

الباب الخامس

تكوين المعادلة التفاضلية Differential Equation Formation

- 1.5 تكوين المعادلات التفاضلية .
- 2.5 سرعة التحرر من الأرض .
- 3.5 قانون نيوتن للتبريد .
- 4.5 التفاعل الكيميائي البسيط .
- 5.5 أمثلة وتمارين .

1.5 تكوين المعادلات التفاضلية

مما لا شك فيه أن النتيجة الأكثر أهمية في استنتاج الموديلات الرياضية في المشاكل الهندسية تعتمد على مبدأ انسيابية العملية الإنتاجية والطريقة التي تسير بها تلك العملية ، إن النظر أو بعد النظر المكتسب من استنتاج الموديل الرياضي يمكننا من انتزاع العديد من العوامل المربكة (Confusion Factors) الطارئة أو الخارجية من المشكلة والوصول إلى جوهر المنظومة حيث يكون من الممكن مشاهدة وبوضوح علاقات السبب والنتيجة بين متغيرات تلك المنظومة .

إن الموديلات الرياضية في قطاعات الهندسة المختلفة وبالأخص الهندسة الكيميائية تكون مفيدة في كل وجوه التخصص المحدد من البحث والتطوير إلى العمليات الصناعية وحتى في الدراسات الاستثمارية والاقتصادية .

1- البحث والتطوير Research & Development :

أي تحديد ميكانيكية الحركة الكيميائية مثلا (حركية التفاعلات الكيميائية) والعوامل المؤثرة من بيانات التفاعل للوحدة الصناعية التجريبية أو المختبرية (Plant-Laboratory or Pilot). إن التحري وبدقة عن ظروف التشغيل المختلفة سيساعد في الوصول إلى الدراسة المثلى لتلك الظروف ويمكن من تكبير أو تصغير (Scale - Up) الوحدة المختبرية إلى وحدة صناعية.

2 - التصميم Design :

ونفني به استقصاء المعايير والترتيب لجهاز التشغيل لتهيئته للإنجاز الفعلي أو الديناميكي لدراسة الترابط بين الأجزاء المختلفة للعملية الصناعية وبالتالي تقييم طرق السيطرة البديلة للتحكم في مواقف وإجراءات التشغيل (Start - Up) و الإيقاف (Shut - Down) وكذلك الطوارئ .

3. الوحدة الصناعية Plant Operation:

السيطرة على استقصاء أو تحري الخلل و إصلاحه والمشاكل التشغيلية حيث يساعد الموديل الرياضي على تحديد بداية التشغيل والتدريب العملي ودراسة تأثيرات ومتطلبات توسيع التصميم أو المشروع (إزالة الاختناقات أو العراقل) وبالتالي الحصول على العملية الإنتاجية الأمثل (Optimum Plant Operation) وعادة ما يكون إدارة أنواع الدراسات أعلاه أقل كلفة وأكثر أمانا وأسرع باستخدام الموديل الرياضي من إدارتها عمليا بالوحدة التشغيلية أو الصناعية و ذلك لا يعني القول بأن الاختبارات العملية أو المعملية ليست ضرورية وغير مطلوبة بل إنها تمثل القسم الأعظم من تأكيد صحة الموديل وبرهنة الأفكار المهمة والتوصيات المنبعثة أو المحصل عليها من دراسات الموديل الرياضي، وسنأخذ بعض الحالات لمختلف التخصصات الهندسية.

2.5 سرعة التحرر من الأرض

ندرس الآن مسألة تعيين سرعة جسيم مقذوف على امتداد نصف قطر الأرض متجها من الأرض وتؤثر عليه قوة واحدة فقط هي قوة جانبية الأرض وسنفرض أن الجسيم مقذوف بسرعة ابتدائية تتجه على امتداد نصف القطر وبذلك تحدث الحركة بصورة كلية على المستقيم المار بمركز الأرض ووفقا لقانون نيوتن للجذب العام تتناسب عجلة الجسيم تناسباً عكسياً مع مربع بعد الجسيم عن مركز الأرض. نفرض أن r هو البعد المتغير (المسافة) و R هو نصف قطر الأرض. وإذا كانت t تمثل الزمن ، v سرعة الجسيم و a عجلته و k هو ثابت التناسب في قانون نيوتن فإن :

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{k}{r^2} \dots\dots\dots (1-5)$$

و العجلة سالبة لأن السرعة تتناقص ، ومن ثم فإن الثابت k يكون سالبا، وعندما $r = R$ تكون

حيث $a = -g$ هو عجلة الجاذبية الأرضية على سطح الأرض ولذلك فإن:

$$-g = \frac{k}{R^2}$$

وبالتعويض في المعادلة (1-5) نحصل على :

$$a = \frac{gR^2}{r^2} \dots\dots\dots(2-5)$$

ونحن نريد التعبير عن العجلة بدلالة السرعة والمسافة وبما أن لدينا :

$$v = \frac{dr}{dt} \quad \text{و} \quad a = \frac{dv}{dt}$$

ومن ثم نستنتج أن :

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dr}{dt} \times \frac{dv}{dr} = v \frac{dv}{dr} \dots\dots\dots(3-5)$$

وبالتالي تكون المعادلة التفاضلية لتعيين السرعة هي :

$$v \frac{dv}{dr} = -\frac{gR^2}{r^2} \dots\dots\dots(4-5)$$

ويمكن تطبيق فصل المتغيرات على المعادلة (4-5) فيكون الحل هو :

$$v^2 = \frac{2gR^2}{r} + c \dots\dots\dots(5-5)$$

نفرض أن الجسم يتحرك على سطح الأرض بسرعة v_0 (سرعة ابتدائية) عندئذ

$$v = v_0 \quad \text{فإن :}$$

$$r = R \quad \text{عندما}$$

و من هنا نستنتج أن الثابت :

$$c = v_0^2 - 2gR \dots\dots\dots (6 - 5)$$

وهكذا فإن الجسيم المقذوف من سطح الأرض على امتداد نصف قطرها بسرعة ابتدائية v_0 سيتحرك بسرعة v بموجب الصيغة التالية :

$$v^2 = \frac{2gR^2}{r} + v_0^2 - 2gR \dots\dots\dots (7 - 5)$$

3.5 قانون نيوتن للتبريد (Newton's Law of Cooling)

بينت التجربة أنه بشروط معينة ، يمكن الحصول على تقريب جيد لدرجة حرارة نموذج ما بالاستعانة بقانون نيوتن للتبريد. تتغير درجة حرارة جسم بمعدل يتناسب مع الفرق بين درجتي حرارة الوسط الخارجي والجسم نفسه. وسنفرض هنا أن ثابت التناسب هو نفسه سواء كانت درجة الحرارة تتزايد أم تتناقص .

نفرض على سبيل المثال ، أن مقياس الحرارة (الثرمو متر) كان يبين 70°F داخل المنزل ثم وضع بالخارج حيث كانت درجة حرارة الهواء 10°F . وبعد ثلاث دقائق وجدت قراءة الثرمو متر 25°F ، أوجد العلاقة بين درجة الحرارة والزمن لقراءة الثرمو متر .

الحل :

لنفرض أن $T(^{\circ}\text{F})$ تمثل درجة الحرارة المبينة على الثرمو متر في اللحظة الزمنية الممثلة بـ t (min) ويقاس الزمن من لحظة وضع الثرمو متر بالخارج .
ولدينا المعطيات التالية :

$$\begin{array}{ll} \text{عندما } T = 70^\circ\text{F}, t = 0 & \text{و عندما } t = 3 \\ \text{فإن } T = 25^\circ\text{F} & \end{array}$$

وفقا لقانون نيوتن للتبريد ، يكون المعدل الزمني للتغير في درجة الحرارة $\frac{dT}{dt}$ متناسبا مع الفرق بين درجتي الحرارة (T-10) وحيث إن درجة حرارة الثرمومتر تتناقص فمن المناسب اعتبار (- k) ثابتا للتناسب ، وعندئذ تتحدد T من المعادلة التفاضلية :

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 10) \dots \dots \dots (8 - 5)$$

والشروط هي :

T = 70 , t = 0 (1) عندما

T = 25 , t = 3 (2) عندما

ونحتاج إلى شرطين (قراءة ثرمومتر في لحظتين مختلفتين) لأن هناك ثابتين ينبغي تحديدهما وهما k في المعادلة (8 - 5) والثابت الاختياري الذي يظهر في حل المعادلة التفاضلية .ومن المعادلة (8-5) ينتج أن:

$$T = 10 + ce^{-kt}$$

إن الشرط الأول يمكننا من معرفة قيمة الثابت c والتي ستكون 60 أي أن:

$$T = 10 + 60 e^{-kt}$$

وينبغي الآن تعيين قيمة k بالاستعانة بالشرط الثاني وبوضع T = 25 , t = 3 ينتج أن :

$$25 = 10 + 60 e^{-3k} \Rightarrow \therefore e^{-3k} = \frac{1}{4} \Rightarrow \therefore k = \frac{1}{3} \ln 4$$

ولهذا تعطى درجة الحرارة بالمعادلة :

$$T = 10 + 60 \exp\left(-\frac{1}{3}t \ln 4\right)$$

وحيث أن $\ln 4 = 1.39$ يمكن كتابة المعادلة كما يلي :

$$T = 10 + 60 \exp(-0.46 t)$$

4.5 التحول الكيميائي البسيط (Simple Chemical Conversion)

من المعروف من نتائج التجارب الكيميائية أن هناك تفاعلات معينة تتحول فيها مادة A إلى مادة أخرى. والمعدل الزمني للتغير في الكمية x للمادة غير المتحولة يتناسب مع x ، افرض أن كمية المادة غير المتحولة معلومة عند لحظة معينة ، أي أن $x = x_0$ عند $t = 0$ وأن ثلثا الكمية الأصلية قد تحول في غضون 30 ثانية أوجد قيم x لكل $t > 0$.

الحل :

إن المعادلة التفاضلية التي تمثل العلاقة بين x و t هي :

$$\frac{dx}{dt} = - kx$$

والشرط أن :

$x = x_0$ عندما $t = t_0$. وحيث إن الكمية x تتناقص مع تزايد الزمن فإن ثابت التناسب في المعادلة يؤخذ (- k) وعند تكامل المعادلة نحصل على :

$$x = c e^{-kt}$$

ولكن $x = x_0$ عند $t = 0$ ومن هنا فإن $c = x_0$ وينتج لدينا :

$$x = x_0 e^{-kt}$$

والآن نطبق الشرط الثاني وهو عندما $t = 30$ فإن المادة المتبقية دون تحول هي:

$$x = \frac{1}{3} x_0$$

أي أن :

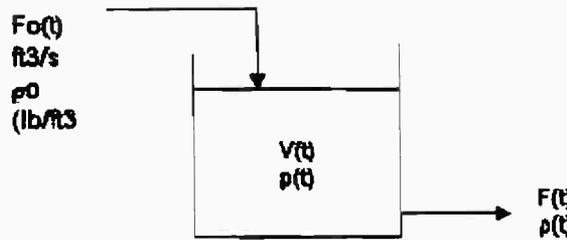
$$\frac{1}{3}x_0 = x_0 e^{-30k} \Rightarrow \therefore k = \frac{\ln 3}{30} \Rightarrow \therefore x = x_0 e^{-\frac{\ln 3}{30}t}$$

وعند $t = 60$ نجد أن :

$$x = x_0 e^{-\frac{\ln 3}{30}(60)} = x_0 e^{-2\ln 3} = x_0 e^{\ln 3^{-2}} = x_0 (3)^{-2} = \frac{1}{9}x_0$$

مثال (1-5) امتزاج سائل في خزان

سائل ممتزج بشكل تام في الخزان الموضح في الشكل أدناه حيث ينساب أو يجري السائل بمعدل $(F_0, \text{ft}^3/\text{sec})$ وكثافته $(\rho_0, \text{lb}/\text{ft}^3)$ أما حجم السائل الممتزج في الخزان فهو $V (\text{ft}^3)$ وكثافته $(\rho \text{ lb}_m / \text{ft}^3)$ معدل الجريان من الخزان هو $(F \text{ ft}^3/\text{sec})$ وكثافته بالطبع هي نفس كثافة محتويات الخزان .



الحل :

الموازنة الكلية للكثافة حول الخزان تكون بالشكل التالي

$$In - Out = Acc.$$

$$In = F_0 \rho_0 = \frac{Ib_m}{sec}$$

$$Out = F \rho$$

$$F_0 \rho_0 - F \rho = \frac{d}{dt} (\rho V) \frac{Ib_m}{s} \quad Accumulation = \frac{d}{dt} (\rho V) \frac{Ib_m}{s} \dots (1)$$

حيث أن : $\frac{d}{dt}$ تمثل معدل التغير نسبة للزمن .

ولأن السائل يخلط بشكل تام ، تكون الكثافة لكل أجزاء السائل متساوية وبالتالي ليس هناك انحدارات في الكثافة الجزئية وذلك يعني أن هناك متغير واحد مستقل هو (t).

$$\therefore \frac{d(\rho V)}{dt} = F_0 \rho_0 - F \rho$$

$$\therefore Q = Fx \rho \quad Q_0 = Fx \rho_0 \quad Q = \rho xV$$

وبالتعويض في المعادلة (1) ينتج أن:

$$\frac{dQ}{dt} + Q = Q_0 \dots \dots \dots (2)$$

إن المعادلة (2) هي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى ويمكن حلها بنفس الطرق السابقة

$$Q.e^{at} = \int Q_0.e^{at}.dt \Rightarrow \therefore Q.e^t = \int Q_0.e^t.dt = Q_0.e^t + C$$

$$\therefore Q = Q_0 + Ce^{-t}$$

مثال (2-5) حركة زنبرك

زنبرك يكون مشدودا ست بوصات (6 in) بنقل وزنه 12 باوند . أفرض أن النقل بعد ربطه بالزنبرك شد إلى أسفل بمقدار (4 in) تحت نقطة الاتزان وإذا بدأ النقل حركته بسرعة ابتدائية قدرها 2 ft / sec متجها للأعلى. صف حركة الزنبرك علما بأنه لا توجد مضاعلة أو قوى مسلطة (حافزة مؤثرة).

الحل :

يعرف الثابت الزنبركي k بوحدات (lb / ft) . لنفرض أن جسماً B وزنه w ربط في الطرف الأسفل لزنبرك (شكل 5-1) وترك ليصل إلى نقطة الاتزان حيث يمكنه البقاء في حالة السكون. وعندما يزاح الثقل B من حالة الاتزان تتحدد حركة B بمعادلة تفاضلية مع شروط ابتدائية ولنفرض أن t هو الزمن مقاساً بالثواني عند لحظة بداية الحركة ، نفرض أن x هو البعد بالقدم المقاس موجبا إلى أسفل (وسالبا إلى أعلى) من نقطة الاتزان ونفرض أن حركة B تحدث كلية على المستقيم الرأسي. ومن ثم تعطى السرعة والعجلة بالمشتقتين الأولى والثانية لـ x بالنسبة إلى t . وبالإضافة إلى القوة المتناسبة مع الإزاحة وفق قانون هوك ، توجد قوة مثبطة (retarding) تنشأ بسبب مقاومة الوسط الذي تحدث فيه الحركة أو بسبب وجود الاحتكاك ويجب أن تؤخذ بنظر الاعتبار وتساهم هذه القوة في مجموع القوى المؤثرة على B بالحد $b \dot{x}(t)$ حيث b هو ثابت يعين بالتجربة للوسط الذي تحدث فيه الحركة. وعادة ما يهمل وزن الزنبرك بالمقارنة مع وزن الثقل B ولذا نعتبر كتلة المجموعة الميكانيكية هي وزن B مقسوماً على g عجلة الجاذبية الأرضية الثابتة و إذا لم تؤثر أية قوى أخرى غير تلك المذكورة على الثقل فإن الإزاحة يجب أن تحقق المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{w}{g} X''(t) + bX'(t) - kX(t) = 0 \dots \dots \dots (I)$$

نعلم إن عجلة الجاذبية تدخل في عملنا في صيغة الكتلة ونريد أن نستعين بالقيمة :

$$g = 32 (ft / sec^2)$$

و ينبغي توافق الوحدات ولذلك سنعتبر عن الطول بالأقدام ، وفي البداية نعتين قيمة الثابت الزنبركي k من حقيقة أن الوزن $12 lb$ يشد الزنبرك $(6 in)$ أي أن:

المسافة هي :

$$\frac{1}{2} ft$$

وبذلك يكون :

$$\therefore k = 24 \frac{lb}{ft} \Leftarrow 12 = \frac{1}{2} k$$

وتكون المعادلة التفاضلية للحركة هي :

$$\frac{12}{32} X''(t) + 24 X(t) = 0$$

لعدم وجود قوى مضاعلة وعند الزمن t هو صفر فإن التقل يكون 4 بوصة
($\frac{1}{3}$ قدم) تحت نقطة الاتزان ،ولذا فإن :

$$X(0) = \frac{1}{3}$$

والسرعة الابتدائية (لأعلى) ولذا فإن :

$$X'(0) = -2$$

وهكذا تصبح المسألة :

$$X''(t) + 64X(t) = 0 \quad , \quad X(0) = \frac{1}{3} \quad , \quad X'(0) = -2 \dots \dots (II)$$

والحل العام للمعادلة (II) هو :

$$X(t) = c_1 \sin 8t + c_2 \cos 8t$$

ومنها نستنتج أن :

$$X'(t) = 8 c_1 \cos 8t - 8 c_2 \sin 8t$$

و بتطبيق الشروط الابتدائية نحصل على الثوابت الاختيارية وهي :

$$c_1 = -\frac{1}{4} , \quad c_2 = \frac{1}{3}$$

وبذلك تصبح معادلة حركة الزنبرك كما يلي:

$$X(t) = -\frac{1}{4} \sin 8t + \frac{1}{3} \cos 8t$$

س1 نصف قطر القمر هو 1080 ميل وعجلة الجاذبية على سطح القمر هي حوالي 0.165 g , حيث g هي عجلة الجاذبية على سطح الأرض . عين سرعة التحرر من القمر .

س2 زنبرك يشده ثقل مقداره 5 باوند بمقدار 6 أنج . ربط الثقل 5 باوند من الزنبرك فوصل إلى وضع اتزان , وبعد ذلك سحب الثقل إلى أسفل بمقدار 3 أنج تحت نقطة الاتزان , وبدأ بسرعة ابتدائية 6 قدم/ثانية متجها إلى أعلى , عين معادلة تحدد موضع الثقل عندما $t > 0$

س3 كانت قراءة ثرمومتر هي 18°F عندما أدخل إلى حجرة درجة حرارتها 70°F , وبعد دقيقة كانت قراءة الثرمومتر هي 31°F . عين قراءة الثرمومتر كدالة للزمن ثم أوجد درجة الحرارة بعد 5 دقائق من إدخال الثرمومتر إلى الحجرة .

س4 ثرمومتر كانت قراءته تبين 75°F أخذ إلى الخارج حيث درجة الحرارة 20°F وبعد 4 دقائق كان الثرمومتر يبين 30°F عين ما يلي :

1. قراءة الثرمومتر بعد 7 دقائق من إخرجه.
2. الزمن الذي يمر لتهبط قراءة الثرمومتر من 75°F إلى حوالي نصف درجة أعلى من درجة حرارة الهواء .

س5 عند الساعة الواحدة بعد الظهر كانت قراءة ثرمومتر 75°F عندما أخذ إلى الخارج حيث درجة حرارة الهواء كانت 10°F - وفي الساعة الواحدة ودقيقتين بعد الظهر كانت القراءة 26°F وفي الساعة الواحدة وخمس دقائق أخذ الثرمومتر مرة أخرى إلى الداخل حيث كانت درجة الحرارة 70°F . ما هي قراءة الثرمومتر عند الساعة الواحدة وتسع دقائق بعد الظهر ؟

س 6 : في الساعة الثانية بعد الظهر (2.00 p.m.) كانت قراءة ثرمومتر 80°F عندما أخذ إلى الخارج حيث درجة حرارة الهواء هي 20°F وعند 2.03 p.m. كانت قراءة الثرمومتر 42°F , وبعد ذلك بعدة دقائق أدخل الثرمومتر إلى الحجرة حيث كانت درجة الحرارة 80°F وعند 2.10 p.m. بين الثرمومتر درجة حرارة 71°F متى أدخل الثرمومتر إلى الحجرة ؟

س7 بفرض أن التفاعل الكيميائي يحدث وفقا للقانون المعطى في مثال (5 - 1) و إذا كان نصف المادة A قد تحول عند نهاية 10 ثوان. عين الزمن الذي تتحول فيه تسعة أعشار المادة؟

س8 تتحلل إحدى المواد المشعة بمعدل يتناسب مع ما يتبقى منها. بفرض أن الكمية الأصلية كانت 50 ملليجرام وأن 10 % من تلك الكمية قد استهلكت خلال ساعتين. أوجد العبارة الخاصة بالكتلة المتبقية من المادة عند أي زمن (t).

س9 أوجد سرعة التحرر لكل جرم سماوي موجود في الجدول التالي :

الجرم السماوي	عجلة الجاذبية على السطح	نصف القطر (ميل)
الزهرة (Venus)	0.86 g	3,800
المريخ (Mars)	0.38 g	2,100
المشتري (Jupiter)	2.6 g	43,000
الشمس (Sun)	28 g	432,000

ملاحظة : يمكن اعتبار $g = 6.1(10^{-03})$ miles / sec .

س10 سقط جسم وزنه (lb) w من ارتفاع h (ft) عن الأرض. وفي اللحظة t (sec) بعد سقوطه كان بعده عن نقطة السقوط X (ft) مقاسا في الاتجاه الموجب إلى أسفل ، إهمل مقاومة الهواء ، وبين إن X يجب أن يحقق المعادلة :

$$\frac{w}{g} \frac{d^2 x}{dt^2} = w$$

س11 يتحرك جسيم على المحور وفقا للمعادلة $\frac{d^2 x}{dt^2} + 6 \frac{dx}{dt} + 25 x = 0$ فإذا بدأ الجسيم حركته من الموضع $x = 0$ بسرعة ابتدائية 12 قدم / ثانية متجها إلى اليسار، عين :

(أ) قانون الحركة للجسيم .

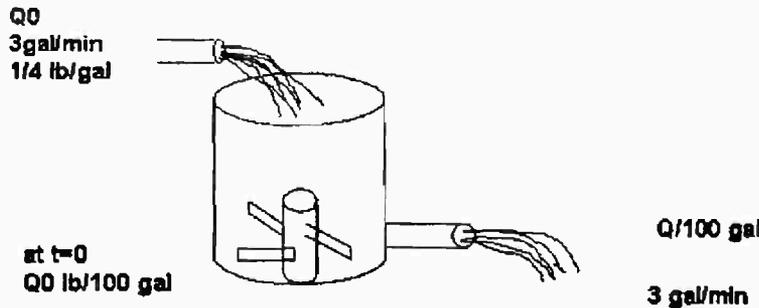
(ب) اللحظات التي يحدث فيها التوقف .

س12 للمادة C يكون المعدل الزمني للتحويل متناسبا مع مربع الكمية غير المتحولة X. افرض أن k هو القيمة العددية لثابت التناسب وافرض أن كمية

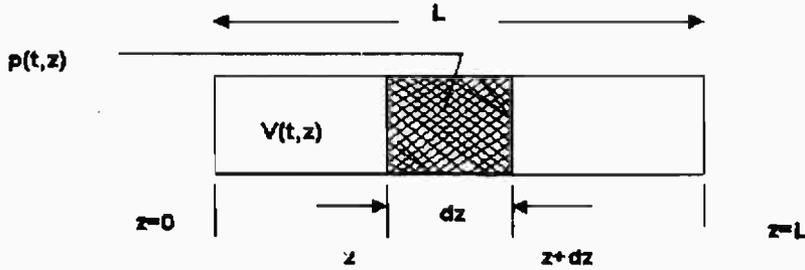
المادة غير المتحولة كانت x_0 في اللحظة $t = 0$. أوجد العلاقة للكمية غير المتحولة x بدلالة الزمن t .

س13 عند حركة نموذج في وسط معين ، يؤثر الوسط بقوة مقاومة تتناسب مع مربع سرعة النموذج المتحرك. افرض أن جسم ما سقط داخل الوسط تحت تأثير الجاذبية وأن t تمثل الزمن ، V هي السرعة الموجبة في الاتجاه إلى أسفل وأن g هي عجلة الجاذبية و W هو وزن الجسم . استعن بقانون نيوتن الثاني لاستنتاج أن
$$\frac{w}{g} \frac{dv}{dt} = w - kv^2$$
 : حيث إن $k v^2$ مقاومة الوسط ؟

س14 عند زمن $t = 0$ يحتوي الخزان على Q_0 (باوند من الملح) مذاب في 100 جالون من الماء. افرض أن الماء الداخل إلى الخزان يحتوي على $\frac{1}{4}$ باوند ملح لكل جالون ماء وبمعدل 3 جالون / دقيقة وبأن المحلول الممتزج جيدا يغادر الخزان بنفس معدل الدخول. أوجد تعبير رياضي لكمية الملح $Q(t)$ الموضح بالشكل أثناءه عند أي زمن t .



س15 ينساب سائل خلال أنبوب أسطواني ذات قطر ثابت والموضح في الشكل أدناه. يكون الجريان داخل الأنبوب مضطربا وبذلك يمكن افتراض أن الجريان كئلي أي أن كل شريحة من السائل تجري إلى نهاية الأنبوب كوحدة واحدة وبذلك يكون لدينا انحدار محوري في كثافة وسرعة السائل حيث يتغيران مع جريان السائل على طول الأنبوب أو بالاتجاه z و بذلك يصبح لدينا متغيرين مطلقين هما الزمن t والموقع المحوري z أي أن الكثافة والسرعة داخل الأنبوب هي دوال للزمن والمسافة $V(t, z), \rho(t, z)$. أوجد العلاقة الخاصة بكل من الكثافة والسرعة بدلالة الزمن والمسافة .



س 16 وفقا لقانون نيوتن للتبريد , يتناسب معدل التبريد لمادة موضوعة في مجرى هوائي مع الفرق بين درجة حرارة المادة ودرجة حرارة الهواء , فاذا كانت درجة حرارة الهواء هي 300°K وانخفضت درجة حرارة المادة من 370°K إلى 340°K خلال 15 دقيقة , فبعد كم دقيقة تصبح درجة الحرارة 310°K ؟

س 17 تتحول المادتان A, B إلى مركب واحد هو C. وفي المعمل ثبت بالتجربة أن لهذه المواد يتحقق قانون التحول التالي : المعدل الزمني للتغير في الكمية x للمركب C يتناسب مع حاصل ضرب الكميتين الباقيتين دون تحول من المادتين A و B. وبفرض أن وحدات القياس قد اختيرت بحيث إن وحدة واحدة من المركب C تتكون من تركيب وحدة واحدة من A مع وحدة واحدة من B , وإذا كان في اللحظة $t = 0$ يوجد a وحدة من المادة A و b وحدة من المادة B ولا توجد أي وحدة من المركب C, بين أنه يمكن التعبير عن قانون التحول بالمعادلة:

$$\frac{dx}{dt} = k (a - x) (b - x)$$

ثم حل هذه المعادلة بالشرط الابتدائي المعطى .

س 18 يبين الشكل أنناه ثقلاً وزنه W باوند ينزلق إلى أسفل على مستو مائل على الأفقي بزاوية α . بفرض أنه لا تؤثر على الثقل قوى أخرى غير وزنه أي لا يوجد احتكاك أو مقاومة هواء وغير ذلك , وأن $x = x_0$ عندما $t = 0$, والسرعة الابتدائية هي v_0 , عين قيم x لقيم $t > 0$.

