الباب الثالث

المعادلات التفاضلية الجزئية

Partial Differential Equations

1.3 تعريف التفاضل الجزئي .

2.3 العلاقات بين المشتقات الجزئية .

3.3 تكوين المعادلات التفاضلية ـ جريان الحرارة خلال جسم في الفراغ .

4.3 الحل العام للمعادلات التفاضلية الجزئية ـ طريقة فصل المتغيرات .

5.3 أمثلة وتمارين .

1.3 التفاضــل الجزئـــــي (Partial Differentiation)

تعريف :

لو كانت لدينا دالة مثل u(x,y) حيث أن كل من y,x متغير مستقل فإن :

$$du=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y dx+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x dy \qquad (1-3)$$

أو:

$$\nabla u=i\frac{\partial u}{\partial x}+j\frac{\partial u}{\partial y}=grad\,u \qquad (2-3)$$

وهو ما يعرف بالتفاضل الجزئي للدالة u .

1-3 العلاقــات بيــن المشتقــات الجزئيــة

بالعودة إلى الدالة التي تحتوي على متغير مستقل واحد فإن:

$$y=f(x) \qquad (3-3)$$

و باستخدام التعريف فإن :

$$dy=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx \qquad (4-3)$$

وفي بعض الأحيان فإن y لا يكون بصورة واضحة دالة لــ (x) كما في المعادلة (3-3) بل هو دالة ضمنية كـما في المعادلـــة :

$$g(x,y)=0.0 \qquad (5-3)$$

و باعتبار أن g هو متغير ثــالث مؤقـــت يــمــكـــن مــفــاضــلـــة الــمــعــادلـــة (3 - 5) كــما يــلـــي :

$$dg=\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)dy=0.0 \qquad (6-3)$$

وبمقارنة المعادلة (3 - 6) مع المعادلة (3-3) يمكن الحصول على :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{(\partial g/\partial x)}{(\partial g/\partial y)}=\frac{\partial y}{\partial x}\text{.......... ....}(7-3)$$

مثال (3-1)

إذا كان $x^2+y^2=a^2\cdots(I)$, فأوجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل :

بما أن

$$y=\sqrt{(a^2-x^2)}=(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

إذن :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{2}(-2x)}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{-x}{(a^2-x^2)^{1/2}}$$

وبصورة مشابهة يمكن كتابة المعادلة (I) بالشكل التالي :

$$g(x,y)=x^2+y^2-a^2=0.0$$

و باستخدام التفاضل الجزئي فإن :

$$\frac{\partial g}{\partial x}=2x \quad \text{و} \quad \frac{\partial g}{\partial y}=2y$$

وبتعويض القيم في المعادلة الأصلية ينتج أن:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-(\partial g/\partial x)}{(\partial g/\partial y)}=\frac{-2x}{2y}=\frac{-x}{y}=\frac{-x}{(a^2-x^2)^{1/2}}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\text{..........}(II)$$

و إذا كانت الدالة تحتوي على أكثر من متغيرين مستقلين مثل :

$$Z = g(x, y) \qquad \qquad (8-3)$$

إذن بموجب التعريف :

$$dz = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)dy \qquad \qquad (9-3)$$

ويمكن أن تكتب المعادلة (3-8) كدالة ضمنية بالشكل التالي:

$$F(x, y, z) = 0.0 \qquad \qquad (10-3)$$

وعند أخذ تفاضل هذه الدالة يتبين أن :

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)dz \qquad \qquad (11-3)$$

و بترتيب المعادلة (3 - 11) نجد أن:

$$dz = -\frac{(\partial F/\partial x)}{(\partial F/\partial z)}dx - \frac{(\partial F/\partial y)}{(\partial F/\partial z)}dy \qquad \qquad (12-3)$$

وعند مقارنة المعادلة (3 -12) مع المعادلة (3-9) نجد أن :

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial F / \partial y}{(\partial F / \partial z)} \qquad \qquad (13-3)$$

و :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial F / \partial x}{(\partial F / \partial z)} \qquad \qquad (14-3)$$

من الواضح بأن :

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial g}\right) = 1 \qquad \qquad (15-3)$$

و بإزالة $(\partial F/\partial z)$ من المعادلتين نجد أن :

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial g}\right)=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial F}\right) \qquad (16-3)$$

وإذا تـم إيـقـاء z ثـابتـا فـي المعـادلـة (3 -11) فـإن $dz = 0$ ولـذلـك :

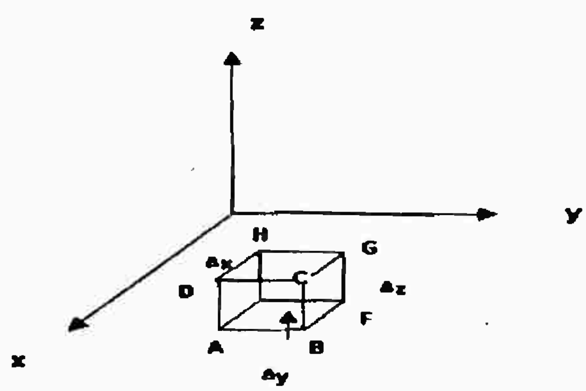
$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{(\partial F/\partial x)}{(\partial F/\partial y)} \qquad (17-3)$$

وبترتيب المعادلتين (3 -16) و(3 -17) نجد أن :

$$\left[\begin{array}{ll}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial g}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)=-1 & (18-3)\\[2ex] \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)=-1 & (19-3)\end{array}\right\}$$

2-3 تكوين المعادلات التفاضلية الجزئية – جريـان الحرارة خلال جسـم في الفـــراغ

إن أفضل مثال لتكوين المعادلات التفاضلية الجزئية هو في تصـور جريـان الحرارة خلال جسم في الفراغ كما يوضح ذلك الشكل أدناه ويجب الأخـذ بعـين الاعتبار الحقائق التالية :



شكل (3–1) انتقال الحرارة خلال جسم في الفراغ

1) إن جريان الحرارة يحدث باتجاه تناقص الحرارة .

2) معدل جريان الحرارة خلال مساحة معينة يتناسب مع انحدار الحرارة بالدرجات لوحدة المساحة وفي اتجاه عمودي على تلك المساحة .

3) كمية الحرارة المكتسبة من قبل النظام أو المفقودة من الجسم تتناسب مع كتلة الجسم و درجة الحرارة .

إن ثابت التناسب في النقطة (2) يسمى بمعامل التوصيل الحراري (k) و إن ثابت التناسب في النقطة(3) يسمى الحرارة النوعية للمادة (C).

والآن لنعتبر الظروف الحرارية في مقطع محدد من معدن موصل للحرارة كما في الشكل (3 -1) وإذا كانت كتلة المعدن لوحدة الحجم أو ما يعرف فيزيائيا بالكثافة (ρ) فإن تغيّر كتلة المقطع هو :

$$\Delta m = \rho \Delta x \Delta y \Delta z \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20-3)$$

ومن جهة أخرى إذا كانت T هي درجة الحرارة عند أي زمن و إذا كانت ΔT هي التغير بدرجة الحرارة الذي يحدث خلال المقطع في فترة زمنية محددة هي Δθ فإن كمية الحرارة المحفوظة في المقطع عند هذه الفترة الزمنية هي :

$$\Delta H = C * \Delta m * \Delta T = C * \rho * (\Delta x * \Delta y * \Delta z) \ldots\ldots\ldots \quad (21-3)$$

أما معدل الحرارة التي يكتسبها النظام فهي:

$$\frac{\Delta H}{\Delta \theta} = C \rho \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\Delta T}{\Delta \theta} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22-3)$$

حيث أن θ هو الزمن والتي تسمى أيضا " الحرارة المتراكمة أو المتجمعة في الجسم .

إن الحرارة التي تتولد نتيجة التغير في ΔT تأتي من مصدرين هما :

المصـــدر الأول

يمكن توليد الحرارة خلال الجسم بواسطة وسائل كهربائيـــة أو كيميائيـــة لحظية عند معدل معلوم مثال $f(x,y,z,\theta)$ و إن المعدل الـــذي تصـــل فيـــه الحرارة إلى المقطع من هذا المصدر سيكون :

$$f(x,y,z,\theta)\Delta x \Delta y \Delta z \qquad (23-3)$$

المصـــدر الثاني

هو الحرارة المكتسبة من انتقال الحرارة المفترض خلال أوجه المقطـــع المختلفة. إن الصيغة العامة لانتقال الحرارة بالتوصيل خلال مســـاحة معينـــة يمكن الحصول عليها من المعادلة التالية :

$$-kA\frac{dT}{dx} \qquad (24-3)$$

وعلى هذا الأساس فإن كمية الحـــرارة المنتـــقـــلـــة خـــلال المقطـــع x هي(ADHL) :

$$-k\Delta y\Delta z\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x}$$

وخلال نهاية المقطع x+Δx هي :

$$-k\Delta y\Delta z\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}$$

ولذا فإن صافي التدفق الحراري:

$$-k\Delta y\Delta z\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x}-\left(-k\Delta y\Delta z\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}=k\Delta y\Delta z\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}-k\Delta y\Delta z\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x}$$

$$=k\Delta y\Delta z\left(\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}-\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x}\right) \qquad (25-3)$$

إن الإشارة السالبة تعني أن التدفق الحراري يحدث باتجاه نقصان درجة الحرارة ويمكن تكوين معادلات تفاضلية بنفس الحالة في الإتجاهين y و z (الواجهة ABFL والواجهة ABCD) بالشكل التالي :

$$-k\Delta x\Delta z\frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y}-\left(-k\Delta x\Delta z\frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y+\Delta y}\right)=k\Delta x\Delta z\left(\frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y+\Delta y}-\frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y}\right)\ldots\ldots\ldots(26-3)$$

وفي الاتجاه z يكون التدفق الحراري بصيغته النهائية على الصورة التالية :

$$-k\Delta x\Delta y\frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z}-\left(-k\Delta x\Delta y\frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z+\Delta z}\right)=k\Delta x\Delta y\left(\frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z+\Delta z}-\frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z}\right)\cdots\cdots(27-3)$$

وبموجب قانون حفظ الطاقة فإن (الداخل - الخارج = المتراكم) (In - Out = Accumulation) نجد أن :

{ صافي تدفق الحرارة في مقطع الجسم } + { الحرارة المتولدة في المقطع } = المتراكم الحراري

وبالتعويض عن كل صيغة بما يساويها من المعادلات أعلاه ينتج أن :

$$k\Delta y\Delta z\left(\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x+\Delta x}-\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x}\right)+k\Delta x\Delta z\left(\frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y+\Delta y}-\frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y}\right)+k\Delta x\Delta y\left(\frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z+\Delta z}-\frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z}\right)+f(x,y,z,\theta)\Delta x\Delta y\Delta z$$
$$=\rho C\Delta x\Delta y\Delta z\frac{\partial T}{\partial \theta}\ldots\ldots\ldots\ldots(28-3)$$

إن الرمز $f(x,y,z,\theta)$ سيتم تغييره إلى q° أي كمية الحرارة المتولدة من الجسم وستصبح المعادلة (3 - 28) بعد قسمة جميع الحدود على المقدار $\Delta x\Delta y\Delta z$ بالشكل التالي :

$$k\left[\frac{\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x+\Delta x}-\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x}}{\Delta x}+\frac{\frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y+\Delta y}-\frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y}}{\Delta y}+\frac{\frac{\partial T}{\partial z}\Big|_{z+\Delta z}-\frac{\partial T}{\partial z}\Big|_{z}}{\Delta z}\right]+q^{\circ}=C\rho\frac{\partial T}{\partial \theta}\cdots\cdots(29-3)$$

و بأخذ النهايات عندما تقترب كل من $\Delta x,\Delta y,\Delta z$ من الصفر ومن تعريف المشتقة نستنتج أن :

$$k\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right]+q^\circ=\rho C\frac{\partial T}{\partial \theta}\qquad(30-3)$$

و بــقــسمة طرفي المعادلة على الثابت k

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{q^\circ}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \theta}\qquad(31-3)$$

حيث أن :

$$\alpha=\frac{k}{\rho C}$$

أو مــا يــعــرف بــمعامل الانتشار الحراري .وتمثـل المعادلـــة (3 -31) المعادلة العامة لانتقال الحرارة في الأجسام المستوية الثلاثية الأبعاد

3-3 الحل العام للمعــادلات التفاضليــة الجزئية – طريقة فصل المتغيّرات

لتكن x , y , z هي الإحداثيات الكارتيزية في الفضاء العادي , في هذه الحالة يمكن معرفة شكل المعادلة لتغير السرعة مع تلك الإحــداثيات والتــي تكتب على شاكــلـــة المعادلــــة (3 -31) وبالصيغة التالية :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0.0\qquad(32-3)$$

أو ما يسمى بمعادلة لابلاس وهي تدخل في مســائل تتعلــق بالاســتقرار الحراري , فرق الجهد الألكتروستاتي وحالة استقرار تدفق الموائع المتنوعة . ويمكن تغيير شكل المعادلة (3 -32) عندما تكــون الإحداثــيات هي لدائرة نصف قطرها r و ارتفاعها z وزاوية دورانها هي θ بالشكل التالي :

$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $z=z$

وتكون المعادلة الناتجة هي ما يسمى بمعادلة لابلاس للإحداثيات الأسطوانية والتي ستكتب كالآتي :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (33-3)$$

ولنفرض أن أحد الأجسام التي ندرسها تقوم بإعادة T عن درجة الحرارة في نقطة ما في الإحداثيات الكارتيزية x , y , z والزمن θ ولنأخذ نقطة الأصل والزمن الابتدائي هو (0 = θ) و إذا لم يكن هناك مصدر يجهز الجسم بالحرارة فإن : $\frac{q^\circ}{k}=0.0$ ودرجة الحرارة T يجب أن تحقق المعادلة التالية :

$$\frac{\partial T}{\partial \theta}=h^2\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right]\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (34-3)$$

حيث أن h^2 هو ثابت فيزيائي وهو ما سمي سابقا معامل الانتشار الحراري.

إن المعادلة (3 - 34) تصلح للحل تحت شروط إن الكثافة والحرارة النوعية ومعامل التوصيل الحراري كلها ثابتة للجسم قيد الدراسة , وهناك طريقتان لحل المعادلات التفاضلية الجزئية وهي :

a - طريقة تحويلات لابلاس وقد تم دراستها سابقا .

b - طريقة فصل المتغيرات وسنتناول هذه الطريقة بالتفصيل .

لنأخذ معادلة توزيع السرعة لجسم في الفراغ وهي على شاكلة المعادلة (3 -31) وسنكتبها بالشكل الآتي :

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=h^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\cdots\;\cdots\;(35-3)$$

حيث أن h^2 هو ثابت ولنفترض أن الانتشار الحراري يحدث في الاتجـــاه x فقط لذلك سيكون من السهل اختصار المعادلة أعلاه إلى الصورة التالية :

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (36-3)$$

أي أن حل المعادلة سيكون دالة للمتغيـــرين x و θ وكـــذلك ســـتعتمد علـــى البـــارامتـــر h^2 أي أن :

$$u = f(\theta).v(x) \qquad (37-3)$$

إن المعادلة (3 -36) تبين أنها ممكنة الحل إذا كانت (θ) f هي دالة لـــ θ فقط و v(x) هي دالة لـــ x فقط أي أن :

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = f'(\theta)v(x) \qquad (38-3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(\theta)v''(x) \qquad (39-3)$$

وبتعويض المعادلتين (3 - 38) و (3 - 39) في المعادلـــة (3 - 37) نحصل على :

$$\therefore f'(\theta).v(x) = f(\theta).v''(x) \qquad (40-3)$$

وعند فصل المتغيرات سينتج أن :

$$\frac{f'(\theta)}{f(\theta)} = h^2 \frac{v''(x)}{v(x)} \qquad (41-3)$$

ويقال عندئذ إن المعادلة (3 -34) مفصولة المتغيرات (المستقلة) .

وحيث أن x , θ هما متغيران مستقلان , فإن الطريقة الوحيدة لحل المعادلـــة (3 -41) هو أن تكون هناك دالة في x فقط مساوية لدالة في θ فقـــط وأن تكون كل من الدالتين مساوية لثابت أي أن :

$$\frac{f'(\theta)}{f(\theta)} = k \text{ ....} (42-3)$$

$$h^2 \frac{v''(x)}{v(x)} = k \text{ ....} (43-3)$$

حيث أن k هو ثابت اختياري .

وهناك طريقة أخرى للحصول على المعاملات في المعـــادلتين (3 - 42) و (3 - 43) وهي بإجراء تفاضل لطرفي المعادلة (3- 42) نسبة للمتغير θ وحيث أن :

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{f'(\theta)}{f(\theta)}\right) = 0.0 \text{.......... ....} (44-3)$$

ولأن الطرف الأيمن من المعادلة (3 -41) لا يعتمد على الزمن θ , لـــذلك سنحصل على المعادلة (3 - 42) عن طريق تكامل المعادلـــة (3 - 42) والتي ستكون على الصورة التالية :

$$\frac{df}{d\theta} = kf \text{ ....} (45-3)$$

$$\therefore \int \frac{df}{f} = k \int d\theta$$

$$\ln f = k\theta + C$$

$$\therefore f = c_1 e^{k\theta} \text{ ....} (46-3)$$

وقبل أن نستمر في حل المسألة , سنختار الثابت الإختياري β^2 للتخلص من الثابت k وبالشكل التالي :

$$k = h^2 \beta^2 \text{ ....} (47-3)$$

$$\therefore \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} = h^2\beta^2$$

و

$$\frac{h^2 v''(x)}{v(x)} = h^2\beta^2$$

وسنجد أن :

$$f(\theta) = c_1 e^{h^2\beta^2\theta}$$

و باستخدام β حقيقية يتضح أن الثابت k هو موجب وأن حل المعادلـــة v(x) سيكون بالشكل التالي :

$$v(x) = c_2 \cosh \beta x + c_3 \sinh \beta x$$

وأن الحل العام للمعادلة التفاضلية هو :

$$u = c_1 e^{h^2\beta^2\theta}(c_2 \cosh \beta x + c_3 \sinh \beta x)$$

أو :

$$u(x,\theta) = e^{h^2\beta^2\theta}(a \cosh \beta x + b \sinh \beta x)$$

حيث أن :

$a = c_1 . c_2 , b = c_1 . c_3$ -

و إذا كـــانـــت :

$$k = -h^2\alpha^2$$

فـــإن k سيكون ثـــابـــتا سالبا وسيكون الحل هو :

$$u = e^{-h^2\alpha^2\theta}(A \cos \alpha x + B \sin \alpha x)$$

أما إذا كانت k مساوية للصفر فإن :

$$u = (C_1 + C_2 x)(C_3 + C_4\theta)$$

مثال(3-2)

قضيب طوله l تم عزل سطحه الجانبي جيدا بحيث يمكن افتــراض أن سريان الحرارة يكون في اتجاه واحد فقط . في البداية كان القضيب عند درجة حرارة 100 م° وعلى جميع أجزائه ، عند $t = 0$ فإن درجة الحــرارة فــي الجهة اليسرى للقضيب تم خفضها فجأة إلى 50 م° وتم الحفــاظ علــى تلــك الدرجة بعد ذلك ، أما درجة حرارة النهاية اليمنى من القضــيب فقــد بقيــت محفوظة عند 100 م° .

أوجد درجة الحرارة عند أي نقطة من القضيب و عنــد أي زمــن علمــا إن معادلة انتقال الحرارة لهذه المنظومة في اتجاه واحد في الحالة المستقرة هي :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial T}{\partial \theta} \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \quad (I)$$

أن الظروف الحدية (Boundary Conditions) هي :

i) $T = 160\ C°$ at $\theta = 0$
ii) $T = 100\ C°$ at $x = 0$
iii) $T = 50\ C°$ at $x = l$

الحــل :

$T = f(\theta).V(x)$..(II)

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = f(\theta).V''(x)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = f'(\theta).V(x)$$

$$\therefore \quad f(\theta).V''(x) = a^2 \left[f'(\theta).V(x) \right]$$

وبالقسمة على $f(\theta).V(x)$, نحصل على :

$$\frac{V''(x)}{V(x)} = a^2\left(\frac{f'(\theta)}{f(\theta)}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots (III)$$

وبفرض أن قيمة المعادلة الأخيرة هي ثابتة و تساوي λ و أن قيمة λ أما أكبر من أو تساوي صفر سنحصل على :

$$\frac{V''(x)}{V(x)} = \lambda \Rightarrow \therefore \quad V''(x) = \lambda..V(x)$$

$$a^2\frac{f'(\theta)}{f(\theta)} = \lambda \Rightarrow \therefore \quad f'(\theta) = \lambda.f(\theta)$$

وإذا كانت λ أكبر من الصفر

$$V''(x) - \lambda.V(x) = 0$$

$$\therefore V(x) = A_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + A_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

$$f'(\theta) - \frac{\lambda}{a^2}.f(\theta) = 0$$

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} - \frac{\lambda}{a^2}.f(\theta) = 0$$

$$\therefore f(\theta).e^{-\int\frac{\lambda}{a^2}d\theta} = f(\theta).e^{-\int\frac{\lambda}{a^2}d\theta} = C \Rightarrow \therefore f(\theta) = C.e^{\frac{\lambda}{a^2}\theta}$$

$$\therefore T(\theta, x) = f(\theta).V(x) = (A_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + A_2 e^{-\sqrt{\lambda}x})(C.e^{\frac{\lambda}{a^2}\theta}$$

والآن نقوم بتقييم الثوابت حسب الظروف الحدية المعطاة وكما يلي :

x = 0 θ =100 C °

x = l θ = 50C °

100 = A1 + A2 A1 = 100 - A2

$$50 = A_1 e^{\sqrt{\lambda}l} + A_2 e^{-\sqrt{\lambda}l}$$

ومنها نحسب قيمة الثوابت A 1 , A 2 آنيا و إذا كانت λ مساوية للصـــفر ، فإن :

$$\frac{V''(x)}{V(x)}=a^2\frac{f'(\theta)}{f(\theta)}=0\rightarrow\therefore\frac{V''(x)}{V(x)}=0,a^2\frac{f'(\theta)}{f(\theta)}=0\Rightarrow\therefore\frac{V''(x)}{V(x)}=0\Rightarrow V''(x)=0$$

$$\therefore\frac{d^2V(x)}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dV(x)}{dx}\right)=0\rightarrow\therefore V(x)=C_1x+C_2$$

نبدأ الآن بتقييم الثوابت وفق الظروف الحدية المعطاة

i) at $x = 0$ $\quad T = 100\ ^\circ C \rightarrow C_2 = 100$
ii) at $x = l$ $\quad T = 50\ ^\circ C \rightarrow 50 = C_1 l + 100 \rightarrow C_1 = 50/l$

$$\therefore V(x)=-\frac{50}{l}x+100$$

بالنسبة للدالة الثانية فإن :

$$a^2\frac{f'(\theta)}{f(\theta)}=0\Rightarrow\therefore f'(\theta)=0\Rightarrow\frac{df(\theta)}{d\theta}=0\Rightarrow\therefore f(\theta)=C_3$$

$$\therefore T(x,\theta)=V(x).f(\theta)=(C_1x+C_2)C_3=C_1.C_3x+C_2.C_3=A_1x+A_2$$

5-3 أمثلـــــة وتماريــــن

س1 : استخدم طريقة فــصل المتغــيرات للحصول على حلول للمعــادلات التفاضلية الجزئية التالية :

1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

2) $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$

3) $\dfrac{\partial w}{\partial y} = y \dfrac{\partial w}{\partial x}$

4) $x \dfrac{\partial w}{\partial x} = w + y \dfrac{\partial w}{\partial y}$

س2 : أثبت أنــه بالتــعويــض w = x / y في المعادلة التفاضلية في الفرع 4 من المسألة السابقة ستحــصل على المعادلة :

$$x \frac{\partial v}{\partial x} = y \frac{\partial v}{\partial y}$$

س3 : أثبت أن طريقة فصل المتغيرات لن تنجح دون تعديل للمعادلة التالية :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

س4 : أثبت أن حل المعادلة :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

هو $u = g(t)(B_1 \cos kx + B_2 \sin kx)$ حيث أن $g(t)$ دالة يمكن أن تأخذ عدة صيغ .

س5 : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية التالية :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

س6 : صفيحة مستطيلة الشكل ذات درجة حـــرارة منتظمـــة T_o ، عزلـــت حافاتها الأربعة حراريا ثم رفعت درجة حرارة أحـــد الأوجـــه المعرضـــة إلى درجة حرارة T_1 وتم الحفاظ على درجة الحرارة هذه بينما تم المحافظـــة على درجة حرارة الـــوجه المعـــرّض الآخـــر عند درجة T_o.

بين كيف يتغير توزيع درجة الحرارة مع الزمن والموقع إذا علمت أن عمليـــة انتقال الحرارة تتبع المعادلة :

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

حيث أن **t** هو الزمن .

الظروف الحدية (.B.C)

i) at $x = 0$, $T = T_o$
ii) at $x = l$, $T = T_1$
iii) at $t = 0$, $T = T_o$

س7: تحت شروط معينة , تقدر كمية الحرارة الثابتة Q جول / ثانية السارية خلال حائط بالعلاقة $Q = -k\,A\,\frac{dT}{dx}$, حيث إن k هو معامل التوصيل الحراري لمادة الحائط, A هي المساحة السطحية من الحائط العمودية على اتجاه سريان الحرارة و T هي درجة الحرارة المطلقة على بعد x متر من الحائط وهي تتناقص كلما تزايد x. أوجد كمية الحرارة مقدرة بالجول والتي تسري في ساعة واحدة خلال متر مربع من حائط غرفة تبريد سمكه 1.25 م ومعامل توصيله الحراري هو $k = 1.05$ إذا علمت أن درجة حرارة السطح الداخلي هي :

268 °K ودرجة حرارة السطح هي 348 °K ؟ (أنظر الشكل)