

## الباب الثاني

### تحويلات لابلاس

### Laplace Transforms

- 1.2 مقدمة .
- 2.2 تعريف تحويل لابلاس .
- 3.2 نظرية الإزاحة .
- 4.2 بعض القواعد في تحويلات لابلاس .
- 5.2 إيجاد تحويل لابلاس باستخدام تعريف المشتقة .
- 6.2 بعض خصائص تحويلات لابلاس .
- 7.2 معكوس تحويل لابلاس .
- 8.2 إيجاد معكوس تحويل لابلاس باستخدام الكسور الجزئية .
- 9.2 ملاحظات حول استخدام طريقة الكسور الجزئية في تحويلات لابلاس .
- 10.2 تحويلات لابلاس للمشتقات .
- 11.2 أمثلة وتمارين .

## 1-2 مقدمة

إن تحويل لابلاس (Laplace Transform) هو اسم يعطى كطريقة عملية لحل المعادلة التفاضلية. ومبدئياً فإن الطريقة العملية هي تقنية يتم بواسطتها تحويل المعادلة التفاضلية إلى صيغة جبرية مكافئة يمكن حلها بالقوانين الجبرية الأولية. الطريقة تستخدم أيضاً لتحويل المعادلة التفاضلية الجزئية إلى معادلة تفاضلية اعتيادية مكافئة.

وبالرغم من توفر عدة طرق لتحقيق هذا الغرض إلا أن تحويل لابلاس تعتبر إحدى الوسائل التحليلية المفيدة لحل المشاكل الهندسية لأن الظروف الحدية المستخدمة في المعادلة تكون بموجب حلها .

## 2-2 تعريف تحويل لابلاس

إذا كانت  $f(t)$  هي دالة مستمرة ذات متغير مستقل هو  $t$  لكل قيم  $t$  التي أكبر من الصفر , لذلك فإن التكامل نسبة لـ  $t$  لحاصل ضرب الدالة  $f(t)$  في الدالة  $e^{-st}$  بين الحدود  $0$  و  $\infty$  يعرف بأنه تحويل لابلاس للدالة  $f(t)$  أي أن :-

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = L[f(t)] \dots \dots \dots (1-2)$$

إن تحويلات لابلاس تجرى عندما تكون الدالة متغيرة نسبة للزمن  $(t)$  أو  $f(t)$  وأن أفضل حل هو بكتابة المعادلة بعد أخذ تحويل لابلاس لها بالصيغة  $f(s)$  أي أن :

$$f(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \dots \dots \dots (2-2)$$

فإذا كانت قيمة  $f(t) = 1$  مثلا ( أي عدد ثابت ) فإن :

$$L[1] = \int_0^{\infty} (1)(e^{-st}) dt = \left[ \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} = \left[ \frac{e^{-s(\infty)}}{-s} \right] - \left[ \frac{e^{-s(0)}}{-s} \right] = 0 + \frac{1}{s} = \frac{1}{s} \dots\dots\dots(3-2)$$

أي أن :

$$f(s) = \frac{1}{s}$$

ومن المعادلة (2 - 3) يتبين أن تحويل لابلاس للثابت K هو :

$$L[K] = KL[1] = \frac{K}{s} \dots\dots\dots(4-2)$$

أما إذا كانت الدالة من النوع

$$f(t) = t^n \dots\dots\dots(5-2)$$

فإن :

$$L[t^n] = \int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt \dots\dots\dots(6-2)$$

و بفرض أن  $z = st$  أي أن :

$$dz = s dt \dots\dots\dots(7-2)$$

$$\therefore L[t^n] = s^{-n-1} \int_0^{\infty} z^n e^{-z} dz \dots\dots\dots(8-2)$$

وبمقارنة المعادلة (2 - 8) مع دالة جاما يتبين أن:

$$L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \dots\dots\dots(9-2)$$

شرط أن يكون n عدد صحيح موجب .

وإذا كانت الدالة من النوع  $e^{at}$  حيث أن  $a$  هو ثابت فإن تحويل لابلاس للدالة يكون بالشكل التالي :-

$$\therefore f(t) = e^{at} \dots \dots \dots (10-2)$$

$$\therefore L[e^{at}] = f(s) = \int_0^{\infty} (e^{at})(e^{-st}) dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = \left[ \frac{-e^{-(s-a)t}}{s-a} \right]_0^{\infty} = \left[ \frac{-e^{-\infty}}{s-a} \right] + \left[ \frac{e^{-0}}{s-a} \right] = \frac{1}{s-a} \dots (11-2)$$

والجدول التالي يوضح بعض التحويلات المهمة في مجال لابلاس

جدول (1-2) / بعض تحويلات لابلاس لبعض الدوال الجبرية

التسلسل	الدالة $f(t)$	تحويل لابلاس $f(s)$	الملاحظات
1	$K$	$\frac{K}{s}$	
2	$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$n$ عدد صحيح موجب
3	$t^n$	$\frac{\Gamma(n)}{s^{n+1}}$	$n$ عدد صحيح غير موجب
4	$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$	$a$ ثابت
5	$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$	
6	$\sin wt$	$\frac{w}{s^2 + w^2}$	
7	$\cos wt$	$\frac{s}{s^2 + w^2}$	
8	$\sqrt{t}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{s^3}}$	
9	$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$	

ومن التعريف نجد تحويلات لابلاس للمشتقات حيث :

$$f(s) = \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \left[ f(t) e^{-st} \right]_0^{\infty} = s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \dots \dots \dots (12-2)$$

وبما أن تحويل لابلاس للدالة  $f(t)$  هو  $f(s)$  لذلك سوف نستنتج أن :

$$\therefore L \left[ \frac{df(t)}{dt} \right] = sf(s) - f(0) \dots \dots \dots (13-2)$$

وبصورة مشابهة فإن :

$$L \left[ \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right] = s^2 f(s) - sf(0) - f'(0) \dots \dots \dots (14-2)$$

حيث أن  $f(0)$  ,  $f'(0)$  هي قيم الدالة و مشتقاتها عندما يكون المتغير المستقل بقيمة صفر . و بنفس الصورة يتبين أن :

$$L \left[ \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right] = s^n f(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - s^{n-3} f''(0) \dots \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \dots (15-2)$$

وأخيرا " تستخدم تحويلات لابلاس لإيجاد الدوال دون الحاجة إلى إجراء التكامل وكمثال على ذلك :

$$f(t) = \sin wt$$

$$f'(t) = w \cos wt$$

$$f''(t) = -w^2 \sin wt$$

$$\therefore f(t) \Big|_{t=0} = \sin wt \Big|_{t=0} = 0$$

$$f'(t) \Big|_{t=0} = w \cos wt \Big|_{t=0} = w$$

وبموجب تعريف لابلاس المشتقات نستنتج أن :

$$L[f''(t)] \Big|_{t=0} = s^2 f(s) - sf(0) - f'(0) = s^2 f(s) - 0 - w$$

وسوف نستنتج أن :

وسوف نستنتج أن :

$$\therefore L[-w^2 \sin wt] = s^2 L[\sin wt] - 0 - w$$

$$\therefore -L[w^2 \sin wt] = s^2 L[\sin wt] - w$$

$$\therefore w = L[\sin wt](s^2 + w^2)$$

$$\therefore L[\sin wt] = \frac{w}{s^2 + w^2} \dots \dots \dots (16-2)$$

### 3-2 نظرية الإزاحة (The Shifting Theorem)

وهذه تعتبر مفيدة في معرفة الدوال من نوع الأسية (exponential)

ومعرفة معكوس لابلاس لها ويمكن تلخيصها بالشكل التالي :

" إذا كان تحويل لابلاس للدالة  $f(t)$  هو  $f(s)$  فإذن تحويل لابلاس للدالة  $e^{-st} f(t)$

هو  $L(s+a)$  حيث إن  $a$  هو ثابت محدد أي أن حاصل ضرب  $f(t)$

في  $e^{-st}$  سيؤثر في إزاحة الأصل من  $s$  إلى  $(s+a)$  "

مثال ( 1-2 )

أوجد تحويل لابلاس للدالة  $e^{-st} \cos \beta t$  :

الحل :

من الجدول فإن  $f(t) = \cos \beta t$  ولذلك ينتج أن :

$$f(s) = \frac{s}{s^2 + \beta^2}$$

ووفق نظرية الإزاحة فإن :

$$L[e^{-at} \cos \beta t] = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \dots \dots \dots (17-2)$$

مثال (2-2)

أوجد تحويل لابلاس للدالة  $e^{kt}$  :

الحل :

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

وبما أن :

$$f(t) = e^{kt}$$

إن :

$$L[e^{kt}] = \int_0^{\infty} (e^{-st})(e^{kt}) dt$$

$$\therefore L[e^{kt}] = \int_0^{\infty} e^{-(s-k)t} dt = \left[ \frac{e^{-(s-k)t}}{-(s-k)} \right]_0^{\infty} = \frac{0}{-(s-k)} + \frac{e^0}{s-k} = \frac{1}{s-k}$$

ومن هذا نستنتج أن :

$$L[e^{-kt}] = \frac{1}{s+k} \dots\dots\dots(18-2)$$

حيث إن  $k$  هو ثابت .

4-2 بعض القواعد في تحويلات لابلاس

a.  $L[kf(t)] = kL[f(t)] \dots\dots\dots(19-2)$

b.  $L[f(t) \pm g(t)] = L[f(t)] \pm L[g(t)] \dots\dots\dots(20-2)$

حيث إن  $f(t), g(t)$  هي دوال للمتغير  $t$  .

مثال (2-3)

أوجد تحويلات لابلاس للدوال التالية :

$$1-f(t) = 3\sin 5t - 2\cos 4t$$

$$2-f(t) = 3e^{4t} - 2e^{-2t}$$

$$3-f(t) = t^3$$

$$4-f(x) = \begin{cases} x, \dots\dots 0 < x < 4 \\ 6, \dots\dots x > 4 \end{cases}$$

$$5-f(t) = t^2 - 4t - 4$$

$$6-f(x) = x^3 + x^2 + 4x - 5$$

$$7-f(t) = t^{n-1}$$

$$8-f(t) = \begin{cases} \sin 2t, \dots\dots 0 < t < \pi \\ 2, \dots\dots t > \pi \end{cases}$$

الحل :

$$1-L[3\sin 5t - 2\cos 4t] = L[3\sin 5t] - L[2\cos 4t] = 3L[\sin 5t] - 2L[\cos 4t] = \frac{15}{s^2 + 25} - \frac{2s}{s^2 + 16}$$

$$2-L[3e^{4t} - 2e^{-2t}] = L[3e^{4t}] - L[2e^{-2t}] = 3L[e^{4t}] - 2L[e^{-2t}] = \frac{3}{s-4} - \frac{2}{s+2}$$

$$3-L[t^3] = \frac{3!}{s^{3+1}} = \frac{(3)(2)(1)}{s^4} = \frac{6}{s^4}$$

$$4-L[f(x)] = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = \int_0^4 e^{-sx} x dx + \int_4^{\infty} e^{-sx} 6 dx = \left[ \frac{-xe^{-sx}}{s} - \frac{e^{-sx}}{s^2} \right]_0^4 - \left[ \frac{-6e^{-sx}}{s} \right]_4^{\infty}$$

$$= \frac{2}{s} e^{-4s} - \frac{e^{-4s}}{s^2} - \frac{1}{s^2}$$

ملاحظة :

التكامل  $\int e^{-ax} x dx$  يحل بطريقة التجزيء  $\int u dv = uv - \int v du$ .

$$5-L[f(t)] = L[t^2 - 4t - 4] = L[t^2] - L[4t] - L[4] = \frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} - \frac{4}{s}$$

$$7-f(t) = t^{n-1}, \dots, f'(t) = (n-1)t^{n-2}, \dots, f''(t) = (n-1)(n-2)t^{n-3}, f(0) = 0$$

$$\therefore L[f'(t)] = sL[f(t)] - f(0), \dots, f'(0) = 0$$

$$L[(n-1)t^{n-2}] = sL[f'(t)] = sL[t^{n-1}] \Rightarrow L[t^{n-1}] = \frac{(n-1)}{s} L[t^{n-2}]$$

$$L[(n-1)(n-2)t^{n-3}] = s^2 L[f''(t)] \Rightarrow L[t^{n-1}] = \frac{(n-1)(n-2)}{s^2} L[t^{n-3}] = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{s^2 s^{n-2}}$$

$$\therefore L[t^{n-1}] = \frac{(n-1)!}{s^n} \dots \dots \dots (21-2)$$

الفرعين 6 , 8 يتركنا كتمرين للطلاب .

مثال (4-2)

أوجد تحويل لابلاس للدالة التالية :

$$f(t) = 3 - 5e^{2t} + 4 \sin t - 7 \cos 3t$$

الحل:

$$L[f(t)] = L[3 - 5e^{2t} + 4 \sin t - 7 \cos 3t] = L[3] + L[-5e^{2t}] + L[4 \sin t] - L[7 \cos 3t]$$

$$= L[3] - 5L[e^{2t}] + 4L[\sin t] - 7L[\cos 3t] = \frac{3}{s} - \frac{5}{s-2} + \frac{4}{s^2+1} - \frac{7s}{s^2+9}$$

أوجد تحويل لابلاس للدالة :

$$L[e^{3t} \cos 4t]$$

الحل :

من خواص نظرية الإزاحة يتبين أن :

$$L[e^{at} F(t)] = F(s - a)$$

ومن هذه الخاصية نفهم أنه إذا كان استخراج تحويل لابلاس من حاصل ضرب دالتين مثلًا وهي  $e^{at}, F(t)$  , نوجد أولاً تحويل لابلاس للدالة  $F(t)$  ثم نستبدل  $s$  التي تظهر في الدالة بـ  $(s - a)$  .  
ولذلك لإيجاد تحويل لابلاس للدالة أعلاه :

$$L[\cos 4t] = \frac{s}{s^2 + 16}$$

وبتطبيق شروط نظرية الإزاحة :

$$L[e^{3t} \cos 4t] = \frac{s - 3}{(s - 3)^2 + 16}$$

أو :

$$L[e^{3t} \cos 4t] = \frac{s - 3}{s^2 - 6s + 9 + 16} = \frac{s - 3}{s^2 - 6s + 25}$$

## 5-2 إيجاد تحويل لابلاس باستخدام تعريف المشتقة

وهذه القاعدة تصلح عند ضرب دالة  $F(t)$  في دالة مثل  $t^n$  حيث يمكن استخدام القانون التالي :

$$L[t^n F(t)] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n} \dots\dots\dots (22-2)$$

حيث أن  $n = 1, 2, 3, \dots$  أي أن :

$$L[tF(t)] = -F'(s)$$

$$L[t^2 F(t)] = F''(s)$$

$$L[t^3 F(t)] = -F'''(s)$$

وبصورة عامة بتطبيق المعادلة (22-2) نجد أن :

$$L[t^n F(t)] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

مثال (6-2)

باستخدام تعريف المشتقة الثانية أوجد تحويل لابلاس للدالة :

$$L[t \sin t], L[t^2 \sin t]$$

الحل :

$$1 - L[\sin t] = \frac{1}{s^2 + 1}, \dots\dots L[t \sin t] = -\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{s^2 + 1} \right) = \frac{2s}{(s^2 + 1)^2}$$

$$2 - L[t^2 \sin t] = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{1}{s^2 + 1} \right) = \frac{6s^2 - 2}{(s^2 + 1)^3}$$

## 2 - 6 بعض خصائص تحويلات لابلاس

1- إذا كان :

$$L[F(t)] = F(s)$$

فيكون :

$$L\left[\int_0^1 f(u)du\right] = \frac{F(s)}{s} \dots\dots\dots(23-2)$$

2- إذا كان :

$$L[F(t)] = F(s)$$

فيكون :

$$L\left[\frac{F(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(u) du$$

بشرط أن :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{F(t)}{t}\right]$$

هي موجودة ومعروفة.

مثال (2-7)

$$L\left[\int_0^1 \sin 2u du\right]$$

أوجد :

الحل :

بما أن :

$$L[\sin 2u] = \frac{2}{s^2 + 4}$$

فيكون :

$$L \left[ \int_0^1 \sin 2u du \right] = \frac{2}{s(s^2 + 4)}$$

مثال ( 2 - 8 )

$$L \left[ \frac{\sin t}{t} \right]$$

أوجد :

الحل :

$$L [\sin t] = \frac{1}{s^2 + 1}$$

وبما أن نهاية الدالة  $\lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin t}{t} \right] = 1$  أي أن النهاية هي حقيقية وموجودة ،  
وبتطبيق الخاصية 2 نجد أن :

$$L \left[ \frac{\sin t}{t} \right] = \int_s^{\infty} \frac{du}{u^2 + 1} = \left[ \tan^{-1} u \right]_s^{\infty} = \tan^{-1} \left( \frac{1}{s} \right)$$

## 7-2 معكوس تحويل لابلاس (The Laplace Inverse)

إذا كانت  $F(s)$  تمثل تحويل لابلاس للدالة  $F(t)$  أو أن  $L [ F(t) ] = F(s)$  ، فيعرف تحويل لابلاس العكسي أو معكوس تحويل لابلاس للدالة  $F(s)$  والذي يرمز له  $L^{-1} [ F(s) ] = F(t)$  على أنه دالة  $F(t)$  . أي أن :

$$L^{-1} [ F(s) ] = F(t), \dots \dots L^{-1} \left[ \frac{1}{s} \right] = 1$$

$$L^{-1} \left[ \frac{1}{s^4} \right] = \frac{1}{6} L^{-1} \left[ \frac{6}{s^4} \right] = \frac{t^3}{6}$$

$$L^{-1} \left[ \frac{2s}{s^2 + 4} \right] = \sin 2t, \dots \dots L^{-1} \left[ \frac{2s}{s^2 + 4} \right] = 2 L^{-1} \left[ \frac{s}{s^2 + 4} \right] = 2 \cos 2t$$

إن تحويلات لابلاس العكسية ( معكوس تحويل لابلاس ) تحقق المبرهنة

التالية :-

$$L^{-1}(C_1F_1(s)+C_2F_2(s))=C_1L^{-1}[F_1(s)]+C_2L^{-1}[F_2(s)]\dots\dots\dots(24-2)$$

والجدول ( 2 - 2 ) يبين بعض القواعد المهمة في تحويلات ومعكوس تحويلات لابلاس .

جدول (2-2)

الدالة الأصلية ( معكوس تحويل لابلاس )	تحويل لابلاس للدالة
$L(1)$	$\frac{1}{s}$
$L[t]$	$\frac{1}{s^2}$
$L[t^{n-1}]$	$\frac{(n-1)!}{s^n}$
$L[\sin at]$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
$L[\cos at]$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
$L[x \sin ax]$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$
$L[x \cos ax]$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$
$L[x^{n-1} e^{ax}]$	$\frac{(n-1)!}{(s-a)^n}$

## 8-2 إيجاد معكوس تحويل لابلاس باستخدام الكسور الجزئية

إذا كانت دالة لابلاس هي  $F(s)$  وتتكون من بسط و مقام وذات طبيعة

$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$  حيث أن  $D(s), N(s)$  متغيرات الحدود وإذا كانت درجة

$N(s)$  أقل من درجة  $D(s)$  فإننا نستخدم وحدة الكسور الجزئية أي نقوم بتحليل الحدود بنفس الطريقة السابقة للكسور الجزئية .

مثال (9-2)

أوجد معكوس تحويل لابلاس للدالة :

$$L^{-1} \left[ \frac{s^2 - 6}{s^3 + 4s^2 + 3s} \right]$$

الحل :

المقدار في المقام يتحلل كما يلي :

$$s^3 + 4s^2 + 3s = s(s^2 + 4s + 3) = s(s + 3)(s + 1)$$

$$\frac{s^2 - 6}{s^3 + 4s^2 + 3s} = \frac{s^2 - 6}{s(s+3)(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+3}$$

$$\therefore s^2 - 6 = A(s+1)(s+3) + Bs(s+3) + Cs(s+1) = A(s^2 + 4s + 3) + B(s^2 + s) + C(s^2 + 3s)$$

$$s^2 - 6 = As^2 + 4As + 3A + Bs^2 + Bs + Cs^2 + 3Cs$$

وبضم الحدود المشتركة للمقادير  $s$  ,  $s^2$  والحد المطلق :

$$\therefore s^2 - 6 = s^2(A + B + C) + s(4A + B + 3C) + 3A$$

وبمساواة الحدود المشتركة بين الطرفين الأيمن والأيسر نستنتج أن :

$$3A = -6 \Rightarrow \therefore A = \frac{-6}{3} = -2$$

بالتعويض في بقية المعادلات وباستخدام طريقة الحذف أو التعويض نحصل

على :

$$A + B + C = 1$$

$$4A + B + 3C = 0$$

$$\therefore B = \frac{5}{2}, C = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{s^2-6}{s^3+4s^2+3s} = \frac{-2}{s} + \frac{5/2}{s+1} + \frac{1/2}{s+3} \Rightarrow \cdot L^{-1} \left[ -2 + \frac{5/2}{s+1} + \frac{1/2}{s+3} \right] = L^{-1}[-2] + L^{-1} \left[ \frac{5/2}{s+1} \right] + L^{-1} \left[ \frac{1/2}{s+3} \right]$$

$$\therefore F(t) = -2 + \frac{5}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}$$

مثال (2-10)

أوجد معكوس تحويل لابلاس للدالة :

$$L^{-1} \left[ \frac{s+2}{s^2-6s+8} \right]$$

الحل :

$$\frac{s+2}{s^2-6s+8} = \frac{s+2}{(s-2)(s-4)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-4}$$

$$\therefore s+2 = A(s-4) + B(s-2) = As-4A+Bs-2B$$

$$\therefore s+2 = (A+B)s + (-4A-2B) \Rightarrow A+B=1, \dots, 4A+2B=-2$$

ومنها نستنتج أن :

$$A = -2, B = 3$$

وبالتعويض عن قيم A و B و إيجاد معكوس تحويل لابلاس لها :

$$L^{-1} \left[ \frac{s+2}{s^2-6s+8} \right] = L^{-1} \left[ \frac{-2}{s-2} \right] + L^{-1} \left[ \frac{3}{s-4} \right] = -2e^{2t} + 3e^{4t} = F(t)$$

## 9-2 ملاحظات حول إستخدام طريقة الكسور الجزئية في تحويلات لابلاس

عند وجود عوامل من الدرجة الثانية فإن الكسور الجزئية المناظرة يجب أن يحتوي كل منها على بسط خطي ولذلك يكون مفكوك الكسر بالشكل التالي :

$$\frac{1}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

$$\therefore 1 = A(s^2+1) + (Bs+C)(s+1) = As^2 + A + Bs^2 + Bs + Cs + C$$

$$1 = (A+B)s^2 + (B+C)s + (A+C)$$

$$A+C=1$$

$$A+B=0$$

$$B+C=0 \Rightarrow \therefore B=-C$$

$$\left. \begin{array}{l} A+C=1 \\ A-C=0 \end{array} \right\} \rightarrow 2A=1 \rightarrow \therefore A=\frac{1}{2}, \dots, B=-\frac{1}{2}, \dots, C=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{1/2}{(s+1)} + \frac{-\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}}{(s^2+1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s+1} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{s}{s^2+1} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s^2+1} \right)$$

$$L^{-1} \left[ \frac{1}{(s+1)(s^2+1)} \right] = \frac{1}{2} L^{-1} \left[ \frac{1}{s+1} \right] - \frac{1}{2} L^{-1} \left[ \frac{s}{s^2+1} \right] + \frac{1}{2} L^{-1} \left[ \frac{1}{s^2+1} \right]$$

$$\therefore F(t) = \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t$$

عند إحتواء المقام على عوامل خطية مكررة يجب فرض الكسور الجزئية بالشكل التالي :

$$\frac{8}{s^3(s^2-s-2)} = \frac{8}{s^3(s-2)(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s-2} + \frac{E}{s+1}$$

عند احتواء المقام على عوامل من الدرجة الثانية ومكررة يجب فرض الكسور بالشكل الآتي :

$$\frac{16}{s^2 (s^2 + 4)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 4} + \frac{Es + F}{(s^2 + 4)^2}$$

مثال (2-11)

أوجد معكوس تحويل لابلاس للدالة التالية :

$$L^{-1} \left[ \frac{16}{s^2 (s^2 + 4)^2} \right]$$

الحل :

$$\frac{16}{s^2 (s^2 + 4)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 4} + \frac{Es + F}{(s^2 + 4)^2}$$

وبالضرب في المرافق  $s^2 (s^2 + 4)^2$  نحصل على:

$$16 = As(s^2 + 4)^2 + B(s^2 + 4)^2 + (Cs + D)s^2(s^2 + 4) + (Es + F)s^2$$

$$16 = As[s^4 + 8s^2 + 16] + B[s^4 + 8s^2 + 16] + (Cs + D)(s^4 + 4s^2) + Es^3 + Fs^2$$

$$16 = As^5 + 8As^3 + 16As + Bs^4 + 8Bs^2 + 16B + Cs^5 + 4Cs^3 + Ds^4 + 4Ds^2 + Es^3 + Fs^2$$

$$16 = (A + C)s^5 + (B + D)s^4 + (8A + 4C + E)s^3 + (8B + D + F)s^2 + 16As + 16B$$

$$16 = 16B \rightarrow B = 1$$

$$16A = 0 \rightarrow \therefore A = 0$$

$$A + C = 0 \Rightarrow \therefore C = 0$$

$$B + D = 0 \rightarrow \therefore D = -1$$

$$8A + 4C + E = 0 \Rightarrow \therefore E = 0$$

$$8B + D + F = 0 \rightarrow \therefore 8 + (-1) + F = 0 \Rightarrow \therefore F = -7$$

$$\therefore \frac{16}{s^2 (s^2 + 4)^2} = \frac{0}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{(0)s - 1}{s^2 + 4} + \frac{(0)s - 7}{(s^2 + 4)^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 4} - \frac{7}{(s^2 + 4)^2}$$

$$\therefore L^{-1} \left[ \frac{16}{s^2 (s^2 + 4)^2} \right] = L^{-1} \left[ \frac{1}{s^2} \right] - L^{-1} \left[ \frac{1}{s^2 + 4} \right] - 7L^{-1} \left[ \frac{1}{(s^2 + 4)^2} \right]$$

$$\therefore F(t) = t - \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{7}{2} t \sin 2t$$

أوجد معكوس تحويل لابلاس للدالة :

$$L^{-1} \left[ \frac{4s^2 - 5s - 4}{(s^3 + s^2 - 2s)} \right]$$

الحل :

$$\frac{4s^2 + 5s - 4}{(s^3 + s^2 - 2s)} = \frac{4s^2 + 5s - 4}{s(s^2 + s - 2)} = \frac{4s^2 + 5s - 4}{s(s-2)(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+1}$$

$$\therefore 4s^2 + 5s - 4 = A(s-2)(s+1) + Bs(s+1) + Cs(s-2)$$

$$\therefore 4s^2 + 5s - 4 = A[s^2 - s - 2] + B[s^2 + s] + C[s^2 - 2s]$$

$$4s^2 + 5s - 4 = As^2 - As - 2A + Bs^2 + Bs + Cs^2 - 2Cs$$

$$4s^2 + 5s - 4 = (A + B + C)s^2 + (-A + B - 2C)s - 2A$$

$$4 = A + B + C$$

$$5 = -A + B - 2C$$

$$-4 = -2A \rightarrow \therefore A = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} (2 = B + C)(2) \\ 7 = B - 2C \end{array} \right\} \Rightarrow \therefore B = \frac{11}{3}, \dots C = -\frac{5}{3}$$

$$\therefore L^{-1} \left[ \frac{4s^2 + 5s - 4}{s(s-2)(s+1)} \right] = L^{-1} \left[ \frac{2}{s} \right] + L^{-1} \left[ \frac{11/3}{s-2} \right] - L^{-1} \left[ \frac{5/3}{s+1} \right]$$

$$\therefore F(t) = 2 + \frac{11}{3}e^{2t} - \frac{5}{3}e^{-t}$$

أوجد معكوس تحويل لابلاس للدالة :

$$L^{-1} \left[ \frac{1}{s^2 + 4s + 4} \right]$$

الحل :

$$\frac{1}{s^2 + 4s + 4} = \frac{1}{(s+2)^2} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2}$$

وبالضرب في مرافق المقام نحصل على :

$$1 = A(s+2) + B = As + 2A + B$$

$$\therefore 2A + B = 1$$

$$A = 0, B = 1$$

أي أن :

$$\therefore F(t) = L^{-1} \left[ \frac{1}{(s+2)^2} \right] = te^{-2t}$$

## 10-2 تحويلات لابلاس للمشتقات

إذا كانت  $F(t)$  هي دالة متصلة لقيم  $(t \geq 0)$  وذات رتبة أسية عندما  $(t \rightarrow \infty)$  وكانت الدالة  $F'(t)$  منقطعة الاتصال على أي فترة محددة من المدى  $(t \geq 0)$  وذات رتبة أسية عندما  $t \rightarrow \infty$  لذلك فإن :

$$L[F(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} F'(t) dt$$

ويمكن حل التكامل بافتراض أن :

$$u = e^{-st}$$

أي أن :

$$du = -se^{-st} dt$$

وأن :

$$dv = F'(t)dt \rightarrow \therefore v = F(t)$$

وبما أن :

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\therefore \int_0^{\infty} e^{-st} F'(t) dt = [-se^{-st} F(t)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -se^{-st} F(t) dt = 0 - F(0) + s \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt = -F(0) + sF(s)$$

$$\therefore L[F'(t)] = sF(s) - F(0) \dots \dots \dots (25 - 2)$$

و باستخدام عملية التكرار على النظرية السابقة فإننا نحصل على :

$$L[F''(t)] = sL[F'(t)] - F'(0) = s[sL[F(t)] - F(0)] - F'(0) = s^2 L[F(t)] - sF(0) - F'(0)$$

أي أن :

$$\therefore L[F^n(t)] = s^n L[F(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} F^k(0) \dots \dots \dots (26 - 2)$$

وقد استخدمت هذه النظرية التي تعتمد على تحويلات ومعكوس تحويلات لابلاس ، في حل المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة وتسمح هذه النظرية بتحويل المعادلات التفاضلية إلى معادلات جبرية كما هو في المثال التالي .

مثال (14-2)

حل مسألة القيمة الابتدائية التالية :

$$\bar{y} - 5y = e^{5x} \dots (I)$$

$$y(0) = 0$$

علما أن :

الحل :

$$L(y) = L[F(x)] = sy(s) - y(0)$$

إذن :

$$L(5y) = 5L[y] - y(0) = 5y(s)$$

وبالنسبة للمشتقة فإن:

$$L[y(x)] = sy(s) - y(0) = sy(s)$$

وأن :

$$L[e^{5x}] = \frac{1}{s-5}$$

وبالتعويض في المعادلة (I) ينتج :

$$sy(s) - 5y(s) = \frac{1}{s-5} \rightarrow \therefore y(s)(s-5) = \frac{1}{s-5} \rightarrow \therefore y(s) = \frac{1}{(s-5)^2}$$

$$\therefore y(x) = L^{-1}[y(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{(s-5)^2}\right] = xe^{5x}$$

مثال (2-15)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية باستخدام تحويلات لابلاس :

$$X''(t) + 2X'(t) + X(t) = 3te^{-t}$$

علما أن :

$$X'(0) = 2, X(0) = 4$$

الحل :

بأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة ينتج أن :

$$L[X''(t) + 2X'(t) + X(t)] = L[3te^{-t}]$$

وبفرض أن :

$$L[X(t)] = X(s)$$

ينتج أن :

$$L[X''(t)] + 2L[X'(t)] + L[X(t)] = 3L[te^{-t}]$$

$$[s^2 X(s) - sX(0) - X'(0)] + 2[sX(s) - X(0)] + X(s) = \frac{3}{(s+1)^2}$$

$$[s^2 X(s) - 4s - 2] + 2[sX(s) - 4] + X(s) = \frac{3}{(s+1)^2}$$

$$X(s)[s^2 + 2s + 1] - 4s - 10 = \frac{3}{(s+1)^2}$$

$$\therefore X(s)[s^2 + 2s + 1] = \frac{3}{(s+1)^2} + 4s + 10$$

$$\therefore X(s)(s+1)^2 = \frac{3}{(s+1)^2} + 4s + 10$$

$$\therefore X(s) = \frac{4s+10}{(s+1)^2} + \frac{3}{(s+1)^4} = \frac{4s+4}{(s+1)^2} + \frac{6}{(s+1)^2} + \frac{3}{(s+1)^4} = \frac{4(s+1)}{(s+1)^2} + \frac{6}{(s+1)^2} + \frac{3}{(s+1)^4}$$

$$\therefore X(s) = \frac{4}{(s+1)} + \frac{6}{(s+1)^2} + \frac{3}{(s+1)^4}$$

وعند أخذ معكوس تحويل لابلاس للطرفين و باستخدام نظرية الإزاحة

نحصل على :

$$L^{-1}[X(s)] = X(t) = L^{-1}\left[\frac{4}{(s+1)} + \frac{6}{(s+1)^2} + \frac{3}{(s+1)^4}\right] \Rightarrow X(t) = 4e^{-t} + 6te^{-t} + 3t^2e^{-t}$$

مثال (2 - 16)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية مستخدماً تحويلات لابلاس

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4y = 3$$

$$y(0) = y'(0) = 1$$

علما أن :

الحل :

بأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة ينتج أن :

$$L \left[ \frac{d^2 y}{dt^2} + 4 y \right] = L [3]$$

وبما أن :

$$L [3] = \frac{3}{s}$$

و أن :

$$L \left[ \frac{d^2 y}{dt^2} \right] = s^2 y(s) - sy(0) - y'(0)$$

و أن :

$$L [4 y] = 4 y(s)$$

وبالتعويض في المعادلة الأصلية نحصل على :

$$s^2 y(s) - s - 1 + 4 y(s) = \frac{3}{s}$$

$$\therefore s^2 y(s) + 4 y(s) = \frac{3}{s} + s + 1$$

$$\therefore (s^2 + 4) y(s) = \frac{3}{s} + s + 1$$

$$\therefore y(s) = \frac{3}{s(s^2 + 4)} + \frac{s}{(s^2 + 4)} + \frac{1}{(s^2 + 4)} \left\} \rightarrow \left\{ \frac{3}{s(s^2 + 4)} = \int_0^1 \sin 3t dt = \left[ -\frac{1}{3} \cos 3t \right]_0^1 \right.$$

$$L^{-1} \left[ \frac{1}{s^2 + 4} \right] = \frac{1}{2} \sin 2t \quad \text{و} \quad L^{-1} \left[ \frac{s}{s^2 + 4} \right] = \cos 2t$$

وبالتعويض ينتج أن :

$$y(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cos 1 + \frac{1}{2} \sin 2t + \cos 2t$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية .

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية مستخدماً تحويلات لابلاس :

$$y''(t) + \beta^2 y(t) = A \sin \omega t \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

الحل :

$$L[y''(t)] = s^2 f(s) - s f(0) - f'(0) = s^2 f(s) - s$$

$$L[\beta^2 y(t)] = \beta^2 f(s), \quad L[A \sin \omega t] = \frac{A \omega}{s^2 + \omega^2}$$

وبالتعويض في المعادلة نحصل على :

$$s^2 y(s) - s + \beta^2 y(s) = \frac{A \omega}{s^2 + \omega^2}$$

ومنها نحصل على :

$$y(s) = \frac{s}{s^2 + \beta^2} + \frac{A \omega}{(s^2 + \beta^2)(s^2 + \omega^2)}$$

إن صيغة التحويل العكسي للمعادلة أعلاه تعتمد على كون  $\beta$  تساوي أو لا

تساوي  $\omega$  فإذا كانت  $\omega \neq \beta$  , يكون الحل بالشكل التالي :

$$y(t) = \cos \beta t + \frac{A}{\beta(\beta^2 - \omega^2)} (\beta \sin \omega t - \omega \sin \beta t)$$

وإذا كانت  $\omega = \beta$  , يكون الحل بالشكل التالي :

$$y(t) = \cos \beta t + \frac{A}{\beta^2} (\sin \beta t - \beta t \cos \beta t)$$

ونترك للطالب إثبات ذلك .

## 11.2 أمثلة وتمارين

a . أوجد تحويل لابلاس لما يلي :

$$1) f(t) = \begin{cases} t, \dots \dots 0 < t < 2 \\ 2, \dots \dots t > 2 \end{cases}$$

$$2) f(t) = \frac{e^{2t} - 1}{t}$$

$$3) f(t) = \frac{1 - \cos 3t}{t}$$

$$4) \frac{e^{-3t} \sin 2t}{t}$$

$$5) L [t(e^{-3t} - t^2 + \cos 4t - 1)]$$

$$6) f(t) = e^{3t} \cos 4t$$

$$7) f(t) = t^5 e^{-2t}$$

$$8) f(t) = 2e^t - 3e^{-2t} + 4t^2$$

$$9) f(x) = \begin{cases} 1 \dots\dots\dots 0 \leq x \leq 1 \\ e^x \dots\dots\dots 1 < x \leq 4 \\ 0 \dots\dots\dots \dots x > 4 \end{cases}$$

b. أوجد معكوس تحويل لابلاس للدوال التالية :

$$1) f(s) = \frac{1}{(s+2)^4}$$

$$2) f(s) = \frac{s}{s(s+2)^2}$$

$$3) f(s) = \frac{s+1}{9s^2+6s+5}$$

$$4) f(s) = \frac{1}{s(s+2)^2}$$

$$5) f(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$$

$$6) f(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+2s+5)}$$

$$7) f(s) = \frac{1}{s^4+2s^2+4}$$

$$8) f(s) = \frac{2}{(s^2+4)^2}$$

$$9) f(s) = \frac{s+3}{(s^2+3s+2)^2}$$

$$10) f(s) = \frac{s+2}{(s^2+4s+5)}$$

$$11) f(s) = \frac{2s^2+1}{s(s+1)^2}$$

$$12) L^{-1} \left[ \frac{3s}{s^2+9} + \frac{15}{s^2+25} \right]$$

$$13) L^{-1} \left[ \frac{2s-10}{s^2-4s+20} \right]$$

$$14) f(s) = \left[ \frac{6}{s-2} + \frac{4}{s^3} \right]$$

C. أوجد حل المعادلات التفاضلية التالية باستخدام تحويلات لابلاس :

$$W(1)=-1, W(0)=-3$$

$$y(0)=y'(0)=1$$

$$y(0)=1, y'(0)=-2$$

$$y(0)=y'(0)=1$$

$$y(0)=-2, y'(0)=1$$

$$y(0)=y'(0)=y''(0)=0, y'''(0)=1$$

$$y(0)=y'(0)=0$$

$$y(0)=0$$

$$X(0)=2, X'(0)=0$$

$$y(0)=5, y'(0)=-2$$

$$1 - W''(x) + 2W'(x) + W(x) = x$$

$$2 - \frac{d^2 y}{dt^2} + 4y = 3$$

$$3 - y'' + 2y' + y = te^{-t}$$

$$4 - y'' + 4y' + 3y = e^t$$

$$5 - y'' + 4y = \cos 2t$$

$$6 - \frac{d^4 y}{dx^4} + 2\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$$

$$7 - y'' - 4y' + 4y = 6e^x$$

$$8 - y' - 5y = e^{5x}$$

$$9 - X''(t) - 2X'(t) = 6 - 4t$$

$$10 - y''(x) + 9y(x) = 40e^x$$