

الباب الرابع

متسلسلات القوى (الالكترونات وكهرباء) Power Series

- 1.4 تحويل المعادلات اللاخطية إلى معادلات خطية.
- 2.4 تحويل المعادلات اللاخطية إلى خطية متسلسلة تايلور .
- 3.4 تحويل المعادلات اللاخطية إلى خطية باستخدام مفكوك متسلسلة ماكلورين .
- 4.4 متسلسلة فوريير .
- 5.4 الإعدادات المركبة (المعقدة).
- 1.5.4 العمليات على الإعدادات المركبة.
- 2.5.4 تمثيل الإعدادات المركبة في الصورة القطبية - مخطط أرجند.
- 6.4 أمثلة وتمارين.

1.4 تحويل المعادلات اللاخطية إلى معادلات خطية

عندما نكون قادرين على استعمال الطرق الرياضية الخطية السائدة في حل المعادلات التفاضلية. لذلك يكون من الطبيعي تحويل المعادلات التفاضلية اللاخطية إلى خطية . إن أول سؤال يتوجب علينا إجابته هو ماذا يعني بالمعادلة التفاضلية الخطية ؟ مبدئيا فإننا نعني بالمعادلة التفاضلية الخطية هي تلك المعادلة التي تحتوي على متغيرات من الدرجة الأولى فقط في أي حد من حدودها فإذا ظهرت الجذور التربيعية ، التربيعات ، الأسيات و حاصل ضرب المتغيرات في المعادلة فإنها ستكون لاخطية .

مثال لمعادلة خطية :

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = 0$$

حيث أن a_1 و a_2 ثوابت أو دوال للزمن فقط و ليس للمتغير التابع .

مثال لمعادلات غير خطية :

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 (x)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 (x)^2 = 0$$

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 e^x = 0$$

$$a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 x_1(t) \cdot x_2(t) = 0$$

حيث أن كل من x_1 و x_2 هي متغيرات توابع .

4 - 2 تحويل المعادلات اللاخطية إلى خطية - متسلسلة تايلور

لتحويل المعادلة التفاضلية اللاخطية إلى معادلة تفاضلية خطية يستخدَم مفكوك سلسلة تايلور أو ما يدعى (Taylor - Series Expansion) عند معرفة مستوى حالة التشغيل المستقرة أو ما تسمى (Steady - State Operating Level) .

أفرض أنه لدينا الدالة اللاخطية (F) لمتغيرات عملية وهي x_1 , x_2 أيضا F تكون دالة لـ x_1 , x_2 . وكمثال قد تكون X هي كسر مولي أو درجة حرارة أو معدل جريان .

سيتم تعريف قيم الحالة المستقرة لتلك المتغيرات بوضع خطوط فوق تلك المتغيرات :

$$\bar{x}_1 = \text{steady - state - value - of - } x_1$$

$$\bar{x}_2 = \text{steady - state - value - of - } x_2$$

ولتحويل تلك الدالة اللاخطية إلى خطية يتم فتحها باستعمال مفكوك سلسلة تايلور حول قيمتها في الحالة المستقرة على الصورة $F(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ وبالشكل التالي :

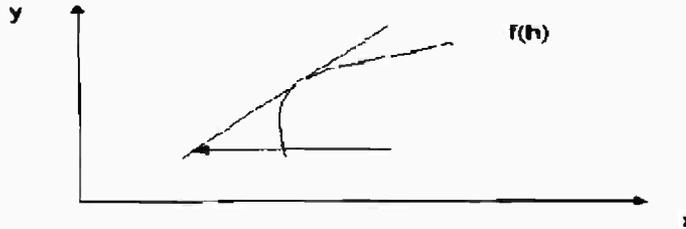
$$F(x_1, x_2) = F(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} (x_1 - \bar{x}_1) + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} (x_2 - \bar{x}_2) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} \right)_{x_1, x_2} \frac{(x_1 - \bar{x}_1)^2}{2!} + \dots \dots \dots (1-4)$$

$$\therefore F(x) = F(\bar{x}) + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{\bar{x}} (x - \bar{x}) \dots \dots \dots (2-4)$$

من هذه الطريقة سوف يتم إهمال كل الحدود بعد أول تفاضل جزئي فتكون النتيجة النهائية لمفكوك الدالة الخطي هي :

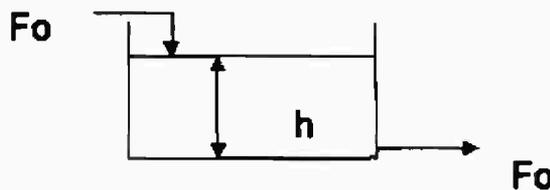
$$\therefore F(x_1, x_2) \cong F(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)_{\bar{x}_1, \bar{x}_2} (x_1 - \bar{x}_1) + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)_{\bar{x}_1, \bar{x}_2} (x_2 - \bar{x}_2) \dots \dots \dots (3-4)$$

إن الطريقة موضحة بيانياً في الشكل التالي الذي يمثل دالة ذات متغير واحد .



مثال (1-4)

يوصف اعتماد معدل الجريان من خزان على ارتفاع السائل في الخزان وفق المعادلة التالية : $F(h) = K\sqrt{h}$. حول هذه الدالة إلى دالة خطية باستعمال مفكوك سلسلة تايلور علماً بأنه في الحالة المستقرة فإن قيمة h تساوي 2 م .



الحل :

$$F(h) = F(\bar{h}) + \left(\frac{\partial F}{\partial h} \right)_{\bar{h}} (h - \bar{h})$$

عند الحالة المستقرة فإن : $h = 2 \text{ m}$ أي أن :

$$F(\bar{h}) = K \sqrt{2}$$

ولذلك فإن :

$$\frac{\partial F(h)}{\partial h} = \frac{1}{2} K (h)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{K}{2} (h)^{-\frac{1}{2}} = \frac{K}{2\sqrt{h}}$$

وفي الحالة المستقرة فإن :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial h} \right)_{\bar{h}} = \frac{K}{2\sqrt{\bar{h}}}$$

وبذلك تصبح المعادلة الخطية للدالة هي :

$$F(h) = K\sqrt{2} + \frac{K}{2\sqrt{\bar{h}}}(h - \bar{h})$$

مثال (2-4)

تعتمد معادلة أرينيووس لحساب معدل التحلل k على درجة التفاعل وهي

معادلة لاخطية صيغتها بالشكل التالي $k(T) = \alpha e^{-\frac{E}{RT}}$. حول هذه الدالة إلى خطية باستخدام مفكوك سلسلة تايلور .

الحل :

$$K(T) = K(\bar{T}) + \left(\frac{\partial K}{\partial T} \right)_{\bar{T}} (T - \bar{T})$$

$$\therefore K(\bar{T}) = \alpha e^{-\frac{E}{R\bar{T}}}$$

$$\therefore \frac{\partial K}{\partial T} = (\alpha) \left(\frac{-E}{R} \right) \left(\frac{-1}{T^2} \right) e^{-\frac{E}{RT}} = \frac{\alpha E}{RT^2} e^{-\frac{E}{RT}} \Rightarrow \therefore \left(\frac{\partial K}{\partial T} \right)_{\bar{T}} = \frac{\alpha E}{RT^2} e^{-\frac{E}{RT}}$$

$$\therefore K(T) = \alpha e^{-\frac{E}{RT}} + \frac{\alpha E}{RT^2} e^{-\frac{E}{RT}} (T - \bar{T}) = K(\bar{T}) + \frac{EK(\bar{T})}{R\bar{T}^2} (T - \bar{T})$$

$$\therefore K(T) = \bar{K} + \frac{E\bar{K}}{R\bar{T}^2} (T - \bar{T})$$

حيث أن $K(\bar{T}) = \bar{K}$

مثال (3 - 4)

حاصل ضرب متغيرين تابعين هو دالة لاخطية لتلك المتغيرات وهي $Q(C_A, F) = C_A \cdot F$. حول هذه الدالة إلى خطية باستعمال مفكوك سلسلة تايلور.

الحل :

$$Q(C_A, F) = Q(\bar{C}_A, \bar{F}) + \left(\frac{\partial Q}{\partial C_A} \right)_{\bar{C}_A, \bar{F}} (C_A - \bar{C}_A) + \left(\frac{\partial Q}{\partial F} \right)_{\bar{C}_A, \bar{F}} (C_A - \bar{C}_A)$$

$$\therefore Q(\bar{C}_A, \bar{F}) = \bar{C}_A \cdot \bar{F} \rightarrow \therefore \partial Q = F \partial C_A \rightarrow \therefore \frac{\partial Q}{\partial C_A} = F \rightarrow \therefore \left(\frac{\partial Q}{\partial C_A} \right)_{\bar{C}_A, \bar{F}} = \bar{F}$$

$$\partial Q = C_A \partial F \rightarrow \therefore \frac{\partial Q}{\partial C_A} = C_A \Rightarrow \therefore \left(\frac{\partial Q}{\partial C_A} \right)_{\bar{C}_A, \bar{F}} = \bar{C}_A$$

$$\therefore Q(C_A, F) = \bar{C}_A \bar{F} + \bar{F} (C_A - \bar{C}_A) + \bar{C}_A (F - \bar{F})$$

4 - 3 تحويل المعادلات اللاخطية إلى خطية باستخدام مفكوك متسلسلة ماكلورين

إن حلول المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة يمكن الحصول عليه بالطرق الموضحة سابقاً في الباب الأول . أما المعادلات التفاضلية ذات المعاملات المتغيرة ومن رتب أعلى من واحد فالأرجح أن أفضل الطرق لمعالجتها والحصول على حلها تعتمد بصورة رئيسية على متسلسلات القوى . ولناخذ بنظر الاعتبار معادلة الرتبة الثانية المتجانسة الخطية التالية الحاوية على معاملات حدودية متغيرة :

$$b_0(x)y'' + b_1(x)y' + b_2(x)y = 0 \dots\dots\dots(4-4)$$

و إذا كانت $b_0(x)$ لا تساوي صفر عندما $x = 0$, يمكننا قسمة المعادلة (4 - 4) على $b_0(x)$ فتصبح كما يلي :

$$y'' + p(x)y' + q(x) = 0 \dots\dots\dots(5-4)$$

حيث أن كل من $p(x), q(x)$ هما دالتان كسريتان في x وبمقامين مختلفين عن الصفر عندما $x = 0$. وللحصول على حل صائب للمعادلة (4 - 5) كمتسلسلة قوى في x , لنفرض أن :

$$y = y(x)$$

هو حل للمعادلة ثم نعين قيمتين اختياريتين لـ y و y' عند النقطة $x = 0$, وهي:

$$B = y'(0) \text{ و } A = y(0)$$

وينتج من المعادلة (4 - 5) أن :

$$y''(x) = -p(x)y'(x) - q(x)y(x) \dots\dots\dots(6-4)$$

ويمكن حساب $y''(0)$ مباشرة نظرا لأن الدالتان $p(x)$, $q(x)$ هما معرفتان عند $x = 0$, ومن المعادلة (6-4) نحصل على :

$$y'''(x) = -p(x)y''(x) - p'(x)y'(x) - q(x)y'(x) - q'(x)y(x) \dots \dots \dots (7-4)$$

وبالتالي يمكن حساب قيمة $y'''(0)$ من معرفة قيمة $y''(0)$ ومن الواضح أنه يمكن الاستمرار في سلسلة العمليات أعلاه حسب الرغبة , وبهذا يمكن تعيين $y^{(n)}(0)$ بالتتابع لأي قيمة صحيحة مطلوبة للعدد n وذلك باستخدام مفكوك متسلسلة ماكلورين :

$$y(x) = y(0) + \sum_{n=1}^{\infty} y^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!} \dots \dots \dots (8 - 4)$$

أي أن الطرف الأيمن من المعادلة (4 - 8) سيقارب القيمة $y(x)$ في فترة حول النقطة $x = 0$

إذا كانت $y(x)$ تتصرف كدالة حسنة المسلك بجوار النقطة $x = 0$ وعندها يمكن تعيين الدالة كمتسلسلة قوى ويكون الحل العام لها بالصورة التالية :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \dots \dots \dots (9 - 4)$$

ويمكن تطبيق القوانين السابقة في التفاضل والتكامل على متسلسلات القوى وبالشكل التالي :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$\int_0^x f(y) dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$$

عندما تكون $-R < x < R$

أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية $y'' + 4y = 0$ باستخدام متسلسلة مكلورين .

الحل :

نفرض أن الحل يكون على الصورة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \dots\dots\dots (I)$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

فتكون :

وبذلك تصبح :

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

وبالتعويض في المعادلة (I) نحصل على :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \dots\dots\dots (II)$$

والآن نستبدل أدلة الحدود في المجموع الثاني في المعادلة (II) حتى تصبح المتسلسلة محتوية على x^{n-2} في حدها العام فنحصل على :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} = 0 \dots\dots\dots (III)$$

وبجمع المتسلسلتين (III) و (III) سنحصل على :

$$\sum_{n=0}^{\infty} [n(n-1) a_n + 4 a_{n-2}] x^{n-2} = 0 \dots\dots\dots (VI)$$

وذلك لأن الحدين الأوليين في المجموع الأول في المعادلة (III) يساوي صفر .

وعندما تكون قيم $n \geq 2$ فإن $n(n-1)a_n + 4a_{n-2} = 0$ ويمكن كتابة هذه العلاقة على النحو التالي :

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{n(n-1)} \dots \dots (V)$$

ويمكن استخدام هذه العلاقة للحصول على قيم a_n لقيم $n \geq 2$ وذلك بدلالة الثابتين الاختياريين a_1, a_0 حيث أن :

$$a_{2k} = \frac{-4a_{2k-2}}{2k(k-1)}$$

$$a_{2k+1} = \frac{-4a_{2k-1}}{(2k+1)(2k)}$$

$$a_3 = \frac{-4a_1}{3 \cdot 2}$$

$$a_5 = \frac{-4a_3}{5 \cdot 4}$$

$$a_2 = \frac{-4a_0}{2 \cdot 1}$$

$$a_4 = \frac{-4a_2}{4 \cdot 3}$$

وإذا ضربنا العناصر المتناظرة من المعادلات في العمود الأول نحصل على :

$$a_2 a_4 \dots a_{2k} = \frac{(-1)^k 4^k}{(2k!)} a_0 a_2 \dots a_{2k-2}$$

وبتبسيط المعادلات لقيم k عندما تكون $k \leq 1$

نحصل على صيغة مماثلة لقيم $a_{2k+1} = \frac{(-1)^k 4^k a_1}{(2k+1)!}$ وبتعويض هذه الثوابت في

المعادلة (I) نجد أن :

$$v = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + a_2 x + \sum_{k=1}^k a_{2k+1} x^{2k+1}$$

وبتبسيط الحل نحصل على :

$$y = a_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 4^k x^{2k}}{(2k)!} \right] + a_1 \left[x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 4^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right]$$

$$\therefore y = a_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2x)^{2k}}{(2k)!} \right] + \frac{1}{2} a_1 \left[2x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2x)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right] \dots \dots (IV)$$

إن الحدين المنفصلين في المعادلة (IV) هما متسلسلة ماكلورين للدالتين $\sin 2x$, $\cos 2x$ على التوالي وبهذا يمكن أن تكتب المعادلة أعلاه بالشكل التالي:

$$y = a_0 \sin 2x + \frac{1}{2} a_1 \cos 2x$$

وهو مشابه للحل العام الذي نحصل عليه باستخدام طريقة المؤثر التفاضلي .

مثال (4 - 5)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية التالية باستخدام مفكوك متسلسلة ماكلورين $(1 - x^2)y'' - 6xy' - 4y = 0$ بجوار النقطة $x = 0$.

الحل :

بما أن تفاضل الرتبة الثانية في المعادلة مضروب في المقدار $(1 - x^2)$, فإن جنور المعادلة هي :

$$x = -1 \text{ و } x = 1$$

ونسستخدم نفس الطريقة في المثال السابق ونتصور أن الحل العام للمعادلة

التفاضلية هو $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ وللحصول على a_n عندما $n > 1$, نعوض بـ y

و y' في المعادلة التفاضلية فنحصل على الصيغة التالية :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 6a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^n = 0 \dots \dots (I)$$

أو :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 5n + 4)a_n x^n = 0 \dots \dots (II)$$

وقد جمعنا معا " المتسلسلات الحاوية على X بقوى متساوية وسنقوم بتحليل
معامل المتسلسلة الثانية في المعادلة (II) إلى معاملين ونكتبها في الصورة :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+4)a_n x^n = 0 \dots \dots (III)$$

إن العلاقات التي ستحدد قيمة a_n يتم الحصول عليها عن طريق تطبيق
حقيقة وهي لكي تختفي متسلسلة القوى بالتطابق على أي فترة , لا بد وأن يكون كل
معامل من معاملات المتسلسلة مساويا للصفر , لذا في الخطوة القادمة سنكتب
المتسلسلتين في المعادلة (III) في صورة تكون فيها أسس X متساوية وسيتم
استبدال n أينما وجدت في المتسلسلة الثانية بـ (n-2) وبهذا نحصل على
المعادلة التالية علما أن المتسلسلة الثانية ستبدأ من $n = 2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)(n+2)a_{n-2} x^{n-2} = 0 \dots \dots (VI)$$

وفي هذه المعادلة فإن أي معامل من معاملات قوى X يجب أن يساوي لصفر
وعندما تكون قيمة $n=0$ و $n=1$
تكون المتسلسلة الثانية لم تبدأ بعد أي أن :

$$\begin{aligned} n=0 & : a_0 = 0 \\ n=1 & : a_1 = 0 \\ n \geq 2 & : n(n-1)a_n - (n-1)(n+2)a_{n-2} = 0 \end{aligned}$$

حيث أن a_1, a_0 هما ثابتان اختياريان , ويمكن استخدام العلاقة التالية عندما تكون قيم n أكبر أو مساوية لـ 2 ومن المعادلة الأخيرة نستنتج أن :

$$a_n = \frac{n+2}{n} a_{n-2} \dots \dots (V)$$

إن المعادلة (V) تعرف بالعلاقة التكرارية (Recurrence Relation) وعند تطبيق هذه العلاقة نجد أن :

$$a_2 = \frac{4}{2} a_0 \quad a_3 = \frac{5}{3} a_1$$

$$a_4 = \frac{6}{4} a_2 \quad a_5 = \frac{7}{5} a_3$$

$$a_6 = \frac{8}{6} a_4 \quad a_7 = \frac{9}{7} a_5$$

$$a_{2k} = \frac{2k+2}{2k} a_{2k-2} \quad a_{2k+1} = \frac{2k+3}{2k+1} a_{2k-1}$$

وفي الخطوة التالية , نجد حاصل ضرب العناصر المتناظرة في العمود الأول والنتيجة هي :

إذا كان : $k \geq 1$ أي أن : a_2, a_4, a_6 أي :

$$a_{2k} = \frac{4.6.8 \dots (2k+2)}{2.4.6 \dots (2k)} a_0$$

للأعداد الزوجية والتي تبسط إلى :

$$a_{2k} = (k+1)a_0$$

وهذه ستعطينا كل a ذات دليل زوجي بدلالة a_0

وبالمثل في العمود الثاني من المصفوف أعلاه نحصل على :

لكل $k \geq 1$ فإن :

$$a_{2k+1} = \frac{5.7.9 \dots (2k+3)}{3.5.7 \dots (2k+1)} a_1$$

أو :

$$a_{2k+1} = \frac{2k+3}{3} a_1$$

والتي تعطي كل a ذات دليل فردي بدلالة a_1 , عند تعويض ما حصلنا عليه من قيم في المتسلسلة y نجد أن :

$$y = \left[a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} x^{2k} \right] + \left[a_1 x + \sum_{k=1}^{\infty} x^{2k+1} \right]$$

ونستخدم النتائج للحصول على الحل النهائي والذي يكون بالشكل التالي :

$$y = a_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) x^{2k} \right] + a_1 \left[x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+3}{3} x^{2k+1} \right]$$

إن المتسلسلة أعلاه هي مفكوك الدالة التالية بموجب تعريف متسلسلة ماكلورين :

$$y = \frac{a_0}{(1-x^2)^2} + \frac{a_1(3x-x^3)}{3(1-x^2)^2}$$

4-4 متسلسلة فوريير (The Fourier Series)

إن متسلسلة فوريير تعرف بالقانون التالي :

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{c} + b_n \sin \frac{n\pi x}{c} \right) \dots \dots \dots (10-4)$$

حيث أن كل من a_0, a_n, b_n هي معاملات متسلسلة فوريير وتحسب كما يلي:

$$a_0 = \frac{1}{c} \int_{-c}^c f(x) dx \dots \dots \dots (11-4)$$

$$a_n = \frac{1}{c} \int_{-c}^c f(x) \cos \frac{n\pi x}{c} dx \quad n = 0, 1, 2, \dots \dots \dots (12-4)$$

$$b_n = \frac{1}{c} \int_{-c}^c f(x) \sin \frac{n\pi x}{c} dx \quad n = 1, 2, 3, \dots \dots \dots (13-4)$$

بشرط أن : $-c \leq x \leq c$ - حيث c هو ثابت، وأن تكون $f(x)$ هي دالة متصلة وقابلة للاشتقاق عند كل نقطة في الفترة المعطاة أعلاه فيما عدا بعض النقاط المحددة وعند مثل هذه النقاط تكون للدالة $f(x)$ و $f'(x)$ ذات نهايات يمتد ويسرى وسنتناول بعض الأمثلة على متسلسلات فوريير .

مثال (4 - 6)

كوتن متسلسلة فوريير على الفترة $-2 \leq x \leq 2$ للدالة المعرفة كالتالي :

$$f(x) = 2 \quad , \quad -2 \leq x \leq 0$$

$$= x \quad , \quad 0 < x < 2$$

ثم أرسم شكل الدالة التي ستقترب منها المتسلسلة .

الحل :

أولا نرسم شكل الدالة ونلاحظ من الرسم أن الدالة غير معرفة فيما عدا لقيم x التي هي بين $x = -2$ و $x = 2$ وبالنسبة للدالة المعطاة فإن متسلسلة فوريير للدالة هي :

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{c} + b_n \sin \frac{n\pi x}{c} \right) \dots\dots\dots(I)$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx \quad , \quad n=0,1,2,\dots\dots\dots(II)$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \sin \frac{n\pi x}{c} dx \quad , \quad n=1,2,3,\dots\dots\dots(III)$$

وحيث أن معرفة بصيغتين مختلفتين على الفترة $0 < x < 2$ والفترة $0 < x < -2$ ، فإنه من الأفضل فصل التكاملات في (II) و(III) إلى جزئين مناظرين ، وهكذا بوضع $f(x)$ المعرفة في الدالة في التكامل الأول نحصل على :

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 2 \cos \frac{n\pi x}{c} dx + \frac{1}{2} \int_0^2 x \cos \frac{n\pi x}{c} dx$$

وستختلف طريقة التكامل حسب قيمة n أي $n = 0$ أو $n \neq 0$ فإذا كانت $n \neq 0$ فإن :

$$a_n = \frac{2}{n\pi} \left[\sin \frac{n\pi x}{2} \right]_{-2}^0 + \frac{1}{2} \left[\frac{2}{n\pi} x \sin \frac{n\pi x}{2} + \left(\frac{2}{n\pi} \right)^2 \cos \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2$$

$$a_n = \frac{2}{n\pi} [0 - 0] + \frac{1}{2} \left[0 + \left(\frac{2}{n\pi} \right)^2 \cos \frac{n\pi}{2} - 0 - \left(\frac{2}{n\pi} \right)^2 \right]$$

$$\therefore a_n = \frac{-2(1 - \cos n\pi)}{n^2 \pi^2} \quad , \quad n=1,2,3,\dots\dots\dots(VI)$$

وإذا كانت $n = 0$ فإن النتيجة السابقة غير صحيحة (القسمة على n) ولكننا نعود إلى المعادلة الخاصة بـ a_0 ونعوض بقيمة $n = 0$ فنحصل على :

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 2 dx + \frac{1}{2} \int_0^2 x dx$$

ومنها نستنتج أن :

$$a_0 = [x]_{-2}^0 + \frac{1}{4} [x^2]_0^2 = 2 + 1 = 3$$

ونحصل على b_n بالطريقة نفسها حيث أن :

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx + \frac{1}{2} \int_0^2 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi} \left[-\cos \frac{n\pi x}{2} \right]_{-2}^0 + \frac{1}{2} \left[-\left(\frac{2}{n\pi} \right) x \cos \frac{n\pi x}{2} + \left(\frac{2}{n\pi} \right)^2 \sin \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2$$

$$\therefore (\cos(-n\pi) = \cos n\pi$$

$$\therefore b_n = \frac{2}{n\pi} [-1 + \cos n\pi] + \frac{1}{2} \left[-\frac{2}{n\pi} 2 \cos n\pi + 0 + 0 + 0 \right]$$

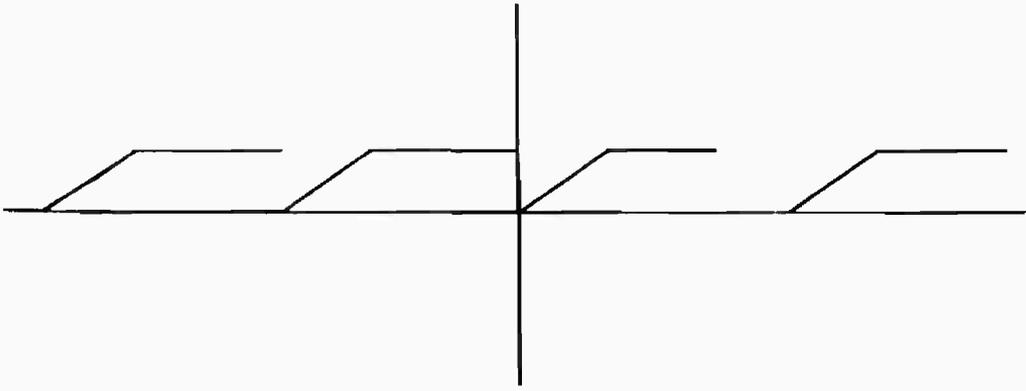
$$\therefore b_n = -\frac{2}{n\pi}, \quad n=1, 2, 3, \dots \dots \dots (V)$$

فإذا كانت n عددا صحيحا فإن $\cos n\pi = (-1)^n$ وهذا يتضح من اختبار الطرفين لكل من قيم n الفردية والزوجية لذلك فإن الصيغة (VI) يمكن كتابتها على الصورة التالية :

$$a_n = \frac{-2[1 - (-1)^n]}{n^2 \pi^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \dots \dots (IV)$$

ويمكن الآن كتابة متسلسلة فوريير على الفترة $-2 < x < 2$ للدالة $f(x)$ بالشكل التالي :

$$f(x) = \frac{3}{2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} + \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \right] \dots \dots \dots (IV)$$



شكل (4-1) رسم متسلسلة فوريير للدالة في المثال 4 - 6

5-4 الأعداد المركبة – المعقّدة (Complex Numbers)

تعريف :

إن العدد المركب هو تعبير من النوع $(x + iy)$ حيث أن كل من x, y هي أعداد حقيقية أما الرمز i فهو يعرف بالشكل التالي : $i = \sqrt{-1}$ ولذلك لن يعتبر العدد i حقيقي بل هو عدد تخيّلِي (خيالي) أي أن العدد المركب يتكون من جزئين , الأول هو جزء حقيقي وهو x و الثاني هو جزء تخيّلِي وهو iy

4- 5- 1 العمليات على الأعداد المركبة

يمكن إجراء العمليات الجبرية المتعددة كالجمع والطرح والضرب والقسمة على الأعداد المركبة عن طريق معاملة i كثابت غير معروف و بإحلال (-1) محل i^2 في كل موقع يظهر فيه وعند ذلك إذا افترضنا أن:

$$z_2 = x_2 + iy_2 \quad \text{و} \quad z_1 = x_1 + iy_1$$

فإنه عند الجمع :

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \dots (14-4)$$

وبالطرح فإن :

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \dots (15-4)$$

أما في الضرب فإن :

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2$$

$$\therefore z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \dots (16-4)$$

وذلك لأن $i^2 = -1$.

ونفس الحال بالنسبة للقسمة حيث أن :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} * \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x^2 - i^2 y^2}$$

وذلك بالضرب في مرافق المقام وبهذا سنحصل على :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 - ix_1 y_2 - ix_2 y_1 - i^2 y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) - i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

أو :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \left(\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) \dots \dots (17 - 4)$$

مثال (4-7)

إذا كان $z_1 = 1 - i$ و $z_2 = 1 + 2i$ هما عددان مركبان أوجد المقادير

التالية :

$$\frac{z_1}{z_2}, z_1 \cdot z_2, z_1 - z_2, z_1 + z_2$$

الحل :

$$x_1 = 1, y_1 = -1, x_2 = 1, y_2 = 2$$

$$\therefore z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) = (1+1) + i(-1+2) = 2+i$$

$$\therefore z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) = (1-1) + i(1+2) = 0+3i = 3i$$

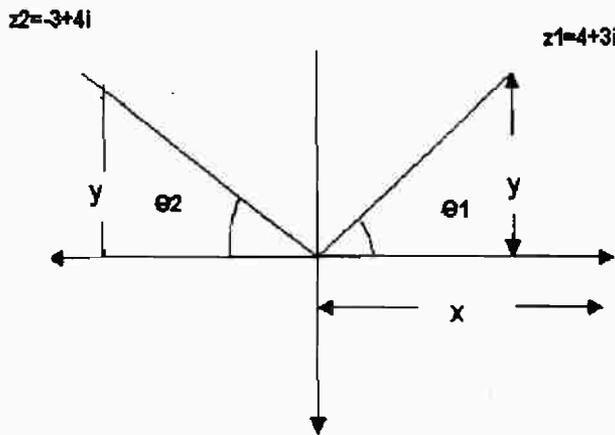
$$\therefore z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) = (1 \cdot 1 + 2) + i(2 - 1) = 3+i$$

$$\therefore \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \left(\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) = \frac{1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2}{1+4} + i \left(\frac{(-1) \cdot 1 - (2) \cdot 1}{1+4} \right) = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$$

أي أن حاصل جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة أي عددين مركبين هو عدد مركب أيضا .

2.5.4 تمثيل الأعداد المركبة في الصورة القطبية – مخطط أرجند (The Argand Diagram)

نقد أقترح أرجند في بداية القرن التاسع عشر أن العدد المركب يمكن تمثيله بواسطة خط في مستوي تشابه الطريقة التي يمثل بها المتجه . إن قيمة العدد المركب يمكن أن تمثل بدلالة المحورين المتعامدين (الأفقي والرأسي) وأقترح أن أحد المحاور هو محور حقيقي والآخر العمودي على الأول هو المحور التخيلي ولذلك فإن العدد المعقد $(z = x + iy)$ يمكن أن يمثل بخط في مستوي له مركبتين أحدهما x في المحور الأفقي وهي حقيقية و الأخرى y وهي تخيلية في المحور الرأسي كما يوضح ذلك الشكل (4 - 2) أنناه :



الشكل (4- 2) مخطط أرجند

الشكل (2-4) يوضح مخطط أرجند والخط المرسوم يدعى بمستوى أرجند للعدد المركب z ، إن الخط OP يمثل العدد المركب $4+3i$ والذي جزئه الحقيقي هو 4 وجزئه التخيلي هو 3 ، وفي الجهة الأخرى يمثل الخط QO العدد المركب $-3+4i$ والذي جزئه الحقيقي هو -3 والتخيلي 4 ، إن أطوال الخطوط OP و QO متساوية ولكن الأعداد المركبة التي تمثلها تلك الخطوط هي غير متساوية لأن كل من الأجزاء الحقيقية والتخيلية للأعداد مختلفة .

ولكل من الأعداد المركبة الممثلة بالخطوط QO,OP فإن أطوال تلك الخطوط هي 5 أي أن:

$$\sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

إن قيمة طول الخط التي تمثل العدد المركب تسمى "المعامل" أو "القيمة المطلقة" والذي يمكن أن يكتب بصيغة بديلة أخرى هي :

$$r = |z| = \text{mod } z = \sqrt{x^2 + y^2} \dots \dots \dots (14 - 4)$$

إن ميل الخط الذي يمثل العدد المركب في جزء المحور الحقيقي الموجب يسمى "السعة" أو الإزاحة أو الطور للعدد المركب ويكتب بالشكل التالي :

$$\theta = \text{amp } z = \arg z = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \dots \dots \dots (15 - 4)$$

وعند حل المعادلات (14 - 4) و (15 - 4) يتبين أن :

$$y = r \sin \theta , x = r \cos \theta$$

$$z = r \cos \theta + i r \sin \theta = r (\cos \theta + i \sin \theta) = r \text{ cis } \theta$$

القيم الأساسية .

عندما يتم التعبير عن عدد مركب بالإحداثيات القطبية فإن القيمة الأساسية لـ θ تكون دائما ضمنية أو صريحة ولذلك في الشكل (4-1) فإن :

$$\theta_p = \tan^{-1} \left(\frac{3}{4} \right) = 37^\circ = 0.645 \text{ radians}$$

$$\theta_q = \tan^{-1} \left(\frac{-3}{4} \right) = 143^\circ = 2.495 \text{ radians}$$

ولفرض توضيح كيفية استعمال مخطط أرجند في ضرب وقسمة الأعداد المركبة يمكن تمثيل الأعداد المركبة بدلالة الإحداثيات القطبية :

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = r_1 (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1) r_2 (\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$$

$$\therefore z_3 = r_1 r_2 [(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + i_1 (\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2)]$$

$$\therefore z_3 = r e^{i\theta} = r_3 (\cos\theta_3 + i \sin\theta_3) \dots \dots \dots (16-4)$$

حيث أن :

$$\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$$

$$r_3 = r_1 \cdot r_2$$

و :

إن المعادلة (16-4) تمثل الصورة القطبية للعدد المركب z_3 والناتج من حاصل ضرب العددين z_1 , z_2 على مخطط أرجند .

مثال (4 - 8)

أوجد العدد المركب على الصورة $r e^{i\theta}$ الناتج من حاصل العددين

$$z_1 = 1+i \text{ و } z_2 = \sqrt{3} - i \text{ وذلك باستخدام مخطط أرجند .}$$

الحل :

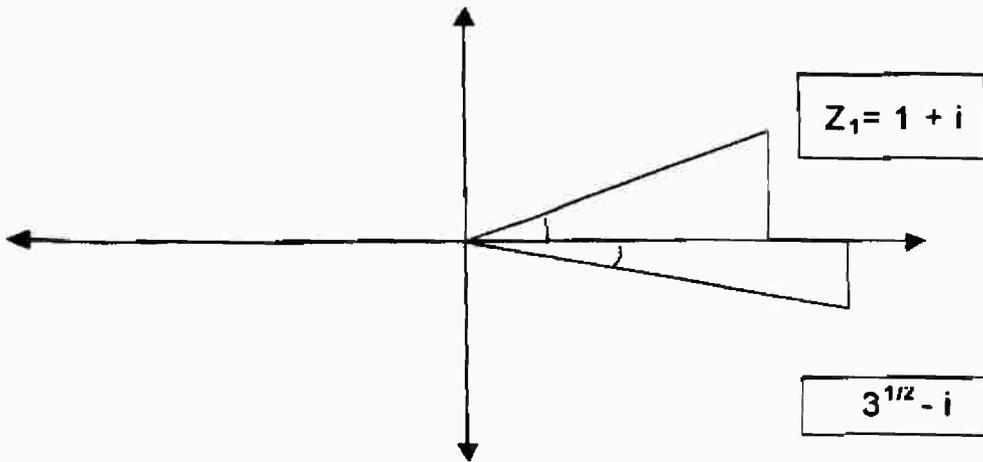
$$\because z_1 = 1+i, z_2 = \sqrt{3} - i \rightarrow : r_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \tan^{-1} 1 \Rightarrow : \theta_1 = 45^\circ$$

$$r_2 = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2, \theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow : \theta_2 = -30^\circ$$

$$\because r_3 = r_1 r_2 = 2 \times 1 = 2, \theta_3 = \theta_1 + \theta_2 = 45^\circ + (-30^\circ) = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$$

$$\therefore z_3 = r_3 e^{i\theta_3} = 2e^{15^\circ}$$

$$\therefore z_3 = 2(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$$



الشكل (4-3) حل المثال باستخدام مخطط أرجند

6.4 أمثلة وتمارين

س1 حل المعادلة :

$$y'' + y = 0$$

بطريقة المتسلسلات وبالطرق الأولية وقارن إجابتك .

س2 أوجد الحل العام للمعادلات التالية بطريقة المتسلسلات :

$$a) y'' - 4y = 0$$

$$b) y'' + 3xy' + 3y = 0$$

$$c) (1 + 4x^2)y'' - 8y = 0$$

$$d) (1 + x^2)y'' - 4xy' + 6y = 0$$

$$e) (1 + x^2)y'' + 10xy' + 20y = 0$$

س3 أوجد الحلول العامة لكل مسألة من المسائل التالية :

$$1 - y'' + 2xy' + 2y = 0$$

$$2 - y'' + 3xy' + 7y = 0$$

$$3 - 2y'' + 9xy' - 36y = 0$$

$$4 - (x^2 + 4)y'' + xy' - 9y = 0$$

$$5 - (1 + 9x^2)y'' - 18y = 0$$

س4 استخدم طريقة المتسلسلات للحصول على حل عام للمعادلة التفاضلية

التالية حول النقطة

$$x=1$$

$$(x^2 - 2x + 2)y'' - 4(x-1)y' + 6y = 0$$

س5 في كل من المسائل التالية , أوجد متسلسلة فورير للدوال المعطاة وفي الفترات المؤشرة إزاء كل منها وأرسم دالة المتسلسلة الناتجة :

$$1 - f(x) = x^2 \quad , \quad -\pi < x < \pi$$

$$2 - f(x) = 0 \quad , \quad -c < x < 0 \\ = c - x \quad , \quad 0 < x < c$$

$$3 - f(x) = x \quad , \quad -c < x < c$$

$$4 - f(x) = x^2 \quad , \quad -c < x < c$$

$$5 - f(x) = 0 \quad , \quad -c < x < 0 \\ = 1 \quad , \quad 0 < x < c$$

$$6 - f(x) = x^4 \quad , \quad -c < x < c$$

س6 في كل من المسائل التالية أوجد العدد المركب على الصورة $re^{i\theta}$ والنتج من حاصل العددين المركبين وذلك باستخدام مخطط أرجند .

$$1) z_1 = 1 - i \quad z_2 = 2 + i$$

$$2) z_1 = 1 + i \quad z_2 = 2 - i$$

$$3) z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad z_2 = 1 + i$$

$$4) z_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} + i \quad z_2 = 2i$$

$$5) z_1 = -4 \quad z_2 = 1 - 3i$$

س7 أثبت أن مرافق مجموع عددين مركبين z_1, z_2 هو نفسه مجموع مرافقيهما أي أن:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

س8 حول المقدار اللاخطي $q=B\sqrt{h}$ إلى مقدار خطي علما إن B هو ثابت .

س9 عبر عن كل من :

$$\theta_1 = 8 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\theta_2 = 3 \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{8} \right) \quad \text{و :}$$

كأعداد مركبة ثم جد مجموع متجهاتها (1) كعدد مركب (2) بصيغة أسية (3) بصيغة موجة جيبية .

س10 عبر عن كل ما يأتي كأعداد مركبة بالصيغة الأسية ثم أوجد حاصل ضربهما .

$$\theta_1 = 8 \sin \left(10 t + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\theta_2 = 3 \sin \left(5 t - \frac{\pi}{8} \right)$$