أولاً :الجبر

الباب الأول

التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين

مبدأ العد:

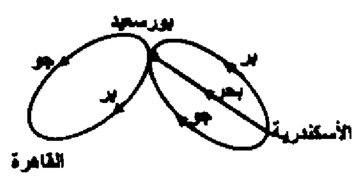
- **هو الذي يعين عدد طرق اختيار عنصر من مجموعة مع عنصر من مجموعة أخري يسمي مبدأ العد .**
- **فعدد طرق اختيار عنصر من مجموعة (س) عدد عناصرها (ن) مع عنصر من مجموعة أخري (ص) عدد عناصرها (م) يساوي عدد الأزواج المرتبة من س إلي ص = عدد عناصر المجموعة ص = ن × م .**
- **يمكن تعميم مبدأ العد لأكثر من مجموعتين .**

مثال:

إذا كان السفر من الإسكندرية إلي بورسعيد ممكناً بثلاث طرق هي بر ، بحر جو ويمكن السفر من الإسكندرية إلي القاهرة بطريقتين بر ، جو . فبكم طريقة يمكن السفر من الإسكندرية إلي القاهرة مارا ببورسعيد .

الحـــــــل

∴ عدد الاختيارات = ٣ × ٢ = ٦ اختيارات



مثال :

إذا اخترت معك في رحلة ٣ بدلات ، ٤ قمصان . فبكم طريقة يمكن اختيار لبس هذه الملابس؟

الحـــــــل

عدد طرق لبس هذه الملابس = ٣ × ٤ = ١٢

التبــاديــل

إذا كان لدينا ن من الأشياء فإن عدد الأشياء المرتبة التي يمكن اختيارها من (ن) دون تكرار يسمي وتقرأ تباديل (ن) مأخوذة راءً راءً ويرمز لها بالرمز ن ل ر

مثال : أوجد تباديل الأعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ مأخوذة أثنين أثنـين .

الحــــــل

العدد ١ يؤخذ مع ٢، ٣ ، ٤ أي ٢١ ، ٣١ ، ٤١
العدد ٢ يؤخذ مع ١، ٣ ، ٤ أي ١٢ ، ٣٢ ، ٤٢
العدد ٣ يؤخذ مع ١، ٢ ، ٤ أي ١٣ ، ٢٣ ، ٤٢
العدد ٤ يؤخذ مع ١، ٢ ، ٣ أي ١٤ ، ٢٤ ، ٣٤

∴ $^{٤}ل_{٢}$ = ١٢ أي $^{٤}ل_{٢}$ = ٤ × ٣

∴ $^{ن}ل_{ر}$ = ن (ن-١) (ن-٢) (ن-٣) × ــــــــ × (ن- ر + ١) --- (١)

مثلا: $^{٧}ل_{٤}$ = ٧ × ٦ × ٥ × ٤ ، $^{١٥}ل_{١٢}$ = ١٥ × ١٤ × ١٣ ، $^{م}ل_{٢}$ = م (م-١)

نتيجة :

من المعادلة (١) بوضع ر = ن ينتج أن :

$^{ن}ل_{ن}$ = ن (ن-١) (ن-٢) (ن-٣) ــــــــ (ن- ر + ١)

= ن (ن - ١) (ن-٢) (ن-٣) ــــــــ ٣ × ٢ × ١

ويمكن كتابة ن ل ن علي الصورة |ن وتقرأ مضروب ن أي أن :-

|ن = ن (ن-١) (ن-٢) (ن-٣) ــــــــ × ٣ × ٢ × ١ --- (٢)

مثلا : |٤ = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤

، |٦ = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٧٢٠

ملاحظه: |ن = ن |ن-١ = ن (ن-١) |ن-٢ = ن (ن-١) (ن-٢) |ن-٣ وهكذا

مثلا: |٥ = ٥ |٤ = ٥ × ٤ |٣ وهكذا

قاعدة (١):

$^{ن}ل_{ر}$ = |ن ÷ |ن-ر

الإثبات :

$\because\ {}^{ن}ل_{ر} = ن\,(ن-١)\,(ن-٢)\,(ن-٣)\,\text{———}\,(ن-ر+١)$

بضرب الطرف الأيسر في $\dfrac{(ن-ر)!}{(ن-ر)!}$

$$\therefore\ {}^{ن}ل_{ر} = \frac{ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)\text{———}(ن-ر+١)\,(ن-ر)!}{(ن-ر)!} = \frac{ن!}{(ن-ر)!}$$

$$\therefore\ {}^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن-ر)!} \qquad \text{-----}\ (٣)$$

وهذا القانون يعتبر صيغة أخري لإيجاد قيمة $^{ن}ل_{ر}$ بدلالة مضروب ن ، مضروب (ن – ر)

نتيجة :

$٠! = ١ \quad ، \quad {}^{ن}ل_{٠} = ١$

ملاحظة :

الصورة (١) تستخدم عندما ر عدد صغير معلوم

الصورة (٣) تستخدم عندما ر عدد كبير أو مجهول

مثال : اختصر $\dfrac{٩!}{٧!} + \dfrac{٨!}{٦!}$

الحـــــل

$$\frac{٩!}{٧!} + \frac{٨!}{٦!} = \frac{٩\times٨\ ٧!}{٧!} + \frac{٨\times٧\ ٦!}{٦!} = ٩\times٨ + ٨\times٧ = ١٢٨$$

مثال : إذا كان ن ل ٣ = ٧٢٠ فما قيمة ن

الحـــــل

$^{ن}ل_{٣} = ١٠ \times ٩ \times ٨ = {}^{١٠}ل_{٣}$

$\therefore\ ن = ١٠$

مثال : إذا كان ٥ ل ر = ١٢٠ فأوجد قيمة ر

الحـــــل

٥ ل ر = ٥ × ٤ × ٣ × .... (٥ – ٥ + ١)

أي نضرب العوامل في بعضها حتى نصل إلي العدد ١٢٠

٥ × ٤ = ٢٠ ، ٢٠ × ٣ = ٦٠ ، ٦٠ × ٢ = ١٢٠

∴ ٥ ل ر = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ = ١٢٠ ∴ ر = ٤

مثال : إذا كان |ن = ١٢٠ فما قيمة ن ؟

الحـــــل

نحلل ١٢٠ إلي أعداد متتالية تبدأ بالعدد ١

∴ ١٢٠ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١

∴ |ن = |٥ ∴ ن = ٥

مثال : إذا كان س+ص ل ٢ = ٥٠٤ ، س-ص ل ٢ = ٢٠ فما قيمة كل من س ، ص ؟

الحـــــل

س+ص ل ٢ = ٩ × ٨ × ٧
= ٩ ل ٢
∴ س + ص = ٩ ---- (١)

س-ص ل ٢ = ٥ × ٤
= ٥ ل ٢
∴ س- ص = ٥ ---- (٢)

من (١) ، (٢) بالجمع ثم بالطرح نجد أن س = ٧ ، ص = ٢

مثال : إذا كان ن-١ ل ٣ : ن+١ ل ٣ = ٢ : ٧ أوجد ن

الحـــــل

$$\frac{(\text{ن}-١)(\text{ن}-٢)(\text{ن}-٣)}{(\text{ن}+١)(\text{ن})(\text{ن}-١)} = \frac{٢}{٧}$$

$$\therefore \frac{\text{ن}^{٢} - ٥\text{ن} + ٦}{\text{ن}^{٢} + \text{ن}} = \frac{٢}{٧}$$

∴ ٧ ن^{٢} – ٣٥ ن + ٤٢ = ٢ ن^{٢} + ٢ن

٥ ن^{٢} – ٣٧ ن + ٤٢ = ٠

∴ (٥ ن - ٧) (ن - ٦) = ٠

$$\therefore \text{ن} = \frac{٧}{٥}$$ مرفوض ، ن = ٦

مثال : حل المعادلة :-

$$^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = ١٢ \ {}^{\text{ن}-١}\text{ل}_{\text{ر}-١}$$

الحـــــــل

$$\frac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}-\text{ر}}} = ١٢ \times \frac{\underline{|\text{ن}-١}}{\underline{|\text{ن}-\text{ر}}}$$

$\therefore$ ن $\underline{|\text{ن}-١}$ = ١٢ $\underline{|\text{ن}-١}$ $\therefore$ ن = ١٢

مثال : حل المعادلة :-

$$\frac{\underline{|\text{ن}+٣}}{\underline{|٤}} = \frac{٣ \ \underline{|٧}}{\text{ن}+٤}$$

الحـــــــل

$\therefore$ $\underline{|\text{ن}+٣}$ × (ن+ ٤) = $\underline{|٤}$ × ٣ $\underline{|٧}$ ضربنا الطرفين × الوسطين

$\therefore$ $\underline{|\text{ن}+٤}$ = $\underline{|٤}$ × ٣ $\underline{|٧}$ = ٤ × ٣ × ٢ × ١ × ٣ $\underline{|٧}$

$\underline{|\text{ن}+٤}$ = ٩ × ٨ $\underline{|٧}$ = $\underline{|٩}$

$\therefore$ ن + ٤ = ٩ $\therefore$ ن = ٥

مثال : إذا كان $\frac{٣}{\underline{|\text{ن}-٢}} + \frac{٥}{\underline{|\text{ن}-١}} = \frac{٢٠٨}{\underline{|\text{ن}}}$ فأوجد قيمة ن

الحـــــــل

بضرب طرفي المعادلة في $\underline{|\text{ن}}$

$$\therefore \frac{٣ \underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}-٢}} + \frac{٥ \underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}-١}} = \frac{٢٠٨ \underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}}$$

$$\frac{٣ \text{ن} \times \text{ن} - ١ \ \underline{|\text{ن}-٢}}{\underline{|\text{ن}-٢}} + \frac{٥ \text{ن} \ \underline{|\text{ن}-١}}{\underline{|\text{ن}-١}} = ٢٠٨$$

$\therefore$ ٣ ن (ن- ١) + ٥ ن = ٢٠٨ $\therefore$ ٣ ن^{٢} + ٢ ن − ٢٠٨ = ٠

$\therefore$ (ن − ٨) (٣ ن + ٢٦) = ٠ $\therefore$ ن = ٨ والقوس الآخر مرفوض

مثال : إذا كان $\underline{|\,٢ن - ١}$ = ٥٠٤٠ فاوجد قيمة ن

الحـــــــل

∵ $\underline{|\,٢ن - ١}$ = ٥٠٤٠

نحلل ٥٠٤٠ ∴ ٥٠٤٠ = ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١

∴ ٥٠٤٠ = $\underline{|\,٧}$ ∴ $\underline{|\,٢ن - ١}$ = $\underline{|\,٧}$

∴ ٢ن − ١ = ٧ ∴ ٢ن = ٨ ∴ ن = ٤

تمرين (١)

(١) إذا كان $\underline{|\,ن}$ = ٢٤ فاوجد $^{٢ن}ل_{٣}$

(٢) إذا كان $^{٨}ل_{ر}$ = ٦٧٢٠ فاوجد $\underline{|\,ر + ١}$

(٣) إذا كان $^{ن}ل_{٤}$ = ١٤ × $^{ن-٢}ل_{٣}$ فاوجد ن .

(٤) أوجد قيمة : $^{ن}ل_{٠}$ + $^{ن}ل_{١}$ + $^{ن}ل_{٢}$ إذا علم أن $\underline{|\,ن + ١}$: $\underline{|\,ن - ١}$ = ٧٢

(٥) إذا كان $^{ن}ل_{ر}$ = ٦٠٤٨٠ ، $\underline{|\,ر}$ = ٧٢٠ فاوجد قيمة $^{ن+١}ل_{ر-١}$

(٦) أثبت أن : $^{ن}ل_{ر}$ = $^{ن-١}ل_{ر}$ + ر $^{ن-١}ل_{ر-١}$

(٧) إذا كان $^{٢ن+١}ل_{٤}$: $^{٢ن-١}ل_{٣}$ = ٧٢ : ٥ فاوجد $\underline{|\,ن}$

(٨) إذا كان $^{٩}ل_{ر}$ = ٦٠٤٨٠ فاوجد $\underline{|\,ر}$

(٩) أثبت أن : $\underline{|\,١٠}$ = (١ × ٣ × ٥ × ٧ × ٩) × $٢^{٥}$ $\underline{|\,٥}$

(١٠) أثبت أن : $\underline{|\,٢ن}$ = (١ × ٣ × ٥ × .... × (٢ن − ١)) × $٢^{ن}$ $\underline{|\,ن}$

(١١) إذا كان $^{س+ص}ل_{٤}$ = ٣٦٠ ، $\underline{|\,٢س+ص}$ = ٥٠٤٠ أوجد $^{ص}ل_{س}$

(١٢) إذا كان $^{٦}ل_{ر}$ = ٤ $^{٦}ل_{ر-١}$ فاوجد قيمة $\dfrac{\underline{|\,ر + ١}}{\underline{|\,ر + ٢}}$ + $\dfrac{\underline{|\,ر}}{\underline{|\,ر + ١}}$ + $\dfrac{\underline{|\,ر - ٢}}{\underline{|\,ر - ١}}$

(١٣) إذا كانت س = { س : س ∈ ط ، ١ ≤ س ≤ ٧ }

وكانت ص = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ ≠ ب } كم عدد عناصر ص ؟

(١٤) إذا كانت س = { س: س ∈ ص ، -٣ ≤ س ≤ ٤ }

، ع = { (أ، ب، جـ) : أ ، ب ، جـ ، ∈ س ، أ ≠ ب ≠ جـ } كم عدد عناصر ع ؟

(١٥) إذا كانت $^{ن+١}ل_{٣}$: $\dfrac{\underline{|\,ن}}{\underline{|\,ن - ٢}}$ = ٧ فما قيمة ن ؟

التوانيـــق

كنا نهتم بترتيب الرقم المكون للعدد ولكن في التوافيق لا نعطي اهتماماً للترتيب فمثلاً العددان ٣١ ، ١٣ يعتبران توافقياً واحداً وكذلك الأعداد ٢٣١، ٣١٢ ، ١٢٣ ، ٣٢١ تعتبر توافقياً واحداً ونقول إن اختيار من الاختيارات السابقة تسمي توافقياً أو توافيق .

أي أنه إذا كان الترتيب له قيمة يجيب عندئذ إيجاد عدد التباديل أمام إذا كان الترتيب ليس له قيمة فيكون المطلوب إيجاد عدد التوافيق .

تعريف :

التوافيق هي عدد طرق إختيار (ر) من الأشياء من بين (ن) من الأشياء بدون إحلال (تكرار) وبدون مراعاة ترتيب العناصر التي تختارها .

ونرمز لهذا العدد بالرمز $^{ن}ق_{ر}$ حيث ر ، ن ∈ ص$^{+}$ ، ر ≤ ن .

العلاقة بين التوافيق والتباديل :

- إذا كان لدينا مجموعة س ، ن من العناصر فإن عدد المجموعات الجزئية للمجموعة س والتي تشتمل كل منها علي ر من العناصر هو $^{ن}ق_{ر}$
- أما عدد التباديل المختلفة لعناصر المجموعة س مأخوذة راء راء هو ن ل ر ولو أجرينا علي كل مجموعة جزئية من المجموعات السابقة جميع التباديل الممكنة لكان عدد تباديل كل مجموعة هو $\underline{|ر}$

$$\therefore\ ^{ن}ق_{ر} \times \underline{|ر} = {}^{ن}ل_{ر}$$

$$\therefore\ ^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{\underline{|ر}} \quad \text{------} \quad (1)$$

نتيجة :-

$$^{ن}ق_{ر} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر}\ \underline{|ن - ر}}$$

- البرهان -

$$\because\ ^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{\underline{|ر}} \quad ، \quad ^{ن}ل_{ر} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن - ر}}$$

$$\therefore\ ^{ن}ق_{ر} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر}\ \underline{|ن - ر}}$$

نتيجة : (قانون التبسيط)

$${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}-\text{ر}}$$

- البرهان -

$${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \frac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}-\text{ر}}\ \underline{|\text{ن}-(\text{ن}-\text{ر})}} = \frac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}-\text{ر}}\ \underline{|\text{ر}}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}$$

ملاحظة : ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٠} = ١$

- البرهان -

${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}-\text{ن}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٠}$ أي أن ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٠}$

$\therefore {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٠} = ١$

نتيجة : إذا كان ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{هـ}}$ $\therefore$ ر = هـ أ، ن = ر + هـ

- البرهان -

$\because {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{هـ}}$ $\therefore$ ر = هـ

، $\because {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}-\text{ر}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}$ $\therefore$ ن − ر = هـ $\therefore$ ن = ر + هـ

نتيجة:

النسبة بين ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}$ ، ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١}$

$$\therefore \frac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١}} = \frac{\text{ن}-\text{ر}+١}{\text{ر}}$$

- البرهان -

$$\because {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \frac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ر}}\ \underline{|\text{ن}-\text{ر}}} \quad،\quad {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١} = \frac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ر}-١}\ \underline{|\text{ن}-\text{ر}+١}}$$

$$\therefore \frac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١}} = \frac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ر}}\ \underline{|\text{ن}-\text{ر}}} \times \frac{\underline{|\text{ر}-١}\ \underline{|\text{ن}-\text{ر}+١}}{\underline{|\text{ن}}}$$

$$= \frac{\underline{|\text{ر}-١}\ (\text{ن}-\text{ر}+١)\ \underline{|\text{ن}-\text{ر}}}{\text{ر}\ \underline{|\text{ر}-١}\ \underline{|\text{ن}-\text{ر}}} = \frac{\text{ن}-\text{ر}+١}{\text{ر}}$$

<u>مثال</u> : أوجد قيمة :

$$({}^{٨}ق_{٤} + {}^{٩}ق_{٢}) - ٢\,({}^{٦}ق_{٢} + {}^{٧}ق_{٣})$$

الحـــــــل

$$({}^{٨}ق_{٤} + {}^{٩}ق_{٢}) - ٢\,({}^{٦}ق_{٢} + {}^{٧}ق_{٣})$$

$\because {}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ل_{ر}$

$$\therefore \frac{٥×٦×٧×٨}{١×٢×٣×٤} + \frac{٨×٩}{١×٢} - ٢×\left(\frac{٥×٦}{١×٢} + \frac{٥×٦×٧}{١×٢×٣}\right)$$

$$= (٧٠ + ٣٦) - ٢\,(١٥ + ٣٥) = ١٠٦ - ١٠٠ = ٦$$

<u>مثال</u>: إذا كان : ${}^{٢٠}ق_{٥ر} = {}^{٢٠}ق_{٢ر-٨}$ فما قيمة ${}^{١٢}ق_{ر-٣}$ ؟

الحـــــــل

$\because {}^{٢٠}ق_{٥ر} = {}^{٢٠}ق_{٢ر-٨}$ $\therefore ٥ر$

$\therefore ٢٠ = ٥ر + ٢ر - ٨$ $\therefore ١٢$

$\therefore {}^{١٢}ق_{ر-٣} = {}^{١٢}ق_{٤-٣} = {}^{١٢}ق_{١} = ١٢$

<u>مثال</u> : إذا كان ${}^{ن}ق_{ن-٣} = ١٢٠$ أوجد ${}^{ن+١}ق_{٤}$

الحـــــــل

$\because {}^{ن}ق_{ن-٣} = {}^{ن}ق_{ن-(ن-٣)} = {}^{ن}ق_{٣}$

$\therefore {}^{ن}ق_{٣} = \dfrac{{}^{ن}ل_{٣}}{\lfloor\underline{٣}} = ١٢٠$ $\therefore {}^{ن}ل_{٣} = \lfloor\underline{٣} × ١٢٠$

$\therefore {}^{ن}ل_{٣} = ٣ × ٢ × ١ × ١٢٠$ $\therefore {}^{ن}ل_{٣} = ٧٢٠$

$\therefore {}^{ن}ل_{٣} = ١٠ × ٩ × ٨$ $\therefore {}^{١٠}ل_{٣} = ١٠ × ٩ × ٨$

$\therefore ن = ١٠$

$$\therefore {}^{ن+١}ق_{٤} = {}^{١١}ق_{٤} = \frac{٨×٩×١٠×١١}{١×٢×٣×٤} = ٣٣٠$$

<u>مثال</u> : أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية

$$^{\text{ن}+١}\text{ق}_{\text{ن}-٢} + ٧ = ٧\,\text{ن}$$

الحـــــــل

تستخدم قانون التبسيط $\therefore\ ^{\text{ن}+١}\text{ق}_{\text{ن}-٢} = {}^{\text{ن}+١}\text{ق}_{\text{ن}+١-(\text{ن}-٢)} = {}^{\text{ن}+١}\text{ق}_{٣}$

$$\therefore \frac{(\text{ن}+١)\times \text{ن}\,(\text{ن}-١)}{٣\times٢\times١} = ٧\,\text{ن} - ٧$$

$$\therefore \frac{(\text{ن}+١)\times \text{ن}\,(\text{ن}-١)}{٣\times٢\times١} = ٧\,(\text{ن} - ١)$$

$\therefore$ ن ^{٢} + ن − ٤٢ = ٠ $\qquad \therefore$ (ن − ٦) (ن + ٧) = ٠ $\qquad \therefore$ ن = ٦

<u>مثال</u> :

إذا كان : $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} : {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١} = ٨ : ٣$ ، $^{٧}\text{ق}_{\text{ر}} = {}^{٧}\text{ق}_{٣\text{ر}-٥}$ **فأوجد قيمة ن ، ر**

الحـــــــل

$\because\ ^{٧}\text{ق}_{\text{ر}} = {}^{٧}\text{ق}_{٣\text{ر}-٥}$ $\qquad \therefore$ ٧ = ر + ٣ ر − ٥

$\therefore$ ٤ ر = ١٢ $\qquad \therefore$ ر = ٣

، $\because\ ^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} : {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١} = ٨ : ٣$ (نستخدم قانون النسبة)

$$\therefore \frac{^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}}{^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١}} = \frac{^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}}{^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١}} = \frac{\text{ن}-٣+١}{٣} = \frac{٨}{٣}$$

$\therefore \dfrac{\text{ن}-٢}{٣} = \dfrac{٨}{٣}$ $\qquad \therefore$ ن − ٢ = ٨ $\qquad \therefore$ ن = ١٠

<u>مثال</u> : إذا كان $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} : {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}+١} : {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}+٢} = ١٥ : ٤٢ : ٩١$ **فأوجد قيمتي ن ، ر**

الحـــــــل

$\because \dfrac{^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}+١}}{^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}} = \dfrac{١٢}{٥}$ $\qquad \therefore \dfrac{\text{ن}-(\text{ر}+١)+١}{\text{ر}+١} = \dfrac{١٤}{٥}$

$\therefore \dfrac{\text{ن}-\text{ر}}{\text{ر}+١} = \dfrac{١٤}{٥}$ $\qquad \therefore$ ٥ ن − ٥ ر = ١٤ ر + ١٤

$\therefore$ ٥ن − ١٩ ر = ١٤ ---- (١)

، ∵ $\dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}+٢}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}+١}} = \dfrac{٩١}{٤٢}$

∴ $\dfrac{\text{ن} - \text{ر} - ١}{\text{ر} + ٢} = \dfrac{١٣}{٦}$

∴ $\dfrac{\text{ن} - (\text{ر}+٢) + ١}{\text{ر} + ٢} = \dfrac{١٣}{٦}$

∴ ٦ ن − ٦ ر − ٦ = ١٣ ر + ٢٦

∴ ٦ ن − ١٩ ر = ٣٢ ---- (٢)

بضرب طرفي (١) في -١ وإضافتها إلي (٢)

∴ ن = ١٨ ، ر = ٤

<u>مثال</u> : حل المعادلة :

$${}^{\text{س}+١}\text{ل}_{٣} = ١٠ \times {}^{\text{س}+١}\text{ق}_{٥} \text{ ، حيث س} \in \text{ط}$$

الحـــــــل

∴ $(\text{س} + ١)\,\text{س}\,(\text{س} - ١) = \dfrac{١٠(\text{س}+١)\,\text{س}(\text{س} - ١)(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٣)}{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}$

باختصار الطرفين ∴ $١ = (\text{س} - ٢)(\text{س} - ٣) \times \dfrac{١}{١٢}$

∴ (س - ٢) (س - ٣) = ١٢ ∴ $\text{س}^{٢} - ٥\text{س} - ٦ = ٠$

∴ س = ٦ أ، س = -١ (مرفوض)

<u>مثال</u> : إذا كان ${}^{\text{م}+\text{ن}}\text{ل}_{٣} = ٧٢٠$ ، ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{١} = ٣$ **أوجد قيمة** ${}^{\text{م}}\text{ق}_{\text{م}-\text{ن}}$

الحـــــــل

∵ ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{١} = ٣$ ∴ ن = ٣

∴ ${}^{\text{م}+٣}\text{ل}_{٣} = ٧٢٠ = ١٠ \times ٩ \times ٨ = {}^{١٠}\text{ل}_{٣}$

∴ م + ٣ = ١٠ ∴ م = ٧

∴ ${}^{\text{م}}\text{ق}_{\text{م}-\text{ن}} = {}^{٧}\text{ق}_{٤} = {}^{٧}\text{ق}_{٣} = \dfrac{٧ \times ٦ \times ٥}{٣ \times ٢ \times ١} = ٣٥$

تمرين (٢)

(١) احسب نتيجة كل مما يأتي :

[أ] ${}^{١٣}ق_{٦}$ [ب] ${}^{٢٠}ق_{٤}$ [ج] ${}^{٢٠}ق_{١٧}$ [ء] ${}^{١٠٠}ق_{٩٨}$

(٢) إذا كان ${}^{ن}ق_{٢} = ٤٣٥$ أوجد قيمة ن

(٣) إذا كان ${}^{ن}ق_{٣} = \frac{١}{٦}\ ٣٠ن$ أوجد قيمة ${}^{ن}ق_{١٠}$

(٤) إذا كان ${}^{م+ن}ق_{٣} = ٥٦$ ، ${}^{م}ق_{٢} = ٣$ أوجد قيمة $\underline{|ن+م}$

(٥) إذا كان ${}^{ن}ق_{٣} = ١٢٠$ أوجد قيمة ${}^{٢ن}ق_{ن+٥}$

(٦) إذا كان ${}^{ن}ق_{ر^{٢}+٢ر} = {}^{ن}ق_{٢ر+٥}$ وكان ${}^{ن}ق_{٣} = ١٢٠$ أوجد ${}^{ن}ق_{٧ر+٣}$

(٧) أثبت أن : ${}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر+١} = {}^{ن+١}ق_{ر+١}$ ومن ثم

[أ] $\frac{{}^{١٧}ق_{٦} + {}^{١٧}ق_{٥}}{{}^{١٨}ق_{٥}}$

[ب] أثبت أن : ${}^{ن}ق_{ر+١} + ٢\,{}^{ن}ق_{ر-١} = {}^{ن+٢}ق_{ر+١}$

(٨) إذا كان ${}^{ن}ق_{٤}$ ، ${}^{ن}ق_{٥}$ ، ${}^{ن}ق_{٦}$ في تتابع حسابي أوجد قيمة ن

(٩) أثبت أن ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن-١}ق_{ر-١} = \frac{ن}{ر}$ ومن ثم أوجد $\frac{{}^{٢٥}ق_{٤} + {}^{٢٤}ق_{٣}}{{}^{٢٤}ق_{٣} + {}^{٢٣}ق_{٢}}$

(١٠) إذا علم أن ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر+٢} : {}^{ن}ق_{ر+٤} = ٣ : ١٤ : ١٤$ فأوجد قيمة كل من ن ، ر

نظرية ذات الحدين

إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين ، ن عدد صحيح موجب فإن

$(أ+ب)^{ن} = أ^{ن} + {}^{ن}ق_{١}\, ب^{١} أ^{ن-١} + {}^{ن}ق_{٢}\, ب^{٢} أ^{ن-٢} + \dots + {}^{ن}ق_{ر}\, ب^{ر} أ^{ن-ر} + \dots + ب^{ن}$ ـــ(١)

ملحوظة هامة :

إذا وضعنا في القانون السابق (- ب) بدلاً من ب في كلا الطرفين فإن

$(أ-ب)^{ن} = أ^{ن} - {}^{ن}ق_{١}\, ب\, أ^{ن-١} + {}^{ن}ق_{٢}\, ب^{٢} أ^{ن-٢} - \dots + {}^{ن}ق_{ر}\,(-ب)^{ر} أ^{ن-ر} + \dots + (-ب)^{ن}$ ـــ(٢)

ملاحظات علي مفكوك ذات الحدين :

(١) عدد حدود المفكوك يساوي (ن+١) أي يزيد علي الأس بمقدار ١

(٢) الدليل الذي تحت ق يقل عن رتبة الحد بقدر ١ وهو نفسه أس ب

(٣) تتناقص قوة أ تدريجياً وتزيد قوة ب تدريجياً بحيث يكون مجموع القوتين ن في كل حد .

(٤) في مفكوك $(أ-ب)^{ن}$ تكون الحدود الفردية الرتبة موجبة والحدود الزوجية الرتبة سالبة.

نتيجة : بجمع (١) ، (٢) ينتج أن :

أولاً : $(أ+ب)^{ن} + (أ-ب)^{ن} = ٢أ^{ن} + ٢\,{}^{ن}ق_{٢}\, ب^{٢} أ^{ن-٢} + ٢\,{}^{ن}ق_{٤}\, ب^{٤} أ^{ن-٤} + \dots$

$= ٢\,[ح_{١} + ح_{٣} + ح_{٥} + \dots]$

= ضعف مجموع الحدود الفردية الرتبة

ثانياً : $(أ+ب)^{ن} - (أ-ب)^{ن} = ٢\,{}^{ن}ق_{١}\, ب^{١} أ^{ن-١} + ٢\,{}^{ن}ق_{٣}\, ب^{٣} أ^{ن-٣} + ٢\,{}^{ن}ق_{٥}\, ب^{٥} أ^{ن-٥} + \dots$

$= ٢\,[ح_{٢} + ح_{٤} + ح_{٦} + \dots]$

= ضعف مجموع الحدود الزوجية الرتبة

أبسط صورة لنظرية ذات الحدين

إذا كانت س $\in$ ح ، ن عدد صحيح موجب فإن

$(١+س)^{ن} = ١ + {}^{ن}ق_{١}\, س + {}^{ن}ق_{٢}\, س^{٢} + \dots + {}^{ن}ق_{ر}\, س^{ر} + \dots + س^{ن}$

، $(١-س)^{ن} = ١ - {}^{ن}ق_{١}\, س + {}^{ن}ق_{٢}\, س^{٢} + \dots + {}^{ن}ق_{ر}\,(-س)^{ر} + \dots + (-س)^{ن}$

مثال: باستخدام نظرية ذات الحدين اوجد مفكوك كل مما يأتي:-

[١] $(2\text{أ} + 3\text{ب})^5$ [٣] $(\text{س} - \sqrt{2})^6$

[٢] $\left(\text{س}^2 + \frac{1}{2\text{ص}}\right)^4$ [٤] $(1 + \sqrt{\text{س}})^5$

[٥] $\left(\frac{\sqrt{\text{س}}}{2} + \frac{2}{\sqrt{\text{س}}}\right)^5 + \left(\frac{\sqrt{\text{س}}}{2} - \frac{2}{\sqrt{\text{س}}}\right)^5$

الحـــــل

[١] $(2\text{أ} + 3\text{ب})^5 = (2\text{أ})^5 + {}^5\text{ق}_1 (3\text{ب})(2\text{أ})^4 + {}^5\text{ق}_2(3\text{ب})^2(2\text{أ})^3 + {}^5\text{ق}_3(3\text{ب})^3(2\text{أ})^2$

$+ {}^5\text{ق}_4(3\text{ب})^4(2\text{أ}) + (3\text{ب})^5$

$= 32\text{أ}^5 + 240\text{أ}^4\text{ب} + 720\text{أ}^3\text{ب}^2 + 1080\text{أ}^2\text{ب}^3 + 810\text{أب}^4 + 243\text{ب}^5$

[٢] $\left(\text{س}^2 + \frac{1}{2\text{ص}}\right)^4 = (\text{س}^2)^4 + {}^4\text{ق}_1\left(\frac{1}{2\text{ص}}\right)(\text{س}^2)^3 + {}^4\text{ق}_2\left(\frac{1}{2\text{ص}}\right)^2 \times (\text{س}^2)^2$

$+ {}^4\text{ق}_3\left(\frac{1}{2\text{ص}}\right)^3(\text{س}^2) + \left(\frac{1}{2\text{ص}}\right)^4$

$= \text{س}^8 + 2\frac{\text{س}^6}{\text{ص}} + \frac{3}{2}\frac{\text{س}^4}{\text{ص}^2} + \frac{\text{س}^2}{2\text{ص}^3} + \frac{1}{16\text{ص}^4}$

[٣] $(\text{س} - \sqrt{2})^6 = \text{س}^6 - {}^6\text{ق}_1(\sqrt{2})\text{س}^5 + {}^6\text{ق}_2(\sqrt{2})\text{س}^4 - {}^6\text{ق}_3(\sqrt{2})\text{س}^3$

$+ {}^6\text{ق}_4(\sqrt{2})\text{س}^2 + {}^6\text{ق}_5(\sqrt{2})\text{س} + (\sqrt{2})^6$

$= \text{س}^6 - 6\sqrt{2}\,\text{س}^5 + 30\text{س}^4 - 40\sqrt{2}\,\text{س}^3 + 60\text{س}^2 - 12\sqrt{2}\,\text{س} + 8$

[٤] $(1 + \sqrt{\text{س}})^5 = 1 + {}^5\text{ق}_1(\sqrt{\text{س}}) + {}^5\text{ق}_2(\sqrt{\text{س}}) + {}^5\text{ق}_3(\sqrt{\text{س}}) + {}^5\text{ق}_4(\sqrt{\text{س}})$

$+ (\sqrt{\text{س}})^5$

$= 1 + 5\sqrt{\text{س}} + 10\,\text{س}\sqrt{\text{س}} + 5\,\text{س}^2 + \text{س}^2\sqrt{\text{س}}$

[٥] $\left(\frac{\sqrt{\text{س}}}{2} + \frac{2}{\sqrt{\text{س}}}\right)^5 + \left(\frac{\sqrt{\text{س}}}{2} - \frac{2}{\sqrt{\text{س}}}\right)^5 = 2\,(\text{ح}_1 + \text{ح}_3 + \text{ح}_5)$

$= 2\left[\left(\frac{\sqrt{\text{س}}}{2}\right)^5 + {}^5\text{ق}_2\left(\frac{2}{\sqrt{\text{س}}}\right)^3 + {}^5\text{ق}_4\left(\frac{\sqrt{\text{س}}}{2}\right)^4\left(\frac{2}{\sqrt{\text{س}}}\right)\right]$

$= 2\left[\frac{\text{س}^2\sqrt{\text{س}}}{2} + 10\frac{\sqrt{\text{س}}}{2} + 5 \times \frac{8}{\text{س}\sqrt{\text{س}}}\right]$

مثال : باستخدام نظرية ذات الحدين أوجد قيمة كل مما يأتي مقرباً الجواب إلى ٣ أرقام عشرية :

[أ] $(٠,٩٦)^٥$ [ب] $(١,٠٠٣)^٦ - (٠,٩٩٧)^٦$

الحـــــل

[أ] $(٠,٩٦)^٥ = (١ - ٠,٠٤)^٥ = ١ - {}^٥ق_١ (٠,٠٤) + {}^٥ق_٢ (٠,٠٤)^٢ - {}^٥ق_٣ (٠,٠٤)^٣$

$= ١ - ٠,٢٠ + ٠,٠١٦٠ - ٠,٠٠٠٦٤٠$

$= ٠,٨١٥٣٦٠ = ٠,٨١٥$ تقريباً

[ب] $(١,٠٠٣)^٦ - (٠,٩٩٧)^٦ = ٢ (ح_٢ + ح_٤ + ح_٦)$

$= ٢ [{}^٦ق_١ (٠,٠٠٣) + {}^٦ق_٣ (٠,٠٠٣)^٣ + {}^٦ق_٥ (٠,٠٠٣)^٥]$

$= ٢ [٦ \times ٠,٠٠٣] = ٠,٠٣٦$

مثال : فك $(س+٤ص)^٦$ بنظرية ذات الحدين ثم استخدم المفكوك في إيجاد قيمة $(١,٠٠٤)^٧$ إلى أرقام عشرية .

الحـــــل

$(س+٤ص)^٧ = س^٧ + ٢٨ ص س^٦ + ٣٣٦ ص^٢ س^٥ + ٢٢٤٠ ص^٣ س^٤ + ٨٩٦٠ ص^٤ س^٣ +$

$٢١٥٠٤ ص^٥ س^٢ + ٢٨٦٧٢ ص^٦ س + ١٦٣٨٤ ص^٧$

وبوضع س = ١ ، ص = ٠,٠٠١

$\therefore (١ + ٠,٠٠٤)^٧ = ١ + ٢٨ \times ٠,٠٠١ + ٣٣٦ (٠,٠٠١)^٢ + ٢٤٠ < (٠,٠٠١)^٣ + ٠$

$= ١,٠٢٨٣٣٨$ تقريباً

مثال : أوجد مفكوك $(س+٢)^٦$ باستخدام ذي الحدين ثم استم المفكوك لإيجاد قيمة $\left(\frac{٢٠١}{١٠٠}\right)^٦$ مقربا لثلاثة أرقام عشرية .

الحـــــل

$(س+٢)^٦ = س^٦ - ٦ \times ٢ س^٥ + \frac{٦\times٥}{٢\times١} (٢)^٢ س^٤ + \frac{٦\times٥\times٤}{٣\times٢\times١} (٢)^٣ س^٣ + \frac{٦\times٥}{٢\times١} (٢)^٤ س^٢$

$+ ٦ \times (٢)^٥ س + ٢^٦$

$= س^٦ + ١٢ س^٥ + ٦٠ س^٤ + ١٦٠ س^٣ + ٢٤٠ س^٢ + ١٩٢ س + ٦٤$ ---(١)

$\left(\frac{٢٠١}{١٠٠}\right)^٦ = (٢ + ٠,٠١)^٦$ بالتعويض في (١) عن س = ٠,٠١

$\therefore \left(\frac{٢٠١}{١٠٠}\right)^٦ = ٦٤ + ١٩٢ (٠,٠١) + ٢٤٠ (٠,٠١)^٢ + ...$

$= ٦٤ + ١,٩٢ + ٠,٠٢٤٠ = ٦٥,٩٤٤٠$

الحد العام في مفكوك $(أ + ب)^ن$

نعلم أن :

$(أ + ب)^ن = أ^ن + {}^نق_١ ب^١ أ^{ن-١} + {}^نق_٢ ب^٢ أ^{ن-٢} + {}^نق_٣ ب^٣ أ^{ن-٣} + ... + {}^نق_ر ب^ر أ^{ن-ر} + ... + ب^ن$

نلاحظ أن:-

$ح_٢ = {}^نق_١ ب^١ أ^{ن-١}$ ، $ح_٣ = {}^نق_٢ ب^٢ أ^{ن-٢}$ ، $ح_٤ = {}^نق_٣ ب^٣ أ^{ن-٣}$ وقياسا علي ذلك يكون:

$$ح_{ر+١} = {}^نق_ر ب^ر أ^{ن-ر}$$

أي $ح_{ر+١} = {}^نق_ر (الثاني)^ر (الأول)^{ن-ر}$ ويجب أخذ كل حد بإشارته

الحد الأوسط أو الحدين الأوسطيين في مفكوك ذات الحدين

نعلم أن عدد الحدود في مفكوك $(أ + ب)^ن = ن+١$ لذا يكون لدينا حالتان :

أولاً : إذا كانت ن عدداً زوجيا :

فإن عدد حدود المفكوك يكون فردياً ∴ يوجد حد أوسط واحد هو $ح_{\frac{ن}{٢}+١}$

ثانياً : إذا كانت ن عدداً فرديا :

فإن عدد حدود المفكوك يكون زوجياً ∴ يوجد حدان أوسطان هما $\frac{ن+١}{٢}$ ، $\frac{ن+١}{٢} + ١$

مثال: أوجد النسبة بين الحد الأوسط والحد الرابع في مفكوك $\left(\frac{٢س}{٣} + \frac{٣}{٢س}\right)^{١٠}$

الحـــــل

الحد الأوسط هو $ح_٦ = {}^{١٠}ق_٥ \left(\frac{٣}{٢س}\right)^٥ \left(\frac{٢س}{٣}\right)^٥ = {}^{١٠}ق_٥$

$$ح_٤ = {}^{١٠}ق_٣ \left(\frac{٣}{٢س}\right)^٣ \left(\frac{٢س}{٣}\right)^٧ = \frac{١٠\times٩\times٨}{٣\times٢\times١} \times \frac{١٦س^٤}{٨١} = \frac{٦٤٠س^٤}{٢٧}$$

$$\frac{ح_٦}{ح_٤} = \frac{١٠\times٩\times٨\times٧\times٦}{٥\times٤\times٣\times٢\times١} \times \frac{٢٧}{٦٤٠\times س^٤} = \frac{٢١}{١٦٠}$$

<u>مثال</u> : في مفكوك $(٤س^٢ + \frac{١}{٢س})^{١٥}$ أوجد قيمة س التي تجعل الحدين الأوسطين في المفكوك متساويين ؟

الحـــــــــل

الحدان الأوسطان هما $ح_٨$ ، $ح_٩$

$\therefore \; {}^{١٥}ق_٧ \times ٢^٩ \; س^٩ = {}^{١٥}ق_٨ \times ٢^٦ \; س^٦$

$\therefore \; ٨ \; س^٣ = ١ \qquad \therefore \; س = \frac{١}{٢}$

<u>مثال</u> : إذا كان معامل الحد الذي ترتيبه ر+٤ في مفكوك $(١+س)^{١٧}$ يساوي معامل الحد الذي ترتيبه ٣ر+ ٣ في نفس المفكوك فأوجد قيمة ر

الحـــــــــل

معامل $ح_{ر+٤} = {}^{١٧}ق_{ر+٣} = {}^{١٧}ق_{٣ر+٢}$

$\therefore \; {}^{١٧}ق_{ر+٣} = {}^{١٧}ق_{٣ر+٢}$

$\therefore \; ر+٣ = ٣ر+٢ \qquad \therefore \; ر = \frac{١}{٢}$ مرفوض

$١٧ = ر + ٣ + ٣ر + ٢ \qquad \therefore \; ر = ٣$

<u>مثال</u> : إذا كان ضعف معامل الحادي عشر في مفكوك $(١+ س)^ن$ يساوي ثلاثة أمثال معامل الحد العاشر في مفكوك $(١+ص)^{ن-١}$ أوجد قيمة ن

الحـــــــــل

$٢ \times {}^نق_{١٠} = ٣ \times {}^{ن-١}ق_٩$

$\therefore \; ٢ \times \frac{\underline{|ن}}{\underline{|١٠} \; \underline{|ن-١٠}} = ٣ \times \frac{\underline{|ن-١}}{\underline{|٩} \; \underline{|ن-١٠}} \qquad \therefore \; \frac{٢ن \; \underline{|ن-١}}{١٠ \; \underline{|٩}} = \frac{٣ \; \underline{|ن-١}}{\underline{|٩}}$

$\therefore \; ن = ١٥$

<u>مثال</u> : اثبت أن معامل الحد الأوسط في مفكوك $(١+ س)^{٢ن}$ يساوي مجموع معاملي الحدين الأوسطين في مفكوك $(١+ س)^{٢ن-١}$

الحـــــــــل

الحد الأوسط هو $ح_{\frac{٢ن}{٢}+١} = ح_{ن+١}$

معامل $ح_{ن+١} = {}^{٢ن}ق_{ن} = \frac{\underline{|٢ن}}{\underline{|ن}\,\underline{|ن}} = \frac{٢\,\underline{|٢ن-١}}{\underline{|ن}\,ن\,\underline{|ن-١}}$

الحدان الأوسطان هما $ح_{\frac{٢ن-١+١}{٢}} = ح_{ن} ، ح_{ن+١}$

مجموع معاملا الحدين الأوسطين $= \frac{\underline{|٢ن-١}}{\underline{|ن-١}\,\underline{|ن}} + \frac{\underline{|٢ن-١}}{\underline{|ن}\,\underline{|ن-١}} = \frac{٢\,\underline{|٢ن-١}}{\underline{|ن}\,\underline{|ن-١}}$

<u>مثال</u>: الحد الثالث في مفكوك $(١+س)^{ن}$ حسب قوي س التصاعدية حيث ن عدد صحيح موجب هو $٢٨\,س^{٢}$ ، الحد الخامس من نفس المفكوك ١١٢٠ . أوجد قيمة كل من ن ، س .

الحـــــل

$ح_{٣} = {}^{ن}ق_{٢}\,س^{٢} = ٢٨\,س^{٢}$ $\therefore \frac{ن(ن-١)}{٢\times١} = ٢٨$

$\therefore ن^{٢} - ن - ٥٦ = ٠$ $\therefore (ن-٨)(ن+٧) = ٠$

$\therefore ن = ٨$ $\because ح_{٥} = {}^{٨}ق_{٤}\,س^{٤} = ١١٢٠$

$\therefore س^{٤} = ١١٢٠ \times \frac{٤\times٣\times٢\times١}{٨\times٧\times٦\times٥} = ١٦$ $\therefore س = \pm ٢$

<u>مثال</u>: إذا كان الحدان الأوسطان في مفكوك $(٣س+٥)^{٢ن+١}$ متساويين . أوجد قيمة س علما بأن ن عدد صحيح موجب .

الحـــــل

الحدان الأوسطان هما $ح_{ن+١} ، ح_{ن+٢}$

$\therefore {}^{٢ن+١}ق_{ن}\,(٥)^{ن}\,(٣س)^{ن+١} = {}^{٢ن+١}ق_{ن+١}\,(٥)^{ن+١}\,(٣س)^{ن}$

$\therefore ٣س = ٥$ $\therefore س = \frac{٥}{٣}$

<u>مثال</u>: في مفكوك $(١+س)^{ن}$ حسب قوي س التصاعدية كان الحد الثاني $-\frac{١٠}{٣}$ والحد الثالث $\frac{٤٠}{٩}$ أوجد قيمتي ن ، س ثم أوجد الحد الرابع .

الحـــــل

$ح_{٢} = {}^{ن}ق_{١}\,س = -\frac{١٠}{٣}$ $\therefore ن\,س = -\frac{١٠}{٣}$ ---- (١)

$ح_{٣} = {}^{ن}ق_{٢}\,س^{٢} = \frac{٤٠}{٩}$ $\therefore \frac{ن(ن-١)}{٢\times١}\,س^{٢} = \frac{٤٠}{٩}$ ---- (٢)

بتربيع (١) والقسمة علي (٢) $\therefore ن = ٥ ، س = -\frac{٢}{٣}$

$\therefore ح_{٤} = {}^{٥}ق_{٣}\,(-\frac{٢}{٣})^{٣} = -\frac{٨٠}{٢٧}$

إيجاد الحد المشتمل علي س^{هـ} في مفكوك ذات الحدين

١. نفرض أن الحد المشتمل علي س^{هـ} هو $ح_{ر+١}$

٢. نوجد $ح_{ر+١}$ في أبسط صورة .

٣. نساوي قوة س الناتجة في $ح_{ر+١}$ بالقوة المطلوبة (هـ) فنحصل علي قيمة (ر) ويكون الحد المشتمل علي س^{هـ} هو $ح_{ر+١}$

٤. نعوض بقيمة (ر) التي حصلنا عليها في $ح_{ر+١}$ فنحصل علي الحد المشتمل علي س^{هـ}

ملاحظة:

الحد الخالي من س هو معامل س (لأن س^{٠} = ١)

مثال :

أوجد معامل $\frac{١}{س^{٨}}$ في مفكوك $(س - \frac{١}{٢س^{٣}})^{١٢}$

الحل

$ح_{ر+١} = {}^{١٢}ق_{ر} \left(- \frac{١}{٢س^{٣}} \right)^{ر} (س)^{١٢-ر} = {}^{١٢}ق_{ر} \left(- \frac{١}{٢}\right)^{ر} س^{١٢-٤ر}$

بوضع ١٢ – ٤ر = - ٨ $\therefore$ ر = ٥

$\therefore ح_{٦} = {}^{١٢}ق_{٥} \left(- \frac{١}{٢} \right)^{٥} س^{-٨}$ $\therefore$ معامل س$^{-٨}$ = - $\frac{٩٩}{٤}$

مثال : أوجد الحد الخالي من س في مفكوك $(س - \frac{٢}{س})^{١٠}$

الحل

$ح_{ر+١} = {}^{١٠}ق_{ر} \left(- \frac{٢}{س}\right)^{ر} (س)^{١٠-ر}$

$= {}^{١٠}ق_{ر} (- ٢)^{ر} (س)^{١٠-٢ر}$

بوضع ١٠ – ٢ ر = ٠ $\therefore$ ر = ٥

الحد الخالي من س هو $ح_{٦} = {}^{١٠}ق_{٥} (س)^{٥}$ = - ٨٠٦٤

مثال: أوجد معامل س^{١١} في مفكوك س^{١} $(\frac{س^{٢}}{٢} + \frac{٢}{س^{٣}})^{١٠}$

الحل

معامل س١٤ في المفكوك هو معامل س١٠ في مفكوك $(\frac{س^{٢}}{٢} + \frac{٢}{س})^{١٥}$

$$\therefore ح_{ر+١} = {}^{١٥}ق_{ر} (\frac{٢}{س})^{ر} (\frac{س^{٢}}{٢})^{١٥-ر}$$

$$= {}^{١٥}ق_{ر} \times ٢^{٢ر-١٥} \; س^{٣٠-٥ر}$$

بوضع $٣٠ - ٥ر = ١٠$ $\qquad \therefore ر = ٤$

معامل $ح_{٥} = {}^{١٥}ق_{ر} \times ٢^{-٧} = \frac{١٣٦٥}{١٢٨}$

<u>مثال</u>: أثبت أن معامل $س^{ن}$ في مفكوك $(س + \frac{١}{س})^{٣ن} = \frac{\underline{|٣ن}}{\underline{|٢ن} \; \underline{|ن}}$

الحل

$$ح_{ر+١} = {}^{٣ن}ق_{ر} (\frac{١}{س})^{ر} (س)^{٣ن-ر} = {}^{٣ن}ق_{ر} \; س^{٣ن-٢ر}$$

بوضع $٣ن - ٢ر = ر$ $\qquad \therefore ر = ن$

معامل $ح_{ن+١} = {}^{٣ن}ق_{ر} = \frac{\underline{|٣ن}}{\underline{|٢ن} \; \underline{|ن}}$

<u>مثال</u>: أوجد الحد المشتمل علي $س^{٤}$ في المقدار $(س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}})^{١٢} - (س + \frac{١}{س})^{١٢}$

الحل

الحد المشتمل علي $س^{٤}$ في مفكوك $(س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}})^{١٢}$

$$ح_{ر+١} = {}^{١٢}ق_{ر} (\frac{١}{س^{٢}})^{ر} (س^{٢})^{١٢-ر} = {}^{١٢}ق_{ر} \times س^{٢٤-٤ر}$$

$\therefore ٢٤ - ٤ر = ٤$ $\qquad \therefore ر = ٥$

$ح_{٦} = {}^{١٢}ق_{٥} \; س^{٤}$ ------ (١)

الحد المشتمل علي $س^{٤}$ في مفكوك $(س^{٢} + \frac{١}{س})^{١٢}$

$$ح_{ر+١} = {}^{١٢}ق_{ر} (\frac{١}{س})^{ر} (س)^{١٢-ر} = {}^{١٢}ق_{ر} \times س^{١٢-٢ر}$$

$\therefore ١٢ - ٢ر = ٤$ $\qquad \therefore ر = ٤$

$ح_{هـ} = {}^{١٢}ق_{هـ}\ س^{٤}$ ------ (٢)   من (١) ، (٢)

∴ الحد المشتمل علي $س^{٤}$ في المقدار = ${}^{١٢}ق_{هـ}\ س٤ - {}^{١٢}ق_{٤}\ س^{٤} = ٢٩٧\ س^{٤}$

<u>مثال:</u>

إذا كانت ن عدداً صحيحاً موجباً فاثبت أن لا يوجد حد خالي من س في مفكوك $(س^{٥} + \frac{١}{س^{٢}})^{٢ن}$

إلا ذا كانت ن = ٧ أو مكرر لها . أوجد الحد الخالي من س عندما ن = ٧

الحـــــــل

$ح_{ر+١} = {}^{٢ن}ق_{ر} (\frac{١}{س^{٢}})^{ر} (س^{٥})^{٢ن - ر}$

$= {}^{٢ن}ق_{ر}\ س^{١٠ن - ٧ر}$ بوضع ١٠ ن – ٧ ر = ٠

∴ $ر = \frac{١٠ن}{٧}$

∴ لا يوجد حد خالي من س إلا إذا كانت ن = ٧ أو مكررا لها .

عندما ن = ٧   ∴ ر = ١٠

∴ $ح_{١١} = {}^{١٤}ق_{١٠} = {}^{١٤}ق_{٤} = \frac{١٤ \times ١٣ \times ١٢ \times ١١}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ١٠٠١$

<u>مثال:</u> في مفكوك $(س^{٣} + \frac{١}{س^{٢}})^{٥ن}$ أثبت أن الحد الخالي من س يساوي معامل الحد الذي يحتوي علي $س^{٥ن}$.

الحـــــــل

$ح_{ر+١} = {}^{٥ن}ق_{ر} (\frac{١}{س^{٢}})^{ر} (س^{٣})^{٥ن - ر} = {}^{٥ن}ق_{ر} \times س^{١٥ن - ٥ر}$

بوضع ١٥ ن – ٥ ر = ٠   ∴ ر = ٣ن

∴ الحد الخالي من س ${}^{٥ن}ق_{٣ن} = {}^{٥ن}ق_{٢ن}$

بوضع ١٥ ن – ٥ ر = ٥ن

∴ ر= ٢ن   ∴ معامل $س^{٥ن} = {}^{٥ن}ق_{٢ن}$

مثال : اوجد قيمة أ التي تجعل معامل س^{5} = معامل س^{15} في مفكوك $\left(2\text{س}^{2}+\dfrac{\text{أ}}{\text{س}^{3}}\right)^{10}$ حيث أ موجبة .

الحـــــــل

$$\text{ح}_{\text{ر}+1}={}^{10}\text{ق}_{\text{ر}}\left(\frac{\text{أ}}{\text{س}^{3}}\right)^{\text{ر}}\left(2\text{س}^{2}\right)^{10-\text{ر}}$$

$$={}^{10}\text{ق}_{\text{ر}}\times\frac{\text{أ}^{\text{ر}}}{\text{س}^{3\text{ر}}}\,(2)^{10-\text{ر}}\,\text{س}^{20-2\text{ر}}={}^{10}\text{ق}_{\text{ر}}\,\text{أ}^{\text{ر}}\,(2)^{10-\text{ر}}\,\text{س}^{20-5\text{ر}}$$

بوضع $20-5\text{ر}=5$ $\qquad\therefore\ \text{ر}=3$

$\therefore$ معامل $\text{س}^{5}={}^{10}\text{ق}_{3}\,\text{أ}^{3}\,2^{7}$

بوضع $20-5\text{ر}=15$ $\qquad\therefore\ \text{ر}=1$

معامل $\text{س}^{15}={}^{10}\text{ق}_{1}\,\text{أ}\,2^{9}$

$$\therefore\ \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}\,\text{أ}^{3}\,2^{7}=10\text{أ}\times2^{9}$$

$$\therefore\ 3\text{أ}^{2}=1\qquad\therefore\ \text{أ}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

تمرين (٣)

باستخدام نظرية ذات الحدين أوجد مفكوك كل مما يأتي :-

(١) $(\text{أ} + \text{ب})^{٥}$

(٢) $(\text{س} - ٢)^{٦}$

(٣) $(٢\text{س} + ٣\text{ص})^{٤}$

(٤) $(٣\text{أ} - ٢\text{ب})^{٥}$

(٥) $(\text{س} - \sqrt{٢})^{٦}$

(٦) $(١ - ٣\,\text{س})^{٤}$

(٧) $\left(\frac{\text{س}}{٢} - \frac{٣}{\text{س}}\right)^{٥}$

(٨) $(\text{س}^{٢} - ١)^{٧}$

(٩) أوجد $\text{ح}_{٥}$ في مفكوك $\left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٩}$

(١٠) أوجد $\text{ح}_{٦}$ في مفكوك $\left(\frac{٢\text{س}}{٣} - \frac{٣}{٢\text{س}}\right)^{١٠}$

(١١) أوجد $\text{ح}_{٤}$ في مفكوك $\left(\frac{٢}{\sqrt{\text{س}}} - \frac{\sqrt{\text{س}}}{٢}\right)^{١١}$

(١٢) أوجد معامل $\text{ح}_{٦}$ في مفكوك $(٣\,\text{س} - ٢)^{٨}$

(١٣) أوجد معامل $\text{ح}_{٧}$ في مفكوك $\left(٢\,\text{س}^{٢} - \frac{٣}{٢\,\text{س}}\right)^{٩}$

(١٤) أوجد معامل $\text{ح}_{٥}$ في مفكوك $\left(\frac{\text{س}^{٢}}{٢} - \frac{٣}{\text{س}}\right)^{٧}$

(١٥) أوجد معامل الحد الراني في مفكوك $\left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٢\text{ن}}$

(١٦) أوجد معامل الحد النوني في مفكوك $(\text{س}^{٢} + \text{س}^{-٢})^{٢\text{ن}-١}$

(١٧) أوجد مفكوك $(\text{س}+٢)^{٥} - (\text{س}-٢)^{٥}$

(١٨) أوجد مفكوك $(١+\sqrt{\text{س}})^{٦} - (١-\sqrt{\text{س}})^{٦}$

(١٩) أوجد قيمة $(٠,٩٩٨)^{١٠}$ مقربة لخمسة أرقام عشرية .

(٢٠) أوجد قيمة $(١,٠٢)^{٥} - (٠,٩٨)^{٥}$ مقربة لخمسة أرقام عشرية .

تمرين (٤)

(١) أوجد قيمة الحد الأوسط في مفكوك $(س + س^{-١})^{١٠}$

(٢) أوجد قيمة الحد الأوسط في مفكوك $(٢س^٣ + \frac{٣}{٢س})^{١٢}$

(٣) أوجد الحدين الأوسطين في مفكوك $(\frac{س}{٢} - \frac{٣}{ص})^{٩}$

(٤) أوجد معامل $س^٨$ في مفكوك $(\frac{٢س}{٣} - \frac{٣}{س})^{١٢}$

(٥) أوجد معامل $س^{١١}$ في مفكوك $(\frac{س^٢}{٢} - \frac{١}{س})^{١٠}$

(٦) أوجد معامل $س^٩$ في مفكوك $(س^٣ - \frac{١}{س^٤})^{١٠}$

(٧) أوجد معامل $س^{-٤}$ في مفكوك $(س - \frac{١}{س})^{٨}$

(٨) أوجد الحد الخالي من س في مفكوك $(\frac{س^٢}{٣} + \frac{٢}{س})^{١٠}$

(٩) أوجد الحد الخالي من س في مفكوك $(س - \frac{١}{٢س})^{٩}$

(١٠) أثبت أنه لا يوجد حد خال من س في مفكوك $(٢س^٣ - \frac{٣}{س})^{٩}$

(١١) أوجد معامل س في مفكوك $(س + \frac{١}{س})^{١٣}$

(١٢) أثبت أنه لا يوجد حد يحتوي علي $س^٦$ في مفكوك $(\frac{س}{٢} - \frac{٣}{س})^{١١}$

(١٣) في مفكوك $(س + \frac{٣}{٢س})^{١٢}$ أوجد :

أولاً : معامل $س^٦$ **ثانياً** : رتبة الحد الخالي من س

(١٤) إذا كان أ ، ب هما الحدان الأوسطان في مفكوك $(س - \frac{١}{س})^{٢ن}$ حسب قوي س التنازلية فأثبت أن أ + ب $س^٢$ = صفر .

(١٥) إذا كانت ن عددا صحيحا موجبا فأثبت أنه لا يوجد حد خال من س في مفكوك $(س^ن + \frac{١}{س})^{٦}$ الا إذا كانت ن = ٧ و مكررا للعدد ٧ وأوجد الحد الخالي من س عندما ن = ١٤

(١٦) أثبت أن مفكوك $(س^٢ + \frac{١}{س})^{ن}$ يحتوي علي حد خالي من س إذا كانت ن مضاعفا للعدد ٣ - ثم أوجد الحد الخالي من س عندما ن = ١٢

النسبة بين كل حد والسابق له في مفكوك ذات الحدين

$\because \text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\ \text{أ}^{\text{ر}}\ \text{س}^{\text{ن}-\text{ر}}$ ----- (١)

$\text{ح} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١}\ \text{س}^{\text{ن}-\text{ر}+١}$ ------ (٢) بقسمة (١) علي (٢)

$$\therefore \frac{\text{ح}_{\text{ر}+١}}{\text{ح}_{\text{ر}}} = \frac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١}} \times \frac{\text{أ}^{\text{ر}}\ \text{س}^{\text{ن}-\text{ر}}}{\text{أ}^{\text{ر}-١}\ \text{س}^{\text{ن}-\text{ر}+١}}$$

$$= \frac{\text{ن}-\text{ر}+١}{\text{ر}} \times \frac{\text{أ}^{\text{ر}-\text{ر}+١}}{\text{س}^{\text{ن}-\text{ر}+١-(\text{ن}-\text{ر})}}$$

$$\therefore \frac{\text{ح}_{\text{ر}+١}}{\text{ح}_{\text{ر}}} = \frac{٢٠-\text{ر}+١}{\text{ر}} \times \frac{\text{أ}}{\text{س}}$$

أي: $\dfrac{\text{ح}_{\text{ر}+١}}{\text{ح}_{\text{ر}}} = \dfrac{\text{ن}-\text{ر}+١}{\text{ر}} \times \dfrac{\textbf{الأول}}{\textbf{الثانى}}$

مثلا: $\dfrac{\text{ح}_٥}{\text{ح}_٤} = \dfrac{\text{ن}-٤+١}{٤} \times \dfrac{\text{أ}}{\text{س}} = \dfrac{\text{ن}-٣}{٤} \times \dfrac{\text{أ}}{\text{س}}$

نتيجه:

$$\frac{\textbf{معامل ح}_{\text{ر}+١}}{\textbf{معامل ح}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن}-\text{ر}+١}{\text{ر}} \times \frac{\textbf{معامل الحد الثاني}}{\textbf{معامل الحد الأول}}$$

مثال: في مفكوك $(٢+\text{س})^{١٣}$ حسب قوي س التصاعدية وجد أن النسبة بين الحد الحادي عشر والحد العاشر هي ٣ : ١٠ أوجد قيمة س .

الحـــــل

$$\frac{\text{ح}_{١١}}{\text{ح}_{١٠}} = \frac{١٣-١٠+١}{١٠} \times \frac{\text{س}}{٢} = \frac{٣}{١٠}$$

$$\therefore \frac{\text{ح}_{١١}}{\text{ح}_{١٠}} = \frac{٤}{١٠} \times \frac{\text{س}}{٢} = \frac{٣}{١٠}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{٣}{٢}$$

مثال: في مفكوك (٥ + ٤ س)^{١٦} بنظرية ذات الحدين حسب قوى س التصاعدية كانت نسبة أحد الحدود إلي الحد السابق له مباشرة كنسبة ١ : ٣ - أوجد رتبة هذين الحدين في المفكوك علماً بأن س = ١

الحـــــل

$$\frac{\text{ح}_{\text{ر}+١}}{\text{ح}_{\text{ر}}} = \frac{١٦ - \text{ر} + ١}{\text{ر}} \times \frac{٤}{٥} = \frac{١}{٣}$$

∴ ١٢ (٧-ر) = ٥ ر   ∴ ٨٤ - ١٢ ر = ٥ ر

٢٠٤ = ١٧ ر   ∴ ر = ١٢

∴ الحدان هما $\text{ح}_{١٢}$ ، $\text{ح}_{١٣}$

مثال: إذا كانت النسب بين $\text{ح}_{٣}$ ، $\text{ح}_{٤}$ في مفكوك (س+ ص)^{٨} تساوي ١ : ٤ وكان الحد الأوسط = ١١٢٠ فأوجد كلا من س ، ص

الحـــــل

$$\frac{\text{ح}_{٤}}{\text{ح}_{٣}} = \frac{٨ - ٣ + ١}{٣} \times \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{٤}{١}$$

∴ ص = ٢س ---- (١)

$\text{ح}_{٥}$ = $^{٨}\text{ق}_{٤}$ ص^{٤} س^{٤} = ١١٢٠ ومن (١)

$$\therefore \frac{٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} \times ٢^{٤} \text{ س}^{٤} . \text{ س}^{٤} = ١١٢٠$$

∴ س^{٨} = ١   ∴ س = ± ١   ∴ ص = ± ٢

مثال : في مفكوك (١+ ٢س)$^{\text{ن}}$ بنظرية ذات الحدين حسب قوى س التصاعدية وجد في ثلاثة حدود متتالية أن نسبة معاملات أولها إلي ثانيها إلي ثالثها ١ : ٥ : ٢٠ أوجد قيمة ن وكذلك أوجد رتب هذه الحدود الثلاثة .

الحـــــل

نفرض أن الحدود هي $\text{ح}_{\text{ر}}$ ، $\text{ح}_{\text{ر}+١}$ ، $\text{ح}_{\text{ر}+٢}$

$$\therefore \frac{\text{ح}_{\text{ر}+١}}{\text{ح}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن} - \text{ر} + ١}{\text{ر}} \times \frac{٢}{١} = \frac{٥}{١}$$

∴ ٢ن – ٧ر + ٢ = ٠ --- (١)

$$\therefore \frac{\text{ح}_{\text{ر}+١}}{\text{ح}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن} - (\text{ر}+١) + ١}{\text{ر}+١} \times \frac{٢}{١} = \frac{٢٠}{٥}$$

∴ ن – ٣ر - ٢ = ٠ --- (٢)

من (١) ، (٢) ر = ٦ ، ن = ٢٠   ∴ الحدود هي $\text{ح}_{٦}$ ، $\text{ح}_{٧}$ ، $\text{ح}_{٨}$

<u>مثال</u>: في مفكوك $(١ + م\,س)^{ن}$ إذا كانت نسبة معامل $ح_{٧}$ إلي معامل $ح_{٥}$ هي ٨ : ٥ ، قيمة معامل $ح_{٣}$ = ١١٢ معامل $ح_{١}$ فاثبت أن ن = ٨ ثم أوجد قيمة م

الحـــــــل

$$\frac{\text{معامل } ح_{٧}}{\text{معامل } ح_{٥}} = \frac{\text{معامل } ح_{٧}}{\text{معامل } ح_{٦}} \times \frac{\text{معامل } ح_{٦}}{\text{معامل } ح_{٥}} = \frac{ن - ٦ + ١}{٦} \times \frac{م}{١} \times \frac{ن - ٥ + ١}{٥} \times \frac{م}{١}$$

$$= \frac{٨}{٥}$$

$\therefore\ (ن - ٥)\,(ن - ٤)\,م^{٢} = ٤٨$ ------ (١)

$$\frac{\text{معامل } ح_{٣}}{\text{معامل } ح_{١}} = \frac{\text{معامل } ح_{٣}}{\text{معامل } ح_{٢}} \times \frac{\text{معامل } ح_{٢}}{\text{معامل } ح_{١}} = \frac{ن - ٢ + ١}{٢} \times \frac{م}{١} \times \frac{ن - ١ + ١}{١} \times \frac{م}{١}$$

$\therefore\ ن\,(ن - ١)\,م^{٢} = ٢٢٤$ ---- (٢) بقسمة (١) علي (٢)

$$\therefore\ \frac{ن^{٢} - ٩ن + ٢٠}{ن^{٢} - ن} = \frac{٤٨}{٢٢٤} = \frac{٣}{١}$$

$\therefore\ ١١ن^{٢} - ١٢٣ن + ٢٨٠ = ٠$ $\qquad \therefore\ (ن - ٨)\,(١١ن - ٣٥) = ٠$

$\therefore\ ن = ٨$ أ، $ن = \frac{٣٥}{١١}$ مرفوض بالتعويض في (١)

$\therefore\ ٣ \times ٤ \times م^{٢} = ٤٨$ $\qquad \therefore\ م = \pm\, ٢$

<u>مثال</u>: في مفكوك $(٢س + ص)^{ن}$ حسب قوي س التنازلية وجد أن $٩ح_{٢}$ ، $٩ح_{٤}$ ، $٤٤ح_{٦}$ تكون متتابعة هندسية فما قيمة ن .

الحـــــــل

$$\frac{ح_{٤}}{ح_{٢}} = \frac{٤٤ح_{٦}}{٩ح_{٤}} \qquad \therefore\ \frac{ح_{٤}}{ح_{٣}} \times \frac{ح_{٣}}{ح_{٢}} = \frac{٤٤}{٩} \times \frac{ح_{٦}}{ح_{٥}} \times \frac{ح_{٥}}{ح_{٤}}$$

$$\therefore\ \frac{ن - ٣ + ١}{٣} \times \frac{ص}{٢س} \times \frac{ن - ٤ + ١}{٤} \times \frac{ص}{٢س}$$

$$= \frac{٤٤}{٩} \times \frac{ن - ٥ + ١}{٥} \times \frac{ص}{٢س} \times \frac{ن - ٤ + ١}{٤} \times \frac{ص}{٢س}$$

$$\therefore\ (ن - ٢)(ن - ١) = \frac{٢٢(ن - ٤)(ن - ٣)}{١٥}$$

$\therefore\ ١٥\,(ن^{٢} - ٣ن + ٢) = ٢٢\,(ن^{٢} - ٧ن + ١٢)$

وبعد الاختصار $\qquad \therefore\ ن = ١٣$

مثال: إذا كان الحدان الأوسطان في مفكوك $(أ س + ب)^{٢ن+١}$ متساويين أوجد قيمة س علماً بأن ن عدد صحيح موجب .

الحـــــل

الحدان الأوسطان هما $ح_{ن+١}$ ، $ح_{ن+٢}$

$\therefore \frac{ح_{ن+٢}}{ح_{ن+١}} = ١$ $\quad\quad$ $\therefore \frac{(٢ن+١) - (ن+١) + ١}{ن+١} \times \frac{ب}{أ س} = ١$

$\therefore أ س = ب$ $\quad\quad$ $\therefore س = \frac{ب}{أ}$

مثال: إذا كونت معاملات الحدود الخامس والسادس والسابع في مفكوك $(١ + س)^{ن}$ متتابعة حسابية فأوجد ن ثم أذكر رتب الحدود الأخرى في المفكوك التي تكون معاملاتها نفس المتتابعة الحسابية السابقة .

الحـــــل

$٢ \times {}^{ن}ق_{٥} = {}^{ن}ق_{٤} + {}^{ن}ق_{٦}$ بقسمة الطرفين علي ${}^{ن}ق_{٥}$

$\therefore ٢ = \frac{{}^{ن}ق_{٤}}{{}^{ن}ق_{٥}} + \frac{{}^{ن}ق_{٦}}{{}^{ن}ق_{٥}}$

$\therefore ١٢ (ن - ٤) = ٣٠ + (ن - ٥)(ن - ٤)$

$\therefore ن^{٢} - ٢١ ن + ٩٨ = ٠$ $\quad\quad$ $\therefore (ن - ٧)(ن - ١٤) = ٠$

$\therefore ن = ٧$ أ، $ن = ١٤$

${}^{٧}ق_{٤} = {}^{٧}ق_{٣}$ ، ${}^{٧}ق_{٥} = {}^{٧}ق_{٢}$ ، ${}^{٧}ق_{٦} = {}^{٧}ق_{١}$

$\therefore$ الحدود الأخرى هي $ح_{٢}$ ، $ح_{٣}$ ، $ح_{٤}$

تمرين (٥)

(١) إذا كان الحدان الأوسطان في مفكوك (٢س+٣) ^{١٧} متساويين . فما قيمة س .

(٢) إذا كانت الحدود الثالث والرابع والخامس في مفكوك (س+ص)^{ن} هي علي الترتيب ١١٥٢٠ ، ١٥٣٦٠ ، ١٣٤٤٠ . أوجد قيمة كل من س ، ص ، ن .

(٣) إذا كانت الحدود الثاني والثالث والرابع في مفكوك (س+ ص) ^{ن} هي ٢٤٠ ، ٧٢٠ ، ١٠٨٠ علي الترتيب . فما قيم س ، ص ، ن .

(٤) إذا كانت ثلاثة معاملات لحدود متتالية في مفكوك (١+ س)^{ن} هي ٢٠ ، ١٩٠، ١١٤٠ . فما قيمة ن وما ترتيب تلك الحدود .

(٥) إذا كانت النسبة بين معاملات ثلاثة حدود متتالية في مفكوك (١+ س)^{ن} كنسبة ١٥ : ٢٤ : ٢٨ . فما قيمة ن وما ترتيب هذه الحدود .

(٦) إذا كانت النسبة بين الحدين الثاني والثالث في مفكوك (أ+ ب) ^{ن} تساوي النسبة بين الحدين الثالث والرابع في مفكوك (أ + ب) $^{ن+٣}$. فما قيمة ن .

(٧) في مفكوك (١+ م س) ^{ن} إذا علم أن نسبة معامل الحد الرابع إلي معامل الحد السادس تساوي $\frac{١}{٤}$ ونسبة معامل الحد السادس إلي معامل الحد الثامن تساوي $\frac{٧}{٤}$ فأوجد قيمة كل من م ، ن .

(٨) في مفكوك (٢ س + $\frac{٣}{س}$) ^{ن} كان الحدان التاسع والعاشر متساويين والنسبة بين الحد السادس والحد السابع كنسبة ٨ : ١٥ . فأوجد قيمة ن وأثبت أنه لا يوجد حد خال من س في المفكوك .

(٩) في مفكوك (س+ ٣) ^{ن} حسب قوي س التنازلية . وجد أن الحد العاشر = $\frac{٢}{٣}$ الحد التاسع ، ح$_{١٠}$ = $\frac{١}{٤}$ ح$_{١١}$. أوجد قيمة كل من ن ، س .

(١٠) في مفكوك (١+ س)^{ن} حسب قوي س التصاعدية . وجد أن الحد الرابع $\frac{٢٥}{٣}$ الحد الثاني ، والحد الخامس يساوي الحد السادس . أوجد قيمة كل من ن ، س .