 12Bx + 12C = 12x^2 + 10x - 11$$

وبمساواة معاملات  $x^2$  ومعاملات  $x$  والحد المطلق بين الطرفين الأيمن و الأيسر نحصل على :

$$12 A = 12 \Rightarrow A = 1$$

$$- 14 A + 12 B = 10$$

$$- 14 + 12 B = 10 \Rightarrow 12 B = 24 \rightarrow B = 2$$

$$2 A - 7 B + 12 C = - 11$$

$$2 - 14 + 12 C = - 11$$

$$12 C = - 11 + 12$$

$$12 C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{12}$$

إنن الحل الخاص يكون

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

$$y_p = x^2 + 2x + \frac{1}{12}$$

مثال ( 43-1 )

عين الحل الخاص للمعادلة التفاضلية :

$$(D^2 + 2D) y(x) = 80 \sin 4x$$

الحل :

نفرض أن الحل الخاص يكون على صورة :

$$y_p = A \sin 4x + B \cos 4x$$

$$y'_p = 4A \cos 4x - 4B \sin 4x$$

$$y_p'' = -16A \sin 4x - 16B \cos 4x \quad \text{و}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية عن  $y_p$  ومشتقاتها ينتج أن :

$$-16A \sin 4x - 16B \cos 4x + 8A \cos 4x - 8B \sin 4x = 80 \sin 4x$$

ولحل هذه المعادلة نضع  $x = 0$  في الطرفين حيث أن :

$$\sin 0 = 0, \cos 0 = 1$$

$$-16B + 8A = 0 \Rightarrow -2B + A = 0 \rightarrow A = 2B \cdot (I)$$

$$4x = \frac{\pi}{2} \rightarrow \therefore x = \frac{\pi}{8} \quad \text{ثم نضع}$$

$$-16A - 8B = 80 \rightarrow -2A - B = 10 \cdot (II)$$

وبضرب المعادلة الأولى في 2 و بجمع المعادلتين :

$$-4B + 2A = 0$$

$$-B - 2A = 0$$

$$\hline -5B = 10 \Rightarrow B = -2$$

وبالتعويض في (I) ينتج أن :  $A = -4$

$$y_p = -4 \sin 4x - 2 \cos 4x \quad \text{الحل الخاص هو}$$

مثال (1-44)

عين الحل الخاص للمعادلة التفاضلية التالية :  $(D^2 - 3D)y(x) = 2e^{3x}$

الحل :

يلاحظ في هذا المثال أن الحل الخاص المقترح والذي يكون على الصورة:

$$y_p = A e^{3x}$$

هو جزء من الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة

$$y_c = C_1 + C_2 e^{3x}$$

ولهذا لا يصلح هذا الحل

بالتعويض به في الطرف الأيسر للمعادلة لأنه سوف يعطي صفر وليس دالة صفرية وبالتالي فإن الحل :

$$y_p = A x e^{3x}$$

حيث أن :

$$\bar{y}_p = 3 A x e^{3x} + A e^{3x}$$

$$y_p'' = 9 A x e^{3x} + 6 A e^{3x}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية عن  $y_p$  و مشتقاتها .

$$9 A x e^{3x} + 6 A e^{3x} - 9 A x e^{3x} - 3 A e^{3x} = 2 e^{3x}$$

$$3 A e^{3x} = 2 e^{3x} \Rightarrow 3 A = 2 \Rightarrow A = \frac{2}{3}$$

$$\therefore y_p = \frac{2}{3} x e^{3x}$$

### 1 - 5 - 4 - 2 إيجاد الحل العام للمعادلة غير المتجانسة

والتي تكون بالصيغة التالية :

$$(D^2 + pD + q) y(x) = S(x) \dots \dots \dots (45-1)$$

و الطريقة هي :

- 1- نوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة وليكن  $y_c$  وذلك بأن نجعل الطرف الأيمن فيها مساويا للصفر .
- 2 - نوجد الحل الخاص للمعادلة اللامتجانسة وليكن  $y_p$  بنفس طريقة إيجاد الحل الخاص السابقة .
- 3 - نوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة هو :  $y = y_c + y_p$

مثال (1-45)

عين الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$(D - D - 2)y(x) = 8e^x$$

الحل :

أولاً : نبحث الحل العام للمعادلة المتجانسة

$$(D^2 - D - 2)y = 0$$

المعادلة المميزة هي :

$$r^2 - r - 2 = 0$$

والتي عند تحليلها تعطي :

$$(r - 2)(r + 1) = 0$$

أي أن :

$$r_1 = 2, r_2 = -1$$

وبذلك يكون الحل العام للمعادلة هو :

$$y_c = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} \dots\dots\dots(1-45-1)$$

ثانياً : نوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية وليكن

$$y''_p = A e^x, y'_p = A e^x, y_p = A e^x$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية عن  $y_p$  ومشتقاتها نجد أن :

$$Ae^x - Ae^x - 2Ae^x = 8e^x$$

$$-2Ae^x = 8e^x$$

$$-2A = 8 \Rightarrow A = -4$$

$$\therefore y_p = -4e^x \dots\dots\dots(2-45-1)$$

من المعادلتين (1-45-1) و (2-45-1) يكون الحل العام للمعادلة اللامتجانسة

هو :

$$y = y_c + y_p = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - 4e^x$$

من عيوب هذه الحلول أنها تستخدم لأغراض خاصة فقط وهي ليست شاملة لجميع الحالات ولذلك يستعاض عنها بالطريقة التالية والتي تعتبر أشمل منها وهي طريقة تغاير البارامترات .

### 3-4-5-1 طريقة تغاير البارامترات لإيجاد الحل الخاص للمعادلة اللامتجانسة

لنأخذ المعادلة :  $(D^2 + pD + q)y(x) = \delta(x)$  , تعتبر هذه الطريقة حل غير معين حيث يمكن تشخيص وتحديد الحل العام مهما كان شكل الدالة  $\delta(x)$  وذلك بحساب المعاملات و الطريقة هي :

1- البحث عن حلين مستقلين خطيا للمعادلة المتجانسة وهما  $y_1, y_2$  .

2- البحث عن الحل الخاص في الصورة :

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2 \dots\dots\dots (1-46)$$

حيث أن :

$$v_2 = \int \frac{y_1 \cdot \delta}{w} dx \quad \text{و} \quad v_1 = - \int \frac{y_2 \cdot \delta}{w} dx$$

حيث أن  $w$  هو محدد فرونسكي والذي تم التعرف إليه مسبقا حيث أن :

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_2 \\ \bar{y}_1 & \dots & \bar{y}_2 \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \delta(x) \text{ هو الطرف الأيمن للمعادلة التفاضلية .}$$

أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية التالية :

$$(D^2 + 1)y(x) = \tan x$$

الحل :

المعادلة المميزة هي :

$$r^2 = -1 \text{ أو } r^2 + 1 = 0$$

أي أن  $r = \pm i$  وبذلك يكون الحل العام للمعادلة هو :

$$y_1 = \sin x, y_2 = \cos x$$

والآن سنستخدم المحدد لإيجاد قيم  $v_1, v_2$

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_2 \\ \bar{y}_1 & \dots & \bar{y}_2 \end{vmatrix}$$

أي أن :

$$w = \begin{vmatrix} \sin x & \dots & \cos x \\ \cos x & \dots & -\sin x \end{vmatrix}$$

أو :

$$-\sin^2 x - \cos^2 x = -(\sin^2 x + \cos^2 x) = -1$$

$$v_1 = - \int \frac{\cos x \cdot \tan x}{-1} dx = \int \cos x \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \sin x dx = -\cos x$$

$$v_2 = \int \frac{\sin x \tan x}{-1} dx = - \int \sin x \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = - \int \frac{(1 - \cos^2 x) dx}{\cos x} = \int \frac{(\cos^2 x - 1) dx}{\cos x}$$

$$\therefore v_2 = \int \frac{\cos^2 x}{\cos x} dx - \int \frac{dx}{\cos x} = \int \cos x dx - \int \sec x dx = \sin x - \ln|\sec x + \tan x|$$

وعليه فإن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية هو :

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$$

ويساوي :-

$$y_p = -\sin x \cos x + \cos x [\sin x - \ln|\sec x + \tan x|] = -\cos x [\ln|\sec x + \tan x|]$$

مثال (47-1)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية مستخدماً تغير البارامترات :

$$y'' - y' = e^x$$

الحل :

أولاً : نوجد الحل العام للمعادلة باستخدام الجذور والمعادلة المميزة لها هي :

$$r^2 - 1 = 0$$

أي أن :

$$r = \pm 1$$

ولذلك فإن :

$$y_c = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

ثانياً : نوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية أعلاه وبما أن :

$$y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}$$

فإن الحل الخاص لهذه المعادلة التفاضلية يوجد بواسطة محدد فرونسكي وبالشكل

التالي :

$$w = \begin{vmatrix} e^x & \dots & \dots & e^{-x} \\ e^x & \dots & - & e^{-x} \end{vmatrix} = -e^0 - e^0 = -1 - 1 = -2$$

$$v_1 = - \int \frac{e^{-x} \cdot e^{-x}}{-2} dx = \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{4} e^{-2x}$$

$$v_2 = \int \frac{e^x \cdot e^{-x}}{-2} dx = -\frac{1}{2} \int dx = -\frac{1}{2} x$$

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2 \Rightarrow \therefore y_p = \left(-\frac{1}{4} e^{-2x}\right) e^x - \left(\frac{1}{2} x\right) e^{-x} = -\frac{1}{4} e^{-x} - \frac{1}{2} x e^{-x}$$

$$\therefore y = y_c + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{4} e^{-x} - \frac{1}{2} x e^{-x}$$

وهو الحل العام للمعادلة .

### 5 - 5 - 1 المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية

#### (Second Order Differential Equations)

كما بين سابقا فإن المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية هي تلك المعادلة التي تكون فيها درجة أو الأس المرفوع إليه أعلى معامل تفاضلي هو 2 ومن الممكن أن تكون تلك المعادلات خطية أم غير خطية مثل الدالة

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x) \dots \dots \dots (47-1)$$

وهي معادلة تفاضلية بسيطة من الرتبة الثانية بينما نرى أن المعادلة:

$$y \frac{d^2 y}{dx^2} + 1 = \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \dots\dots\dots(48-1)$$

تبدو للوهلة الأولى بشكل واضح من الدرجة الثانية لأن الأس 2 موجود فيها. وتقسم هذه المعادلات إلى نوعين :

- a - معادلات غير خطية وهي تتكون من الأنواع التالية :
  - 1- معادلات لا يظهر فيها المتغير التابع بوضوح .
  - 2 - معادلات لا يظهر فيها المتغير المستقل بوضوح .
  - 3 - المعادلات المتجانسة .

b - معادلات خطية وتتكون من نوعين :

- 1 - المعاملات في المعادلة ثابتة .
- 2 - المعاملات في المعادلة هي دوال للمتغير المستقل .

إن الحل العام للمعادلات غير الخطية هو ما يسمى بصيغة كليروت (Clairut) والتي تكتب بالشكل التالي :

$$y = x \frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right) \dots\dots\dots(49-1)$$

والتي تحل بواسطة التفاضل نتيجة التعويض عن P وهو ما يعادل  $(P = \frac{dy}{dx})$  ولنأخذ على ذلك المثال التالي .

مثال (48-1)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :

$$y \frac{d^2 y}{dx^2} + 1 = \left( \frac{dy}{dx} \right)^2$$

الحل :

نفرض أن  $P = \frac{dy}{dx}$  ثم نفاضل المعادلة ضمناً.

$$\therefore \frac{dP}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dP}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = P \frac{dP}{dy} \dots\dots\dots (1-50-1)$$

وبالتعويض في المعادلة الأصلية ينتج أن :-

$$yP \frac{dP}{dy} + 1 = P^2 \dots\dots\dots (2-50-1)$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{PdP}{P^2 - 1} \quad \text{و بفصل المتغيرات}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{PdP}{P^2 - 1}$$

وبالتكامل نحصل على :

$$\ln y + C = \frac{1}{2} \ln |P^2 - 1|$$

ولو فرضنا أن :

$$C = \ln a \dots\dots\dots (3-50-1)$$

ونعوض في المعادلة

$$\ln a + \ln y = \frac{1}{2} \ln(P^2 - 1)$$

$$\therefore a^2 y^2 = P^2 - 1$$

$$\ln(ay) = \frac{1}{2} \ln(P^2 - 1)$$

$$2 \ln(ay) = \ln(P^2 - 1)$$

$$\therefore P = \sqrt{a^2 y^2 + 1} \quad \text{أو}$$

$$\ln a^2 y^2 = \ln(P^2 - 1)$$

ومنها نستنتج أن :

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{a^2 y^2 + 1}$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{a^2 y^2 + 1}}$$

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{a^2 y^2 + 1}}$$

حيث نحصل على :

$$x = \left(\frac{1}{a}\right) \text{Sinh}^{-1}(ay + c)$$

$$\therefore y = \frac{\text{Sinh}(ax + c)}{a} \dots\dots\dots(4-50-1)$$

حيث أن  $a$  ,  $c$  هي ثوابت التكامل .

### 1- 5- 6 المعادلات المتجانسة من الدرجة الثانية

هنا تكون المعادلة التفاضلية المتجانسة على صيغة :

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \dots\dots\dots(61-1)$$

حيث إن  $x$  ,  $y$  هما المتغيران ذات العلاقة . إن المعادلات من هذا النوع تعتبر مجموعة عديمة الوحدات أو ما يسمى (Dimensionless Group) و التي تحتوي المعامل التفاضلي

$$x^{n-1} \frac{d^n y}{dx^n} \dots\dots\dots(52-1)$$

مثل  $x \frac{d^2 y}{dx^2}$  وكمثال لمعادلة تفاضلية متجانسة من الدرجة الثانية تكون الصيغة  
 مشابهة للمعادلة (49-1)

لذلك فإن :

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} = f_1 \left( \frac{y}{x}, \frac{dy}{dx} \right) \dots \dots \dots (53-1)$$

$y = vx$  و بالتعويض عن :

$$\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx} \dots \dots \dots (54-1)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2 \frac{dv}{dx} + x \frac{d^2 v}{dx^2} \dots \dots \dots (55-1)$$

و بتعويض المعادلة (50-1) في المعادلة (48-1) ينتج:

$$2x \frac{dv}{dx} + x^2 \frac{d^2 v}{dx^2} = f_1 \left( v, v + x \frac{dv}{dx} \right) \dots \dots \dots (56-1)$$

مثال (48-1)

حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$2x^2 y \frac{d^2 y}{dx^2} + y^2 = x^2 \left( \frac{dy}{dx} \right)^2$$

الحل :

بفرض أن  $y = vx$  وتعويض ذلك في المعادلة الأصلية نحصل على :

$$2vx^3 \left( 2 \frac{dv}{dx} + x \frac{d^2 v}{dx^2} \right) + v^2 x^2 = x^2 \left( v + x \frac{dv}{dx} \right)^2 \dots \dots \dots (1)$$

ولغرض حل هذه المعادلة حيث أنها تشبه معادلة (كوش - أديلر) التي تم التطرق لها  
 مسبقا , نفرض أن :-

$$\tilde{x} = e^t, t = \ln x$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dt} \dots (III) \quad \text{أو} \quad \therefore \frac{dv}{dx} = \left( \frac{dv}{dt} \right) \left( \frac{dt}{dx} \right) = \frac{1}{x} \frac{dv}{dt} \dots (II)$$

$$\therefore \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( \frac{dv}{dt} \right) = \frac{1}{x^2} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{x} \frac{dt}{dx} \frac{d}{dt} \left( \frac{dv}{dt} \right) = \frac{1}{x^2} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{x^2} \frac{d^2v}{dt^2} \dots (IV)$$

أو

$$x^2 \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d^2v}{dt^2} - \frac{dv}{dt} \dots (V)$$

وبتعويض الصيغة (V) في المعادلة (II) والتعويض عن قيمة  $x=e^t$  نحصل على:

$$2v \frac{d^2v}{dt^2} = \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 \dots (VI)$$

إن هذه المعادلة لا تحتوي المتغير المستقل و يمكن أن تحل بالطريقة السابقة أي أن :

$$2v \frac{dP}{dv} = P^2$$

وهذه لها حلين :

$$2v \frac{dP}{dv} = P$$

أو

$$P = 0$$

إن الحل الثاني هو " حل فردي " حيث ينتج منه أن  $y = Ax$  والذي يحقق المعادلة الأولى . أما الحل الأول فيتم تكامله مرتين ليعطي الدالة :

$$y = x(B \ln|x| + C)^2$$

مثال ( 50-1 )

حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + y = 4x + 8x^3 \dots\dots\dots(I)$$

الحل :

لأن الدالة في الطرف الأيمن من المعادلة هي من نوع متعددة المتغيرات لذلك فإن

الحل الخاص للدالة سيكون على الشكل :

$$y = P + qx + rx^2 + sx^3 \dots\dots\dots(II)$$

وعند اشتقاق هذه الدالة لمرتين سنحصل على :

$$\frac{dy}{dx} = q + 2rx + 3sx^2 \dots\dots\dots(III)$$

و :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2r + 6sx \dots\dots\dots(IV)$$

وبتعويض هذه المعادلات في (I) :

$$(2r + 6sx) - 4(q + 2rsx + 3sx^2) + 4(p + qx + rx^2 + sx^3) = 4x + 8x^3$$

$$2r + 6sx - 4q - 8rx - 12sx^2 + 4p + 4qx + 4rx^2 + 4sx^3 = 4x + 8x^3$$

$$(2r - 4q + 4p) + (6s - 8r + 4q)x + (4r - 12s)x^2 + 4sx^3 = 4x + 8x^3$$

$$2r - 4q + 4p = 0$$

$$6s - 8r + 4q = 4$$

$$4r - 12s = 0$$

$$4s = 8 \Rightarrow s = 2, \therefore r = 6$$

$$\therefore q = 10, p = 7$$

$$\therefore y_p = 7 + 10x + 6x^2 + 2x^3$$

$$m^2 - 4m + 4 = 0 \Rightarrow y_c = (A + Bx)e^{2x}$$

$$\therefore y = y_c + y_p = (A + Bx)e^{2x} + 7 + 10x + 6x^2 + 2x^3$$

$$(2r + 6sx) - 4(q + 2rsx + 3sx^2) + 4(p + qx + rx^2 + sx^3) = 4x + 8x^3$$

$$2r + 6sx - 4q - 8rx - 12sx^2 + 4p + 4qx + 4rx^2 + 4sx^3 = 4x + 8x^3$$

$$(2r - 4q + 4p) + (6s - 8r + 4q)x + (4r - 12s)x^2 + 4sx^3 = 4x + 8x^3$$

$$2r - 4q + 4p = 0$$

$$6s - 8r + 4q = 4$$

$$4r - 12s = 0$$

$$4s = 8 \Rightarrow s = 2, \therefore r = 6$$

$$\therefore q = 10, p = 7$$

$$\therefore y_p = 7 + 10x + 6x^2 + 2x^3$$

$$m^2 - 4m + 4 = 0 \Rightarrow y_c = (A + Bx)e^{2x}$$

$$\therefore y = y_c + y_p = (A + Bx)e^{2x} + 7 + 10x + 6x^2 + 2x^3$$

**ملاحظات :**

1- إذا أحتوت المعادلة التفاضلية على جنور تخيلية وكان الطرف الأيمن من المعادلة التفاضلية يحتوي الصيغة :

$$(A \sin nx + B \cos nx)e^{Px}$$

فإن الصيغة العامة للحل التكاملية تكون من النوع :

$$x(\alpha \sin nx + \beta \cos nx)e^{Px}$$

2- يمكن معاملة المؤثر التفاضلي D كمقدار جبري إعتيادي في حدود معينة وللحالات التالية :

قانون التوزيع (Distribution Law) أي أن :

$$D(u+v+w) = Du + Dv + Dw$$

قانون التبديل لا ينطبق هنا أي أن :

$$Dxy \neq xDy$$

و لكن يمكن أن تكتب المعادلة بالشكل التالي :

$$(D+1)(D+2)y=(D+2)(D+1)y$$

3- قانون الارتباط وهذا لا ينطبق في كل الحالات حيث أن :

$$D(x y) = (D x) y + x D y$$

مثال (51-1)

أوجد المعادلة المتجانسة ذات المعاملات الحقيقية والتي تحقق الحل العام

التالي :-

$$y = 6 + 3xe^x - \cos x$$

الحل :

الحد 6 يشترك مع (m = 0) , والحد  $3xe^x$  يشترك مع الجذر (m = 1,1)

أما الحد  $\cos x$  فيشارك مع الجذر  $m = \pm i$  وبذلك تكون جذور المعادلة المميزة هي:

$$m(m-1)^2(m^2+1) = 0$$

وبعد فتح الأقواس نحصل على المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{d^5 y}{dx^5} - 2\frac{d^4 y}{dx^4} + 2\frac{d^3 y}{dx^3} - 2\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0$$

## 6.1 تمارين وأمثلة

a. الرتبة والدرجة :

صف المعادلات التالية من حيث الرتبة والدرجة وبين هل هي اعتيادية أم جزئية , خطية أم غير خطية موضعا السبب :-

$$1 - y'' + 3y' + 2y = x^4$$

$$2 - y'''' + 6y'' + 11y + 6y = e^x$$

$$3 - y'' + (a + b \cos 2x)y = 0$$

$$4 - y'' + xy'' + y^2 = 0$$

$$5 - \frac{d(xy)}{dx} + xy = 0$$

$$6 - (x + y)dy = (x - y)dx$$

$$7 - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$8 - \frac{\partial^2 (x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2})}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$9 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$10 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \phi(x, y, z)$$

b. اختزال الثوابت الاختيارية :

في كل من المسائل التالية، إختزل الثوابت الإختيارية في الحل العام و أوجد الشكل النهائي للمعادلة التفاضلية :-

$$1 - x \sin y + x^2 y = c$$

$$2 - y = A \sin(\omega x + \beta)$$

$$3 - y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

$$4 - y = c_1 e^{2x} \cos 3x + c_2 e^{2x} \sin 3x$$

$$5 - y = c_1 \sin 2t + c_2 \cos 2t$$

$$6 - y^2 = C_1 (x + 1)$$

حيث إن  $\omega$  في معادلة الفرع 2 هي بارامتر .

C. المعادلات التفاضلية المرافقة للحل العام :

في كل من المسائل التالية أوجد المعادلة التفاضلية المرافقة للحل العام:

$$1 - 2\bar{y} + y = 0 \dots \dots \dots y = e^{-\frac{x}{2}}$$

$$2 - \frac{dy}{dx} - 2y = e^{3x} \dots \dots \dots y = e^{3x} + 10 e^{2x}$$

$$3 - \frac{dy}{dx} + 20y = 24 \dots \dots \dots y = \frac{6}{5} - \frac{6}{5} e^{-20x}$$

$$5 - \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{x}} \dots \dots \dots y = (rx + c_1)^2$$

$$6 - y' + y = \sin x \dots \dots \dots y = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x + 10 e^{-x}$$

$$7 - y'' + y' - 12y = 0 \dots \dots \dots y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-4x}$$

$$8 - x^2 y'' - xy' + 2y = 0 \dots y = x \cos(\ln x) \dots \text{where } \dots x > 0$$

d . فصل المتغيرات :

في كل من التمارين التالية أوجد الحل العام للمعادلة مستخدماً فصل المتغيرات:

$$1 - \frac{dy}{dx} = -2xy$$

$$2 - \sin x dy = 2y \cos x dx$$

$$3 - \bar{y} = 3x^2(1 + y^2)$$

$$4 - xdy = (y^2 - 3y + 2) dx$$

$$5 - 2(xy + x)\bar{y} = y$$

$$6 - xdy = 3y dx$$

$$7 - (y + x^2y) dy = (xy^2 - x) dx$$

$$8 - ydx - xdy = x(dy - ydx)$$

$$9 - y\bar{y} = 2(xy + x)$$

$$10 - dx + ydy = x^2 ydy$$

$$11 - ye^{x+y} dy = dx$$

$$12 - xe^{x^2+y} dx = ydy$$

$$13 - \bar{y} = \frac{(y+1)^2}{(x+1)^2}$$

$$14 - x\bar{y} = 4y$$

$$15 - \bar{y} = \frac{2(y^2 + y - 2)}{(x^2 + 4x + 3)}$$

$$16 - \frac{dx}{dy} = \frac{1 + 2y^2}{y \sin x}$$

$$17 - \frac{dy}{dx} = \frac{x(2 + y^2)}{y(3 + x^2)}$$

$$18 - \frac{dy}{dx} = \frac{(y + 3)(x - 1)}{(y - 2)(x + 4)}$$

e. الحلول الخاصة باستخدام فصل المتغيرات

في كل من التمارين التالية أوجد الحل الخاص الذي يحقق المعادلات التالية :

$$1 - 2x\bar{y} + y = 0$$

$$x = 4, y = 1$$

$$2 - \bar{y} + 2y = 0$$

$$x = 0, y = 100$$

$$3 - 2x dx - dy = x(x dy - 2y dx) \quad x = -3, y = 1$$

$$1 - f(x, y) = \left( x^3 y - \frac{x^2 y g}{x + 8g} \right)$$

$$2 - f(x, y) = \cos \left( \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right)$$

$$3 - f(x, y) = \ln x^2 - 2 \ln y$$

$$4 - f(x, y) = \left| \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right|^2$$

$$5 - f(x, y) = \frac{x}{y^2 + \sqrt{x^4 + y^4}}$$

$$6 - f(x, y) = \frac{\sin x}{x + y}$$

$$7 - f(x, y) = \frac{\ln x^3}{\ln y^3}$$

$$8 - f(x, y) = (x + y + 1)^2$$

$$9 - f(x, y) = \tan \frac{y}{x}$$

$$10 - f(x, y) = y^2 \tan \frac{x}{y}$$

$$11 - f(a, b) = \frac{a + 4b}{a - 4b}$$

$$12 - f(x, y) = \exp\left(\frac{y^2}{x}\right)$$

g . المعادلات المتجانسة

في المسائل التالية أثبت أن المعادلات التفاضلية هي متجانسة ثم أوجد

الحل العام والخاص إن وجد لها :

$$x = 1 , y = 1$$

$$x = 4 , y = 3$$

$$x = 1 , y = 2$$

$$x = 1 , y = 0$$

$$x = 2 , y = 1$$

- 1-  $(x - y)dx + xdy = 0$
- 2-  $x dx + (y - 2x)dy = 0$
- 3-  $(x^2 + 3y^2)dx - 2xydy = 0$
- 4-  $xy' - y = \sqrt{x^2 - y^2}$
- 5-  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$
- 6-  $x^2 y dx = (x^3 - y^3) dy$
- 7-  $x\bar{y} = y + \sqrt{x^2 + y^2}$
- 8-  $(3y^3 - x^3)dx = 3xy^2 dy$
- 9-  $(x^4 + y^4)dx = 2x^3 y dy$
- 10-  $\bar{y} = \sec \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$

.h المعادلات التامة

في المسائل التالية , أثبت أن المعادلة التفاضلية هي تامة وأوجد حلها العام:

- 1-  $(x+2y)dx+(2x+y)dy=0$
- 2-  $(2xy-3x^2)dx+(x^2+2y)dy=0$
- 3-  $(\cos 2y-3x^2y^2)dx+(\cos 2y-2x\sin 2y-2x^3y)dy=0$
- 4-  $(1+y^2)dx+(x^2y+y+2xy)dy=0$
- 5-  $(ye^{xy}-2y^3)dx+(xe^{xy}-6xy^2-2y)dy=0$

i. المعاملات التكاملية

أوجد حلا عاما للمعادلات التفاضلية التالية بالضرب في معامل مناسب :

$$1-y(1+xy)dx+(2y-x)dy=0$$

$$2-3(y^4+1)dx+4xy^3dy=0$$

$$3-(xy^2+y)dx+(x-x^2y)dy=0$$

$$4-(x^2+y^2+2x)dy=2ydx$$

$$5-xdy+3ydx=xydy$$

$$6-(2y\cos x+2)dy-y^2\sin xdx=0$$

z. حل المعادلات التالية بطريقتين :

$$1-2ydx+(3y-2x)dy=0$$

$$2-(x^2-y^2)dy=2xydx$$

$$3-xdy+ydx=\frac{dx}{y}-\frac{dy}{x}$$

$$4-2x\ln ydx+\frac{1+x^2}{y}dy=0$$

$$5-(\sqrt{x^2+y^2})dx=xdy-ydx$$

$$6-(2x^2+y)dx+(x^2y-x)dy=0$$

k. المعادلات التفاضلية الخطية

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية :

$$1-(2y+x^2)dx=xdy$$

$$2-\bar{y}+2xy+x=e^{-x^2}$$

$$3-\bar{y}+y\tan x=\sec x$$

$$4 - \bar{y} + y \cot x = \sin 2x$$

$$5 - x^2 dy + (2xy - x + 1) dx$$

$$6 - (1 - x^2) \bar{y} + xy = 2x$$

1. أوجد الحل الخاص الذي يحقق المعادلات التفاضلية التالية :-

$$1 - \bar{y} + y = e^x \quad x = 0, y = 2$$

$$2 - (x^2 + 1) dy = (x^3 - 2xy + x) dx \quad x = 1, y = 1$$

$$3 - \bar{y} + (1 + 2x)y = e^{-x^2} \quad x = 0, y = 3$$

$$4 - (1 + x^2) dy = (1 + xy) dx \quad x = 1, y = 0$$

m. معادلة برنولي

حل المعادلات التفاضلية التالية:

$$1 - \bar{y} + y = xy^2$$

$$2 - \bar{y} + y = \frac{x}{y}$$

$$3 - dy = (xy^2 + 3xy) dx$$

$$4 - 3x\bar{y} + y + x^2 y^4 = 0$$

$$5 - y' = y - xy^3 e^{-2x}$$

$$6 - y' = (3x + y)^2 - 1$$

$$7 - (y^4 - 2xy) dx + 3x^2 dy = 0$$

$$8 - 6y^2 dx - x(2x^3 + y) dy = 0$$

n. طريقة المؤثر التفاضلي (D)

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية :

$$5 - y'' + 3y' - 4y = 0$$

$$6 - 10y'' + 6y' + y = 0$$

$$7 - y'' - 4y = 0$$

$$8 - 25y'' + 20y' + 4y = 0$$

o. المعادلات التفاضلية غير الخطية من الدرجة الثانية

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية :

$$1 - y'' - y' = 4e^{-x} + 3e^{2x}$$

$$2 - (D^2 - 3D + 2)y = 2x^3 - 9x^2 + 6x$$

$$3 - (D^2 + 4)y = 5e^x - 4x$$

$$4 - y'' - 4y' + 3y = 20 \cos x$$

$$5 - (x-1)y'' - xy' + y = 1$$

$$6 - (D^2 - 1)y = e^x + 1$$

$$7 - (D^2 + 1)y = \csc x \cot x$$

$$8 - (D^2 - 2D + 1)y = e^{2x}(e^x + 1)^{-2}$$

$$9 - x^3 \frac{d^2 y}{dx^2} + x^2 \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - y^2 = 0$$

$$\text{at } \dots, x=1, \dots, y=2, \dots \frac{dy}{dx} = -1$$