

الباب الثاني

الأعداد المركبة

الحاجة إلى توسيع نظام الأعداد الحقيقية :

من دراستنا السابقة تعرفنا على مجموعات الأعداد وهي :

$$(1) \text{ مجموعة الأعداد الطبيعية } \mathbb{P} = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \}$$

حيث جمع أو ضرب عددين طبيعيين هو عدد طبيعي

$$(2) \text{ مجموعة الأعداد الكلية } \mathbb{K} = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

$$(3) \text{ مجموعة الأعداد الصحيحة } \mathbb{V} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

وظهرت لتسمح بحلول معادلات في صورة $س + أ = ب$ حيث ، ب أعداد طبيعية . فمثلا حل

$$\text{المعادلات } 3 = 7 + س \text{ هو } س = 7 - 3$$

∴ س = 4- وهذا الناتج لا يوجد في الأعداد الطبيعية .

(4) مجموعة الأعداد النسبية (القياسية) :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{أ}{ب} : أ، ب \in \mathbb{V} ، ب \neq 0 \right\}$$

وظهرت لتسمح بحلول معادلات في صورة $أس = ب$

$$\text{فمثلا : حل المعادلة } 4س = 9 \text{ هو } س = \frac{9}{4} \text{ وهذا الناتج لا يوجد في مجموعة الأعداد}$$

الصحيحة .

$$(5) \text{ مجموعة الأعداد الحقيقية } \mathbb{H} = \{ \text{الأعداد النسبية والغير نسبية} \}$$

$$\text{وظهرت لتسمح بحلول معادلات مثل } س^2 = 2 \text{ ∴ } س = \pm \sqrt{2}$$

ورأينا أن أي نظام ينشأ كتوسيع للنظام الذي يسبقه لحل معادلات جديدة لم تكن قابلة للحل في

النظام السابق .

$$\text{مثلا المعادلة } س^2 + 1 = 0 \text{ أي } س^2 = -1$$

فهذه المعادلة غير قابلة للحل في \mathbb{H} (مجموعة الأعداد الحقيقية) حيث لا يمكن إيجاد عدد

حقيقي س يحقق المعادلة . لذلك كان التفكير في إيجاد مجموعة جديدة من الأعداد نجد فيها حلا

لمثل هذه المعادلات هذه المجموعة الجديدة تسمى و "مجموعة الأعداد المركبة" .

العدد التخيلي ت :

نعلم أن $\sqrt{-1}$ $\notin \mathbb{H}$ لأنه لا يوجد عدد حقيقي مربعة = -1 ونرمز للعدد $\sqrt{-1}$ بالرمز ت وهو أول

حرف من كلمة تخيلي (غير حقيقي) حيث $ت^2 = -1$

قوي العدد ت :

$$1 = 2^0 = 2^1 \times 2^{-1} = 2^2 = 2^3 \times 2^{-1} = 2^4 = \dots$$

وعلى العموم : $1 = 2^n$ حيث n و $ص$ ، $2^+ = 2^+ \times 2^+ = 2^+$

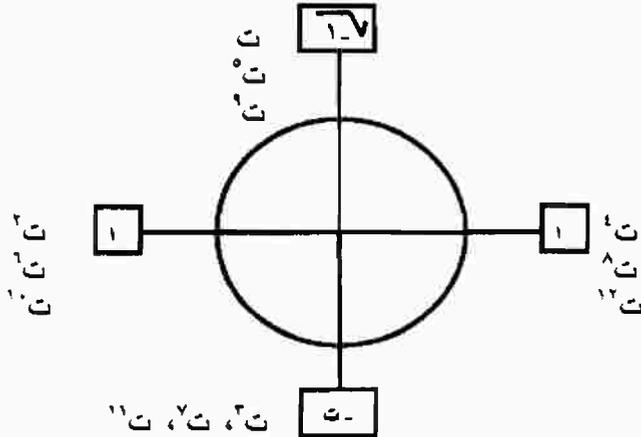
حيث $m = 1, 2, 3$ وهي بواقي قسمة أس (ت) على 4

$$\text{فمثلاً: } 2^0 = 2^4 = 2^8 = 2^{12} = \dots = 2^{4k} \text{ ، } 2^1 = 2^5 = 2^9 = 2^{13} = \dots = 2^{4k+1} \text{ ، } 2^2 = 2^6 = 2^{10} = 2^{14} = \dots = 2^{4k+2} \text{ ، } 2^3 = 2^7 = 2^{11} = 2^{15} = \dots = 2^{4k+3}$$

وبلاحظ أن : قوي ت الزوجية كميات حقيقية مثل 2^2 ، 2^4 ، 2^6

وقوي ت الفردية كميات تخيلية مثل 2^1 ، 2^3 ، 2^5

ومن المفيد تذكر هذا الرسم الذي يبين أن دورة ت رباعية



مثال: اكتب في أبسط صورة 2^1 ، 2^{11} ، 2^{21} ، 2^{31} ، 2^{41} ، 2^{51}

الحل

$$2^0 = 2^4 = 2^8 = 2^{12} = \dots = 2^{4k} \text{ ، } 2^1 = 2^5 = 2^9 = 2^{13} = \dots = 2^{4k+1}$$

$$2^2 = 2^6 = 2^{10} = 2^{14} = \dots = 2^{4k+2} \text{ ، } 2^3 = 2^7 = 2^{11} = 2^{15} = \dots = 2^{4k+3}$$

$$2^4 = 2^8 = 2^{12} = 2^{16} = \dots = 2^{4k} \text{ ، } 2^5 = 2^9 = 2^{13} = 2^{17} = \dots = 2^{4k+1}$$

مجموعة الأعداد التخيلية () :

مجموعة الأعداد التخيلية = { ع : ع = ص ت ، ص و ح ، ت = 1- } .

أي كل عدد بالصورة ص ت مثل $3\sqrt{-1}$ ، $5\sqrt{-1}$ ، $7\sqrt{-1}$ ، $3\sqrt{-1}$ ،

يسمى عدد تخيلي وينتمي إلى هذه المجموعة وأي عدد بالصورة $\sqrt{-1}$ حيث $\sqrt{-1}$ عدد حقيقي موجب

هو عدد تخيلي ويكتب بالصورة ص ت مثل :

$$3\sqrt{-1} = 3\sqrt{-1} \text{ ، } 7\sqrt{-1} = 7\sqrt{-1} \text{ ، } 5\sqrt{-1} = 5\sqrt{-1}$$

∴ العدد التخيلي هو الجذر التربيعي لعدد حقيقي سالب .

مجموعة الأعداد المركبة

يعرف العدد المركب بأنه العدد الذي يمكن وضعه على الصورة $ع = س + ت ص$ حيث $س$ ، $ص$ عدنان حقيقيان . وتسمى $س$ الجزء الحقيقي للعدد المركب $ع$ وتسمى $ص$ الجزء التخيلي للعدد المركب $ع$. وتسمى الصورة $س + ت ص$ بالصورة الجبرية للعدد المركب $ع$.

فإذا كان $ص = 0$ فإن العدد $ع = س$ يكون حقيقياً صرفاً

فإذا كان $س = 0$ فإن العدد $ع = ت ص$ يكون تخيلياً صرفاً

كما يمكن كتابة العدد المركب $ع$ على هيئة زوج مرتب يكون العنصر الأول فيه هو الجزء الحقيقي والعنصر التالي هو الجزء التخيلي للعدد المركب .

$ع = (س، ص)$ حيث $س، ص \in \mathbb{C}$

وتسمى الصورة $ع = (س، ص)$ الصورة الكارتيزية .

∴ العدد المركب هو الكمية التي تتركب من جزأين أحدهما حقيقي والآخر تخيلي .

ومجموعة الأعداد المركبة يمكن كتابتها بالصورة :-

$$\mathbb{C} = \{ ع : ع = س + ت ص ، س \in \mathbb{C} ، ص \in \mathbb{C} \}$$

مثال : حل المعادلة $س^2 - ٢س + ٢ = ٠$

الحل

∴ حل المعادلة $اس^2 + ب س + ج = ٠$ هو

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{\text{المميز}}}{٢} \quad \text{حيث المميز} = ب^2 - ٤ ا ج$$

$$\therefore ا = ١ ، ب = -٢ ، ج = ٢ ، \text{المميز} = (-٢)^2 - ٤(١)(٢) = ٤ - ٨ = -٤$$

∴ ∴ المميز > ٠ . ∴ يوجد حلان \in إلى مجموعة الأعداد المركبة وهما

$$س = \frac{-(-٢) \pm \sqrt{-٤}}{(١)^2} = \frac{٢ \pm ٢}{٢} = \frac{[ت \pm ١]^2}{٢} = ت \pm ١$$

∴ الحلول هي $\{ ت + ١ ، ت - ١ \}$

نظام الأعداد المركبة

■ تعريف تساوي عددين مركبين :-

- (١) يقال للعددين المركبين $s + ١t + ٢ص$ ، $s + ١ت + ٢ص$ أنهما متساويان إذا كان $s = ١س$ ، $s = ١ص$ أي جزأيهما الحقيقيان يتساويان وجزأيهما التخيليان يتساويان أيضاً.
- أي أنه إذا كان $١ع = ١س + ١ت + ١ص = (١س ، ١ص)$
- ، $٢ع = ٢س + ٢ت + ٢ص = (٢س ، ٢ص)$
- وكانت $١ع = ٢ع$ فإن $١س = ٢س$ ، $١ص = ٢ص$
- (٢) إذا كان $s + ١ت = ٠$ فإن $s = ٠$ ، $١ = ٠$
- بمعنى إذا انعدم مقدار تخيلي مركب فإن الجزء الحقيقي ينعدم على حده والجزء التخيلي ينعدم أيضاً على حده .

مثال: أوجد قيمة s ، $ص$ الحقيقة التي تحقق المعادلة :

$$(١ + ٢ت) س - (٢ + ٣ت) ص = ٤ - ١ت$$

الحل

نضع الطرف الأيمن على صورة عدد مركب

$$\therefore س + ٢س ت - ٢ص - ٣ص ت = ٤ - ١ت$$

$$(س - ٢ص) + (٢س ت - ٣ص ت) = ٤ - ١ت$$

$$\therefore س - ٢ص = ١ - (١) ، ٢س ت - ٣ص ت = ٤ - ١ت \quad (٢)$$

بضرب طرفي المعادلة (١) في (٢)

$$\therefore ٢س - ٤ص = ٢ - ١ت \quad \text{وبالجمع مع (٢)}$$

$$\underline{٢س - ٤ص = ٤ - ١ت}$$

$$\therefore س = ١١$$

$$ص = ٦ \quad \text{بالتعويض في (١)}$$

مثال: إذا كان $s + ١ت = ص + ١ + ب$ ، $١ + ب ت - أثبت أن : س = ١$ ، $ص = ب$ حيث ١ ، $ب$ أعداد حقيقية.

الحل

$$\therefore س + ١ت = ص + ١ + ب ت$$

∴ (س-أ) = ت (ب-ص) بتربيع الطرفين

$$\therefore (س-أ)^2 = (ب-ص)^2$$

$$\therefore (س-أ) + (ب-ص) = ٠$$

∴ لا يوجد عدنان حقيقيان مجموع مربعيهما = صفر

$$\therefore (س-أ) = ٠ \quad \therefore (ب-ص) = ٠$$

$$\therefore (س-أ) = ٠ \quad \therefore (ب-ص) = ٠$$

تعريف مجموع عددين مركبين :-

(أ) إذا كان العددين على الصورة العامة للأعداد المركبة :

$$(س١ + ت١ص١) + (س٢ + ت٢ص٢) = (س١ + س٢) + (ت١ + ت٢)ص$$

أي نجمع الجزأين الحقيقيين معاً والجزأين التخيليين معاً .

مثلاً :

$$\text{إذا كان } ١ع + ٢ت = ٣ع - ٤ت$$

$$\text{فإن : } ١ع + ٢ع = ٣ع \quad (٤+٢)ت = ٣ت - ٤ت$$

$$١ع - ٢ع = ٣ع - ٤ع \quad \text{المعكوس الجمعي للعدد المطروح}$$

$$= ٣ع - ٤ع + ٢ع = ٣ع - ٢ع$$

(ب) إذا كان العددين على صورة الزوج المرتب :

$$\text{إذا كان } (س١، ت١) = (س٢، ت٢) \quad \text{فإن :}$$

$$(س١ + س٢، ت١ + ت٢) = (س١، ت١) + (س٢، ت٢)$$

مثلاً :

$$(٠، ٠) = (٠، ٠) + (٠، ٠)$$

$$\text{فإن : } (٤، ٣) = (٠ + ٤، ٠ + ٣) = (٤، ٣)$$

$$(٦، ٣) = (٠ - ٦، ٠ - ٣) = (٦، ٣)$$

تعريف حاصل ضرب عددين مركبين :-

(أ) إذا كان العددين على صورة الزوج المرتب :

$$(س١ + ت١ص١) (س٢ + ت٢ص٢) = (س١س٢ - ت١ت٢) + (س١ت٢ + س٢ت١)ص$$

$$\text{مثلاً : } (٣، ٢) (١، ٤) = (٣ \times ١ - ٢ \times ٤) + (٣ \times ٤ + ١ \times ٢)ص = (٣ - ٨) + (١٢ + ٢)ص = (-٥) + ١٤ص$$

$$(١٠، ١١) = ١٢ + ٢٠ص + ٣ + ٨ص$$

(ب) إذا كان العددين على الصورة العامة للأعداد المركبة:

$$١ع . ١ع = (١س + ت ص) (١س + ت ص)$$

نتبع نفس قواعد حاصل ضرب المقادير الجبرية مع اختصار قوي ت

مثلاً : إذا كانت $١ع = ٢ + ٣ت$ ، $١ع = ٥ + ٤ت$

$$\text{فإن } ٢ + ٣ت$$

$$\frac{٤ + ٥ت}{١٠ + ١٥ت}$$

$$\frac{٨ + ١٢ت^٢}{١٠ + ٢٣ت + ٢٣}$$

$$١٠ + ٢٣ت + ٢٣ = (١٠)١٢ + ٢٣ + ٢٣ت$$

تمارين (٦)

▪ اختصر إلى أبسط صورة :-

(١) $(١٦\sqrt{٥} - ٥) + (٤\sqrt{٥} + ٥)$

(٢) $(٣٦\sqrt{٣} + ٣) (٢٥\sqrt{٣} - ٢)$

(٣) $(٢ - ٣ت) (٢ - ٣ت)^٢$

(٤) أجمع $ت + ٢ت + ٣ت$ إلى ٢١ حداً

▪ أوجد قيمة كل من س ، ص الحقيقية

(٥) $٩ = (١ - ت)٣ + س (٢ + ١)$

(٦) $س + ص ت = (١ + ت)^٢$

▪ أوجد الناتج على صورة عدد مركب

(٧) أوجد العدد المركب الذي يساوي $(١ + ت)^٤ - (١ - ت)^٤$

(٨) إذا كان $ص + ٩ = ٢س (١ + ت) - (٣س - ٢)ت = ٠$ حيث $س ، ص$ ح فأوجد

قيمة كل من $س ، ص$

(٩) إذا كان $١ع = \frac{٣\sqrt{٣}}{٤} + \frac{١}{٤}ت$ ، $١ع = \frac{٣\sqrt{٣}}{٤} + \frac{١}{٤}ت$ فأثبت أن : $١ع = ١ع$

(١٠) حل المعادلة :

$$س^٢ = ٥ + ٠$$

خصائص عملية جمع الأعداد المركبة

(١) عملية الجمع على الأعداد المركبة عملية تبديلية فإين كان :

$$١ع + ١س + ١ت = ١ع + ١س = ١ع + ١س + ١ت \text{ فإين:}$$

$$١ع + ١ع = (١س + ١ت) + (١س + ١ت) = (١س + ١ت + ١س) + (١س + ١ت + ١س) =$$

$$= (١س + ١س + ١ت + ١ت) + (١س + ١س + ١ت + ١ت) =$$

$$١ع + ١ع =$$

(٢) عملية جمع الأعداد المركبة تجميعية (تجميعية):

$$١ع + ١س + ١ت = ١ع + ١س + ١ت = ١ع + ١س + ١ت \text{ فإين:}$$

$$١ع + (١ع + ١ع) = (١ع + ١ع) + ١ع$$

(٣) العدد صفر هو المحايد الجمعي للأعداد المركبة :

$$\text{صفر} + ع = ع = ع + \text{صفر}$$

(٤) لكل عدد مركب ع معكوس جمعي (-ع) بحيث ع + (-ع) = صفر

$$\text{فإذا كان } ع = س + ت \text{ ص فإين } -ع = -(س + ت) = -س - ت \text{ ص}$$

خصائص عملية ضرب الأعداد المركبة

(١) عملية ضرب الأعداد المركبة إبدالية:

$$١ع = ١ع = ١ع \text{ لكل } ١ع, ١ع \text{ } \supset \text{ ك}$$

(٢) عملية الضرب تجميعية (تجميعية):

$$(١ع, ١ع) = ١ع = (١ع, ١ع) = ١ع \text{ لكل } ١ع, ١ع, ١ع \text{ } \supset \text{ ك}$$

(٣) وجود العنصر المحايد:

$$١ \times ع = ع = ع \times ١ \text{ لكل } ع \text{ } \supset \text{ ك}$$

(٤) إذا فرض أن ع = س + ت ص فإينه يوجد معكوس ضربي يساوي

$$\frac{ص}{س + ص} - \frac{س}{س + ص}$$

$$\text{ونرمز له بالرمز } ع^{-١} \text{، حيث } ع^{-١} = \left(\frac{١}{ع}\right) \text{ لكل } ع \text{ } \supset \text{ ك}$$

(٥) عملية الضرب تتوزع على عملية الجمع في ك

$$١ع = (١ع + ١ع) = ١ع + ١ع \text{ لكل } ١ع, ١ع, ١ع \text{ } \supset \text{ ك}$$

ملاحظة:

$$\text{المحايد الضربي معكوسة نفسه } ع = (٠,١) \text{ فإين } ع^{-١} = \frac{١}{٠,١} = \frac{١}{٠,١} = (٠,١)$$

قسمة عدد مركب على آخر:

$$(ع، ا) = ١ع، (ب، ا) = ٢ع، (ج، ا) = ٣ع،$$

$$\therefore (ع، ا) = \frac{١ع}{٢ع}$$

$$(ب، ا) = \left(\frac{ع-}{ع+ج}، \frac{ج}{ع+ج} \right)$$

$$= \left(\frac{ب-ج+ا}{ع+ج}، \frac{ا+ج+ب}{ع+ج} \right)$$

مثال:

$$\frac{١-}{٢٥}، \frac{١٨}{٢٥} = \left(\frac{٣ \times ٣ - ٤ \times ٢}{٩ + ١٦}، \frac{٣ \times ٢ + ٤ \times ٣}{٩ + ١٦} \right) = \frac{(٢، ٣)}{(٣، ٤)}$$

مثال: أوجد قيمة $\sqrt{١٢-٥}$

الحل

نفرض $س + ت = \sqrt{١٢-٥}$ بتربيع الطرفين

$$\therefore (س^٢ - ت^٢) + ٢ست = ١٢ - ٥$$

$$\therefore س^٢ - ت^٢ = ٧، ٢ست = ٥$$

$$\therefore س = ٣، ت = ١$$

$$\text{لكن } (س^٢ + ت^٢) = ١٣ = (١٢) + (٥)$$

$$\therefore س = ٣، ت = ١ \quad \therefore \sqrt{١٢-٥} = ٣ \pm ١$$

$$\therefore \sqrt{١٢-٥} = ٣ \pm ١$$

مثال: إذا كان $ع$ عدداً مركباً في المعادلة $(٢، ١) + ع(٢، ١) = (٦، ٤)$

الحل

$$\therefore \frac{١ \times ٤ - ١ \times ٦}{(١) + (١)}، \frac{١ \times ٦ + ١ \times ٤}{(١) + (١)} = (٢، ١) + ع(٢، ١)$$

$$(١، ٥) = \left(\frac{٢}{٢}، \frac{١٠}{٢} \right) =$$

$$\therefore (٢، ٤) = (٢، ١) - (١، ٥) = ع(٢، ١)$$

$$(١، ٢) = \frac{٨-٣}{٥}، \frac{٦+٤}{٥} = \frac{(٣، ٤)}{(٢، ١)} = ع$$

مثال:

إذا كانت $س = (٢، ١)$ ، $ص = (٤، ٣)$ ، $ع = (١، ٧)$ حيث $س$ ، $ص$ ، $ع$ أعداد مركبة أثبت أن :

$$(٠، ٢، ٤) = \frac{٥}{س} - \frac{٢٠}{ع} + \frac{١}{ص}$$

الحل

$$\text{الطرف الأيمن: } ١(س^{-١}) + ٢٠(ع^{-١}) - ٥(ص^{-١})$$

$$\therefore \left(\frac{١}{٥}، \frac{١}{٥}\right) - \left(\frac{٧}{٥٠}، \frac{٣}{٥٠}\right) + \left(\frac{٢}{٥٠}، \frac{١}{٥٠}\right)$$

$$\left(\frac{٤ \times ٥}{٢٥}، \frac{١٥}{٢٥}\right) - \left(\frac{٢٠}{٥٠}، \frac{١٤}{٥٠}\right) + \left(\frac{٢}{٥٠}، \frac{١}{٥٠}\right)$$

$$\left(\frac{٤}{٥}، \frac{٣}{٥}\right) - \left(\frac{٢}{٥}، \frac{١٤}{٥}\right) + \left(\frac{٢}{٥}، \frac{١}{٥}\right)$$

$$(٠، ٢، ٤) = (صفر، \frac{١٢}{٥}) = \left(\frac{٤}{٥}، \frac{٣}{٥}\right) - \left(\frac{٤}{٥}، \frac{١٥}{٥}\right)$$

مثال: إذا كان $ع = س + ص$ ت حيث $س \neq ٠$ ، $ص \neq ٠$ ، فثبت أن :

$$ع^{-١} = \frac{ص ت}{س + ص} - \frac{س}{س + ص}$$

الحل

الفكرة هي إثبات أن $ع^{-١} = ع^{-١} \times ع = ع^{-١} \times ١ = ١$ (المحايد الضربي)

$$\therefore ع^{-١} \times ع = ١ \Rightarrow \left(\frac{ص ت}{س + ص} - \frac{س}{س + ص}\right) (س + ص) = ١$$

$$= \left(\frac{ص ت}{س + ص} + \frac{ص ت - س}{س + ص}\right) = \left(\frac{ص ت}{س + ص} + \frac{ص ت - س}{س + ص}\right) =$$

$$= \frac{ص ت + ص ت - س}{س + ص} = \frac{٢ص ت - س}{س + ص} = ١ \text{ (١)}$$

$$\therefore ع^{-١} \times ع = ١ \text{ (٢)}$$

∴ الضرب عملية إبدالية

من (١) ، (٢) يثبت المطلوب

مثال: إذا كان الزوج المرتب $(١، ب)$ يعبر عن $١ + ب$ ت وكان $ع = (٢، \sqrt{٣})$

$$ع = (٢، \sqrt{٣}) \text{ فأوجد كلا من } ١ + ع ، ٢ + ع ، ٣ + ع$$

الحل

$$(0, 5) = (\sqrt[3]{7}, 1, 2) + (\sqrt[3]{7}, 0, 2) = 1, 6 + 1, 6$$

$$(\sqrt[3]{7}, 1, 2)(\sqrt[3]{7}, 0, 2) = 1, 6 \cdot 1, 6$$

$$1, 6 - 1, 6 = 0, 1 \text{ ص } 1, 6 \text{ ص } 1, 6 \text{ ص } 1, 6 + 1, 6 \text{ ص } 1, 6 \text{ ص } 1, 6 =$$

$$(\sqrt[3]{7}, 9) = \sqrt[3]{7} \cdot 2 - \sqrt[3]{7} \cdot 3, 3 + 6 =$$

العدد المرافق لعدد مركب

إذا كان العدد المركب $E = S + T \text{ ص } - S$ فإن العدد المركب $E = S - T \text{ ص } S$ يسمى

مرافق العدد E

• لاحظ أن العدد المركب E ، مرافقه \bar{E} لا يختلفان إلا في إشارة الجزء التخيلي منهما.

مثلاً: العدد $3 + 4T$ مرافقه $3 - 4T$ ، مرافق العدد 3 هو نفسه

∴ العددين المركبان المترافقان:

(أ) جزأهما الحقيقيان متساويان.

(ب) جزأهما التخيليين مختلفان في الإشارة فقط.

خواص العددين المترافقان:

(1) مجموع عددين مترافقين هو عدد حقيقي قيمته ضعف الجزء الحقيقي لأيهما.

فإذا كان $E = S + T \text{ ص } - S$ فإن $\bar{E} = S - T \text{ ص } S$

∴ $E + \bar{E} = S + T \text{ ص } - S + S - T \text{ ص } S = 2S = \text{عدد حقيقي}$.

(2) حاصل ضرب أي عددين مركبين مترافقين = عدد حقيقي

لأن $E \times \bar{E} = (S + T \text{ ص } - S)(S - T \text{ ص } S) = S^2 - T^2 \text{ ص } 2ST \text{ ص } S^2 = \text{عدد حقيقي}$

قيمته مربع الجزء الحقيقي + مربع الجزء التخيلي.

(3) الفرق بين العددين المركبين المترافقين عدد تخيلي.

(4) المرافق لمجموع عددين مركبين = مجموع مرافقيهما

أي $\overline{E + \bar{E}} = \bar{E} + E$

(5) المرافق لحاصل ضرب عددين مركبين يساوي حاصل ضرب مرافقيهما

أي أن: $\overline{E \times \bar{E}} = \bar{E} \times E$

(6) المرافق لخارج قسمة عددين مركبين يساوي خارج قسمة مرافقيهما

أي: $\overline{E \div \bar{E}} = \bar{E} \div E$

ملاحظة:

$$ع = (ع) ، \quad \frac{1}{ع} = \left(\frac{1}{ع}\right)$$

مثال: إذا كانت $ع^{-1} = (1, 3)$ فإن $ع = \dots$

الحل

$$\begin{aligned} \therefore ع^{-1} = (1, 3) & \quad \therefore ع = (ع^{-1})^{-1} \\ & \quad \left(\frac{1}{1}, \frac{3}{3}\right) = \end{aligned}$$

مثال: إذا كان $(س، ص)$ عدداً مركباً وكان $(س، ص) = \frac{(2, 3)}{(2, 3)}$ فإن $س = \dots$ ، $ص = \dots$

الحل

$$\therefore (س، ص) = \frac{(2, 3)}{(2, 3)} = \left(\frac{2-2}{13}, \frac{3-3}{13}\right)$$

$$\therefore (س، ص) = \left(\frac{0}{13}, \frac{0}{13}\right)$$

$$\therefore س = \frac{0}{13} ، \quad ص = \frac{0}{13}$$

مثال: أوجد $\sqrt{\frac{ت+7}{ت+1}}$

الحل

نفرض المقدار $س + ت = ص$ ثم بالتربيع للطرفين

$$\therefore س + ت = 4 + 3 = \frac{ت-1}{ت-1} \times \frac{ت+7}{ت+1}$$

$$\therefore س - ت = 3 - 2 = 1 \quad \text{--- (1)}$$

$$س + ت = 4 + 3 = 7 = 2س + 3ص = 2س + 3ص = 7 \quad \text{--- (2)}$$

$$\therefore س = 1 \pm 2 ، \quad ص = 2 \pm 1$$

مثال: أوجد قيمة $س + ت$ إذا كان $(س، ت) = \frac{2-3}{2+3}$

الحل

$$\frac{2-3}{2+3} = \frac{2-3}{2-3} \times \frac{2-3}{2+3} = \frac{12-5}{13}$$

$$\therefore س + ت = \frac{12}{13} - \frac{5}{13} = \frac{7}{13}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{5}{13} ، \text{ص} = \frac{12}{13}$$

$$\therefore \text{س}^2 + \text{ص}^2 = \frac{25}{169} + \frac{144}{169} = 1$$

مثال: حل المعادلة $(2,1) + ع = (2,3) = (2,4)$ حيث ع عدد مركب

الحل

$$(2,1) + ع = (2,3) - (2,4) = ع$$

$$\therefore ع = \left(\frac{2-2}{0} ، \frac{1-4}{0} \right) = \left(\frac{0}{0} ، \frac{-3}{0} \right) = \frac{(0,-3)}{(2,1)}$$

مثال: أوجد قيمتي (س، ص) الحقيقيتين:

$$\frac{ت+1}{ت-2} = \frac{(ت+1)(ت+2)}{ت-3}$$

الحل

بضرب الطرفين في $(ت-3)$

$$\therefore (ت+1)(ت-3) = (ت+2)(ت-2)$$

$$\therefore (ت+1)(ت-3) = (ت+2)(ت-2)$$

$$\frac{ت^2 - 2ت - 3}{ت+3} = \frac{ت^2 - 4}{ت+3}$$

$$\therefore \frac{ت^2 - 2ت - 3}{ت+3} = \frac{ت^2 - 4}{ت+3} \Rightarrow \frac{ت^2 - 2ت - 3}{ت+3} \times \frac{ت+3}{ت+3} = \frac{ت^2 - 4}{ت+3} \times \frac{ت+3}{ت+3}$$

$$ت+2 = \frac{(ت+2)10}{10} = \frac{ت+20}{10}$$

$$\therefore \text{س} = 2 ، \text{ص} = 1 ، \text{س} = 1 ، \text{ص} = 1$$

مثال: إذا كان $(أ+ب ت) (أ+ت) = 5 - ت$ حيث $ت = \sqrt{1}$ فأوجد القيمتين لكل من أ، ب

الحل

$$\therefore (أ+ب ت) (أ+ت) = 5 - ت$$

$$\therefore (أ+ب ت) (أ+ت) = 5 - ت \Rightarrow (أ+ب ت) (أ+ت) = 5 - ت$$

$$\therefore (أ+ب ت) (أ+ت) = 5 - ت$$

$$\therefore أ - ب = 5 \quad (1)$$

$$\therefore أ + ب = 1 \quad (2)$$

$$\therefore أ = 3 ، ب = 2$$

$$أ = 1 ، ب = 2$$

مثال: إذا كان (٢-) أحد جذري المعادلة $x^2 + 4x + 17 = 26$ ، فأوجد الجذرين الآخرين وأثبت أنهما مترافقان .

الحل

$$\begin{array}{r} \begin{array}{l} 2 + x \\ \hline 13 + x^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{من } 4 + x^2 \text{ من } 17 + x + 26 \\ \hline \text{من } 3 + x^2 \text{ من } \\ \hline \text{من } 17 + x^2 \text{ من } \\ \hline \text{من } 4 + x^2 \text{ من } \\ \hline 26 + 13 \\ \hline 26 + 13 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$\therefore (2 + x)(x^2 + 2 + 13) = 0$ ، إما $x = 2$ -

أو $x^2 + 2 + 13 = 0$

$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ حيث $a = 1$ ، $b = 2$ ، $c = 13$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times 13}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 52}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-48}}{2} = \frac{-2 \pm 4\sqrt{3}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{3}$$

\therefore الجذران $-1 + 2\sqrt{3}$ ، $-1 - 2\sqrt{3}$ مترافقان

مثال: إذا كان $l = \frac{6+8}{t+3}$ ، $m = \frac{14-12}{t-5}$ أثبت أن l ، m مترافقان

ثم أصب قيمة $\frac{l-m}{m-l}$

الحل

$$l = \frac{6+8}{t+3} = \frac{(t-3)(t+8)}{(t-3)(t+3)}$$

$$m = \frac{14-12}{t-5} = \frac{(t+5)(14-12)}{(t+5)(t-5)}$$

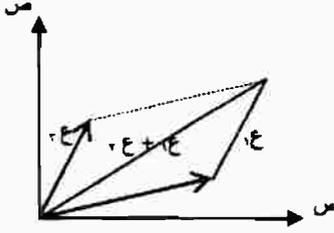
$l = m + 6$ ، $l = m + 10$

$$\therefore \frac{l-m}{m-l} = \frac{(m+6-m)(m-l)}{(m-l)} = \frac{6}{m-l}$$

$= \frac{6}{10-26} = -\frac{3}{10}$

المعنى الهندسي لجمع وطرح الأعداد المركبة

(١) الجمع:-



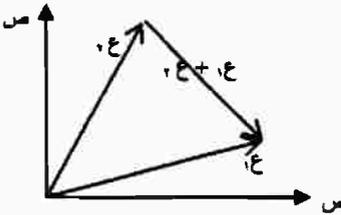
$$\text{مثلا: } 1 + 2j = (2, 4)$$

$$2 + 4j = (4, 2)$$

$$\therefore (2, 4) + (4, 2) = 1 + 2j + 2 + 4j$$

$$= (6, 6)$$

(٢) الطرح:



$$\text{مثلا: } 1 + 2j = (2, 4)$$

$$2 + 4j = (5, 3)$$

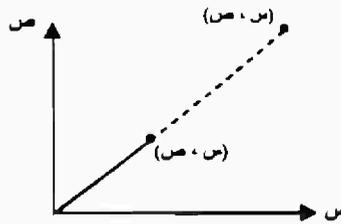
$$\therefore (2, 4) - (2, 4) = 1 + 2j - 2 - 4j$$

$$= (-1, 2)$$

$$= (3, 7)$$

المعنى الهندسي لضرب عددين مركبين

(١) ضرب عدد حقيقي ك في عدد مركب ع = ص + ت ص



(أ) إذا كان $k < 0$ (موجب)

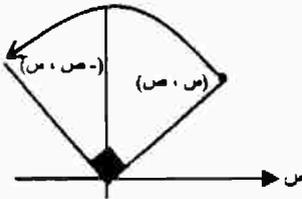
(٢) عند ضرب ت في عدد مركب ع = ص + ت ص

$$ت (ص + ع) = ت ص + ت ع = ص - ع + ت ص$$

أي تتحول النقطة (ص، ع) إلى النقطة (-ص، ع)

وهو دوران موجب بزاوية 90° في الإتجاه الموجب

حول نقطة الأصل.



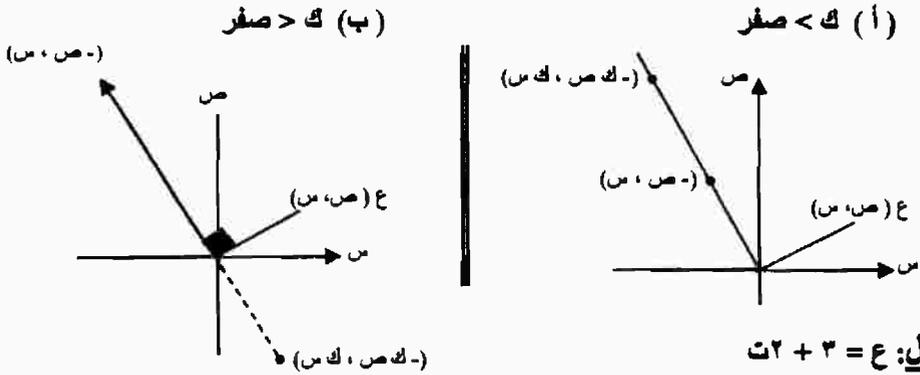
$$\text{مثلا: } ع = 1 + 2j \quad \therefore ت = 2 + 1j$$

(٣) ضرب ك ت في العدد المركب ع = س + ت ص

$$ك ت (س + ت ص) = -ك ص + ت ك س$$

∴ النقطة (س، ص) يحدث لها دوران موجب حول نقطة الأصل بزاوية مقدارها ٩٠°

فتصبح (- ص، س) (فتنتج النقطة (- ك ص، ك س).



مثال: ع = ٣ + ٢ت

∴ ٣ ت ع ----- ؟

$$\therefore (٢، ٣) \xrightarrow{\text{دوران بزاوية } 90^\circ} (٣، -٢) \xrightarrow{\text{تكبير بمعامل } ٣} (-٦، ٩)$$

(٤) ضرب عددين مركبين:-

$$١ع = ١س + ١ت ص ، ٢ع = ٢س + ٢ت ص$$

∴ التفسير الهندسي لحاصل ضرب $٢ع \times ١ع$ يتبع ما يلي:-

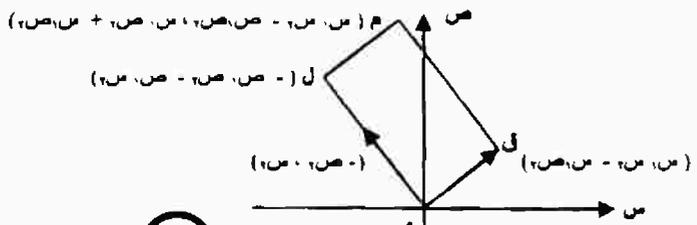
(أ) نعين النقطة التي تمثل حاصل ضرب س_١ في (س_٢ + ت_٢ص) وهي النقطة (س_١س_٢ + س_١ت_٢ص)

(ب) دوران (س_١س_٢ + س_١ت_٢ص) بزاوية قدرها ٩٠° ضد حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل فتنتج النقطة (- س_١ت_٢ص، س_١س_٢) التي هي عبارة عن حاصل ضرب ت_٢ في (س_١ + ت_١ص) والتي

عبارة هي عن حاصل ضرب ت_٢ في (س_١ + ت_١ص).

(ج) تعيين النقطة (- س_١ت_٢ص، س_١س_٢) الناتجة من حاصل ضرب (س_١س_٢ + س_١ت_٢ص) في س_١

(د) توجد النقطة التي تمثل مجموعة الصورتين (س_١س_٢ + س_١ت_٢ص، - س_١ت_٢ص، س_١س_٢)



تمارين (٧)

■ أوجد قيم س، ص الحقيقية في كل مما يأتي :

$$(1) (3 + 4t)(t - 5) = s + t$$

$$(2) (2 - 3t)s + (t^2 + 5) = 9 - t$$

$$(3) (2 - t)^2 = (t^2 + 1)(3t - s)$$

$$(4) \frac{7}{2} = \frac{s^2 + 3t}{t - 1} + \frac{s + t}{t + 1}$$

$$(5) \frac{t - 3}{(t^2 + 1)} + \frac{1 - t^3}{(t + 3)} = \frac{s^2 + s}{s - t}$$

$$(6) \frac{s + t}{s - t} = \frac{t + 2}{t^2 + 1} + \frac{t + 1}{t + 2}$$

$$(7) \text{ إذا كان } s + t = \frac{a + b}{a - b}$$

اثبت أن $s^2 + t^2 = 1$ مهما كانت قيمة كل من أ، ب

$$(8) \text{ إذا كان } a + b = \frac{t + 2}{t - 1} \text{ حيث } a, b \text{ حقيقيان}$$

$$\text{فأثبت أن } 7 = (a^2 + b^2)^2$$

$$(9) \text{ إذا كان } (s + t)^2 = \frac{10(t - 1)}{t^2 + 1} + 21 = 0$$

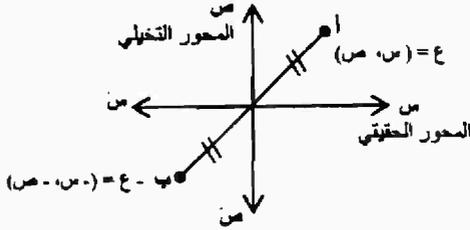
فأوجد قيمة كل من س، ص

$$(10) \text{ إذا كان } l + n + t \text{ أحد جذري المعادلة } s^2 + b + s + j = 0$$

حيث ل، ن، أ، ب، ج أعداد حقيقية فأثبت أن $l^2 = a^2 + b^2 + l + j$

التمثيل البياني للأعداد المركبة

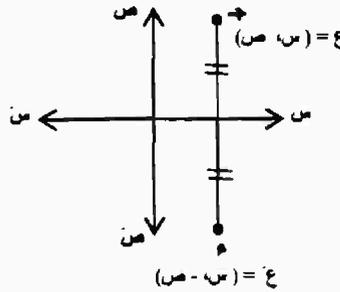
العدد المركب $ع = س + ص ت$ نمثله بيانياً في نظام إحداثي متعامد (شكل أراجاند) بالنقطة (س، ص) حيث س تمثل الأعداد الحقيقية ، ص تمثل الأعداد التخيلية البحتة .



(١) تمثيل العدد ومعكوسه الجمعي :

أ ، ب تمثلان ع ، - ع

وهما متماثلان بالنسبة لنقطة الأصل.



(٢) تمثيل العدد المرافق له:

ج ، د تمثلان ع ، ع̄ وهما متماثلان

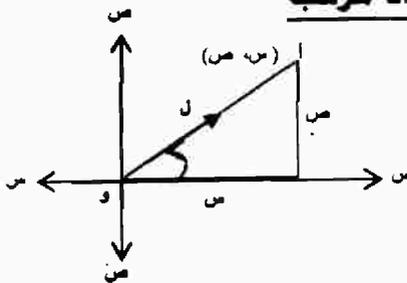
بالنسبة للمحور س ص

ومما سبق نستنتج أن:

(١) العددان المركبان المترافقان يمثلان بيانياً بنقطتين متماثلتان بالنسبة للمحور س و س̄ .

(٢) العدد المركب ومعكوسه لجمعي يمثلان بطرفي قطعة مستقيمة تكون نقطة الأصل في منتصفها.

المقياس والسعة لعدد مركب



أي مركب $ع = س + ص ت$

تمثله في الشكل المقابل نقطة أ حيث $ل = |ع|$

(١) مقياس العدد (ع) هو: $ع = ل = \sqrt{س^2 + ص^2}$

وهو عدد حقيقي موجب.

(٢) سعة العدد (ع) قياس الزاوية التي يصنعها و أ

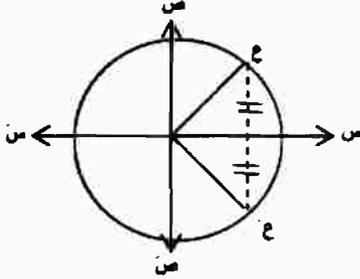
مع الاتجاه الموجب لمحور السينات (وهو عدد حقيقي)

والسعة الأساسية للعدد (ع) = هـ حيث $هـ \in [0, 2\pi]$

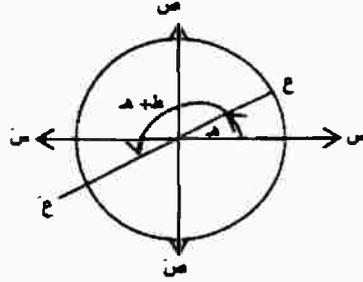
$$(٣) \text{ جتا ه} = \frac{\text{ص}}{\text{ل}} \leftarrow \text{س} = \text{ل جتا ه} , \text{ جا ه} = \frac{\text{ص}}{\text{ل}} \leftarrow \text{ص} = \text{ل جا ه}$$

∴ الصورة المثلثية (القطبية) للعدد ع هي

$$\text{ع} = \text{ل} (\text{جتا ه} + \text{ت جا ه}) \text{ حيث ل المقياس ، ه السعة}$$



العلاقة بين سعة ع ، سعة (ع)



العلاقة بين سعة ع ، سعة (- ع)

لاحظ أن:

إذا كان سعة العدد ع = ه فإن:

$$(أ) \text{ سعة المعكوس الجمعي } (-ع) = ط + ه$$

$$\therefore \text{ع} = \text{ل} [\text{جتا } (ط + ه) + \text{ت جا } (ط + ه)]$$

$$(ب) \text{ سعة المرافق له } ع = ٢ط - ه$$

$$\therefore \text{ع} = \text{ل} [\text{جتا } (٢ط - ه) + \text{ت جا } (٢ط - ه)]$$

كيف تحسب القيمة الأساسية لسعة ع = ص + ت من ؟

$$(١) \text{ نحسب } |ع| = \text{ل} = \sqrt{\text{ص}^2 + \text{ط}^2}$$

(٢) نحسب قياس الزاوية الحادة وليكن (ي) من:

$$\text{جتا ي} = \frac{\text{ص}}{\text{ل}} \quad \text{أو} \quad \text{جا ي} = \frac{\text{ط}}{\text{ل}} \quad \text{ونصرف النظر مؤقتاً عن اشارات ص ، ط عند حساب ي}$$

(٣) نعين القيمة الأساسية لسعة ي بناء علي إشارتي ص ، ط طبقاً للجدول التالي:-

السعة الأساسية	المربع الذي تقع فيه ع	إشارة ص	إشارة ط
ه = ي	الأول	+	+
ه - ١٨٠ = ه	الثاني	+	-
ه + ١٨٠ = ه	الثالث	-	-
ه - ٣٦٠ = ه	الرابع	-	+

مثال: أوجد المقياس والسعة لكل من الأعداد المركبة الآتية ثم أكتب كلا منها على الصورة

[٢] $1 + i$ ت

[١] $1 + \sqrt{3}i$ ت

[٤] $-3 - 4i$ ت

[٣] $-1 - i$ ت

الحل

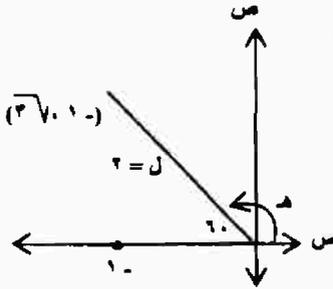
[١] العدد تمثله النقطة $(\sqrt{3}, 1)$ وهي تقع في الربع الثاني

$$r = \sqrt{3+1} = |1.6| = 1.6$$

$$\cos \theta = \frac{1}{1.6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \theta = 120^\circ = 60^\circ - 180^\circ = -120^\circ$$

$$\therefore r = 1.6 (\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$$

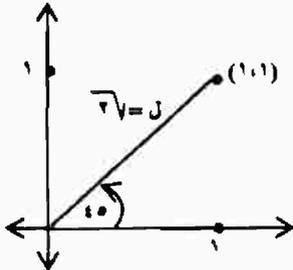


[٢] العدد تمثله النقطة $(1, 1)$ وهي تقع في الربع الأول

$$r = \sqrt{1+1} = |1.41| = 1.41$$

$$\cos \theta = \frac{1}{1.41} = \frac{1}{\sqrt{2}} \therefore \theta = 45^\circ$$

$$\therefore r = 1.41 (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$$



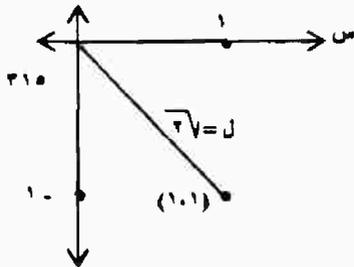
[٣] العدد تمثله النقطة $(-1, 1)$ وهي تقع في الربع الرابع

$$r = \sqrt{1+1} = |1.41| = 1.41$$

$$\cos \theta = \frac{-1}{1.41} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \theta = 315^\circ = 45^\circ - 360^\circ$$

$$\therefore r = 1.41 (\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4})$$



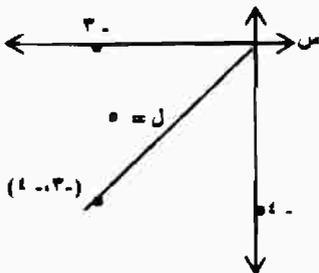
[٤] العدد تمثله النقطة $(-3, -4)$ وهي تقع في الربع الثالث

$$r = \sqrt{9+16} = |5| = 5$$

$$\cos \theta = \frac{-3}{5}$$

$$\therefore \theta = 223^\circ = 180^\circ + 43^\circ$$

$$\therefore r = 5 (\cos 223^\circ + i \sin 223^\circ)$$



مثال: اكتب الصورة الجبرية لكل من الأعداد المركبة التالية:-

(١) ع: ١، مقياسه ٢، سعته $\frac{\pi}{4}$ (٢) ع: ٢، مقياسه $2\sqrt{3}$ وسعته $\frac{\pi}{3}$ ط

(٢) ع: ٢، مقياسه ٥ وسعته $\frac{\pi}{6}$ ط (٤) ع: ٧، مقياسه ٧ وسعته $\frac{\pi}{3}$

الحل

(١) ع: ١ = $(\text{جتا } \frac{\pi}{4} + \text{ت جا } \frac{\pi}{4})^2 = 2 = (\frac{1}{\sqrt{2}} \times \text{ت} + \frac{1}{\sqrt{2}})^2$ ت

(٢) ع: ٢ = $(\text{جتا } \frac{\pi}{3} + \text{ت جا } \frac{\pi}{3})^2 = 2\sqrt{3}$

= $(\text{جتا } 120 + \text{ت جا } 120) \sqrt{3} = (\frac{2}{3} \times \text{ت} + \frac{1}{3}) \sqrt{3}$ ت

(٣) ع: ٥ = $(\text{جتا } \frac{\pi}{6} + \text{ت جا } \frac{\pi}{6})^2 = 5 = (\frac{1}{2} \times \text{ت} + \frac{1}{2})^2$ ت

= $(\frac{1}{2} \times \text{ت} - \frac{1}{2})^2 = 5 = (\frac{1}{2} \times \text{ت} - \frac{1}{2})^2$ ت

(٤) ع: ٧ = $(\text{جتا } \frac{\pi}{3} + \text{ت جا } \frac{\pi}{3})^2 = 7 = (1 \times \text{ت} + 1)^2$ ت

مثال: أوجد الصورة المثلثية لكل من:

(١) العدد ٢ (٢) العدد ٢ ت

الحل

(١) العدد ٢ تمثله النقطة (٢، ٥)

∴ ل = ٢ ، هـ = ٥

∴ ع = $(\text{جتا } 5 + \text{ت جا } 5)$

(٢) العدد ٢ تمثله النقطة (٥، ٢)

∴ ل = ٥ ، هـ = ٢

∴ ع = $(\text{جتا } 90 + \text{ت جا } 90)$

مثال:

ضع العدد $\frac{5-1}{2+3}$ على الصورة الجبرية $s + t$ ثم على الصورة المثلثية

الحل

$$t - 1 = \frac{13-13}{13} = \frac{3-2}{3-2} \times \frac{5-1}{2+3} = e$$

$$\therefore l = \sqrt[3]{s} + \sqrt[3]{t} = \sqrt[3]{1+1} = \sqrt[3]{2} \quad \text{--- (1)}$$

والعدد e تمثله النقطة $(-1, -1)$ وهي في الربع الثالث

$$\therefore \text{طا ه} = \frac{ص}{س} = 1 \quad \therefore \text{ه} = 45 + 180 = 225 \quad \text{--- (2)}$$

من (1)، (2)

\therefore الصورة القطبية هي $e = \sqrt[3]{2}$ (جتا $225 +$ ت جا 225)

مثال: إذا كان $e = l$ (جتا $ه +$ ت جا $ه$)

فاكتب على الصورة القطبية كلا من: e ، e ، $\frac{1}{e}$ ، $\frac{1}{e}$

الحل

$$e = l = \text{جتا (ط + ه) + ت جا (ط + ه)}$$

$$e = l = \text{جتا (- ه) + ت جا (- ه)}$$

$$\frac{\text{جتا ه - ت جا ه}}{\text{جتا ه + ت جا ه}} \times \frac{1}{l} = \frac{1}{l(\text{جتا ه + ت جا ه})} = \frac{1}{e}$$

$$\frac{1}{l} = \text{جتا (- ه) + ت جا (- ه)}$$

$$\frac{\text{جتا ه + ت جا ه}}{\text{جتا ه + ت جا ه}} \times \frac{1}{l} = \frac{1}{l(\text{جتا ه + ت جا ه})} = \frac{1}{e}$$

$$\frac{1}{l} = \text{جتا ه + ت جا ه}$$

مثال: ضع على الصورة القطبية كلا من :-

$$(2) \text{ جا ه + ت جتا ه}$$

$$(1) \text{ جتا ه - ت جا ه}$$

$$(4) \text{ - جا ه - ت جتا ه}$$

$$(3) \text{ - جا ه + ت جتا ه}$$

الحل

- (١) جتا هـ - ت جا هـ = جتا (- هـ) + ت جا (- هـ)
- (٢) جا هـ + ت جتا هـ = جتا ($هـ - \frac{ط}{٤}$) + ت جا ($هـ - \frac{ط}{٤}$)
- (٣) - جا هـ + ت جتا هـ = جتا ($هـ + \frac{ط}{٤}$) + ت جا ($هـ + \frac{ط}{٤}$)
- (٤) - جا هـ - ت جتا هـ = جتا ($هـ - \frac{ط}{٤}$) + ت جا ($هـ - \frac{ط}{٤}$)

ملاحظة:

إذا كان $ع = ل$ (جتا هـ + ت جا هـ)

- ع- (المعكوس الجمعي) الصورة القطبية ل [جتا (ط + هـ) + ت جا (ط + هـ)]
ع (المرافق) ← ل [جتا (- هـ) + ت جا (- هـ)]
 $\frac{1}{ع}$ (المعكوس الضربي) ← $\frac{1}{ل}$ [جتا (- هـ) + ت جا (- هـ)]
 $\frac{1}{ع}$ ← (جتا هـ + ت جا هـ)

تمارين (٨)

■ أوجد المقياس والسعة لكل من الأعداد الآتية ثم عبر عن كل منها بالصورة المثلثية:-

$$\begin{array}{ll} (١) \quad ١- + ت & (٢) \quad ٣\sqrt{-} ت \\ (٣) \quad ٢- + ٢ ت & (٤) \quad \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢} ت \\ (٥) \quad \sqrt{٢}٣ + \sqrt{٢}٣ ت & (٦) \quad ٢ ت \end{array}$$

■ أكتب الصورة الجبرية لكل من الأعداد المركبة الآتية:-

$$\begin{array}{l} (٧) \quad \text{العدد الذي مقياسه } \sqrt{٣}٢ \text{ وسعته } ١٢٠ \\ (٨) \quad \text{العدد الذي مقياسه } \sqrt{٢}٧ \text{ وسعته } \frac{٥}{٤} ط \\ (٩) \quad \text{العدد الذي مقياسه } \sqrt{٣}٧ \text{ وسعته } \frac{١١}{٤} ط \\ (١٠) \quad \text{العدد الذي مقياسه } \sqrt{٦}٧ \text{ وسعته } (-\frac{٥}{٦} ط) \end{array}$$

■ ضع كلا من الأعداد الآتية على صورة +ب ت حيث ا، ب و ح ثم أكتب الصورة المثلثية لكل منها

$$\begin{array}{ll} (١٢) \quad \frac{٨(\sqrt{٣}٧+٢)ت}{\sqrt{٣}٧-٥} & (١١) \quad \frac{\sqrt{٣}٧-٥}{٢-\sqrt{٣}٧} \\ (١٤) \quad \frac{٢-\sqrt{٣}٧}{٢(حتا\frac{١}{٢}ت+جا\frac{١}{٢}ت)} & (١٣) \quad \frac{\sqrt{٣}٧٢+٦}{\sqrt{٣}٧-٢} \end{array}$$

(١٥) إذا كانت $ع = ٢-٢$ ت فأكتب الصورة المثلثية لكل من الأعداد ع، -ع، ع، $\frac{١}{ع}$

(١٦) مثل على شكل أرجاند الأعداد ع، $-٣+٤ت$ ، ع، $-٢+٣ت$ ، ع، $-١ع$ ، ع، ثم أوجد مقياس وسعة ع

■ أوجد المقياس والسعة لكل من الأعداد الآتية:-

$$\begin{array}{l} (١٧) \quad ٣- (جتا ٦٠ + ت جا ٦٠) \\ (١٨) \quad ٤ (جتا ١٥٠ - ت جا ١٥٠) \\ (١٩) \quad ٢- (جا ٢١٠ - ت جتا ٢١٠) \\ (٢٠) \quad ل (- جا هـ + ت جتا هـ) \end{array}$$

ملاحظات هامة

مثال: عر عن كل من الأعداد الآتية بالصورة المثلثية:-

$$1) \quad 1 \quad 2) \quad ت \quad 3) \quad 1- \quad 4) \quad ت$$

الحل

$$1) \quad 1 = 0 + 1\sqrt{1} = ل، \quad 0 = ص، \quad 1 = س \therefore$$

$$جناه = \frac{س}{ل} = \frac{1}{1} = 1، \quad جناه = \frac{ص}{ل} = \frac{0}{1} = 0،$$

$$\therefore 1 = 1 \times (جناه + ت جا ه) \quad \therefore 0 = ه$$

أي أن: $1 = جناه + ت جا ه$

$$2) \quad ت = 0 + 1 \times 1 = ت$$

$$\therefore 1 = 1 + 0\sqrt{1} = ل، \quad 1 = ص، \quad 0 = س \therefore$$

$$جناه = \frac{س}{ل} = \frac{0}{1} = 0، \quad جناه = \frac{ص}{ل} = \frac{1}{1} = 1،$$

$$\therefore 1 = 1 \times (جناه + ت جا ط) \quad \therefore 0 = ه = \frac{ط}{1}$$

أي أن: $1 = جناه + ت جا ط$

$$3) \quad 1- = 0 + 1\sqrt{1} = ل، \quad 0 = ص، \quad 1- = س \therefore$$

$$جناه = \frac{س}{ل} = \frac{1-}{1} = 1-، \quad جناه = \frac{ص}{ل} = \frac{0}{1} = 0،$$

$$\therefore 1- = 1- \times (جناه + ت جا ط) \quad \therefore 1- = ه = \frac{ط}{1}$$

أي أن: $1- = جناه + ت جا ط$

$$4) \quad ت = 1 - 0 = ت \quad \therefore 1 = 1 + 0\sqrt{1} = ل، \quad 1- = ص، \quad 0 = س \therefore$$

$$جناه = \frac{س}{ل} = \frac{0}{1} = 0، \quad جناه = \frac{ص}{ل} = \frac{1-}{1} = 1-،$$

$$\therefore 1- = 1- \times (جناه + ت جا ط^2) \quad \therefore 0 = ه = \frac{ط^2}{1}$$

أي أن: $1- = جناه + ت جا ط^2$

الخلاصة:

$$1 = جناه + ت جا ه$$

$$1- = جناه + ت جا ط$$

$$ت = جناه + ت جا ط$$

$$ت- = جناه + ت جا ط^2$$

تحويل الصورة المثلثية الغير قياسية للعدد ع إلى الصورة المثلثية القياسية

ل (جتا ه + ت جا ه)

(١) إذا كانت ع = ل (جا ه + ت جتا ه)

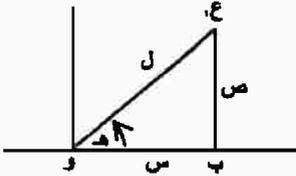
$$\therefore \frac{ع}{ل} = \frac{س}{ل} \quad \therefore \text{جا ه} = \frac{س}{ل}$$

$$\text{جتا ه} = \frac{ص}{ل}$$

\therefore السعة (هـ) في الربع الأول

$$\therefore \text{جا ه} = \frac{ط}{٧} \quad \therefore \text{جتا ه} = \frac{٧}{٧} \quad \therefore \text{انتسابها للعدد } ٧٠ = \frac{ط}{٧}$$

$$\therefore \text{ع} = ل \left[\text{جتا} \left(\text{ه} - \frac{ط}{٧} \right) + \text{ت جا} \left(\text{ه} - \frac{ط}{٧} \right) \right]$$

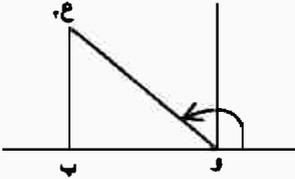


(٢) إذا كانت ع = ل (-جا ه + ت جتا ه)

$$\therefore \frac{ع}{ل} = \frac{ص}{ل} \quad \therefore \text{ص} = \frac{ع}{ل}$$

\therefore العدد المركب يقع في الربع الثاني

$$\therefore \text{ع} = ل \left[\text{جتا} \left(\text{ه} + \frac{ط}{٧} \right) + \text{ت جا} \left(\text{ه} + \frac{ط}{٧} \right) \right]$$



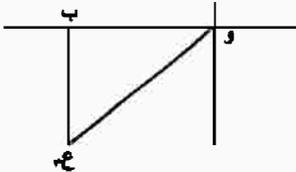
(٣) إذا كانت ع = ل (-جا ه - ت جتا ه)

$$\therefore \frac{ع}{ل} = \frac{ص}{ل} \quad \therefore \text{ص} = \frac{ع}{ل}$$

\therefore العدد المركب يقع في الربع الثالث

$$\therefore \text{السعة تنسب للعدد } ٢٧٠ = \frac{ط}{٧}$$

$$\therefore \text{ع} = ل \left[\text{جتا} \left(\text{ه} + \frac{ط}{٧} \right) + \text{ت جا} \left(\text{ه} + \frac{ط}{٧} \right) \right]$$



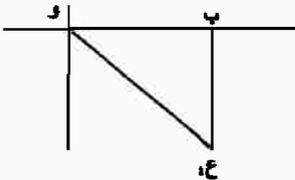
(٤) إذا كانت ع = ل (جا ه - ت جتا ه)

$$\therefore \frac{ع}{ل} = \frac{ص}{ل} \quad \therefore \text{ص} = \frac{ع}{ل}$$

\therefore العدد المركب يقع في الربع الرابع

$$\therefore \text{السعة تنسب للعدد } \left(\text{ه} + \frac{ط}{٧} \right)$$

$$\therefore \text{ع} = ل \left[\text{جتا} \left(\text{ه} + \frac{ط}{٧} \right) + \text{ت جا} \left(\text{ه} + \frac{ط}{٧} \right) \right]$$



الخلاصة : النسب المثلثية للعدد المركب وإشارتها غير مضبوطة وفي هذه الحالة تتسب الزوايا

$$\frac{\text{ط}}{٢} ، \frac{\text{ط}}{٣}$$

- ل (- جتا هـ + ت جا هـ) = ل [جتا (ط - هـ) + ت جا (ط - هـ)]
- ل (- جتا هـ - ت جا هـ) = ل [جتا (ط + هـ) + ت جا (ط + هـ)]
- ل (جتا هـ - ت جا هـ) = ل [جتا (٢ - ط - هـ) + ت جا (٢ - ط - هـ)]

الخلاصة : النسب المثلثية للعدد المركب مضبوطة ولكن إشارتها غير مضبوطة

∴ تتسب الزوايا إلى ط ، ٢ ط

مثال : اكتب كل من الأعداد المركبة الآتية في الصورة القطبية الصحيحة :-

$$(١) \text{ ع } ١ = -٤ (\text{ جا } ٣٠ - \text{ ت جا } ٣٠)$$

$$(٢) \text{ ع } ٢ = -٢ (\text{ جا } \frac{١}{٤} \text{ ط} - \text{ ت جتا } \frac{١}{٤} \text{ ط})$$

$$(٣) \text{ ع } ٣ = -٩ (\text{ جا } \frac{٥}{٣} \text{ ط} + \text{ ت جتا } \frac{٥}{٣} \text{ ط})$$

الحل

$$(١) \text{ ع } ١ = -٤ [\text{ جتا } (٣٠ - ٩٠) + \text{ ت جا } (٣٠ - ٩٠)]$$

$$= -٤ [\text{ جتا } ٦٠ + \text{ ت جا } ٦٠] = -٤ (\text{ جتا } ٦٠ - \text{ ت جا } ٦٠)$$

$$(٢) \text{ ع } ٢ = -٢ (\text{ جا } \frac{١}{٤} \text{ ط} - \text{ ت جتا } \frac{١}{٤} \text{ ط})$$

$$= -٢ (\text{ جا } ٤٥ - \text{ ت جتا } ٤٥)$$

$$= -٢ [\text{ جتا } (٤٥ - ٩٠) - \text{ ت جا } (٤٥ - ٩٠)]$$

$$= -٢ (\text{ جتا } ٤٥ - \text{ ت جا } ٤٥)$$

$$= -٢ (\text{ جتا } ٤٥ + \text{ ت جا } ٤٥)$$

$$(٣) \text{ ع } ٣ = -٩ (\text{ جا } \frac{٥}{٣} \text{ ط} - \text{ ت جتا } \frac{٥}{٣} \text{ ط})$$

$$= -٩ (\text{ جا } ٣٠٠ - \text{ ت جتا } ٣٠٠)$$

$$= -٩ [\text{ جا } (٦٠ - ٣٦٠) + \text{ ت جتا } (٦٠ - ٣٦٠)]$$

$$= -٩ (\text{ جا } ٦٠ + \text{ ت جتا } ٦٠)$$

$$= -٩ (\text{ جا } ٦٠ + \text{ ت جتا } ٦٠) = -٩ (\text{ جتا } ٣٠ - \text{ ت جا } ٣٠)$$

لأن ٦٠ تنم ٣٠

المقياس والسعة لحاصل ضرب عددين مركبين ولخارج قسمتهما

- حقائق هندسية:

$$\text{جا } (أ + ب) = \text{جا } أ \text{جتا } ب + \text{جتا } أ \text{حـا } ب$$

$$\text{جتا } (أ + ب) = \text{جتا } أ \text{جتا } ب - \text{جا } أ \text{حـا } ب$$

$$\text{جا } (أ - ب) = \text{جا } أ \text{جتا } ب - \text{جتا } أ \text{حـا } ب$$

$$\text{جتا } (أ - ب) = \text{جتا } أ \text{جتا } ب + \text{جا } أ \text{حـا } ب$$

$$\text{جا } ١٢ = ٢ \text{ جا } أ \text{جتا } ١ \Leftarrow \text{جا } ١ = ٢ \text{ جا } \frac{١}{٢} \text{جتا } \frac{١}{٢}$$

$$\text{جتا } ١٢ = \text{جتا } ١ - \text{جا } ١ \Leftarrow \text{جتا } ١ = \text{جتا } \frac{١}{٢} - \text{جا } \frac{١}{٢}$$

$$٢ = \text{جتا } ١ - ١ \quad ٢ = \text{جتا } \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}$$

$$٢ - ١ = \text{جا } ١ \quad ٢ - ١ = \text{حـا } \frac{١}{٢}$$

أولاً: المقياس والسعة لحاصل ضرب عددين مركبين

مقياس (حاصل ضرب عددين مركبين) = حاصل ضرب مقياسهما
سعة (حاصل ضرب عددين مركبين) = مجموع سعتيهما

$$\text{إذا كان } ١, ل = ١, \text{ (جتا } ١, \text{ + ت جا } ١, \text{)}$$

$$٢, ل = ٢, \text{ (جتا } ٢, \text{ + ت جا } ٢, \text{)}$$

$$\therefore ١, ٢, ل = ١, ل, \text{ [جتا } (١, ٢) \text{ + ت جا } (١, ٢)]$$

نتيجة (١):

$$\text{إذا كان } ١, ل = ١, \text{ (جتا } ١, \text{ + ت جا } ١, \text{)}$$

$$\therefore ٢, ل = ٢, \text{ (جتا } ٢, \text{ + ت جا } ٢, \text{)}$$

نتيجة (٢):

$$\text{إذا كان } ١, ل = ١, \text{ (جتا } ١, \text{ + ت جا } ١, \text{)}, \text{ ن عند صحيح موجب فإن}$$

$$\text{ع}^١ = ١, \text{ (جتا } ١, \text{ + ت جا } ١, \text{)}$$

نتائج قسمة عدد مركب على آخر

$$\frac{ل}{١٤} = \frac{١٤}{١٤} [\text{جتا } (١٥ - ١٥) + \text{ت جا } (١٥ - ١٥)]$$

∴ خارج قسمة عددين مركبين هو عدد مركب

$$\text{فمثلاً: إذا كان } ١٤ = ٣ (\text{جتا } ٧٥ + \text{ت جا } ٧٥)$$

$$١٤ = ٢ (\text{جتا } ٤٥ + \text{ت جا } ٤٥)$$

$$\text{فإن: } \frac{١٤}{١٤} = \frac{٣}{٢} [\text{جتا } (٤٥ - ٧٥) + \text{ت جا } (٤٥ - ٧٥)]$$

$$= \frac{٣}{٢} (\text{جتا } ٣٠ + \text{ت جا } ٣٠)$$

$$، \frac{١٤}{١٤} = \frac{٢}{٣} [\text{جتا } (٧٥ - ٤٥) + \text{ت جا } (٧٥ - ٤٥)]$$

$$= \frac{٢}{٣} (\text{جتا } ٣٠ + \text{ت جا } ٣٠)$$

$$= \frac{٢}{٣} (\text{جتا } ٣٣٠ + \text{ت جا } ٣٣٠)$$

نتيجة: إذا كان $ع = ل$ (جتا هـ + ت جا هـ) فإن

$$\frac{١}{ل} = \frac{١}{ع} [\text{جتا } (-هـ) + \text{ت جا } (-هـ)]$$

$$\text{أما } ع = ل \text{ (جتا } (-هـ) + \text{ت جا } (-هـ))$$

$$\text{فمثلاً: } ع = ٢ (\text{جتا } ٤٥ + \text{ت جا } ٤٥)$$

$$\therefore \frac{١}{ع} = \frac{١}{٢} [\text{جتا } (-٤٥) + \text{ت جا } (-٤٥)]$$

$$= \frac{١}{٢} (\text{جتا } ٤١٥ + \text{ت جا } ٤١٥)$$

ملاحظة هامة

$$\text{إذا كان } ١٤ = ل, (\text{جتا } ١٥ + \text{ت جا } ١٥)$$

$$١٤ = ل, (\text{جتا } ١٥ + \text{ت جا } ١٥)$$

$$١٤ = ل, (\text{جتا } ١٥ + \text{ت جا } ١٥)$$

$$\text{فإن: } \frac{ل}{١٤} = \frac{١٤}{ل} [\text{جتا } (١٥ - ١٥) + \text{ت جا } (١٥ - ١٥)]$$

مثال:

إذا كان $ع = ٦$ (جتا ٧٠ + ت جا ٧٠) ، $ع = ٣$ (جتا ٤٠ + ت جا ٤٠) فأوجد $\frac{١}{٢٤}$ ثم
ضع الناتج علي صورة زوج مرتب .

الحل

$$\frac{١}{ع} = \frac{ل}{ع} = \frac{ل}{٦} = \text{جتا } (٢٥ - ١٥) + \text{ت جا } (٢٥ - ١٥)$$

$$\frac{١}{٣} = \text{جتا } (٧٠ - ٤٠) + \text{ت جا } (٧٠ - ٤٠) = ٢ \text{ (جتا } ٣٠ + \text{ت جا } ٣٠)$$

$$٢ = \left(\frac{١}{٣} + \frac{\sqrt{٣}}{٣} \text{ت} \right) = \text{ت} + \sqrt{٣} = (١, \sqrt{٣})$$

مثال: ضع العدد $(١ - ت)$ علي الصورة المثلثية ثم أوجد قيم $(١ - ت)^٦$

الحل

$$\sqrt{٣} = \sqrt{١ + ١} = ل ، ١ = ص ، ١ = س$$

$$\text{جتا } ه = \frac{س}{ل} = \frac{١}{\sqrt{٣}} ، \text{جا } ه = \frac{ص}{ل} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$$

$$\therefore ه = ٣٦٠ - ٤٥ = ٣١٥$$

$$١ - ت = \sqrt{٣} \text{ (جتا } ٣١٥ + \text{ت جا } ٣١٥)$$

$$(١ - ت)^٦ = (\sqrt{٣})^٦ \text{ (جتا } ٣١٥ \times ٦ + \text{ت جا } ٣١٥ \times ٦)$$

$$٨ = \text{جتا } (١٨٩٠ + \text{ت جا } ١٨٩٠)$$

$$٨ = \text{جتا } (٩٠ + \text{ت جا } ٩٠) = ٨$$

مثال: إذا كان $ع = ل$ (جتا $(أ + ب)$ + ت جا $(أ + ب)$) ، $ع = ل$ (جتا $(أ - ب)$ + ت جا $(أ - ب)$)
أوجد $ع١ ع٢$

الحل

$$ع١ ع٢ = ل١ ل٢ = ل (جتا ١٢ + ت جا ١٢)$$

مثال: أوجد الصورة المثلثية لحاصل ضرب $ع١ ع٢$ إذا كان :

$$ع = ١٤ - ٢٤٠ \text{ جا } ٢٤٠ - ٢٤٠ \text{ ت جا } ٢٤٠ ، ع = ٧ \text{ (جتا } ١٢٠ - \text{ت جا } ١٢٠)$$

الحل

$$\begin{aligned} \text{ع} = ١٠ \text{ جا} + ٦٠ \text{ ت} + ٦٠ \text{ جتا} &= ٦٠ \text{ جتا} + ٣٠ \text{ ت} + ٣٠ \text{ جا} \\ \text{ع} = ٧ (٦٠ \text{ جا} + ٦٠ \text{ ت} + ٦٠ \text{ جتا}) &= ٧ (٦٠ \text{ جتا} + ٣٠ \text{ ت} + ٣٠ \text{ جا}) \\ \therefore \text{ع} = ٧ (٦٠ \text{ جا} + ٦٠ \text{ ت} + ٦٠ \text{ جتا}) & \\ \therefore \text{مقياس ع} = ٧ \text{ يسوي } ٧ \text{ ساعة} & \text{ع} = ٦٠ \end{aligned}$$

مثال: إذا كان ع = ٣٠ (جتا هـ + ت جا هـ) ، ع = ٥ (جتا هـ - ت جا هـ) أوجد $\frac{\text{ع}}{\text{ع}}$

الحل

$$\begin{aligned} \text{ع} = ٣٠ (جتا هـ - ت جا هـ) & \\ ٣٠ [جتا (ط + هـ) + ت جا (ط + هـ)] &= \\ \text{ع} = ٥ (جتا هـ - ت جا هـ) & \\ \therefore \frac{\text{ع}}{\text{ع}} = ٦ [جتا (ط + هـ) + ت جا (ط + هـ)] & \end{aligned}$$

مثال: اختصر لأبسط صورة: $\frac{(جتا \frac{\text{ط}}{٣} + ت جا \frac{\text{ط}}{٣} - جتا \frac{\text{ط}}{٣})}{(جتا \frac{\text{ط}}{٣} + ت جا \frac{\text{ط}}{٣})}$

الحل

$$\begin{aligned} \frac{(جتا \frac{\text{ط}}{٣} + ت جا \frac{\text{ط}}{٣} - جتا \frac{\text{ط}}{٣})}{(جتا \frac{\text{ط}}{٣} + ت جا \frac{\text{ط}}{٣})} & \\ = \frac{(جتا \frac{\text{ط}}{٣} - \frac{\text{ط}}{٣} + \frac{\text{ط}}{٣} + ت جا \frac{\text{ط}}{٣})}{(جتا \frac{\text{ط}}{٣} + ت جا \frac{\text{ط}}{٣})} & \\ = \frac{جتا \frac{\text{ط}}{٣} + ت جا \frac{\text{ط}}{٣}}{جتا \frac{\text{ط}}{٣} + ت جا \frac{\text{ط}}{٣}} & \\ = ت & \end{aligned}$$

مثال: إذا كان ع = ١٠٠ (جتا هـ + ت جا هـ) ، ع = $\frac{١}{٧} (جا ٢ هـ + ت جتا ٢ هـ)$

حيث ط هـ = $\frac{٣}{٤}$ ، هـ $\in [٩٠, ٠]$ أوجد الصورة المثلثية والصورة الجبرية لحاصل الضرب ع١ ع٢ .

الحل

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \quad \text{ع} \quad [\text{جتا } (290^\circ - \text{هـ}) + \text{ت} (290^\circ - \text{هـ})]$$

$$\sqrt{3} \quad \text{ع} \quad [\text{جتا } (290^\circ + \text{هـ}) + \text{ت} (290^\circ + \text{هـ})] \times 100 = \sqrt{3} \quad \text{ع}$$

$$0 = [\text{جتا } (90^\circ - \text{هـ}) + \text{ت} (90^\circ - \text{هـ})]$$

$$0 = [\text{جا هـ} + \text{ت جا هـ}]$$

$$0 = [\frac{2}{5} \text{ت} + \frac{4}{5}] \quad \text{وهي الصورة الجبرية}$$

مثال: اوجد قيمة $(\frac{t-1}{t+1})^4$

الحل

$$t - 1 = \frac{t-1}{1+1} = \frac{t^2-1}{t-1} = \frac{t-1}{t-1} \times \frac{t-1}{t+1}$$

$$1 = (t-1)^4 = (\frac{t-1}{t+1})^4 \quad \therefore$$

مثال: إذا كان $\sqrt{3} = 10$ (جتا $310^\circ + \text{ت} (310^\circ)$) ، $\sqrt{3} = 5$ (جتا $100^\circ + \text{ت} (100^\circ)$)

اوجد الصورة المثلثية والجبرية لكل من $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$

الحل

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad [\text{جتا } (310^\circ - 310^\circ) + \text{ت} (100^\circ - 310^\circ)]$$

$$2 = [\text{جتا } 210^\circ + \text{ت} (210^\circ)]$$

$$2 = [\text{جتا } 30^\circ - \text{ت} (30^\circ)] \quad \text{الصورة المثلثية}$$

$$2 = [\text{جتا } 30^\circ - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ت}] \quad \text{الصورة الجبرية}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad [\text{جتا } (210^\circ - 210^\circ) + \text{ت} (210^\circ - 210^\circ)]$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = [\text{جتا } 150^\circ + \text{ت} (150^\circ)]$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = [\text{جتا } 30^\circ + \text{ت} (30^\circ)] \quad \text{الصورة المثلثية}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = [\text{جتا } 30^\circ + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ت}] \quad \text{الصورة الجبرية}$$

نظرية دي موافر

■ إذا كان n عدداً نسبياً فبأن: $(جتا هـ + ت جا هـ)^n = جتا هـ + ت جا هـ$

■ إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً أو سالباً فبأن:

$$(جتا هـ + ت جا هـ)^n = جتا هـ + ت جا هـ$$

$$جتا هـ + ت جا هـ =$$

■ إذا كان n كسراً حقيقياً وليكن $n = \frac{1}{k}$ (جتا هـ + ت جا هـ)^{1/k}

$$جتا هـ + ت جا هـ = \frac{جتا هـ + ت جا هـ}{ك}$$

لذلك المقدار $(جتا هـ + ت جا هـ)^{1/k}$ له k من القيم المختلفة نحصل عليها بالتعويض في

$$\frac{جتا هـ + ت جا هـ}{ك} \text{ عن } r = 0, 1, 2, \dots, (ك - 1)$$

مثال: اختصر الآتي: $(جتا \frac{\pi}{4} + ت جا \frac{\pi}{4})^4$

الحـل

$$(جتا \frac{\pi}{4} + ت جا \frac{\pi}{4})^4 = جتا \frac{\pi}{4} + ت جا \frac{\pi}{4} + 4 \times جتا \frac{\pi}{4} \times ت جا \frac{\pi}{4} + 3 \times ت جا \frac{\pi}{4} + ت جا \frac{\pi}{4}$$

$$جتا \frac{\pi}{4} + ت جا \frac{\pi}{4} =$$

$$1 = 0 \times ت + 1 =$$

مثال: أثبت أن $ت = \frac{(جتا \frac{\pi}{4} + ت جا \frac{\pi}{4})^4 - (جتا \frac{\pi}{4} - ت جا \frac{\pi}{4})^4}{(جتا \frac{\pi}{4} + ت جا \frac{\pi}{4})^2 - (جتا \frac{\pi}{4} - ت جا \frac{\pi}{4})^2}$

الحـل

$$\frac{(جتا \frac{\pi}{4} + ت جا \frac{\pi}{4})^4 - (جتا \frac{\pi}{4} - ت جا \frac{\pi}{4})^4}{(جتا \frac{\pi}{4} + ت جا \frac{\pi}{4})^2 - (جتا \frac{\pi}{4} - ت جا \frac{\pi}{4})^2}$$

$$= \frac{(جتا \frac{\pi}{4} + ت جا \frac{\pi}{4})^2 - (جتا \frac{\pi}{4} - ت جا \frac{\pi}{4})^2}{(جتا \frac{\pi}{4} + ت جا \frac{\pi}{4})^2 - (جتا \frac{\pi}{4} - ت جا \frac{\pi}{4})^2}$$

$$\frac{\text{جتا } 13^\circ + \text{جتا } 17^\circ}{\text{جتا } 5^\circ + \text{جتا } 6^\circ} = \frac{(\text{جتا } 13^\circ + \text{جتا } 17^\circ)}{(\text{جتا } 5^\circ + \text{جتا } 6^\circ)} =$$

$$\frac{(\frac{\text{جتا } 13^\circ}{3} - \frac{\text{جتا } 17^\circ}{1}) + (\frac{\text{جتا } 5^\circ}{3} - \frac{\text{جتا } 6^\circ}{1})}{\frac{\text{جتا } 5^\circ}{3} + \frac{\text{جتا } 6^\circ}{1}} =$$

$$\text{جتا } 13^\circ + \text{جتا } 17^\circ = \frac{\text{جتا } 5^\circ}{3} + \frac{\text{جتا } 6^\circ}{1} = \text{جتا } 5^\circ + \text{جتا } 6^\circ = 1 + 0 = 1$$

مثال: أثبت أن: $\frac{1}{4} = \frac{1}{\sqrt{3\sqrt{3}-1}}$

الحل

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{\sqrt{3\sqrt{3}-1}} = \frac{1}{\sqrt{(\text{جتا } 30^\circ - \text{جتا } 60^\circ)}} = \frac{1}{\sqrt{(\text{جتا } 30^\circ - \text{جتا } 60^\circ)}}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{\sqrt{(\text{جتا } 30^\circ - \text{جتا } 60^\circ)}} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{\text{جتا } 30^\circ}{2} - \frac{\text{جتا } 60^\circ}{1})}}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{\text{جتا } 30^\circ}{2} - \frac{\text{جتا } 60^\circ}{1})}} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{\text{جتا } 30^\circ}{2} - \frac{\text{جتا } 60^\circ}{1})}}$$

بالضرب في مرافق المقام $\frac{1}{4} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{\text{جتا } 30^\circ}{2} - \frac{\text{جتا } 60^\circ}{1})}} \cdot \frac{\sqrt{(\frac{\text{جتا } 30^\circ}{2} + \frac{\text{جتا } 60^\circ}{1})}}{\sqrt{(\frac{\text{جتا } 30^\circ}{2} + \frac{\text{جتا } 60^\circ}{1})}} =$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{\text{جتا } 30^\circ}{2} - \frac{\text{جتا } 60^\circ}{1})}} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{\text{جتا } 30^\circ}{2} - \frac{\text{جتا } 60^\circ}{1})}}$$

مثال: باستخدام نظرية ديموافر عبر عن كل من : جتا ٣٠ هـ ، جتا ٣٠ هـ بدلالة قوي جاه هـ ، جتا هـ

الحل

الفكرة: نكتب العدد الذي مقياسه = ١ ، سعته = ٣ هـ على صورة ديموافر

$$\therefore \text{جتا } 30^\circ + \text{جتا } 30^\circ = (\text{جتا } 30^\circ + \text{جتا } 30^\circ)$$

بفك الطرف الأيسر بنظرية ذات الحدين

$$\text{جتا } 30^\circ + \text{جتا } 30^\circ = (\text{جتا } 30^\circ + \text{جتا } 30^\circ) + (\text{جتا } 30^\circ + \text{جتا } 30^\circ)$$

$$\text{جتا } 30^\circ + \text{جتا } 30^\circ = \text{جتا } 30^\circ + \text{جتا } 30^\circ - \text{جتا } 30^\circ - \text{جتا } 30^\circ + \text{جتا } 30^\circ + \text{جتا } 30^\circ$$

$$= (\text{جتا } 30^\circ - \text{جتا } 30^\circ) + (\text{جتا } 30^\circ + \text{جتا } 30^\circ) + (\text{جتا } 30^\circ - \text{جتا } 30^\circ) + (\text{جتا } 30^\circ + \text{جتا } 30^\circ)$$

وبمساواة الحقيقي بالتحليلي والتخيلي بالتخيلي

$$\therefore \text{جتا } 3\text{هـ} = \text{جتا } 3\text{هـ} - \text{جا } 3\text{هـ} \text{جتا } 4\text{هـ}$$

$$= \text{جتا } 4\text{هـ} - (\text{جتا } 3\text{هـ})^2$$

$$= \text{جتا } 4\text{هـ} - 3\text{جتا } 3\text{هـ} + \text{جا } 3\text{هـ}$$

$$= 4\text{جتا } 3\text{هـ} - 3\text{جتا } 4\text{هـ}$$

$$، \text{جا } 3\text{هـ} = 3\text{جتا } 3\text{هـ} - \text{جا } 4\text{هـ}$$

$$= 3\text{جتا } 3\text{هـ} - (\text{جا } 3\text{هـ})^2 - \text{جا } 4\text{هـ}$$

$$= 3\text{جتا } 3\text{هـ} - 4\text{جتا } 4\text{هـ}$$

مثال: باستخدام نظرية دي موافر أو جد قيمة كل من جتا 2هـ ، جا 2هـ بدلالة النسب المثلثية للزوايا هـ .

الحل

$$\text{من دي موافر (جتا هـ + ت جا هـ)}^2 = \text{جتا } 2\text{هـ} + \text{ت جا } 2\text{هـ} \text{----- (1)}$$

$$، \text{جبرياً (جتا هـ + ت جا هـ)}^2 = \text{جتا } 2\text{هـ} + \text{ت جا } 2\text{هـ} + \text{جا هـ} \text{جتا هـ} + \text{ت جا هـ} \text{جتا هـ}$$

$$= \text{جتا } 2\text{هـ} - \text{جا هـ} + \text{جا هـ} \text{جتا هـ} + \text{ت جا هـ} \text{جتا هـ}$$

$$= (\text{جتا هـ} - \text{جا هـ}) + \text{جا هـ} \text{جتا هـ} \text{----- (2)}$$

من (1) ، (2) واستخدام خصائص تساوي عددين مركبين

$$\therefore \text{جتا } 2\text{هـ} + \text{ت جا } 2\text{هـ} = (\text{جتا هـ} - \text{جا هـ}) + \text{جا هـ} \text{جتا هـ} + \text{ت جا هـ} \text{جتا هـ}$$

$$\therefore \text{جتا } 2\text{هـ} = \text{جتا هـ} - \text{جا هـ} ، \text{جا } 2\text{هـ} = \text{جا هـ} \text{جتا هـ} + \text{ت جا هـ} \text{جتا هـ}$$

مثال: إذا كان $\text{جتا } 1\text{ع} = 2$ ، $\text{جتا } 2\text{ع} = 4$ ، $\text{جتا } 3\text{ع} = 8$ ، $\text{جتا } 4\text{ع} = 16$ ، $\text{جتا } 5\text{ع} = 32$ ، $\text{جتا } 6\text{ع} = 64$ ، $\text{جتا } 7\text{ع} = 128$ ، $\text{جتا } 8\text{ع} = 256$ ، $\text{جتا } 9\text{ع} = 512$ ، $\text{جتا } 10\text{ع} = 1024$ ، $\text{جتا } 11\text{ع} = 2048$ ، $\text{جتا } 12\text{ع} = 4096$ ، $\text{جتا } 13\text{ع} = 8192$ ، $\text{جتا } 14\text{ع} = 16384$ ، $\text{جتا } 15\text{ع} = 32768$ ، $\text{جتا } 16\text{ع} = 65536$ ، $\text{جتا } 17\text{ع} = 131072$ ، $\text{جتا } 18\text{ع} = 262144$ ، $\text{جتا } 19\text{ع} = 524288$ ، $\text{جتا } 20\text{ع} = 1048576$ ، $\text{جتا } 21\text{ع} = 2097152$ ، $\text{جتا } 22\text{ع} = 4194304$ ، $\text{جتا } 23\text{ع} = 8388608$ ، $\text{جتا } 24\text{ع} = 16777216$ ، $\text{جتا } 25\text{ع} = 33554432$ ، $\text{جتا } 26\text{ع} = 67108864$ ، $\text{جتا } 27\text{ع} = 134217728$ ، $\text{جتا } 28\text{ع} = 268435456$ ، $\text{جتا } 29\text{ع} = 536870912$ ، $\text{جتا } 30\text{ع} = 1073741824$ ، $\text{جتا } 31\text{ع} = 2147483648$ ، $\text{جتا } 32\text{ع} = 4294967296$ ، $\text{جتا } 33\text{ع} = 8589934592$ ، $\text{جتا } 34\text{ع} = 17179869184$ ، $\text{جتا } 35\text{ع} = 34359738368$ ، $\text{جتا } 36\text{ع} = 68719476736$ ، $\text{جتا } 37\text{ع} = 137438953472$ ، $\text{جتا } 38\text{ع} = 274877906944$ ، $\text{جتا } 39\text{ع} = 549755813888$ ، $\text{جتا } 40\text{ع} = 1099511627776$ ، $\text{جتا } 41\text{ع} = 2199023255552$ ، $\text{جتا } 42\text{ع} = 4398046511104$ ، $\text{جتا } 43\text{ع} = 8796093022208$ ، $\text{جتا } 44\text{ع} = 17592186044416$ ، $\text{جتا } 45\text{ع} = 35184372088832$ ، $\text{جتا } 46\text{ع} = 70368744177664$ ، $\text{جتا } 47\text{ع} = 140737488355328$ ، $\text{جتا } 48\text{ع} = 281474976710656$ ، $\text{جتا } 49\text{ع} = 562949953421312$ ، $\text{جتا } 50\text{ع} = 1125899906842624$ ، $\text{جتا } 51\text{ع} = 2251799813685248$ ، $\text{جتا } 52\text{ع} = 4503599627370496$ ، $\text{جتا } 53\text{ع} = 9007199254740992$ ، $\text{جتا } 54\text{ع} = 18014398509481984$ ، $\text{جتا } 55\text{ع} = 36028797018963968$ ، $\text{جتا } 56\text{ع} = 72057594037927936$ ، $\text{جتا } 57\text{ع} = 144115188075855872$ ، $\text{جتا } 58\text{ع} = 288230376151711744$ ، $\text{جتا } 59\text{ع} = 576460752303423488$ ، $\text{جتا } 60\text{ع} = 1152921504606846976$ ، $\text{جتا } 61\text{ع} = 2305843009213693952$ ، $\text{جتا } 62\text{ع} = 4611686018427387904$ ، $\text{جتا } 63\text{ع} = 9223372036854775808$ ، $\text{جتا } 64\text{ع} = 18446744073709551616$ ، $\text{جتا } 65\text{ع} = 36893488147419103232$ ، $\text{جتا } 66\text{ع} = 73786976294838206464$ ، $\text{جتا } 67\text{ع} = 147573952589676412928$ ، $\text{جتا } 68\text{ع} = 295147905179352825856$ ، $\text{جتا } 69\text{ع} = 590295810358705651712$ ، $\text{جتا } 70\text{ع} = 1180591620717411303424$ ، $\text{جتا } 71\text{ع} = 2361183241434822606848$ ، $\text{جتا } 72\text{ع} = 4722366482869645213696$ ، $\text{جتا } 73\text{ع} = 9444732965739290427392$ ، $\text{جتا } 74\text{ع} = 18889465931478580854784$ ، $\text{جتا } 75\text{ع} = 37778931862957161709568$ ، $\text{جتا } 76\text{ع} = 75557863725914323419136$ ، $\text{جتا } 77\text{ع} = 151115727451828646838272$ ، $\text{جتا } 78\text{ع} = 302231454903657293676544$ ، $\text{جتا } 79\text{ع} = 604462909807314587353088$ ، $\text{جتا } 80\text{ع} = 1208925819614629174706176$ ، $\text{جتا } 81\text{ع} = 2417851639229258349412352$ ، $\text{جتا } 82\text{ع} = 4835703278458516698824704$ ، $\text{جتا } 83\text{ع} = 9671406556917033397649408$ ، $\text{جتا } 84\text{ع} = 19342813113834066795298816$ ، $\text{جتا } 85\text{ع} = 38685626227668133590597632$ ، $\text{جتا } 86\text{ع} = 77371252455336267181195264$ ، $\text{جتا } 87\text{ع} = 154742504910672534362390528$ ، $\text{جتا } 88\text{ع} = 309485009821345068724781056$ ، $\text{جتا } 89\text{ع} = 618970019642690137449562112$ ، $\text{جتا } 90\text{ع} = 1237940039285380274899124224$ ، $\text{جتا } 91\text{ع} = 2475880078570760549798248448$ ، $\text{جتا } 92\text{ع} = 4951760157141521099596496896$ ، $\text{جتا } 93\text{ع} = 9903520314283042199192993792$ ، $\text{جتا } 94\text{ع} = 19807040628566084398385987584$ ، $\text{جتا } 95\text{ع} = 39614081257132168796771975168$ ، $\text{جتا } 96\text{ع} = 79228162514264337593543950336$ ، $\text{جتا } 97\text{ع} = 158456325028528675187087900672$ ، $\text{جتا } 98\text{ع} = 316912650057057350374175801344$ ، $\text{جتا } 99\text{ع} = 633825300114114700748351602688$ ، $\text{جتا } 100\text{ع} = 1267650600228229401496703205376$ ، $\text{جتا } 101\text{ع} = 2535301200456458802993406410752$ ، $\text{جتا } 102\text{ع} = 5070602400912917605986812821504$ ، $\text{جتا } 103\text{ع} = 10141204801825835211973625643008$ ، $\text{جتا } 104\text{ع} = 20282409603651670423947251286016$ ، $\text{جتا } 105\text{ع} = 40564819207303340847894502572032$ ، $\text{جتا } 106\text{ع} = 81129638414606681695789005144064$ ، $\text{جتا } 107\text{ع} = 162259276829213363391578010288128$ ، $\text{جتا } 108\text{ع} = 324518553658426726783156020576256$ ، $\text{جتا } 109\text{ع} = 649037107316853453566312041152512$ ، $\text{جتا } 110\text{ع} = 1298074214633706907132624082305024$ ، $\text{جتا } 111\text{ع} = 2596148429267413814265248164610048$ ، $\text{جتا } 112\text{ع} = 5192296858534827628530496329220096$ ، $\text{جتا } 113\text{ع} = 10384593717069655257060992658440192$ ، $\text{جتا } 114\text{ع} = 20769187434139310514121985316880384$ ، $\text{جتا } 115\text{ع} = 41538374868278621028243970633760768$ ، $\text{جتا } 116\text{ع} = 83076749736557242056487941267521536$ ، $\text{جتا } 117\text{ع} = 166153499473114484112975882535043072$ ، $\text{جتا } 118\text{ع} = 332306998946228968225951765070086144$ ، $\text{جتا } 119\text{ع} = 664613997892457936451903530140172288$ ، $\text{جتا } 120\text{ع} = 1329227995784915872903807060280344576$ ، $\text{جتا } 121\text{ع} = 2658455991569831745807614120560689152$ ، $\text{جتا } 122\text{ع} = 5316911983139663491615228241121378304$ ، $\text{جتا } 123\text{ع} = 10633823966279326983230456482242756608$ ، $\text{جتا } 124\text{ع} = 21267647932558653966460912964485513216$ ، $\text{جتا } 125\text{ع} = 42535295865117307932921825928971026432$ ، $\text{جتا } 126\text{ع} = 85070591730234615865843651857942052864$ ، $\text{جتا } 127\text{ع} = 170141183460469231731687303715884105728$ ، $\text{جتا } 128\text{ع} = 340282366920938463463374607431768211456$ ، $\text{جتا } 129\text{ع} = 680564733841876926926749214863536422912$ ، $\text{جتا } 130\text{ع} = 1361129467683753853853498429727072845824$ ، $\text{جتا } 131\text{ع} = 272225893536750770770699685945415169152$ ، $\text{جتا } 132\text{ع} = 544451787073501541541399371890830338304$ ، $\text{جتا } 133\text{ع} = 1088903574147003083082798743781660676608$ ، $\text{جتا } 134\text{ع} = 2177807148294006166165597487563321353216$ ، $\text{جتا } 135\text{ع} = 4355614296588012332331194975126642706432$ ، $\text{جتا } 136\text{ع} = 8711228593176024664662389950253285412864$ ، $\text{جتا } 137\text{ع} = 17422457186352049329324779900506568825728$ ، $\text{جتا } 138\text{ع} = 34844914372704098658649559801013137651456$ ، $\text{جتا } 139\text{ع} = 69689828745408197317299119602026275302912$ ، $\text{جتا } 140\text{ع} = 139379657490816394634598239204052550605824$ ، $\text{جتا } 141\text{ع} = 278759314981632789269196478408105101211648$ ، $\text{جتا } 142\text{ع} = 557518629963265578538392956816210202423376$ ، $\text{جتا } 143\text{ع} = 1115037259926531157076785913632420404846752$ ، $\text{جتا } 144\text{ع} = 2230074519853062314153571827264840809693504$ ، $\text{جتا } 145\text{ع} = 4460149039706124628307143654529681619387008$ ، $\text{جتا } 146\text{ع} = 8920298079412249256614287309059363238774016$ ، $\text{جتا } 147\text{ع} = 1784059615882449851322857461811872647754832$ ، $\text{جتا } 148\text{ع} = 3568119231764899702645714923623745295509664$ ، $\text{جتا } 149\text{ع} = 7136238463529799405291429847247490591019328$ ، $\text{جتا } 150\text{ع} = 14272476927059598810582859694494981182038656$ ، $\text{جتا } 151\text{ع} = 28544953854119197621165719388989963764077312$ ، $\text{جتا } 152\text{ع} = 57089907708238395242331438777979927528154624$ ، $\text{جتا } 153\text{ع} = 114179815416476790484662877555959855056309248$ ، $\text{جتا } 154\text{ع} = 228359630832953580969325755111919710112618496$ ، $\text{جتا } 155\text{ع} = 456719261665907161938651510223839420225236992$ ، $\text{جتا } 156\text{ع} = 913438523331814323877303020447678840450473984$ ، $\text{جتا } 157\text{ع} = 1826877046663628647754606040895357680900947968$ ، $\text{جتا } 158\text{ع} = 3653754093327257295509212081790715361801895936$ ، $\text{جتا } 159\text{ع} = 7307508186654514591018424163581430723603791872$ ، $\text{جتا } 160\text{ع} = 14615016373309029182036848327162861447207583504$ ، $\text{جتا } 161\text{ع} = 29230032746618058364073696654325722894415167008$ ، $\text{جتا } 162\text{ع} = 58460065493236116728147393308651445788830334016$ ، $\text{جتا } 163\text{ع} = 116920130986472233456294786617302891577660668032$ ، $\text{جتا } 164\text{ع} = 233840261972944466912589573234605783155321336064$ ، $\text{جتا } 165\text{ع} = 467680523945888933825179146469211566310642672128$ ، $\text{جتا } 166\text{ع} = 935361047891777867650358292938423132621285344256$ ، $\text{جتا } 167\text{ع} = 1870722095783555735300716585876846265242570684512$ ، $\text{جتا } 168\text{ع} = 3741444191567111470601433171753692530485141369024$ ، $\text{جتا } 169\text{ع} = 7482888383134222941202866343507385060970282738048$ ، $\text{جتا } 170\text{ع} = 14965776766268445882405732687014770121940565476096$ ، $\text{جتا } 171\text{ع} = 29931553532536891764811465374029540243881130952192$ ، $\text{جتا } 172\text{ع} = 59863107065073783529622930748059080487762261904384$ ، $\text{جتا } 173\text{ع} = 119726214130147567059245861496118160975524523808768$ ، $\text{جتا } 174\text{ع} = 239452428260295134118491722992236321951049047617536$ ، $\text{جتا } 175\text{ع} = 478904856520590268236983445984472643902098095235072$ ، $\text{جتا } 176\text{ع} = 957809713041180536473966891968945287804196190470144$ ، $\text{جتا } 177\text{ع} = 1915619426082361072947933783937890575608392380940288$ ، $\text{جتا } 178\text{ع} = 3831238852164722145895867567875781151216784761880576$ ، $\text{جتا } 179\text{ع} = 7662477704329444291791735135751562302433569523761152$ ، $\text{جتا } 180\text{ع} = 15324955408658888583583470271503124604867139047522304$ ، $\text{جتا } 181\text{ع} = 30649910817317777167166940543006249209734278095044608$ ، $\text{جتا } 182\text{ع} = 61299821634635554334333881086012498419468556190089216$ ، $\text{جتا } 183\text{ع} = 122599643269271108668667762172024996838937112380178432$ ، $\text{جتا } 184\text{ع} = 245199286538542217337335524344049993677874224760356864$ ، $\text{جتا } 185\text{ع} = 490398573077084434674671048688099987355748449520713728$ ، $\text{جتا } 186\text{ع} = 980797146154168869349342097376199974711496899041427456$ ، $\text{جتا } 187\text{ع} = 1961594292308337738698684194752399949422993798082854912$ ، $\text{جتا } 188\text{ع} = 3923188584616675477397368389504799898845987596165709824$ ، $\text{جتا } 189\text{ع} = 7846377169233350954794736779009599797691975192331419648$ ، $\text{جتا } 190\text{ع} = 15692754338466701909589473558019199595383950384662839296$ ، $\text{جتا } 191\text{ع} = 31385508676933403819178947116038399190767900769325678592$ ، $\text{جتا } 192\text{ع} = 62771017353866807638357894232076798381535801538651357184$ ، $\text{جتا } 193\text{ع} = 125542034707733615276715788464153596763071603077302714368$ ، $\text{جتا } 194\text{ع} = 251084069415467230553431576928307193526143206154605428736$ ، $\text{جتا } 195\text{ع} = 502168138830934461106863153856614387052286412309210873472$ ، $\text{جتا } 196\text{ع} = 1004336277661868922213726307713228774104572824618421746448$ ، $\text{جتا } 197\text{ع} = 200867255532373784442745261542645754820914564923684349296$ ، $\text{جتا } 198\text{ع} = 401734511064747568885490523085291509641829129847368698592$ ، $\text{جتا } 199\text{ع} = 803469022129495137770981046170583019283658259694737397184$ ، $\text{جتا } 200\text{ع} = 1606938044258990275541962092341166038567316519389474794368$ ، $\text{جتا } 201\text{ع} = 3213876088517980551083924184682332077134633038778949588736$ ، $\text{جتا } 202\text{ع} = 6427752177035961102167848369364664154269266077557899177472$ ، $\text{جتا } 203\text{ع} = 12855504354071922204335696738729328308538532155115798354944$ ، $\text{جتا } 204\text{ع} = 25711008708143844408671393477458656617077064310231596709888$ ، $\text{جتا } 205\text{ع} =$

$$ع^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 [جتاه + ت جا ه] \text{ ----- (3)}$$

من (1)، (2)، (3)

$$\frac{ع^2 \times ١٤^{\circ} ٢}{٢٤} = \frac{١٠٠ \times ٢^{\circ} ٢}{(١٠)} = [جتاه٥ - ٦٦هـ - هـ] + ت جا(٥٥ - ٦٦هـ - هـ)$$

$$----- (4) \quad [جتاه٢ - هـ] + ت جا(٢٠ - هـ) =$$

$$، \therefore طاه = \frac{٣}{٤} ، هـ [٣ ، ١٠٠]$$

$$\therefore جتا(٢٠ - هـ) = جتا٢٠ = ١ - هـ$$

$$\frac{٧}{٢٥} = ١ - \frac{٣٢}{٢٥} = ١ - \left(\frac{٤}{٥}\right) \times ٢ =$$

$$، جتا(٢٠ - هـ) = - جتا٢٠ = ٢ - جتا٢٠$$

$$\frac{٢٤}{٢٥} = \frac{٤}{٥} \times \frac{٣}{٥} \times ٢ =$$

، بالتعويض في (4) ينتج أن :-

$$ت \frac{٤٨}{٢٥} - \frac{١٤}{٢٥} = (ت \frac{٢٤}{٢٥} - \frac{٧}{٢٥})^2 = \frac{ع^2 \times ١٤^{\circ} ٢}{٢٤}$$

مثال: أوجد المقاييس والسعة للعدد المركب $ع = (١ + جتا١ + ت جا١)^{\circ}$

الحل

نضع $١ + جتا١ + ت جا١$ في الصورة القطبية

$$\therefore ١ + جتا١ = ٢ جتا \frac{١}{٢} ، جا١ = ٢ جا \frac{١}{٢} جتا \frac{١}{٢}$$

$$\therefore ١ + جتا١ + ت جا١ = ٢ جتا \frac{١}{٢} + ت \times ٢ جا \frac{١}{٢} جتا \frac{١}{٢}$$

$$= ٢ جتا \frac{١}{٢} (جتاه + ت جا١)$$

$$\therefore ع^{\circ} = ٢ جتا \frac{١}{٢} (جتاه + ت جا١) \times \frac{١}{٢}$$

$$\therefore |ع| = ٢ جتا \frac{١}{٢} ، سعة العدد = \frac{١٥}{٢}$$

مثال: اختصر العدد الآتي إلى الصورة الجبرية :-

$$ع = \frac{(جتا - \frac{1}{4} + ت جا \frac{1}{4}) \times (جتا - \frac{1}{4} + ت جا \frac{1}{4})}{(جتا - \frac{1}{4} + ت جا \frac{1}{4})}$$

الحل

بتطبيق نظرية دي موافر على البسط والمقام

$$\therefore ع = \frac{(جتا - \frac{1}{4} + ت جا \frac{1}{4}) \times (جتا - \frac{1}{4} + ت جا \frac{1}{4})}{(جتا - \frac{1}{4} + ت جا \frac{1}{4})}$$

$$= [جتا (\frac{0}{4} + ت جا \frac{3}{4} - ط \frac{1}{4}) + ت جا (\frac{0}{4} + ت جا \frac{3}{4} - ط \frac{1}{4}) + (جتا - \frac{1}{4} + ت جا \frac{1}{4}) \times (جتا - \frac{1}{4} + ت جا \frac{1}{4})]$$

$$= جتا \frac{0}{4} + ت جا \frac{0}{4} + ط \frac{0}{4} = جتا + ت جا + ط$$

$$= جتا (١٨٠ + ٤٥) + ت جا (١٨٠ + ٤٥)$$

$$= -\sqrt{\frac{1}{4}} - 3\sqrt{\frac{1}{4}} = -\sqrt{\frac{1}{4}} (١ + ٣)$$

استخدام نظرية دي موافر لإيجاد جذور الأعداد المركبة

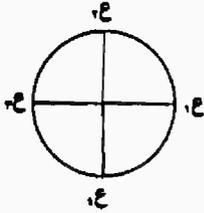
إذا كان العدد المركب $ع = ل (جتا هـ + ت جا هـ)$ ، $ن$ عدد صحيح موجب فإن $ع$ له $ن$ من الجذور

المختلفة التي تعطي بالقاتون :

$$ع^{\frac{1}{ن}} = ل^{\frac{1}{ن}} [جتا \frac{هـ + 2ك\pi}{ن} + ت جا \frac{هـ + 2ك\pi}{ن}] ، ك = 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، \dots$$

مثال: للمعادلة $س^4 = 1$ أربعة جذور أحدهما $ر = جتا. + ت جا.$ أوجد الجذور الأخرى.

الحل



$$\therefore س^4 = 1$$

$$\therefore ع = جتا. + ت جا.$$

لإيجاد بقية الجذور يضاف لكل زاوية $(\frac{360}{4} = 90)$

$$\therefore ع = جتا 90 + ت جا 90$$

$$ع = جتا 180 + ت جا 180$$

$$ع = جتا 270 + ت جا 270$$

مثال: ضع العدد المركب $س = 8 + 8\sqrt{3}ت$ في الصورة $ر (جتا هـ + ت جا هـ)$

ثم أوجد $\sqrt[4]{س}$

الحل

$$س = 8 + 8\sqrt{3}ت = ر (جتا هـ + ت جا هـ)$$

$$\therefore ر = \sqrt[4]{16 \times 64 + 64\sqrt{3}} = 16$$

$$س = 8 + 8\sqrt{3}ت = ر (جتا هـ + ت جا هـ)$$

$$\therefore طا هـ = \left| \frac{س}{ر} \right| = \left| \frac{8 + 8\sqrt{3}ت}{16} \right| = \frac{س}{ر} \therefore هـ = 60^\circ \text{ وتقع في الربع الثاني}$$

$$\therefore هـ = 60 - 180 = 120$$

$$\therefore س = 8 + 8\sqrt{3}ت = 16 (جتا 120 + ت جا 120)$$

لإيجاد الجذر الرابع فقط لابد من إيجاد الجذر الأول

إيجاد الجذرين التربيعيين للعدد المركب

لكل عدد مركب $E = L (\text{جتا هـ} + \text{ت جا هـ})$ يوجد جذران تربيعيان مقياس كل منهما $= \sqrt{L}$
 وسعة الأولى $= \frac{هـ}{L}$ وسعة الثاني $= \frac{هـ}{L} + \text{ط}$

أي الجذران هما

$$\sqrt{L} (\text{جتا هـ} + \text{ت جا هـ}) \text{ و } \sqrt{L} [\text{جتا هـ} + \text{ط} (\text{ت جا هـ} + \text{ط})]$$

مثال: أوجد الجذرين التربيعيين للعدد $E = 2 - 2\sqrt{3}$ بتحويله إلى الصورة القطبية

الحل

نضع العدد E بالصورة القطبية

$$|E| = 4 = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$$

$$\therefore \theta = 060^\circ$$

$$\text{جتا ي} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{جتا ي} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = 60^\circ - 180^\circ = 120^\circ$$

$$\therefore E = (2 - 2\sqrt{3}) \text{ تقع في الربع الثاني}$$

$$\therefore E = 4 (\text{جتا } 120^\circ + \text{ت جا } 120^\circ)$$

$$\therefore \sqrt{E} = \sqrt{4} (\text{جتا } \frac{120^\circ}{2} + \text{ت جا } \frac{120^\circ}{2})$$

$$= 2 (\text{جتا } 60^\circ + \text{ت جا } 60^\circ) = \sqrt{3} + 1$$

$$، \sqrt{E} = \sqrt{4} [\text{جتا } (60^\circ + 180^\circ) + \text{ت جا } (60^\circ + 180^\circ)]$$

$$= 2 [(\text{ت جا } 60^\circ) - (\text{جتا } 60^\circ)] = \sqrt{3} - 1$$

ملاحظة:

كل من الجذرين التربيعيين لأي عدد مركب هو المعكوس الجمعي للآخر فإذا كان الجذر

الأول هو $s + t$ فإن الآخر هو $-s - t$.

إيجاد الجذرين التربيعين لعدد مركب جبرياً

مثال: أوجد جبرياً الجذرين التربيعين للعدد $7-24+2$ ت

الحل

نفرض أن $\sqrt{7-24+2} = \sqrt{ص} + \sqrt{س}$ وبتربيع الطرفين

$$7-24+2 = ص^2 + 2\sqrt{صس} + س^2$$

$$\therefore 7-24 = ص^2 - 2\sqrt{صس} + س^2 \quad (1)$$

$$\therefore 24 = 2\sqrt{صس} \quad (2)$$

$$\therefore \sqrt{صس} = 12$$

$$\text{بالتعويض في (1)} \quad 7-24 = \frac{144}{ص} - 2\sqrt{صس}$$

$$\therefore 17 = \frac{144}{ص} - 24$$

$$\therefore 9 = \frac{144}{ص} \quad \therefore 9ص = 144$$

$$\therefore 3 = \sqrt{ص} \quad \text{أو} \quad 3 = -\sqrt{ص} \quad \text{وهذا مرفوض}$$

$$\text{بالتعويض في (2)} \quad \therefore \sqrt{صس} = 12 \quad \therefore \sqrt{ص} = \frac{12}{\sqrt{س}}$$

$$\therefore \text{الجذران التربيعيان هما } \pm(\sqrt{3} + \sqrt{4})$$

مثال: ضع العدد 2 بالصورة القطبية

الحل

$$\therefore 2 = 2(\cos 0 + j \sin 0)$$

$$\therefore \sqrt{2} = \sqrt{2}(\cos \frac{0}{2} + j \sin \frac{0}{2})$$

$$\sqrt{2} = (\cos 0 + j \sin 0)$$

$$\therefore \sqrt{2} = \sqrt{2}(\cos \frac{0}{2} + j \sin \frac{0}{2})$$

$$\sqrt{2} = (\cos 0 + j \sin 0)$$

$$\therefore \text{الجذران هما } \pm(\sqrt{2} + j0)$$

ثانياً: الطريقة الجبرية :-

نفرض أن $\sqrt{2} = \sqrt{ص} + \sqrt{س}$

$$\therefore 2 = ص + 2\sqrt{صس} + س$$

$$\therefore 2 = ص + س + 2\sqrt{صس} \quad (1)$$

$$\therefore 1 = \sqrt{صس} \quad \therefore \sqrt{ص} = \frac{1}{\sqrt{س}} \quad (2) \text{ بالتعويض في (1)}$$

$$\therefore 1 \pm = س$$

$$\therefore 1 = س^2$$

$$\therefore 0 = \frac{1}{س} - س^2$$

$$\therefore 1 \pm = ص$$

بالتعويض في (٢)

$$\therefore \text{الجزران هما } 1 \pm 1 \pm = ت \times 1 \pm = (ت+1)$$

مثال: إذا كان $\sqrt{\frac{ت+٧}{٢-٥}} = ت+١$ ب حيث $ا$ ، ب حقيقيان أوجد قيم $ا$ ، ب

الحل

$$\frac{ت+٧}{٢-٥} = (ت+١)^2 = ت^2 + ٢ت + ١$$

$$٢ت + ٧ = ت^2 + ٢ت + ١$$

$$\therefore ت^2 - ٦ = ٠ \quad \therefore ت = ٣ \pm \sqrt{٩} = ٣ \pm ٣$$

$$\therefore ت = ٦ \text{ أو } ٠$$

$$\therefore ٠ = ت^2 - ٦ \quad (١)$$

$$\therefore ٦ = ت^2 \quad \therefore ت = \pm \sqrt{٦}$$

$$\therefore ٠ = ت^2 - ٦ \quad \therefore ت = \pm \sqrt{٦}$$

$$\therefore (٦ - ت^2) = ٠$$

$$\therefore ٦ = ت^2 \quad \therefore ت = \pm \sqrt{٦}$$

مثال: أوجد قيم $س$ ، $ص$ الحقيقية التي تحقق المعادلة:

$$٤ - (س+ت) = \frac{٣\sqrt{ت}}{٣\sqrt{ت}} + ٤ = ٨$$

الحل

$$\frac{٣\sqrt{ت} + ٢}{٤} = \frac{٣\sqrt{ت} + ٢}{٤} = \frac{٣\sqrt{ت}}{٤} + \frac{٢}{٤} = \frac{٣\sqrt{ت}}{٤} + \frac{١}{٢}$$

بالتعويض بهذه القيمة عن الكسر في المعادلة

$$\therefore (س+ت) = ٤ - \frac{٣\sqrt{ت} + ٢}{٤} = ٤ - \frac{٣\sqrt{ت}}{٤} - \frac{١}{٢}$$

$$\therefore (س+ت) = ٤ - \frac{٣\sqrt{ت}}{٤} - \frac{١}{٢}$$

$$\therefore (س+ت) = ٤ - \frac{٣\sqrt{ت}}{٤} - \frac{١}{٢}$$

$$\therefore (س+ت) = ٤ - \frac{٣\sqrt{ت}}{٤} - \frac{١}{٢}$$

$$\begin{aligned}
& \therefore \text{س}^2 - \text{ص}^2 = 2 \dots\dots (1) \\
& \text{س}^2 - \text{ص}^2 = 2 \\
& \sqrt{3} = \text{ص} \\
& \text{بالتعويض في (1)} \\
& \text{بالضرب في س} \\
& \therefore \text{س}^3 + 2\text{س}^2 - 3 = 0 \\
& \therefore \text{س}^3 - 3 = -2\text{س}^2 \\
& \therefore \text{س}^3 = 3 - 2\text{س}^2 \\
& \therefore \text{س}^3 + 2\text{س}^2 - 3 = 0 \\
& \therefore \text{س} = 1 \pm \\
& \therefore \text{ص} = \sqrt{3} \pm
\end{aligned}$$

مثال: إذا كانت $س$ و $ك$ فأوجد مجموعة الحل للمعادلة $س^2 - 2(س+2) - (س+1) = 0$

الحل

$$\therefore \text{س} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(-1)(س+2)}}{2}$$

حيث $ا = 1$ ، $ب = -2(س+2)$ ، $ج = -(س+1)$

$$\therefore \text{س} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4(س+2)(س+1)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4س^2 + 12س + 12}}{2}$$

ثم نفرض أن $ل = س + 2$ و $م = س + 1$ وبتربيع الطرفين

$$\therefore 4س^2 + 12س + 12 = 4ل^2 + 4م^2$$

$$\therefore 4س^2 + 12س + 12 = 4ل^2 + 4م^2 \dots\dots (1)$$

بتربيع (1)، (2) والجمع $4س^2 + 12س + 12 = 4ل^2 + 4م^2$

$$\therefore 4س^2 + 12س + 12 = 4ل^2 + 4م^2 \dots\dots (2)$$

$$\text{بجمع (1)، (2)} \quad 32 = 4ل^2 \quad \therefore ل = 2 \pm$$

$$\text{ب طرح (1) من (2)} \quad 18 = 4م^2 \quad \therefore م = 3 \pm$$

$$\therefore \sqrt{4س^2 + 12س + 12} = \pm (3 + 2)$$

$$\therefore \text{س} = \frac{-2 \pm (3 + 2)}{2}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{-2 + 6}{2} = 2 \quad \text{و} \quad \frac{-2 - 5}{2} = -\frac{7}{2}$$

$$\text{ا، س} = \frac{-2 - 2}{2} = -2 \quad \text{و} \quad \frac{-2 - 4}{2} = -3$$

\therefore مجموعة الحل للمعادلة هي: $\{-2, -3, 2, 3\}$

تمارين (١٠)

- استخدم نظرية دي موافر الجذرين التربيعين لكل من الأعداد الآتية:

(١) ٢- $\sqrt[3]{7} - 1$ ت

(٣) ٢- $\sqrt[3]{7} + 2$ ت (٤) ٤ (جتا $\frac{ط}{٣}$ - ت جا $\frac{ط}{٣}$)

(٥) ٩ (جتا $٣٠٠^\circ +$ ت جا ٣٠٠°) (٦) $\frac{٨-}{\sqrt[3]{٧+١} ت}$

- أوجد الجذرين التربيعين لكل مما يأتي نون التحويل للصورة المثلثية :-

(٧) ٦- ٨- ت (٨) ١٢- ٥

(٩) $\frac{٧+ ت}{ت+١}$ (١٠) $\frac{١٧+٣١}{ت-١}$

(١١) إذا كان $ع^٢ = ٣ + ٤$ ت أثبت ان $ع + ٥ = ع^١ = \pm ٤$

(١٢) إذا كان (س+ ت ص) $٢ + \frac{(ت-١)٨}{ت+١} = ١٥$ صفر فأوجد قيمتي س ، ص الحقيقية التي

تحقق المعادلة .

(١٣) إذا كان س+ ت ص = $\frac{٤-٧ ت}{ت+٢}$ حيث س ، ص حقيقتان فأوجد قيمة $\sqrt[٢]{٢س- ت}$ ص

(١٤) إذا كانت س = $\frac{٢+١ ت}{ت-١}$ ، ص = $\frac{٢-١ ت}{ت+١}$ أوجد : قيمة $\sqrt[٥]{٣س + ٥ص}$

(١٥) إذا كانت س و ك حل المعادلة

$(ت+٢) س^٢ - ٣(ت+١) س - ٤(ت-١) =$ صفر

- أوجد الصورة المثلثية لقيم المقادير الآتية:-

(١٦) $\sqrt[٢]{(ت+٣\sqrt{7})}$ (١٧) $\sqrt[٢]{(ت-٦٤)}$

(١٨) $\sqrt[٢]{(ت+١)}$ (١٩) $\sqrt[٢]{(٣٢)}$

- حل كل من المعادلات الآتية في ك :-

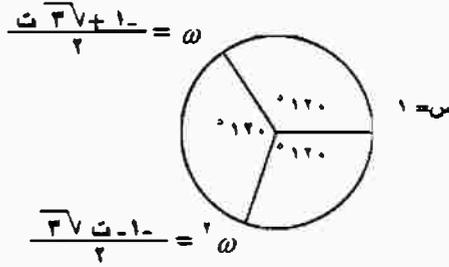
(٢٠) $٠ = ١ + ٥$ س

(٢١) $ع^٥ = ١ - \sqrt[3]{7}$ ت

الجزور التكعيبية للواحد الصحيح

$$[\sqrt[3]{\omega} = \omega, \sqrt[3]{\omega^2} = \omega^2, \sqrt[3]{\omega^4} = \omega]$$

أي للواحد الصحيح ثلاثة جذور أحدهما حقيقي والجذران الأخران تخيليان مترافقان



■ خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :

١. مربع أحد الجذرين التخيليين = الجذر التخيلي الآخر .
٢. مجموع الجذور التكعيبية للواحد الصحيح = صفر .
٣. الفرق بين الجذرين التخيليين = $\pm \sqrt[3]{\omega}$
٤. حاصل ضرب الجذرين التخيليين = ١

■ علاقات هامة بين الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :

$\sqrt[3]{\omega} \pm \sqrt[3]{\omega^2} = -\omega$	$1 = \omega \times \omega^2$	$0 = \omega + \omega^2 + 1$
<u>طرح الجذور</u>	<u>ضرب الجذور</u>	<u>جمع الجذور</u>
إذا اعتبرنا	$\frac{1}{\omega} = \omega^2$	$\omega - = \omega + 1$
$\sqrt[3]{\omega} = -\omega - \sqrt[3]{\omega^2}$	$\frac{1}{\omega^2} = \omega$	$\omega - = \omega^2 + 1$
فإن: $\sqrt[3]{\omega} - = \omega + \omega^2$	$1 = \omega^3$	$1 - = \omega + \omega^2$
والعكس صحيح		$0 = \omega^3 + \omega^2 + 1$

■ كيفية اختزال قوى ω :

اقسم الأس علي ٣ وبقي خارج القسمة هو الأس الجديد لـ ω .

$$1 = \omega^0 \quad , \quad \omega = \omega^1 \quad , \quad \omega^2 = \omega^2 \quad , \quad \omega^3 = \omega^0 \quad , \quad \omega^4 = \omega^1 \quad , \quad \omega^5 = \omega^2 \quad , \quad \omega^6 = \omega^0 \quad , \quad \omega^7 = \omega^1 \quad , \quad \omega^8 = \omega^2 \quad , \quad \omega^9 = \omega^0 \quad , \quad \omega^{10} = \omega^1 \quad , \quad \omega^{11} = \omega^2$$

مثال: اثبت أن $(\omega + 1)^0 = 1$.

الحل

$$\begin{aligned} \therefore \omega + 1 &= \omega^1 + \omega^0 + 1 \\ \therefore (\omega + 1)^0 &= \omega^0 + \omega^0 + 1 \\ \therefore (\omega + 1)^0 &= 1 + 1 + 1 = 3 \end{aligned}$$

مثال: اثبت ان : $1 = \frac{1}{\omega^2 + \omega + 1} + \frac{1}{\omega^2 + \omega^2 + 1}$

الحل

نجعل المقدار المكون من ثلاثة حدود ثنائي الحد

$$\therefore \omega^2 + \omega^2 + 1 \quad , \quad \omega^2 + \omega + 1 = \omega^2 - 1$$

$$\therefore \omega^2 + \omega + 1 = \omega^2 - 1 - \omega^2 + \omega + 1$$

$$\therefore \omega^2 + \omega + 1 = \omega^2 - 1 - \omega^2 + \omega + 1 = \omega - 1$$

$$\therefore \frac{1}{\omega^2 + \omega + 1} = \frac{\omega + 1 + \omega - 1}{(\omega - 1)(\omega + 2)} = \frac{1}{\omega - 1} + \frac{1}{\omega + 2} = \text{المقدار}$$

$$1 = \frac{1}{\omega^2 + \omega + 1} + \frac{1}{\omega^2 + \omega^2 + 1} = \frac{1}{\omega - 1} + \frac{1}{\omega + 2}$$

مثال: إذا كان ω أحد الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فأوجد قيمة :

$$\left[\frac{\omega^4 - \omega^3 - 2}{\omega^2 + \omega + 1} - \frac{\omega^4 - \omega^3 + 2}{\omega^2 + \omega^2 - 3} \right]$$

الحل

$$\omega = \frac{(\omega^4 - 3 + \omega^2)\omega}{(\omega^2 + \omega^2 - 3)} = \frac{\omega^4 - \omega^3 + 2}{\omega^2 + \omega^2 - 3}$$

$$\frac{1}{\omega} = \frac{\omega^4 - \omega^3 + 2}{(\omega^4 - \omega^3 + 2)\omega} = \frac{\omega^4 - \omega^3 - 2}{\omega^4 - \omega^3 + 2} : \text{الكسر الثاني}$$

$$\therefore \text{المقدار} [\omega - \omega] = \left[\frac{1}{\omega} - \omega \right]$$

$$3 = \omega^3 = (\omega^3) = \left[\sqrt[3]{\omega^3} \pm \right] = \left[\sqrt[3]{\omega^3} \pm \right]$$

مثال: اثبت ان:

$$\text{صفر} = \left(\frac{1}{\omega} + \omega^2 + 3 \right) + \left(\frac{1}{\omega} + \omega^3 + 2 \right) + \left(\frac{1}{\omega} + \omega^2 + 2 \right)$$

الحل

$$\text{الطرف الأيمن} = (\omega^2 + \omega^2 + 3) + (\omega^2 + \omega^3 + 2) + (\omega^3 + \omega^2 + 2) =$$

$$[3 + (\omega + \omega)^2] + [\omega^3 + (\omega + 1)^2] + [\omega^3 + (\omega + 1)^2] =$$

$$(\omega + \omega^2) + [\omega^3 + \omega \times 2] + [\omega^3 + \omega^2 - 1] =$$

$$1 + \omega + \omega = 1 + \omega + (\omega) =$$

$$\text{صفر} = 1 + \omega + \omega =$$

$$\omega = \frac{\omega - \omega + 1}{\omega + \omega - 1} : \text{مثال: اثبت ان}$$

الحل

$$\omega = \frac{\omega^2 - 1}{\omega^2 - 1} = \frac{\omega - 1}{\omega - 1} = \frac{\omega - (\omega + 1)}{\omega - (\omega + 1)}$$

$$1 = \frac{\omega + 3}{\omega^2 + 1} + \frac{\omega + 3}{\omega^2 + 1} : \text{مثال: اثبت ان}$$

الحل

$$\frac{(\omega^2 + 1)(\omega + 3) + (\omega^2 + 1)(\omega + 3)}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 1)} = \text{الطرف الأيمن}$$

$$\frac{\omega^2 + \omega + \omega^2 + 3 + \omega^2 + \omega + \omega^2 + \omega + \omega^2 + 3}{\omega^4 + \omega^2 + \omega^2 + 1} =$$

$$1 = \frac{3}{3} = \frac{7-10}{2-5} = \frac{(\omega + \omega^2)^7 + 10}{(\omega + \omega^2)^2 + 5} = \frac{\omega^7 + \omega^2 + 10}{(\omega + \omega^2)^2 + 5} =$$

مثال: إذا كانت $1, \omega, \omega^2$ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فاثبت أن:

$$\sqrt[3]{7} \pm \sqrt[3]{10} = \omega - \omega^2 = \omega^2 - \omega$$

الحل

$$\frac{\sqrt[3]{7} - 10}{2} = \omega^2, \quad \frac{\sqrt[3]{7} + 10}{2} = \omega$$

$$\sqrt[3]{7} - 10 = \omega^2, \quad \sqrt[3]{7} + 10 = \omega$$

الفرق بين ω, ω^2 $\sqrt[3]{7} \pm 10$

$$\omega \pm \omega^2 = \sqrt{\frac{\omega^6 + \omega^5 + 5}{\omega^6 + \omega^7 + 7}} \quad \text{مثال: اثبت أن:}$$

الحل

بالتربيع للطرفين

$$\omega = \frac{\omega^6 + \omega^5 + 5}{\omega^6 + \omega^7 + 7}$$

$$\omega = \frac{\omega^6 + (\omega + 1)5}{\omega^6 + \omega^7 + 7}$$

$$\omega = \sqrt{\omega} = \frac{\omega}{1} = \frac{\omega^6 + \omega - 5}{\omega^6 + \omega^7 + 7} =$$

مثال: حل المعادلة $\omega^2 + 1 = \omega^3$ حيث $\omega^3 = 1$

الحل

$$\omega^2 + 1 = \omega^3 \Rightarrow \frac{\sqrt[3]{7} + 1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt[3]{7} + 1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{\sqrt[3]{7} + 1}{2} + 1 = \omega^3$$

$$\frac{\sqrt[3]{7} + 1}{2} =$$

$$س^2 = [60جا + 60جت] = 2$$

$$(30جتا + 30جات) = \left(\frac{60}{4}جتا + \frac{60}{4}جات \right) = س$$

$$س^2 = (210جتا + 210جات) = 210 \quad \therefore س = \frac{210}{4}$$

مثال: اثبت ان

$$\frac{0}{13} = \frac{1}{\omega - \omega^2 + 3} + \frac{1}{\omega + \omega^2 - 2}$$

الحل

$$\omega^3 - 1 = \omega - 1 \quad \omega^2 - 2 = 2\omega + \omega^2 - 2 \quad \therefore$$

$$\omega^3 + 4 = \omega + 1 + \omega^2 + 3 = (\omega - 1) - \omega^2 + 3 = 2\omega - \omega^2 + 3,$$

$$\frac{1}{\omega^3 + 4} + \frac{1}{\omega^3 - 1} = \text{الطرف الأيمن}$$

$$\frac{0}{\omega^9 - \omega^6 - \omega^3 + 4} = \frac{\omega^3 - 1 + \omega^3 + 4}{(\omega^3 + 4)(\omega^3 - 1)} =$$

$$\frac{0}{13} = \frac{0}{(\omega + \omega^2)^9 - 4} = \frac{0}{\omega^9 - \omega^9 - 4} =$$

$$ت \quad \frac{3}{4} \pm = \sqrt{\frac{\omega^{10} + \omega^{10} + 1}{\omega^3 + \omega^3 - 1}} \quad \text{مثال: اثبت ان}$$

الحل

$$ت \quad \frac{3}{4} \pm = \frac{9}{4} \sqrt{=} = \frac{10-1}{3+1} \sqrt{=} = \frac{(\omega + \omega^2)^{10} + 1}{(\omega + \omega^2)^3 - 1} \sqrt{=} = \text{الطرف الأيمن}$$

$$\text{مثال: إذا كانت } س = \frac{\sqrt[3]{7+1}}{2} \text{ فاثبت ان } س^3 + س^2 + س + 1 = 0$$

الحل

$$\frac{\sqrt[3]{7+1}}{2} = \omega = س$$

$$0 = 1 + \omega^2 + \omega$$

$$0 = 1 + \omega + \omega^2$$

مثال: اثبت أن $\gamma = {}^2(\omega - \omega^{-1}) + {}^2(\omega + 1)$

الحل

$${}^2[(\omega + \omega) - 1] + {}^2(\omega + 1)$$

$${}^2(1+1) + {}^2(\omega -) =$$

$$\gamma = 1 + 1 = {}^2 2 + {}^1 \omega - =$$

مثال: اختصر إلى أبسط صورة ${}^2(\frac{1-\omega}{\omega}) - {}^2(\frac{1}{\omega} + 2)$

الحل

$${}^2(\frac{1}{\omega} - {}^2 \omega) + {}^2({}^2 \omega + 2)$$

$${}^2 \omega + \omega^{-2} - 1 + {}^4 \omega + {}^2 \omega 2 + 2 =$$

$$\omega^{-2} - \omega + {}^2 \omega 5 + 5 =$$

$$\omega - ({}^2 \omega + 1) 5 =$$

$$\omega^{-6} = \omega - \omega 5 =$$

تمارين (١١)

• إذا كانت ω ، ω^2 هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فاثبت أن:

$$٨١ = (\omega^2 + \omega + 1)(\omega^2 + \omega + 1) \quad (١)$$

$$٣ = (\frac{1}{\omega + 1} - \frac{1}{\omega + 1}) \quad (٢)$$

$$٣ = (\frac{1 - \omega}{\omega}) - (\frac{1 + \omega^2}{\omega}) \quad (٣)$$

$$\frac{٩}{٢} = \frac{(\omega^2 + \omega + 1)(\omega^2 + \omega + 1)}{(\omega + 1)(\omega + 1)} \quad (٤)$$

$$\frac{٥}{٢} = (\frac{٣ - \omega}{\omega^2 + 1} - \frac{٣ - \omega}{\omega^2 + 1})(\omega - \omega) \quad (٥)$$

$$٤ = (\frac{1}{\omega^2 + \omega^3} - \frac{1}{\omega^3 + \omega^4 + \omega^5})(\omega + ٥) \quad (٦)$$

$$\frac{٤٨}{١٦٩} = (\frac{1}{\omega^2 + \omega^2 - 1} - \frac{1}{\omega^2 - \omega^2 + 1}) \quad (٧)$$

$$\omega + (\omega - 1) = (\frac{\omega}{\omega} + 1)(\frac{\omega}{\omega} + 1) \quad (٨)$$

$$\text{عدد حقيقي} = (\frac{٤}{\omega} - \omega^2 + 1)(\frac{٤}{\omega} - \omega^2 + 1) \quad (٩)$$

$$(\frac{1 + 1}{\omega + \omega(1 + 2) + 1}) \quad (١٠) \text{ لا يتوقف على قيمة } \omega$$

$$٩ = (\frac{\omega^7 - 2}{7 - \omega^2} - \frac{\omega^3 - ٥}{٣ - \omega^5}) \quad (١١)$$

(١٢) أوجد مجموعة ن حداً الأولى من المتتالية:

(١ ، ω ، ω^2 ، ω^3 ،) ثم أوجد هذا المجموع في أبسط صورة عندما

$n = ٣$ ، $٣ + ١$ ، $٣ + ٣$ ، $٣ + ٢$ حيث م عدد صحيح

$$(١٣) \text{ إذا كانت } \sqrt[٣]{\frac{1}{٢}} + \frac{1}{٢} = \text{صفر} \text{ فاثبت أن من } ٢٣ \text{ من } ١١ + ١ = \text{صفر}$$

$$(١٤) \text{ أوجد جذري المعادلة: } (\omega^2 + \omega + 1) + (\omega^2 + \omega + 1) = ٠$$

(١٥) أوجد قيمة $t + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \dots$ إلى ١٥ حداً

(١٦) أوجد مجموع ٢٣ حداً من المتتابعة الآتية ابتداءً من الحد الأول :

$$(\omega, t, \omega^2, t, \omega^3, t, \omega^4, t, \omega^5, \dots)$$

(١٧) أوجد قيمة $(\omega - 1)(\omega^2 - 1)(\omega^3 - 1)(\omega^4 - 1)(\omega^5 - 1)$

(١٨) كون المعادلة التي جذورها $(\omega^2 - \omega + 1)$ ، $(\omega^3 - \omega + 1)$ ، $(\omega^4 - \omega + 1)$

(١٩) إذا كان $s + ص = t = (\omega^2 - \omega - \frac{1}{t})$ حيث s ، $ص$ عدنان حقيقيان فأوجد

s ، $ص$

(٢٠) إذا كان $(t - 1)(s + ص) = 19 = (\frac{1}{\omega^3 + 5} + \frac{1}{\omega^3 - 2})$ فاثبت أن

$$\frac{7}{2} = s = ص$$

(٢١) حل المعادلة $s^2 = \omega + 1$