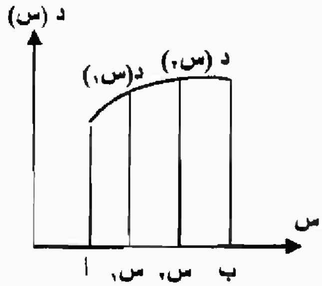
الباب الرابع

أولاً: تزايد الدالة وتناقصها :



تعريف :

يقال أن الدالة د متزايدة في الفترة] أ ، ب [

إذا كانت معرفة فيها وكان د (س١) < د(س٢)

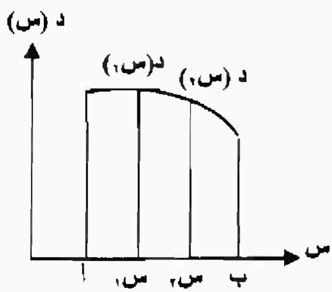
لكل س١ < س٢ في هذه الفترة .

∴ تكون الدالة متزايدة عندما تتزايد قيمتها مع زيادة س في الفترة .

ملاحظة :

يقال أن الدالة د مطردة التزايد إذا كان د (س١) ≥ د(س٢) لكل س١ < س٢ في هذه الفترة .

∴ الدالة مطردة التزايد إذا كانت قيمتها تتزايد أو تثبت مع زيادة س .



تعريف :

يقال أن الدالة د متناقصة في الفترة] أ ، ب [

إذا كانت معرفة فيها وكان د (س١) > د(س٢)

في هذه الفترة لكل س١ < س٢ في هذه الفترة .

∴ تكون الدالة متناقصة في فترة ما عندما تتناقص قيمتها

مع زيادة س في الفترة – أي عندما دالة العدد الأقل > دالة العدد الأكبر .

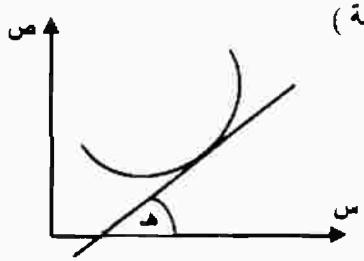
ملاحظة :

يقال أن الدالة د مطردة التناقص إذا كان د (س١) ≤ د(س٢) لكل س١ < س٢ في هذه الفترة .

∴ الدالة مطردة التناقص إذا كانت قيمتها تتناقص أو تثبت مع تزايد س .

لتحديد فترات التزايد مستخدما المشتقة :

في الفترة التي تكون فيها الدالة متزايدة ،يصنع المماس لمنحنى الدالة (زاوية حادة) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وظل الزاوية الحادة (كمية موجبة)



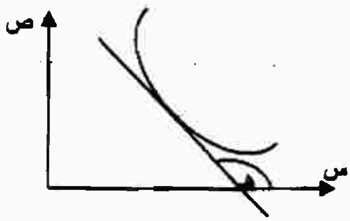
∵ م= ظا هـ = دَ (س)

∴ عند فترات التزايد دَ (س) > صفر

∴ لتحديد فترات التزايد نحل المتباينة دَ (س) > ٠

لتحديد فترات التناقص مستخدما المشتقة :

في الفترة التي تكون فيها الدالة متناقصة ، يصنع المماس لمنحنى الدالة (زاوية منفرجة) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وظل الزاوية المنفرجة (كمية سالبة)



∵ م= ظا هـ = دَ (س)

∴ عند فترات التناقص دَ (س) < صفر

∴ لتحديد فترات التناقص نحل المتباينة دَ (س) < ٠

لتحديد فترات التزايد والتناقص في د:

١- نحدد مجال الدالة

٢- نوجد دَ (س)

٣- نوجد قيم س والتى يكون عندها دَ(س) = ٠ أ، غير معرف وتسمى النقط الحرجة .

٤- نرسم خط الأعداد ونبين عليه مجال الدالة والنقط الحرجة .

٥- نعين إشارة دَ (س) في كل فترة جزئية من مجال الدالة.

فالفترة التى فيها دَ (س) موجبة هى فترة تزايد والفترة التى فيها دَ (س) سالبة هى فترة تناقص .

مثال: حدد فترات التزايد والتناقص للدالة : ص = ٣ س^{٢} - س^{٣}

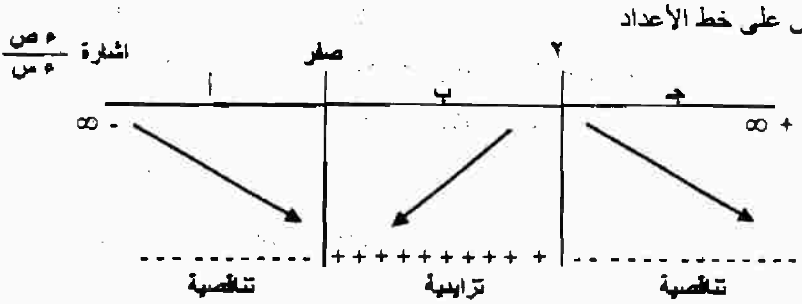
الحـــــــل

١) نوجد صَ ∴ صَ = ٦س - ٣س^{٢}

٢) نضع صَ =٠ ∴ ٦س - ٣س^{٢} = ٠ ∴ ٣س (٢ - س) = ٠

∴ س = ٠ أ، س =٢

٣) نحدد قيم س على خط الأعداد



الفترة أ] -∞ ، ٠ [

نأخذ س = -١ ثم نبحث عن اشارة صَ = ٦س -٣س^{٢}

∴ صَ = -٦-٣ = -٩ (سالب) تناقصية

الفترة ب [٠، +٢] نأخذ س =١ ∴ صَ = ٦-٣= +٣ تزايدية

الفترة جـ [٢، ∞ [نأخذ س =٣ ∴ صَ = ٦س - ٣س^{٢} = ١٨ – ٢٧ = -٩ تناقصية

مثال : أوجد فترات التزايد والتناقص للدالة : د(س) = س | س – ٢|

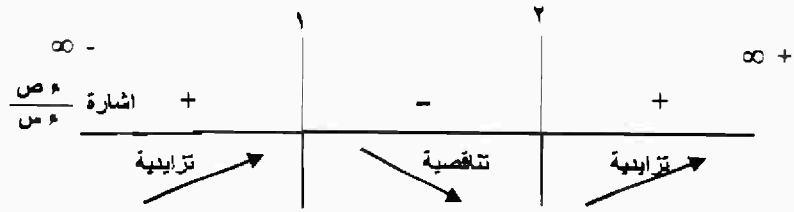
الحـــــــــل

د(س) = { س^{٢}-٢س عندما س ≥ ٢
- س^{٢} +٢س عندما س < ٢ }

المجال هو ح ∴ دَ (س) = { ٢س - ٢ عندما س ≥ ٢
-٢س + ٢ عندما س < ٢ }

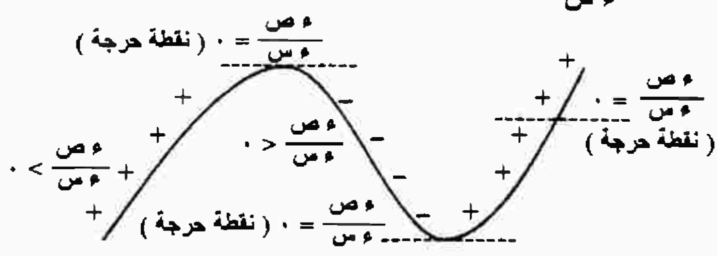
وعندما دَ (س) = ٠ ∴ س = ١

∴ يوجد ثلاث فترات



النقطة الحرجة للدالة :

هى التى يكون عندها $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ وقد تكون قيمة عظمى وقد تكون قيمة صغرى وقد تكون غير ذلك .



والقيم الحرجة هي جميع الأعداد التى يكون عندها دَ(س)= ٠ أي حلول هذه المعادلة .

ويقال أن س، نقطة حرجة للدالة د إذا تحقق أي أحد الشرطين الآتيين :

(١) دَ (س،) بها وجود وتساوى صفر .

(٢) دَ (س،) ليس لها وجود .

<u>مثال</u> : أوجد النقط الحرجة والقيم الحرجة للدالة : ص = س^٣ ـ ٦س^٢ + ٩س + ١

الحـــــــل

نوجد صَ   ∴ صَ = ٣س^٢ -١٢س + ٩

بوضع صَ = ٠ لإيجاد النقط الحرجة   ∴ ٣س^٢ -١٢س + ٣ = ٠

∴ س^٢- ٤س + ٣ = ٠   ∴ (س- ١) (س- ٣) = ٠

∴ س = ١ ، س = ٣   ∴ (١، ٠) ، (٣ ، ٠) نقط حرجة

لإيجاد القيم الحرجة نعوض في الدالة الأصلية بقيم س

∵ ص = س^٣ ـ ٦س^٢ + ٩س + ١

عندما س = ١   ∴ ص = ١- ٦ + ٩ + ١ = ٥

، عندما س = ٣   ∴ ص = ٢٧ ـ ٥٤ + ٢٧ + ١ = ١

تمرين (٧)

❖ **<u>عين فترات التزايد والتناقص للدوال التالية :</u>**

(١) ص = ١- ٤س ـ س^٢

(٢) ص = (س-٢)^٢

(٣) د(س) = (س + ٤)^٣

(٤) د(س) = س^٢ (س-٣)

(٥) ص = $\frac{س}{س-٢}$ ، س ≠ ٢

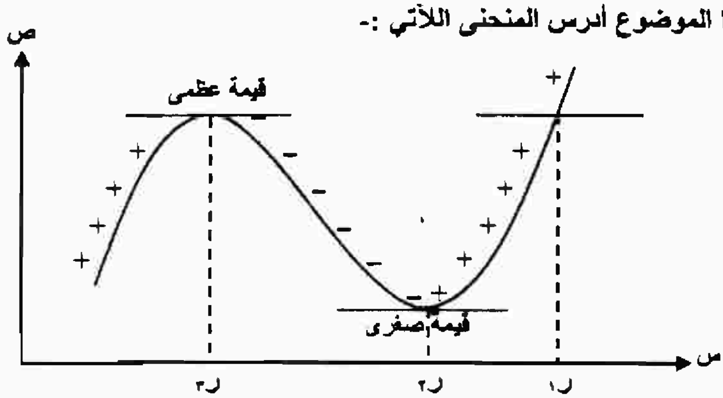
(٦) ص = $\frac{١}{٣}$ س - $\sqrt[٣]{س}$

(٧) ص = س |س|

(٨) د(س) = $\begin{cases} س^٢ + ٢ & \text{عندما س} \geq ١ \\ ٢س + ١ & \text{عندما س} < ١ \end{cases}$

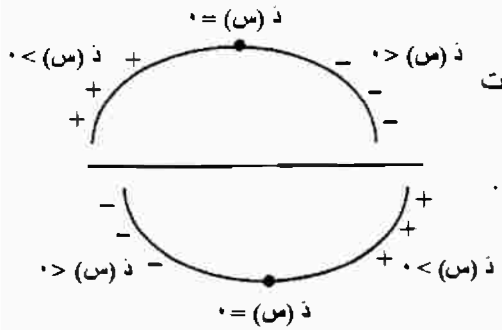
النهايات العظمى والنهايات الصغري

لدراسة هذا الموضوع أدرس المنحنى اللآتي :-



النقطة الحرجة هي التي يكون عندها دَ (س) = ٠ أو دَ (س) غير معرفة وقد تكون نهاية عظمى و نهاية صغري أو غير ذلك حيث دَ (ر١) = ٠ وهى نهاية عظمى ، دَ(ر٢) = ٠ وهى نهاية صغرى ، دَ (ر٣) = ٠ وهى ليست عظمى ولا صغري .

<u>لاحظ أن:</u>



- ❖ **<u>النهاية العظمى</u>** هي أكبر قيمة للدالة إذا قورنت بقيمتها عند النقط الواقعة فى الجوار المباشر من كلا الجانبين . (ما قبلها وبعدها تناقص) .
- ❖ **<u>النهاية الصغري</u>** هي أصغر قيمة للدالة إذا قورنت بقيمتها عند النقط الواقعة في الجوار المباشر في كلا الجانبين (ما قبلها متناقص وبعدها متزايد) .

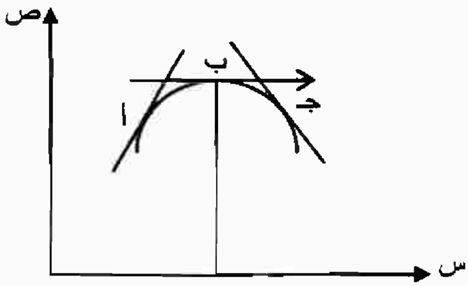
كيفية إيجاد النهايات العظمى والصغرى للدالة :

١. **نوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ للدالة .**

٢. **نضع $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٠$ فنحصل علي قيم س .**

٣. **نعوض بقيم س في معادلة المنحنى الأصلى فنحصل علي قيم ص المناظرة فتكون ص١ ، ص٢ ، .... هي قيم النهايات ويكون (س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢) ، .... هي موضع النهايات وتسمى النقط الحرجة .**

معرفة نوع النهاية :

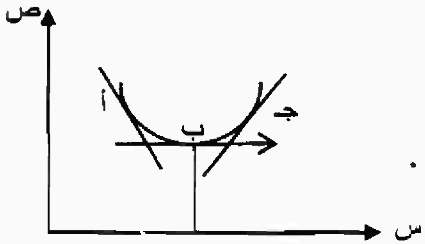


أولاً : الاختبار الأول :-

- **نأخذ قيمة أقل من س، بمقدار صغير ونعوض في صَ ونبحث إشارته .**
- **نأخذ قيمة أكبر من س، بمقدار صغير ونعوض في صَ ونبحث إشارته .**

- فعند أ إذا كانت إشارة صَ موجبة ، عند ب إذا كانت إشارة صَ = صفر وعند جـ إذا كانت إشارة صَ سالبة .

∴ النهاية عظمى محلية .



- أما إذا كان عند أ إشارة صَ سالبة ،

عند ب إشارة صَ = صفر وعند جـ إشارة صَ موجبة .

∴ النهاية صغرى محلية .

مثال: أوجد النهايات العظمى المحلية والصغرى المحلية للدالة د(س) = $س^{٣}$ ـ ٦$س^{٢}$ +٩س +١

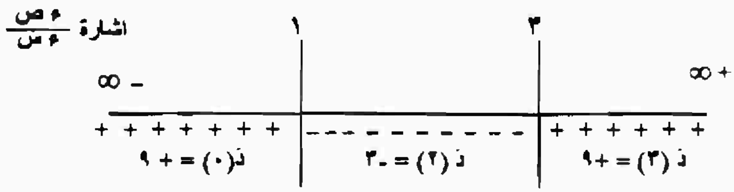
الحـــــــــل

∵ ص = $س^{٣}$ ـ ٦$س^{٢}$ +٩س +١

∴ صَ = ٣ $س^{٢}$ ـ ١٢س + ٩ ∴ ٣ $س^{٢}$ ـ ١٢س + ٩ = ٠ (÷ ٣)

∴ $س^{٢}$ ـ ٤ س + ٣ = ٠ ∴ (س-٣) (س - ١) = ٠

∴ س = ٣ ، س = ١



∴ عند س = ١ عظمى محلية والقيمة العظمى نعوض في الدالة الأصلية عن س = ١

∴ ص = ٥ ∴ القيمة العظمى (١ ، ٥) ، عند س = ٣ النهاية صغري محلية والقيمة الصغرى نعوض في الدالة الأصلية ∴ ص = ١ ∴ القيمة الصغرى (٣ ، ١)

استخدام المشتقة الثانية لإيجاد القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة :

(١) نوجد صَ ثم نضع صَ = ٠ لإيجاد النقط التى تقع على المنحنى .

(٢) نوجد صً

(٣) نعوض في صً من الناتج من الخطوة (١)

فإذا كانت إشارة صً سالبة ∴ الدالة نهاية عظمى

وإذا كانت إشارة صً موجبة ∴ الدالة نهاية صغرى

مثال : أوجد النهايات العظمى والصغرى للدالة : ص = س^{٣} − ٦س^{٢} + ٩س + ١

الحـــــــل

∵ ص = س^{٣} − ٦س^{٢} + ٩س + ١

∴ صَ = ٣س^{٢} - ١٢س + ٩ ∴ ٣س^{٢} - ١٢س + ٩ = ٠ ÷ ٣

∴ س^{٢} − ٤ س + ٣ = ٠ ∴ (س - ١) (س - ٣) = ٠

∴ س = ١ ، س = ٣

نوجد صً : ∴ صً = ٦ س − ١٢

س = ١	س = ٣
صً = ٦ س- ١٢ = ٦ × ١ − ١٢ = -٦ ∵ الإشارة سالبة ∴ عظمى	صً = ٦ س- ١٢ = ٦ × ٣ − ١٢ = + ٦ ∵ الإشارة موجبة ∴ صغرى
نعوض في الدالة الأصلية	
∴ ص = س^{٣} − ٦س^{٢} + ٩س + ١ = ١ - ٦ + ٩ + ١ = ٥ ∴ إحداثي العظمى (١ ، ٥)	∴ ص = س^{٣} − ٦س^{٢} + ٩س + ١ = ٢٧- ٥٦ + ٢٧ + ١ = ٥ ∴ إحداثي الصغرى (٣ ، ١)

ملاحظة :

النهايات العظمى والصغرى هي نقط الرجوع

<u>مثال</u>: أوجد نقط الرجوع للدالة : ص = حا س + حتا س ، س ∋ [٠ ، ٢ ط]

الحـــــــــل

∵ ص = حا س + حتاس ∴ صَ جتا س – جا س

يوضع صَ = ٠ ∴ حتا س – حا س = ٠

∴ حتا س = حا س ∴ طا س = ١

∴ س = ٤٥ = $\frac{ط}{٤}$ ، س = ٢٢٥ = $\frac{٥ ط}{٤}$

صً = - حا س – حتا س

س = $\frac{ط}{٤}$	س = $\frac{٥ ط}{٤}$
صً = - حا س- حتا س = - [حا $\frac{ط}{٤}$ + حتا $\frac{ط}{٤}$] = - $\frac{٢}{\sqrt{٢}}$ ∴ نهاية عظمى ($\frac{ط}{٤}$ ، $\frac{٢}{\sqrt{٢}}$)	صً = - حا س- حتا س = - [حا $\frac{٥ ط}{٤}$ + حتا $\frac{٥ ط}{٤}$] = + $\frac{٢}{\sqrt{٢}}$ ∴ نهاية صغرى ($\frac{٥ ط}{٤}$ ، $\frac{-٢}{\sqrt{٢}}$)

<u>مثال</u>: أوجد نقط الرجوع للدالة ص = حا س في الفترة [٠ ، ٢ط]

الحـــــــــل

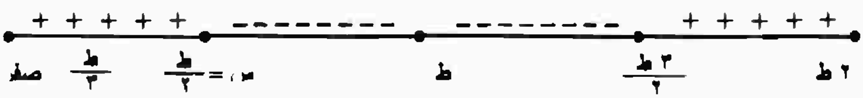
ص = حا س

∴ صَ = حتا س

بوضع صَ = ٠

∴ حتا س =٠ ∴ س = ٩٠

، س = ٢٧٠ ولتحديد ما إذا كانت عظمى أو صغرى .



∴ النهاية العظمى عندما س = $\frac{١}{٢}$ ⇐ د ($\frac{ط}{٢}$) = ١

∴ إحداثى النهاية ($\frac{ط}{٢}$ ، ١)

، النهاية الصغرى عندما س = $\frac{٣ ط}{٢}$ ⇐ د ($\frac{٣ ط}{٢}$) = -١

∴ إحداثى النهاية ($\frac{٣ ط}{٢}$ ، -١)

حل آخر باستخدام المشتقة الثانية

مثال: إذا كانت الدالة د معرفة بالمعادلة :

د(س) = ٢ حا س + حتا ٢س حيث س ∈ [٠، ٢ط] فأوجد القيمة العظمى و الصغرى للدالة د

الحـــــــل

∵ ص = ٢ حا س + حتا ٢س ∴ صَ = ٢حتا س – ٢حا ٢س

، ∵ حا٢س = ٢حاس حتا س (قانون)

∴ صَ = ٢ حتا س – ٤حا س حتا س = ٢ حتا س (١- ٢حا س)

∴ ٢حتا س (١- ٢حا س) = ٠

إما حتا س = صفر ∴ س = ٩٠ أو ٢٧٠

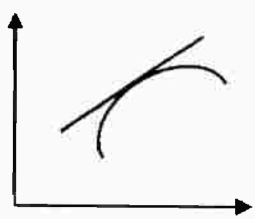
أو ١ – ٢حا س = ٠ ∴ حا س = $\frac{١}{٢}$ ∴ س = ٣٠ أو ١٥٠

∴ صً = -٢حا س – ٤حتا ٢س

س= ٣٠	س= ١٥٠	س= ٩٠	س = ٢٧٠
∴ صً = -٢حا٣٠- ٤حتا٢×٣٠ = -٣ صغرى	∴ صً = -٢حا١٥٠ - ٤حتا ٢×١٥٠ = -٣ صغرى	∴ صً = -٢حا٩٠ - ٤حتا ٢×٩٠ = ٢ صغرى	∴ صً = -٢حا٢٧٠ - ٤حتا ٢×٢٧٠ = ٦ صغرى

التحدب إلي أعلى والتحدب إلي أسفل ونقط الانقلاب :-

إذا كان منحنى الدالة متصلاً في فترة] أ ، ب [فإن : -



المنحنى محدب لأعلي
إذا كان أسفل مماساته

المنحنى محدب إلي أسفل
إذا كان أعلى مماساته

استخدام المشتقة الثانية في اكتشاف نوع التحدب

إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق مرتين في فترة فإن:

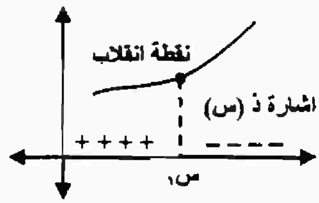
١. المنحنى يكون محدباً لأعلى في الفترة إذا كانت دً (س) < ٠

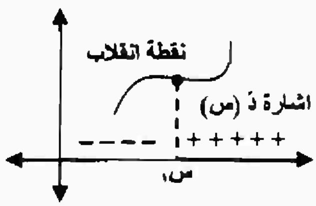
٢. المنحنى يكون محدباً لأسفل في الفترة إذا كانت دً (س) > ٠

نقطة الانقلاب :-

هي النقطة التى تفصل بين فترة تحدب إلي أعلي وفترة تحدب إلي أسفل وعندها يمكن رسم مماس يوازى محور السينات .

- ويكون للدالة نقطة إنقلاب عند س١ إذا كان : دً (س) = ٠ وإشارة دً (س) يمين النقطة خلافها يسار النقطة .





طريقة الكشف عن نقط الأنقلاب :-

(١) نوجد صَ (٢) نوجد صً

(٣) نضع صً = ٠ لايجاد النقطة الحرجة عند صً

(٤) نختبر كل من النقط باستعمال الاختبار التالي وهو يعتمد على إشارة صً قبل وبعد النقطة .

بعدها	قبلها	إشارة صً	النتيجة
صً = −	صً = + (س١)	موجبة قبل س١ سالبة بعد س١	توجد نقط الانقلاب
صً = +	صً = − (س١)	سالبة قبل س١ موجبة بعد س١	توجد نقط الانقلاب
صً = + صً = −	صً = + صً = − (س١)	صً لم تغير إشارتها	لا توجد نقط انقلاب

مثال : ابحث وجود نقطة انقلاب للمنحنى :

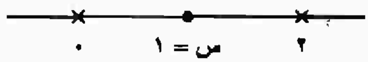
ص = س^{٣} -٣س^{٢}- ٢٤ س + ٧٢ موضحاً اتجاه المنحنى

الحـــــــل

∵ ص = س^{٣} -٣س^{٢}- ٢٤ س + ٧٢ ∴ صَ = ٣س^{٢}- ٦ س - ٢٤

، صً = ٦س – ٦ بوضع صً = ٠ ∴ ٦س – ٦ = ٠

∴ ٦(س - ١) = ٠ ∴ س – ١ = ٠ ∴ س = ١



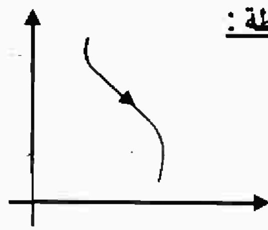
نعوض في صً عندما س = ٠ ∴ صً = -٦

عندما س =٢ ∴ صً = +٦

∴ تغيرت الإشارة حول س = ١ ∴ توجد نقطة انقلاب

، ∵ صً إشارته + حيث ص''' = +٦ ∴ المنحنى ينقلب من أسفل إلى أعلى

ملاحظة :



ص''' اشارتها -

المنحنى ينقلب من أعلى لأسفل

ص''' اشارتها +

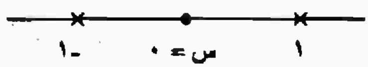
المنحنى ينقلب من أسفل لأعلى

مثال: أوجد نقط الانقلاب للمنحنى ص = س^{٤}

الحـــــــل

∵ ص = س^{٤} ∴ صَ = ٤س^{٣} ∴ صً = ١٢س^{٢}

∴ صً = ٠ ⇐ ١٢ س^{٢}=٠ ∴ س^{٢} = ٠ ∴ س = ٠



عندما س = -١

∴ صً = +١٢ ، عندما س = ١ ∴ صً = + ١٢

∴ لا توجد نقط انقلاب

<u>مثال</u>: أوجد نقط الرجوع والانقلاب للدالة ص = حا^٢ س

الحـــــــــل

∵ ص = حا^٢ س　　∴ صَ = ٢حاس حتاس　　∴ صَ = حا٢ س

بوضع صَ = ٠　　∴ حا٢س = ٠　　∴ ٢ س = ٠　　∴ س = ٠

٢س = ١٨٠ ⇐ س = ٩٠

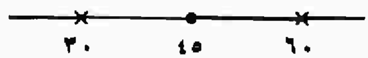
نوجد صً　　∴ صً = ٢حتا ٢س

عندما س = ٠　　∴ صً = ٢حتا ٠ = + ٢　　**نهاية صغرى**

عندما س = ٩٠　　∴ صً = ٢حتا ١٨٠ = ـ ٢　　**نهاية عظمى**

لإيجاد نقط الانقلاب :

نضع صً = ٠　　∴ حتا ٢ س = ٠　　∴ ٢س = ٩٠　　∴ س = ٤٥



∵ صً = ٢حتا ٢س　　عندما س = ٣٠

∴ صً = ٢ حتا ٢ × ٣٠ = ٢ حتا ٦٠ = ٢ × $\frac{١}{٢}$ = ١

عندما س = ٦٠　　∴ صً = ٢ حتا ٢ × ٦٠ = ٢حتا ٢ × ٦٠ = ٢ حتا ١٢٠ = ـ١

∴ توجد نقطة انقلاب عند س = ٤٥

ص = (حا٤٥)^٢ = $(\frac{١}{\sqrt{٢}})^٢$ = ($\frac{١}{٢}$)　　∴ نقطة الانقلاب ($\frac{ط}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$)

<u>مثال</u>: أوجد قيم كل من أ ، ب ، ج بحيث يحقق المنحنى ص = أ س^٣ + ب س^٢ + جـ س الشروط التالية : له نقطة انقلاب عند س = $\frac{١}{٢}$ وله مماس أفقي عند س=ـ١ ويمر بالنقطة (١ ، ١٣)

الحـــــــــل

ص = أ س^٣ + ب س^٢ + جـ س ---- (١)　،　$\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ أ س٢+ ٢ب س + جـ ---- (٢)

، صً = ٦أ س + ٢ ب　　---- (٣)　،　∵ س = $\frac{١}{٢}$ نقطة انقلاب

∴ صً عندما س = $\frac{١}{٢}$ = ٠　　، من (٣) ∴ ٣ أ + ٢ ب = ٠ ---- (٤)

، عند س = ـ١ مماس أفقي　　∴ صَ عندما س =ـ١ = ٠

من (٢)　∴ ٣أ ـ ٢ب + جـ = ٠ ---- (٥)

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (١،١٣) فهي تحقق معادلته

، من (١)　∴ أ + ب + جـ = ١٣ ---- (٦)　،　من (٥) ، (٦) بالطرح

∴ ٢أ ـ ٣ب = ـ ١٣ ، من (٤) ب = ـ $\frac{٣}{٢}$ أ　　∴ ٢ أ + $\frac{٩}{٢}$ أ = ـ١٣

∴ أ = ـ٢ ، ب =٣ وبالتعويض في (٦)　　∴ جـ = ١٢

تطبيقات عملية علي القيم العظمى والصغرى للدالة

المسائل من هذا النوع تعرف بمسائل إيجاد القيم العظمى (أو الصغرى) ، كما أن هذه المسائل تسمى في كثير من الأحوال بمسائل التعظيم نظراً لأن الغرض من حلها هو إيجاد القيمة الأكثر موافقة أو الأفضل . وفي كل المسائل سنعتبر أن القيمة العظمى للدالة هي القيمة العظمى المحلية ، القيمة الصغرى للدالة هي القيمة الصغرى المحلية .

وعلي ذلك نتبع الخطوات الآتية عند حل هذه التمارين :

(١) نفرض رمزاً للمتغير المطلوب قيمته العظمى أو الصغرى وليكن ص أو ح .

(٢) نفرض رموزاً للمتغيرات الأصلية مثل س، ع ، ل ، ....

(٣) نوجد القانون أو العلاقة الذي يربط المتغير التابع ص والمتغيرات الأصلية باستخدام قوانين المساحات أو الحجوم أو نظرية هندسية أو التشابه.

(٤) نعبر عن جميع المتغيرات الأصلية بدلالة أحدها س مثلاً لنحصل على ص كدالة في س أي ص = د(س) .

(٥) نوجد صَ ثم نضع صَ = ٠ لإيجاد القيم :

[أ] التي تعطى (أكبر قيمة) نهاية عظمى .

[ب] التي تعطى (أصغر قيمة) نهاية صغرى .

بعض القوانين الهامة :

١- محيط المستطيل = (الطول + العرض) × ٢ ، مساحة المستطيل = الطول × العرض

٢- محيط المربع = ٤ طول ضلعه ، مساحة المربع = طول الضلع × نفسه

٣- محيط المعين = ٤ طول ضلعه ، مساحة المعين = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب قطريه

٤- محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه ، مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة ×الارتفاع

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب ضلعين متجاورين × جيب الزاوية بينهما

٥- محيط المثلث المتساوي الأضلاع = ٣ل ، مساحته = $\frac{١}{٢}$ ل^{٢}جا ٦٠

٦- محيط الدائرة =٢ ط نق و مساحتها ط نق^{٢}

٧- حجم المكعب = ل^{٣} ، مساحته الجانبية الكلية =٦ ل^{٢}

٨- حجم متوازي المستطيلات = س ص ع ، مساحته = ٢ (س ص + ص ع + ع س)

٩- حجم الاسطوانة = ط نق^{٢}ع ، مساحتها الجانبية ٢ ط نق والكلية م ج +٢ مساحة القاعدة

١٠-حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ ط نق^{٢} ع ، مساحته الجانبية ط نق ل ، والكلية = ط نق ل + ط نق^{٢}

١١-حجم الكرة = $\frac{٣}{٤}$ ط نق^{٣} ، مساحته السطحية ٤ ط نق^{٢}

مثال : عددان موجبان مجموعهما ٢٠ أوجد العددين إذا كان حاصل ضربهما اكبر ما يمكن .

الحـــــــل

نفرض ان العددين س، ٢٠- س

حاصل الضرب ح = س (٢٠- س) = ٢٠س- س^{٢}

∴ $\frac{\text{ءح}}{\text{ءس}}$ = ٢٠ - ٢س = صفر ∴ ٢٠ = ٢س ∴ س = ١٠

∴ العددان ١٠ ، ١٠

مثال : أوجد حجم اكبر اسطوانة دائرية قائمة مساحتها السطحية ٢٤ ط وحدة مربعه .

الحــــــــل

المساحة السطحية للاسطوانة = ٢ ط نق ع + ٢ ط نق^{٢}

∴ ٢٤ = ٢ ط نق ع + ٢ ط نق^{٢} بالقسمة علي ٢ ط

∴ ١٢ = نق ع + نق^{٢} ----- (١)

، ∵ حجم الاسطوانة = ط نق^{٢}ع ----- (٢)

من (١) ع = $\frac{\text{١٢- نق}^{٢}}{\text{نق}}$ ----- (٣)

نعوض (٣) في (٢) ∴ ح = ط نق^{٢} × $\frac{\text{١٢- نق}^{٢}}{\text{نق}}$

∴ ح = ١٢ ط نق – ط نق^{٣}

وعندما يكون الحجم أكبر ما يمكن ∴ $\frac{\text{ءح}}{\text{ءس}}$ = ٠

∴ $\frac{\text{ءح}}{\text{ءس}}$ = ١٢ ط – ٣ ط نق^{٢} = ٠

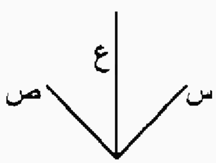
∴ ٣ ط نق^{٢} = ١٢ ط ∴ نق^{٢} = ٤ ∴ نق = ٢

∴ ح = ١٢ ط (٢) – ط (٢)^{٣} = ١٦ ط وحدة مكعبة

مثال: متوازى مستطيلات قاعدته مربعة الشكل مجموع أبعاده الثلاثة ٩٠سم – أوجد أبعاده ليكون حجمه اكبر ما يمكن .

الحــــــــل

نفرض ان أبعاده هى س ، س ، ٤ سم



∴ ٢س + ع = ٩٠ ∴ ع = (٩٠- ٢س)

∵ حجم متوازى المستطيلات = مساحة القاعدة × الارتفاع

ح (س) = س^{٢} (٩٠- ٢س) = ٩٠س^{٢} – ٢س^{٣}

∴ ح' (س) = ١٨٠ س – ٦ س^{٢} = ٦س (٢٠- س)

ح' (س) = ٠   عند س = ٣٠ ، س = ٠ مرفوض

∴ ح'' (س) = ١٨٠ – ١٢س   ∴ ح'' (٢٠) = ١٨٠- ٣٦٠ = -١٨٠ < ٠

∴ الحجم يكون أكبر ما يمكن عندما س = ٣٠ سم   ∴ ع = ٩٠- ٦٠ = ٣٠ سم

∴ الأبعاد هى ٣٠ ، ٣٠ ، ٣٠ سم أى يصبح مكعب

<u>مثال</u>: اسطوانة دائرية قائمة بدون غطاء حجمها ثابت صنعت قاعدتها من النحاس وسطحها الجانبى من الألمونيوم فإذا كان ثمن تكاليف الوحدة المربعة من النحاس ٦ أمثال ثمن تكاليف الوحدة المربعة من الألمونيوم .

- فبرهن أن: تكاليف هذه الأسطوانة تكون أقل ما يمكن عندما ارتفاعها مساوياً ٣ أمثال قطر القاعدة .

الحــــــــل

نفرض س نصف قطر قاعدة الأسطوانة ، ع ارتفاعها

∴ حجم الاسطوانة = ط س^{٢} ع = ك ----- (١) حيث ك ثابت

نفرض ثمن تكاليف الوحدة المربعة من الألمونيوم ث فإن ثمن تكاليف الوحدة المربعة من النحاس = ٦ ث

وإذا كان د(س) ثمن تكاليف الأسطوانة فإن: د(س) = ط س^{٢} × ٦ث + ٢ ط س ع × ث

= ٢ث (٣ط س^{٢} + $\frac{ك}{س}$) [لاحظ ط س ع = $\frac{ك}{س}$ من (١)]

د' (س) = ٢ث (٦ ط س - $\frac{ك}{س^{٢}}$) ---- (٢)

نضع د' (س) = ٠   ∴ ٦ ط س = $\frac{ك}{س^{٢}}$ ∴ ٦س = $\frac{ك}{ط س^{٢}}$ = ع **من (١)**

∴ **ارتفاع الاسطوانة = ثلاثة أمثال قطر القاعدة**

وبالتالي فإن د'' (س) = ٢ ث (٦ ط + $\frac{٢ ك}{س^{٣}}$) وهى موجبة دائماً

<u>أى أن</u> د(س) تكون أصغر ما يمكن عندئذ ، بمعنى أن تكاليف الأسطوانة أقل ما يمكن عندما يكون الارتفاع ثلاثة أمثال قطر القاعدة .

مثال: مصنع ينتج أجهزة تليفزيون عددها س جهازاً كل يوم وتتكلف ($\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ٣٥ س + ٢٥) جنيهاً ويبيع الجهاز بسعر (٥٠ - $\frac{١}{٤}$ س) جنيهاً – أوجد عدد ما يجب أن ينتجه المصنع من الأجهزة يومياً حتى يحقق أقصى ربح وأثبت أن تكاليف إنتاج الوحدة حينئذ يكون أقل ما يمكن.

الحـــــــــل

الفكرة: الربح = ثمن البيع – التكاليف ، ثمن البيع = عدد الأجهزة × ثمن بيع الجهاز

نفرض أن الربح = ص جنيهاً

∴ ص = س (٥٠- $\frac{١}{٢}$ س) – ($\frac{س^{٢}}{٤}$ + ٣٥ + ٢٥)

= ٥٠ س- $\frac{١}{٢}$ س – ($\frac{١}{٤}$ س^{٢}+ ٣٥س + ٢٥)

∴ص = - $\frac{٣}{٤}$ س^{٢} + ١٥س - ٢٥

∴ $\frac{د ص}{د س}$ = - $\frac{٣}{٢}$ س + ١٥ ∴ $\frac{د ص}{د س}$= ٠ عندما

- $\frac{٣}{٢}$ س + ١٥=٠ أي س = ١٠

، ص َ = - $\frac{٣}{٢}$ > ٠ ∴ ص تكون نهاية عظمي عندما س = ١٠

وتكلفة (ت) إنتاج الوحدة = التكلفة الكلية ÷ عدد الأجهزة

= ($\frac{١}{٤}$ س^{٢}+٣٥+٢٥) ÷ س = $\frac{١}{٤}$ س + ٣٥ + ٢٥س$^{-١}$

∴ $\frac{د ت}{د س}$ = ٠ عندما $\frac{١}{٤}$ - $\frac{٢٥}{س^{٢}}$ و عند س =٠ أي س = ١٠

∴ $\frac{ء^{٢}ت}{ء س^{٢}}$ = $\frac{٥٠}{س^{٣}}$ وعندما س = ١٠ تكون $\frac{ء^{٢}ت}{ء س^{٢}}$ > ٠

∴ ت نهاية صغرى عند س = ١٠

مثال: **ينتج مصنع السلام للطماطم كمية من عصير الطماطم قدرها ص طناً ومن الطماطم الأقل جودة كمية قدرها س طناً حيث ص = $\frac{٤٠ - ٥ س}{١٠ - س}$ وإذا كان سعر النوع الجيد ضعف سعر أنواع الأقل جودة – فأوجد الكمية إلى يجب على المصنع إنتاجها من كل صنف حتى يحصل المصنع على أكبر إيراد .**

الحـــــــل

إيراد المصنع م = ص × ٢ أ + س × أ حيث أ سعر طن الطماطم الأقل جودة

$$= \text{٢ أ} \times \frac{\text{٤٠ − ٥ س}}{\text{١٠ − س}} + \text{س} \times \text{أ}$$

$$\frac{\text{ءم}}{\text{ءس}} = \text{٢ أ} \times \frac{\text{(١٠-س) (-٥)} - \text{(٤٠-٥ س) (-١)}}{\text{(١٠ − س)}^{٢}} + \text{أ} = \frac{\text{- ٢٠ أ}}{\text{(١٠-س)}^{٢}} + \text{أ}$$

، $\frac{\text{ءم}}{\text{ءس}} = ٠$ ∴ $\text{(١٠-س)}^{٢} = ٢٠$

∴ ١٠-س = ± ٢ $\sqrt{٥}$ ∴ س = ١٠ ± $\sqrt{٥}$ أي س = ١٠ ± ٢ × ٢,٢

∴ س = ٥,٦ أ، س = ١٤,٤ ، $\frac{\text{ء}^{٢}\text{م}}{\text{ءس}^{٢}} = \frac{\text{- ٤٠ أ}}{\text{(١٠-س)}^{٢}}$ = عدد سالب

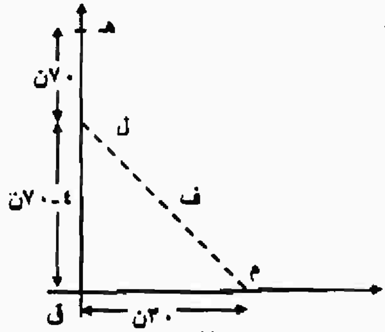
عند س = ٥,٦ طن تقريباً ∴ عند س = ٥,٦ يكون إيراد المصنع أكبر ما يمكن

وعندها ص = $\frac{\text{٤٠-٢٨}}{\text{١٠-٥,٦}} = \frac{١٢}{٤,٤} = \frac{٣٠}{١١} = ٢,٧$ طن

مثال: طريقان أحدهما يتجه من الغرب إلى الشرق ، الآخر يتجه من الشمال إلي الجنوب يتقاطعان في نقطة ق . فإذا مرت سيارة أ بالنقطة ق عند الساعة الواحدة ظهراً متجهة نحو الشرق بسرعة منتظمة قدرها ٣٠ كم/س وفى نفس اللحظة مرت سيارة ب بنقطة تبعد ٤ كيلو مترات شمال النقطة ق متجهة جنوباً بسرعة منتظمة قدرها ٧٠كم/ س – أوجد الزمن إلى تكون فيه المسافة بين السيارتين أقصر ما يمكن .

الحـــــــل

عند الساعة الواحدة كانت السيارة أ عند النقطة ق والسيارة ب عند النقطة هـ التى تقع علي بعد ٤ كم إلي الشمال من ق وبعد زمن ن ساعة قطعت السيارة أ مسافة قدرها ٣٠ ن كم شرقاً وقطعت السيارة ب مسافة ٧٠ ن كم جنوباً فتكون المسافة بين السيارتين :



ف = $\sqrt{\text{(٣٠ن)}^{٢} - \text{(٤-٧٠ن)}^{٢}}$

∴ ف² = ٥٨٠٠ ن² – ٥٦٠ ن – ١٦

∴ ف $\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}$ = ١١٦٠٠ – ٥٦٠

∴ $\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}} = \frac{\text{٥٨٠٠ - ٢٨٠}}{\sqrt{\text{(٣٠ن)}^{٢} - \text{(٤-٧٠ن)}^{٢}}}$

∴ $\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}$ = ٠ عندما ٥٨٠٠ ن – ٢٨٠ = ٠ ∴ ن = $\frac{٧}{١٤٥}$ ساعة

، ∵ $\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}$ > ٠ عند ن = $\frac{٧}{١٤٥}$ ∴ عند $\frac{٧}{١٤٥}$ ساعة تكون ف أقل ما يمكن

<u>مثال</u>: يمر تيار كهربي في ملف طول نصف قطره = أ فإذا وضع مغناطيس صغير بحيث يكون محوره عمودياً على مستوى الملف ماراً بمركزه ـ وكان (ع) هو بعد المغناطيس عن المستوى المذكور عند لحظة ما . وكانت القوة المؤثرة على المغناطيس بواسطة التيار تتناسب مع $\frac{\text{ع}}{(\text{ع}^{٢} + \text{أ}^{٢})^{\frac{٣}{٢}}}$ ـ فأوجد ع بحيث تكون القوة أكبر ما يمكن .

الحـــــــــل

$\therefore$ $\text{ق} = \text{ث} \times \frac{\text{ع}}{(\text{ع}^{٢} + \text{أ}^{٢})^{\frac{٣}{٢}}}$

$\therefore$ $\frac{\text{ءق}}{\text{ءع}} = \frac{\text{ث}\,(\text{ع}^{٢} + \text{أ}^{٢})^{\frac{٣}{٢}}\,(\text{أ}^{٢} - ٤\,\text{ع}^{٢})}{(\text{ع}^{٢} + \text{أ}^{٢})^{٥}}$

$\therefore$ $\frac{\text{ءق}}{\text{ءع}} = ٠$ عندما $\text{ع}^{٢} = \frac{١}{٤}\,\text{أ}^{٢} \Leftarrow \text{ع} = \frac{١}{٢}\,\text{أ}$

إشارة $\frac{\text{ءق}}{\text{ءع}}$:

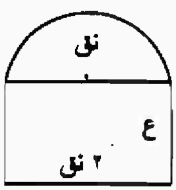
$+ + + + \; + + + \quad \frac{١}{٢}\,\text{أ} \quad - - - - - -$

$\therefore$ ق تتزايد في الفترة $[\,٠ ، \frac{\text{أ}}{٢}\,]$ وتتناقص بعد ذلك

$\therefore$ ق تكون أكبر ما يمكن عندما $\text{ع} = \frac{١}{٢}\,\text{أ}$

<u>مثال</u> : نافذة زجاجية على هيئة مستطيل يعلوه نصف دائرة فإذا كان محيط تلك النافذة ٣٦ قدم ـ فأوجد نصف قطر الدائرة التي تجعل النافذة تسمح بدخول أكبر كمية من الضوء .

الحـــــــــل



نفرض أن نصف قطر الدائرة = نق

$\therefore$ طول المستطيل = ٢ نق ونفرض عرضه ع

محيط النافذة = ٢ ع + ٢ نق + ط نق = ٣٦

$\therefore$ $\text{ع} = \frac{٣٦ - ٢\text{نق} - \text{ط نق}}{٢}$ ---- (١)

مساحة النافذة :

م = مساحة المستطيل + مساحة نصف دائرة

م = ٢ نق ع + ط $\text{نق}^{٢}$ ---- (٢)

ومن(١) بالتعويض في (٢)

$$\therefore \text{م} = ٢\,\text{نق}\left(\frac{٣٦ - ٢\text{نق} - \text{ط نق}}{٢}\right) + \frac{١}{٢}\,\text{ط نق}^{٢}$$

$$\text{م} = ٣٦\,\text{نق} - \text{نق}^{٢} - \frac{١}{٢}\,\text{ط نق}^{٢}$$

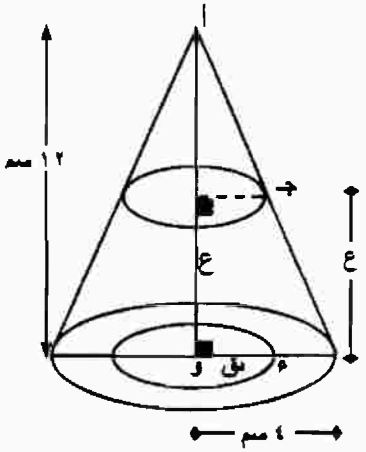
$$\therefore \frac{\text{ءم}}{\text{ءنق}} = ٣٦ - ٢\,\text{نق} - \text{ط نق} \qquad \text{م أكبر ما يمكن } \frac{\text{ءم}}{\text{ءنق}} = ٠$$

$$\therefore ٣٦ - ٢\,\text{نق} - \text{ط نق} = ٠ \qquad \therefore \text{نق}\,(٢ + \text{ط}) = ٣٦$$

$$\therefore \text{نق} = \frac{٢ + \text{ط}}{٣٦}\ \text{قدم}$$

<u>مثال</u>: أوجد أكبر حجم لأسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل مخروط دائرى قائم ارتفاعه ١٢سم ونصف قطر قاعدته ٤ سم علماً بأن الأسطوانة والمخروط لهما نفس المحور .

الحـــــــــل



نفرض ان ارتفاع الاسطوانة ع ونصف قطر قاعدتها = نق

$$\therefore \text{حجم الاسطوانة ح} = \text{ط نق}^{٢}\ \text{ع} \ ---- (١)$$

ولكن من تشابه $\Delta\ \Delta$ أ ب و ، جـ ب ء

$$\frac{٤}{١٢} = \frac{٤ - \text{نق}}{٤}$$

$$\therefore \text{ع} = ٣\,(٤ - \text{نق}) \ ---- (٢)$$

ومن (٢) بالتعويض في (١)

$$\therefore \frac{\text{ءح}}{\text{ءنق}} = ٣\,\text{ط}\,(٨\,\text{نق} - ٤\,\text{نق}^{٢})$$

$$\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}} = \frac{\text{ءح}}{\text{ءنق}} \times \frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}}$$

$$= ٣\,\text{ط}\,(٨\text{نق} - ٤\,\text{نق}^{٢}) = ٠ \ (\text{ح نهاية عظمى})$$

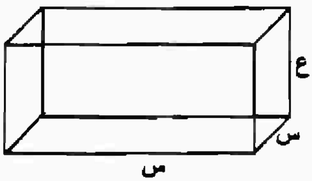
$$\therefore ٤\,\text{نق}\,(٢ - \text{نق}) = ٠ \quad \text{أما نق} = ٠\ (\text{مرفوض})\ \text{أو } ٢\ \text{سم}$$

ومن (٢) $\qquad \therefore \text{ع} = ٦$ سم

$$\therefore \text{أكبر حجم للاسطوانة} = \text{ط}\,(٢)^{٢} \times ٦ = ٢٤\ \text{ط سم}^{٣}$$

مثال: يراد صنع وعاء من المعدن علي شكل متوازي مستطيلات تكون سعته ٢٧ قدم^{٣} وقاعدته مربعة الشكل ، أوجد أبعاد هذا الوعاء إذا استخدم في صنعه أقل مساحة ممكنة من المعدن .

الحـــــــــل



ح = س × س × ع

= $س^{٢}$ ع

∴ ٢٧ = $س^{٢}$ × ع ---- (١)

المساحة الجانبية = ٢ [س س + س ع + س ع]

= ٢ [$س^{٢}$ + ٢ س ع] ولكن من (١) ع = $\frac{٢٧}{س^{٢}}$

∴ م = ٢ $س^{٢}$ + ٤ س × ، م = د (س)

∴ د (س) = ٢ $س^{٢}$ + ١٠٨ $س^{-١}$ ∴ دَ (س) = ٤ س – ١٠٨ $س^{-٢}$

∴ دَ (س) = ٠ عند النهاية الصغرى ⟸ ٠ = ٤ س – $\frac{١٠٨}{س^{٢}}$

$\frac{١٠٨}{س^{٢}}$ = ٤ س ∴ $س^{٣}$ = ٢٧ ∴ س = ٣

∴ الارتفاع ع = $\frac{٢٧}{(٣)^{٢}}$ = ٣ ∴ أبعاد الصندوق ٣ ، ٣ ، ٣ يصبح مكعباً

رسم منحنيات الدوال

لرسم منحنى الدالة د نتبع الخطوات التالية:

١- نوجد دَ(س) ، دً (س)

٢- نستخدم دَ(س) في إيجاد :

أ- النهايات العظمى والصغرى إن وجدت حيث عندها دَ(س) = ٠

ب- فترات التزايد حيث دَ(س) > ٠ ، فترات التناقص حيث دَ(س) < ٠

٣- نستخدم دً(س) في إيجاد :

أ- نقط الانقلاب إن وجدت حيث عندها دً(س) = ٠

ب- فترات التحدب لأعلى حيث دً(س) < ٠ ، التحدب لأسفل حيث دً(س) > ٠

٤- نعين بعض النقاط التى تساعد على الرسم مثل:

أ- نقط التقاطع مع محور الصادات وهى (٠،٠) ، نقط التقاطع مع محور السينات .

ب- بعض النقط الأخرى بالتعويض عن س بأى قيمة وإيجاد د(س) .

٥- نرتب النقط التى حصلنا عليها في جدول ونمثلها بيانياً ونكمل رسم المنحنى بتوصيل هذه النقط .

مثال: ارسم منحنى الدالة د(س) = س^{٣} – ٣س^{٢}

الحـــــــــــل

د(س) = س^{٣} – ٣س^{٢} دَ(س) = ٣س^{٢}-٦س دً = ٦س- ٦

دَ(س) = ٠ عندما س =٠ أو س = ٢

دً(٠) = - سالب ∴ العظمى = د(٠) = ٠ ، دً(٢) = + موجب ∴ الصغرى = د(٢) = -٤

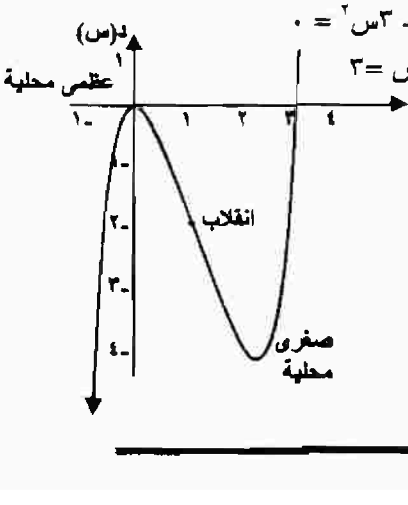
دً(س) = ٠ عندما س= ١ ، د(١) = -٢ ∴ العظمى المحلية (٠،٠)

الصغرى المحلية (٢، -٤) ، نقطة الانقلاب (١، - ٢)

نقط التقاطع مع السينات نضع د(س) = ٠ ∴ س^{٣} – ٣س^{٢} = ٠

س^{٢} (س – ٣) = ٠ ∴ س = ٠ أ، س =٣

∴ نقط التقاطع مع السينات (٠،٠) ، (٣،٠)



س	٣	٢	١	٠	-١
د(س)	٠	-٤	-٢	٠	-٤

مثال: ارسم الشكل العام للمنحنى الدالة :

د = { (س، ص) : ص = س^{٣} - ١٢س + ٣ } بين س = -٤ ، س = ٤

الحـــــــل

ذَ(س) = ٣ س^{٢} – ١٢ ، ذً(س) = ٦ س

- عند النهايات العظمى والصغرى ذَ(س) = ٠ ∴ ٣س^{٢} – ١٢= ٠

س^{٢} = ٤ ∴ س = ± ٢

+++++ ـــــــــــــ ++++++

-٢ ٢

ذَ(-٣) = +١٥ ذَ(٠) = -١٢ ذَ(٣)= ±١٥

فترات التزايد (- ∞ ، -٢) ∪ (٢ ، ∞)

فترات التناقص (-٢، ٢)

عند النهاية الصغرى س = ٢ ص = -١٣ ∴ (٢، -١٣)

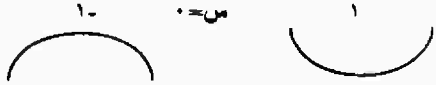
عند النهاية العظمى س = -٢ ص = ١٩ ∴ (-٢، ١٩)

وعند نقطة الانقلاب ذً(س) =٠ ∴ ٦س = ٠ ∴ س = ٠

ولإيجاد فترات التقعر (التحدب)

ذً(-١) = -٦ ذً(١) = ٦

-١ س=٠ ١



عندما س=٠ ← ص =٣ ∴ (٠، ٣) هي نقطة إنقلاب

فترة التحدب لأعلى (-∞ ، ٠) ، فترة التحدب لأسفل (٠، ∞)

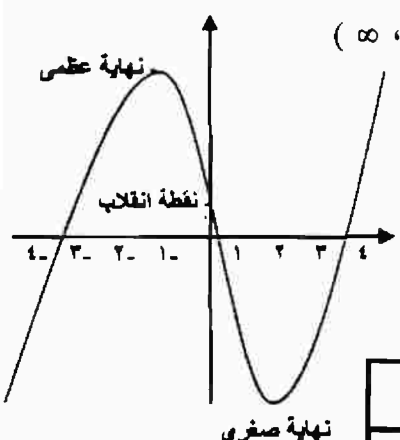
إيجاد نقط تساعد علي الرسم مثل:

س = -٤ ← ص = -١٣ (-٤، -١٣)

س = -١ ← ص = ١٤ (-١، ١٤)

س = ١ ← ص = -٨ (١، -٨)

س = ٤ ← ص = ١٩ (٤، ١٩)



تكوين الجدول :

س	-٤	-٢	-١	٠	١	٢	٤
د(س)	-١٣	١٩	٤	٣	-٨	-١٣	١٩

تمرين (٨)

(١) عين القيم العظمي و الصغرى المحلية وكذلك نقط الانقلاب للدوال التالية :

- $ص = س^{٢} + ٤س + ٦$
- $ص = ٢ + س - س^{٢}$
- $ص = س^{٣} - ٣س^{٢} + ٣س + ٢$
- $د(س) = ٢س^{٣} + ٣س^{٢} - ١٢س + ٥$
- $ص = ٢س^{٣} - ٣س^{٢} + ١$
- $د(س) = س(س - ١)^{٣}$
- $د(س) = \frac{س^{٢}}{س-١}$ ، $س \neq ١$
- $٣ص = س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س + ١٥$
- $د(س) = س^{٣} - ٩س^{٢} + ١٥س$
- $د(س) = س + \frac{٤}{س-١}$
- $د(س) = س\,|س - ٤|$

(٢) عين القيم الصغرى المطلقة والعظمى المطلقة للدوال التالية في الفترة المحددة لكل منها:

- $ص = س^{٣}$ في $[-١ ، ٣]$
- $ص = ٢س^{٣} + ٣س^{٢} - ١٢س + ١$ في $[-١ ، ٥]$
- $ص = ٢س^{٣} + ٣س^{٢} - ١٢س + ١$ في $[-١٠ ، ١٢]$
- $ص = \frac{س}{س-١}$ في $[٢ ، ٤]$
- $ص = س + \frac{١}{س+٢}$ في $[٠ ، ٣]$
- $د(س) = \begin{cases} (س-٢)^{٢} & \text{عندما } س \leq ٣ \\ ٤ - س & \text{عندما } س > ٣ \end{cases}$ في $[٢ ، ٥]$
- $د(س) = \begin{cases} س^{٣} + ٣س^{٢} & \text{عندما } س \leq ٠ \\ س^{٢} - ٢س & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$ في $[-٣ ، ٣]$

• $د(س) = \begin{cases} س^٢ + س - ٢ & \text{عندما } س \leq ٢ \\ ٥ س - ٦ & \text{عندما } س > ٢ \end{cases}$ في [-١ ، ٣]

(٣) أثبت أنه إذا كان س عددا موجبا فإن $س + \frac{١}{س} > ٢$

(٤) عين كلا من ل ، م بحيث تكون الدالة $د(س) = س^٢ + ل س + م$ لها قيمة صغرى تساوى ٣ عندما س=١

(٥) أوجد أ، ب بحيث يكون للمنحنى الذى معادلته $س^٢ ص + أ س + ب ص = ٠$ نقطة انقلاب عند النقطة $(٢ ، \frac{٥}{٢})$ ثم ارسم شكلا عاما لهذا المنحنى.

(٦) وجد أحد مصانع الأجهزة الكهربية أنه يكسب ٣٠جنيها في كل جهاز إذا كان إنتاجه الشهرى ٥٠ جهازا فإذا زاد الإنتاج عن هذا العدد فإن الربح في الجهاز يقل ٥٠قرشا عن كل جهاز زيادة – أوجد عدد الأجهزة التى ينتجها المصنع في الشهر ليحقق أكبر ربح ممكن.

(٧) صفيحة معدنية رقيقة مربعة الشكل طول ضلعها ١٠سم قطع من أركانها أربعة مربعات متساوية ثم ثمن الجزء الباقى على شكل علبة بدون غطاء – أوجد طول ضلع المربع المقطوع بحيث يكون حجم العلبة أكبر ما يمكن .

(٨) عددان مجموعهما ١٦ – أوجد العددين إذا كان مجموع مربعيهما أصغر ما يمكن .

(٩) قطعة من السلك طولها ل صنع منها مستطيل – أوجد أبعاد المستطيل بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن .

(١٠) قطعة من السلك طولها ٢ ل صنع منها مثلث قائم الزاوية – أوجد أبعاد هذا المثلث بحيث تكون مساحته اكبر ما يمكن .

(١١) سلك طوله ٣٤سم قسم إلى جزئيين ثم ثنى الجزء الأول على شكل مربع والثانى على شكل دائرة – أوجد طول كل جزء بحيث يكون مساحتى الشكلين أقل ما يمكن .

(١٢) إذا كانت تكاليف استهلاك وقود لقاطرة تتناسب مع مربع سرعتها وكانت هذه التكاليف ٢٥جنيها في الساعة عندما تكون السرعة ٢٥كم / ساعة كما أن هناك تكلفة إضافية تقدر بمائة جنيه في الساعة بصرف النظر عن سرعتها – أوجد سرعة القاطرة لتكون تكلفة الكم الواحد أقل ما يمكن .

(١٣) إذا كانت المساحة الكلية لاسطوانة دائرية قائمة هي ٢٤ط سم^{٢} – أوجد اكبر حجم للأسطوانة

(١٤) علبة على شكل متوازي مستطيلات سعتها ٩٠٠٠سم^{٣} وارتفاعها ضعف عرضها – أوجد أبعاد متوازى المستطيلات عندما تكون مساحة أوجهة الستة أقل ما يمكن .

(١٥) إذا كان مجموع مساحتى سطح كرة وأسطوانة متفقة معها في نصف القطر يساوى ٢٥٠ط سم^{٢} – فأوجد نصف القطر عندما يكون مجموع حجميهما أكبر ما يمكن .

(١٦) أوجد نقطة على المنحنى ص^{٢} = ٤ س+ ٥ بحيث تكون المسافة بينها وبين النقطة (٣،٠) أقل ما يمكن .

(١٧) نافذة على هيئة مستطيل يعلوه نصف دائرة ينطبق على أحد أبعاد المستطيل فإذا كان محيط النافذة ٦أمتار – أوجد نصف قطر الدائرة الذي يجعل مساحة النافذة أكبر ما يمكن .

(١٨) إذا علم أن قوة احتمال قطعة خشبية مقطعها مستطيل يتناسب طرديا مع حاصل ضرب أحد بعدى المستطيل في مربع بعده الاخر. أوجد بعدى المقطع لقطعه خشبية ذات أكبر قوة احتمال يمكن استخلاصها من جذع شجرة على شكل اسطوانة دائرية قائمة قطرها ١٠٠سم.

(١٩) أ) ارسم المنحنى ص= س^{٣} – ٣س^{٢} + ٣س   ب) ارسم المنحنى ص= س^{٣} +٣س -١

ج) ارسم المنحنى ص = ٢س^{٣} – ٣س^{٢} د) ارسم المنحنى ص=٣- ٣س^{٢}-٢س^{٣}

هـ) ص = $\begin{cases} \text{س}^{٢} + ٢\text{س} & \text{س} \geq ٠ \\ -\text{س} & \text{س} < ٠ \end{cases}$

و) ص = $\begin{cases} \text{س}^{٣} - ٣\text{س} & -٢ \leq \text{س} \leq ٢ \\ ٢ & \text{س} > ٢ \end{cases}$

ز) ص = س | س | + ٢س

تمارين غير محلولة

١. أوجد طول ضلعي القائمة في مثلث القائم الزاوية وتره ١٠ سم تكون مساحة المثلث أكبر ما يمكن .

٢. وصل مصدر كهربي قوته الدافعة ق ومقاومته الداخلية م بدائرة خارجية فمر تيار شدته ت أمبير في الدائرة – فإذا كان مقدار الطاقة الكهربية المعطاة للدائرة الخارجية في الثانية الواحدة هو ط = ت ق - ت^{٢} م (حيث ق، م ثابتان) أوجد شدة التيار الذي تصبح عنده قيمة هذه الطاقة أكبر ما يمكن وذلك عندما تكون ق = ٦٠ فولت ، م = ٠,٣ أوم .

٣. عددان مجموعهما ٢٠ وحاصل ضرب مكعب الأول ومربع الثاني نهاية كبرى ، أوجد العددين .

٤. اثبت أن النهاية الصغرى لحاصل جمع عدد موجب ومقلوب هذا العدد مضروبا في ك ، حيث ك ثابت = $\sqrt{\text{ك}}$.

٥. يراد عمل خزان على شكل أسطوانة دائرية قائمة فإذا كانت تكاليف صنع القاعدة هي دينارين ليبيين للمتر المربع وتكاليف الجوانب دينار واحد للمتر المربع وإذا صنع للخزان غطاء على شكل كرة مجوفة يتكلف المتر المربع منها نصف دينار فإذا بلغت التكاليف الكلية $\frac{٢}{٧}$ ١٤١٤ دينارا ليبيا – فأوجد أبعاد الخزان لكي تكون سعته أكبر ما يمكن. (ط = $\frac{٢٢}{٧}$)

٦. ينتج مصنع الطماطم في طرابلس كمية من عصير الطماطم قدرها ص طنا ومن الطماطم الأقل جودة كمية قدرها س طنا حيث : ص = $\frac{\text{٤٠ - ٥س}}{\text{١٠ - س}}$ وإذا كان سعر النوع الجيد ضعف سعر النوع الأقل جودة – فأوجد الكمية التي يجب على المصنع إنتاجها من كل صنف حتى يحصل المصنع على أكبر إيراد .