الباب الثاني

الأعـداد المـركبة

الحاجة إلى توسيع نظام الأعداد الحقيقية :

من دراستنا السابقة تعرفنا علي مجموعات الأعداد وهي :

١) **مجموعة الأعداد الطبيعية** ط = { ١، ٢ ، ٣ ، ٤ ، .... }

حيث جمع أو ضرب عددين طبيعيين هو عدد طبيعي

٢) **مجموعة الأعداد الكلية** ك = { ٠، ١ ، ٢ ، ٣ ، .... }

٣) **مجموعة الأعداد الصحيحة** ص= { ..... ، ٣- ، ٢- ، ١- ، ٠ ، ١ ، ٢، ٣ ، ...... }

وظهرت لتسمح بحلول معادلات في صورة س + أ = ب حيث ، ب أعداد طبيعية . فمثلا حل المعادلات س+ ٧ = ٣ هو س = ٣ - ٧

∴ س = -٤ وهذا الناتج لا يوجد في الأعداد الطبيعية .

٤) **مجموعة الأعداد النسبية (القياسية) :**

ق = { $\frac{أ}{ب}$: أ ، ب ∈ ص ، ب ≠ صفر }

وظهرت لتسمح بحلول معادلات في صورة أ س = ب

فمثلا : حل المعادلة ٤ س = ٩ هو س = $\frac{٩}{٤}$ وهذا الناتج لا يوجد في مجموعة الأعداد الصحيحة .

٥) **مجموعة الأعداد الحقيقية** ح = { الأعداد النسبية والغير نسبية }

وظهرت لتسمح بحلول معادلات مثل $س^{٢}$ = ٢ ∴ س = ± $\sqrt{٢}$

ورأينا أن أي نظام ينشأ كتوسيع للنظام الذي يسبقه لحل معادلات جديدة لم تكن قابلة للحل في النظام السابق .

مثلا المعادلة $س^{٢}$ + ١ = ٠ أي $س^{٢}$ = -١

فهذه المعادلة غير قابلة للحل في ح (مجموعة الأعداد الحقيقية) حيث لا يمكن إيجاد عدد حقيقي س يحقق المعادلة . لذلك كان التفكير في إيجاد مجموعة جديدة من الأعداد نجد فيها حلا لمثل هذه المعادلات هذه المجموعة الجديدة تسمي و " مجموعة الأعداد المركبة" .

العدد التخيلي ت :

نعلم أن $\sqrt{-١}$ ∉ ح لأنه لا يوجد عدد حقيقي مربعة = -١ ونرمز للعدد $\sqrt{-١}$ بالرمز ت وهو أول حرف من كلمة تخيلي (غير حقيقي) حيث $ت^{٢}$ = -١

قوي العدد ت :

∵ $ت^{٢} = -١$ ∴ $ت^{٣} = ت^{٢} \times ت = -ت$ ، $ت^{٤} = ت^{٢} \times ت^{٢} = ١$

وعلي العموم : $ت^{٤ن} = ١$ حيث $ن \in ص^{+}$ ، $ت^{٤ن+م} = ت^{م}$

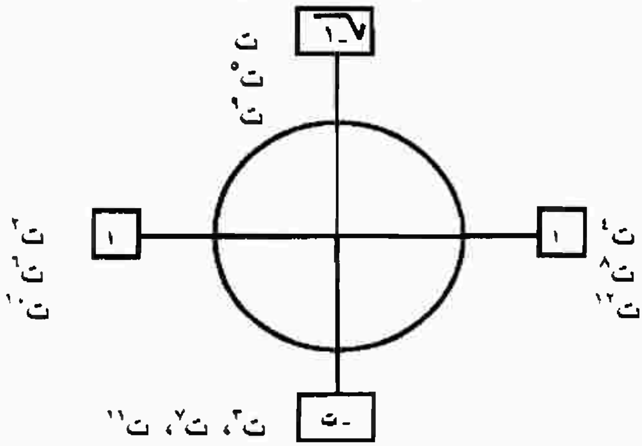
حيث م = ١، ٢، ٣ وهي بواقي قسمة أس (ت) علي ٤

فمثلاً : $ت^{٥} = ت^{٤+١} = ت$ ، $ت^{٦} = ت^{٤+٢} = ت^{٢} = -١$ ، $ت^{٧} = ت^{٤+٣} = ت^{٣} = -ت$

ويلاحظ أن : قوي ت الزوجية كميات حقيقية مثل $ت^{٢}$ ، $ت^{٤}$ ، $ت^{٦}$

وقوي ت الفردية كميات تخيلية مثل ت ، $ت^{٣}$ ، $ت^{٥}$

ومن المفيد تذكر هذا الرسم الذي يبين أن دورة ت رباعية



مثال: أكتب في ابسط صورة $ت^{٢٠}$ ، $ت^{٢١}$ ، $ت^{٢٢}$ ، $ت^{٢٣}$ ، $ت^{٢٤}$ ، $ت^{٥٠}$

الحـــــل

$ت^{٢٠} = (ت^{٤})^{٥} = ١$ ، $ت^{٢١} = ت^{٢٠+١} = ت$

$ت^{٢٢} = ت^{٢٠+٢} = ت^{٢} = -١$ ، $ت^{٢٣} = ت^{٢٠+٣} = ت^{٣} = -ت$

$ت^{٢٤} = (ت^{٤})^{٦} = ت^{٦} = ١$ ، $ت^{٥٠} = ت^{٤٨+٢} = ت^{٢} = -١$

مجموعة الأعداد التخيلية ( ) :

مجموعة الأعداد التخيلية = { ع: ع = ص ت ، ص ∈ ح ، $ت^{٢} = -١$ }

أي كل عدد بالصورة ص ت مثل ٣ت ، ٥ت ، -٧ ، $\sqrt{٣}$ ت ، ....

يسمي عدد تخيلي وينتمي إلي هذه المجموعة وأي عدد بالصورة $\sqrt{-أ}$ حيث أ عدد حقيقي موجب

هو عدد تخيلي ويكتب بالصورة ص ت مثل :

$\sqrt{-٣} = \sqrt{٣}$ ت ، $\sqrt{-٧} = \sqrt{٧}$ ت

∴ العدد التخيلي هو الجذر التربيعي لعدد حقيقي سالب .

مجموعة الأعداد المركبة

يعرف العدد المركب بأنه العدد الذي يمكن وضعه علي الصورة ع = س + ت ص حيث س، ص عددان حقيقيان . وتسمي س الجزء الحقيقي للعدد المركب ع وتسمي ص الجزء التخيلي للعدد المركب ع . وتسمي الصورة س + ت ص بالصورة الجبرية للعدد المركب ع .

فإذا كان ص = ٠ فإن العدد ع = س يكون حقيقيا صرفاً

فإذا كان س = ٠ فإن العدد ع = ت ص يكون تخيلياً صرفاً

كما يمكن كتابة العدد المركب ع علي هيئة زوج مرتب يكون العنصر الأول فيه هو الجزء الحقيقي والعنصر التالي هو الجزء التخيلي للعدد المركب .

ع = (س، ص) حيث س ، ص ∈ ح

وتسمي الصورة ع = (س، ص) الصورة الكارتيزية .

∴ العدد المركب هو الكمية التي تتركب من جزأين أحدهما حقيقي والآخر تخيلي .

ومجموعة الأعداد المركبة يمكن كتابتها بالصورة :-

ك = { ع : ع = س+ ت ص ، س ∈ ح ، ص ∈ ح}

<u>مثال</u> : حل المعادلة $س^٢$ ـ ٢س+ ٢ = ٠

الحـــــــل

∵ حل المعادلة $أس^٢$ + ب س + جـ = ٠ هو

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{المميز}}{٢أ} \quad \text{حيث المميز} = ب^٢ - ٤ أ جـ$$

∴ أ = ١ ، ب = -٢ ، جـ = ٢ ، المميز = $(-٢)^٢$ ـ ٤ (١) (-٢) = ٤ ـ٨ = ٤

، ∵ المميز < ٠ ∴ يوجد حلان ∈ إلي مجموعة الأعداد المركبة وهما

$$س = \frac{-(-٢) \pm \sqrt{-٤}}{٢(١)} = \frac{٢ \pm ٢ت}{٢} = \frac{٢[١ \pm ت]}{٢} = ١ \pm ت$$

∴ الحلول هي { ١+ت ، ١ـ ت }

نظام الأعداد المركبة

- **تعريف تساوي عددين مركبين :-**

١) يقال للعددين المركبين $س_١ + ت ص_١$ ، $س_٢ + ت ص_٢$ أنهما متساويان

إذا كان $س_١ = س_٢$، $ص_١ = ص_٢$ أي جزأيهما الحقيقيان يتساويان وجزأيهما التخيليان يتساويان أيضا.

أي أنه إذا كان $ع_١ = س_١ + ت ص_١ = (س_١ ، ص_١)$

، $ع_٢ = س_٢ + ت ص_٢ = (س_٢ ، ص_٢)$

وكانت $ع_١ = ع_٢$ فإن $س_١ = س_٢$ ، $ص_١ = ص_٢$

٢) إذا كان س+ ص ت = ٠ فإن س = ٠ ، ص = ٠

بمعني إذا أنعدم مقدار تخيلي مركب فإن الجزء الحقيقي ينعدم علي حده والجزء التخيلي ينعدم أيضاً علي حده .

مثال: أوجد قيمة س ، ص الحقيقة التي تحقق المعادلة :

(١+ ٢ت) س – (٢ + ٣ ت) ص = ١- ٤ ت

الحـــــــل

نضع الطرف الأيمن علي صورة عدد مركب

∴ س + ٢ س ت - ٢ ص- ٣ ص ت = ١- ٤ت

(س- ٢ص) + (٢س - ٣ص) ت = ١- ٤ت

∴ س -٢ ص = ١ ---- (١) ، ٢ س- ٣ص = -٤ ---- (٢)

بضرب طرفي المعادلة (١) في (٢)

∴ -٢س + ٤ص= -٢ وبالجمع مع (٢)

٢ س - ٣ص = -٤

ص = -٦ بالتعويض في (١) ∴ س = -١١

مثال: إذا كان س+ ت ص = أ + ب ت – أثبت أن : س = أ ، ص= ب حيث أ ، ب أعداد حقيقية.

الحـــــــل

∵ س+ ت ص = أ + ب ت

∴ (س - أ) = ت (ب – ص) بتربيع الطرفين

∴ $(\text{س} - \text{أ})^{2} = -(\text{ب} - \text{ص})^{2}$

∴ $(\text{س} - \text{أ})^{2} + (\text{ب} - \text{ص})^{2} = 0$

، ∵ لا يوجد عددان حقيقيان مجموع مربعيهما = صفر

∴ س - أ = ٠ ∴ س = أ

، ب - ص = ٠ ∴ ب = ص

تعريف مجموع عددين مركبين :-

(أ) إذا كان العددين علي الصورة العامة للأعداد المركبة :

$(\text{س}_{1} \mp \text{ت ص}_{1}) + (\text{س}_{2} \mp \text{ت ص}_{2}) = (\text{س}_{1} \mp \text{س}_{2}) + (\text{ص}_{1} \mp \text{ص}_{2})\,\text{ت}$

أي نجمع الجزأين الحقيقيين معاً والجزأين التخيليين معاً .

مثلاً :

إذا كان $\text{ع}_1 = 2 + 3\text{ت}$ ، $\text{ع}_2 = 4 - \text{ت}$

فإن : $\text{ع}_1 + \text{ع}_2 = (2+4) + (3 - 1)\,\text{ت} = 6 + 2\text{ت}$

، $\text{ع}_1 - \text{ع}_2 = \text{ع}_1 + (-\text{ع}_2)$ = ع۱ + المعكوس الجمعي للعدد المطروح

$= 2 + 3\text{ت} + (-4 + \text{ت}) = (2 - 4) + (3 + 1)\,\text{ت} = -2 + 4\text{ت}$

(ب) إذا كان العددين علي صورة الزوج المرتب :

إذا كان $\text{ع}_1 = (\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ ، $\text{ع}_2 = (\text{س}_2 ، \text{ص}_2)$ فإن :

$\text{ع}_1 \mp \text{ع}_2 = (\text{س}_1 \mp \text{س}_2 ، \text{ص}_1 \mp \text{ص}_2)$

مثلاً :

$\text{ع}_1 = (3 ، -1)$ ، $\text{ع}_2 = (0 ، 5)$

فإن: $\text{ع}_1 + \text{ع}_2 = (3 + 0 ، -1 + 5) = (3 ، 4)$

، $\text{ع}_1 - \text{ع}_2 = (3 - 0 ، -1 - 5) = (3 ، -6)$

تعريف حاصل ضرب عددين مركبين :-

(أ) إذا كان العددين علي صورة الزوج المرتب :

$\text{ع}_1 \cdot \text{ع}_2 = (\text{س}_1 ، \text{ص}_1)(\text{س}_2 ، \text{ص}_2) = (\text{س}_1\text{س}_2 - \text{ص}_1\text{ص}_2 ، \text{س}_1\text{ص}_2 + \text{س}_2\text{ص}_1)$

مثلاً : $(2 ، 3)(4 ، -1) = (2 \times 4 - 3 \times -1 ، 2 \times -1 + 3 \times 4)$

$= 8 + 3 ، -2 + 12 = (11 ، 10)$

(ب) إذا كان العددين علي الصورة العامة للأعداد المركبة:

$ع_1 . ع_2 = (س_1 + ت ص_1) (س_2 + ت ص_2)$

نتبع نفس قواعد حاصل ضرب المقادير الجبرية مع اختصار قوي ت

<u>مثلاً</u> : إذا كانت $ع_1 = ٢ + ٣ت$ ، $ع_2 = ٥ + ٤ت$

فإن

$$\begin{array}{r} ٢ + ٣ت \\ ٥ + ٤ت \\ \hline ١٠ + ١٥ت \\ + ٨ت + ١٢ت^2 \\ \hline ١٠ + ٢٣ت + ١٢(-١) = -٢ + ٢٣ت \end{array}$$

تمارين (٦)

- **<u>اختصر إلي أبسط صورة :-</u>**

(١) $(٥ + \sqrt{-٤}) + (٥ - \sqrt{-١٦})$

(٢) $(٢ - \sqrt{-٢٥}) (٣ + \sqrt{-٣٦})$

(٣) $(٣ - ٢ت) (٢ - ت)^2$

(٤) أجمع ت + ٢ت + ٣ت .... إلي ٢١ حداً

- **<u>أوجد قيمة كل من س ، ص الحقيقية</u>**

(٥) $(١ + ٢ت) س + ٣ (ت - ١) ص = ٩$

(٦) $س + ص ت = (١ + ت)^3$

- **<u>أوجد الناتج علي صورة عدد مركب</u>**

(٧) أوجد العدد المركب الذي يساوي $(١ + ت)^4 - (١ - ت)^4$

(٨) إذا كان $ص + ٩ - ٢ س (١ + ت) - (٣ - س^2) ت = ٠$ حيث س ، ص ∈ ح فأوجد قيمة كل من س ، ص

(٩) إذا كان $ع_1 = -\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت$ ، $ع_1 = -\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{١٠}}{٢} ت$ فأثبت أن : $ع_1^2 = ع_2$

(١٠) حل المعادلة :

$س^2 + ٥ = ٠$

خصائص عملية جمع الأعداد المركبة

(١) عملية الجمع علي الأعداد المركبة عملية تبديلية فإن كان :

$ع_١ = س_١ + ت ص_١$ ، $ع_٢ = س_٢ + ت ص_٢$ فإن:

$ع_١ + ع_٢ = (س_١ + ت ص_١) + (س_٢ + ت ص_٢) = (س_١ + س_٢) + (ص_١ + ص_٢) ت$

$= (س_٢ + س_١) + (ص_٢ + ص_١) ت = (س_٢ + ت ص_٢) + (س_١ + ت ص_١)$

$= ع_٢ + ع_١$

(٢) عملية جمع الأعداد المركبة تسيقيه (تجميعيه):

إذا كان $ع_١ = س_١ + ت ص_١$ ، $ع_٢ = س_٢ + ت ص_٢ + ع_٣ = س_٣ + ت ص_٣$

فإن: $ع_١ + (ع_٢ + ع_٣) = (ع_١ + ع_٢) + ع_٣$

(٣) العدد صفر هو المحايد الجمعي للأعداد المركبة :

$صفر + ع = ع + صفر = ع$

(٤) لكل عدد مركب ع معكوس جمعي (-ع) بحيث ع + (-ع) = صفر

فإذا كان $ع = س + ت ص$ فإن $-ع = -(س + ت ص) = -س - ت ص$

خصائص عملية ضرب الأعداد المركبة

(١) عملية ضرب الأعداد المركبة إبدالية:

$ع_١ ع_٢ = ع_٢ ع_١$ لكل $ع_١ ، ع_٢ \in ك$

(٢) عملية الضرب تجميعية (تسيقيه):

$(ع_١ ع_٢) ع_٣ = ع_١ (ع_٢ ع_٣) = ع_١ ع_٢ ع_٣$ لكل $ع_١ ، ع_٢ ، ع_٣ \in ك$

(٣) وجود العنصر المحايد:

$ع \times ١ = ١ \times ع = ع$ لكل $ع \in ك$

(٤) إذا فرض أن ع = س + ت ص فإنه يوجد معكوس ضربي يساوي

$$\frac{س}{س^٢ + ص^٢} - \frac{ص ت}{س^٢ + ص^٢}$$

ونرمز له بالرمز $ع^{-١}$ أ، $\frac{١}{ع}$ حيث $ع (\frac{١}{ع}) = ١$ لكل $ع \in ك$

(٥) عملية الضرب تتوزع علي عملية الجمع في ك

$ع_١ (ع_٢ + ع_٣) = ع_١ ع_٢ + ع_١ ع_٣$ لكل $ع_١ ، ع_٢ ، ع_٣ \in ك$

ملاحظة:

المحايد الضربي معكوسة نفسه ع = (١ ، ٠) فإن $ع^{-١} = \frac{١}{١+٠}$ ، $\frac{٠}{١+٠} = (١ ، ٠)$

قسمة عدد مركب علي آخر:

$\text{ع}_1 = (\text{أ} ، \text{ب})$ ، $\text{ع}_2 = (\text{جـ} ، \text{ء})$

$\therefore \frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2} = (\text{أ} ، \text{ب}) . (\text{جـ} ، \text{ء})^{-١}$

$= (\text{أ} ، \text{ب}) . \left(\frac{\text{جـ}}{\text{جـ}^2 + \text{ء}^2} ، \frac{-\text{ء}}{\text{جـ}^2 + \text{ء}^2} \right)$

$= \left(\frac{\text{أجـ} + \text{ب ء}}{\text{جـ}^2 + \text{ء}^2} ، \frac{\text{ب جـ} - \text{أ ء}}{\text{جـ}^2 + \text{ء}^2} \right)$

مثلا:

$$\frac{(٣،٢)}{(٤،٣)} = \left(\frac{٣\times٤ + ٢\times٣}{١٦ + ٩} ، \frac{٢\times٤ - ٣\times٣}{١٦ + ٩} \right) = \frac{١٨}{٢٥} ، \frac{-١}{٢٥}$$

مثال: أوجد قيمة $\sqrt{٥ - ١٢\text{ت}}$

الحـــــل

نفرض س + ت ص = $\sqrt{٥ - ١٢\text{ت}}$ بتربيع الطرفين

$\therefore (\text{س}^2 - \text{ص}^2) + ٢\,\text{س ص ت} = ٥ - ١٢\,\text{ت}$

$\therefore \text{س}^2 - \text{ص}^2 = ٥$ ----- (١) ، $٢\,\text{س ص} = -١٢$

$\therefore \text{س ص} = -٦$ ---- (٢)

لكن $(\text{س}^2 + \text{ص}^2) = (٥)^2 + (-١٢)^2 = ١٣$ ----- (٣)

$\therefore ٢\text{س}^2 = ٥ + ١٣ = ١٨$ $\therefore \text{س} = \pm ٣$ ، $\text{ص} = -\frac{٦}{\text{س}} = \pm ٢$

$\therefore \sqrt{٥ - ١٢\text{ت}} = \pm ٣ \pm ٢\text{ت}$

مثال: إذا كان ع عدداً مركبا في المعادلة $(١،٢)\text{ع} + (١،-٢) = \frac{(٤،٦)}{(١،١)}$

الحـــــل

$\because (١،٢)\text{ع} + (١،-٢) = \frac{٤\times١ + ٦\times١}{(١)^2 + (١)^2} ، \frac{٦\times١ - ٤\times١}{(١)^2 + (١)^2}$

$= \left(\frac{١٠}{٢} ، \frac{٢}{٢} \right) = (٥ ، ١)$

$\therefore (١ ، ٢)\,\text{ع} = (٥ ، ١) - (١ ، -٢) = (٤ ، ٣)$

$\text{ع} = \frac{(٤،٣)}{(١،٢)} = \frac{٤+٦}{٥} ، \frac{٣-٨}{٥} = (٢ ، -١)$

مثال:

إذا كانت س = (١،٢) ، ص = (٣،٤) ، ع = (٧،١) حيث س، ص ، ع أعداد مركبة أثبت أن :

$$\frac{1}{\text{س}} + \frac{20}{\text{ع}} - \frac{5}{\text{ص}} = (2.4 \,،\, 0)$$

الحـــــل

الطرف الأيمن: $1(\text{س}^{-1}) + 20(\text{ع}^{-1}) - 5(\text{ص}^{-1})$

$$\therefore \left(\frac{1}{5} \,،\, \frac{-2}{5}\right) + 20\left(\frac{7}{50} \,،\, \frac{-1}{50}\right) - 5\left(\frac{3}{25} \,،\, \frac{-4}{25}\right)$$

$$\left(\frac{1}{5} \,،\, \frac{-2}{5}\right) + \left(\frac{140}{50} \,،\, \frac{20}{50}\right) - \left(\frac{15}{25} \,،\, \frac{-5\times 4}{25}\right)$$

$$\left(\frac{1}{5} \,،\, \frac{-2}{5}\right) + \left(\frac{14}{5} \,،\, \frac{-2}{5}\right) - 5\left(\frac{3}{5} \,،\, \frac{-4}{5}\right)$$

$$\left(\frac{15}{5} \,،\, \frac{-4}{5}\right) - \left(\frac{3}{5} \,،\, \frac{-4}{5}\right) = \left(\frac{12}{5} \,،\, \text{صفر}\right) = (2.4 \,،\, \text{صفر})$$

مثال: إذا كان ع = س + ص ت حيث س ≠ ٠ ، ص ≠ ٠ فأثبت أن :

$$\text{ع}^{-1} = \frac{\text{س}}{\text{س}^2 + \text{ص}^2} - \frac{\text{ص ت}}{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$$

الحـــــل

الفكرة هي إثبات أن $\text{ع} \times \text{ع}^{-1} = \text{ع}^{-1} \times \text{ع} = 1$ (المحايد الضربي)

$$\therefore \text{ع} \times \text{ع}^{-1} = (\text{س} + \text{ت ص})\left(\frac{\text{س}}{\text{س}^2 + \text{ص}^2} - \frac{\text{ص}}{\text{س}^2 + \text{ص}^2}\,\text{ت}\right)$$

$$= \left(\frac{\text{س}^2}{\text{س}^2 + \text{ص}^2} + \frac{\text{ص}^2}{\text{س}^2 + \text{ص}^2}\right) + \left(\frac{-\text{س ص}}{\text{س}^2 + \text{ص}^2} + \frac{\text{س ص}}{\text{س}^2 + \text{ص}^2}\right)\text{ت}$$

$$= \frac{\text{س}^2 + \text{ص}^2}{\text{س}^2 + \text{ص}^2} + \text{صفر} = 1 \quad ----- (1)$$

، ∵ الضرب عملية إبدالية ∴ $\text{ع}^{-1} \times \text{ع} = 1$ ----- (٢)

من (١) ، (٢) يثبت المطلوب

مثال: إذا كان الزوج المرتب (أ ، ب) يعبر عن أ + ب ت وكان: $\text{ع}_1 = (2 \,،\, \sqrt{3})$

، $\text{ع}_2 = (3 \,،\, -\sqrt{3})$ فأوجد كلاً من $\text{ع}_1 + \text{ع}_2$ ، $\text{ع}_1\text{ع}_2$

الحـــــل

$ع_١ + ع_٢ = (٢ ، \sqrt{٣}) + (٣ ، -\sqrt{٣}) = (٥ ، ٠)$

، $ع_١ ع_٢ = (٢ ، \sqrt{٣})(٣ ، -\sqrt{٣})$

$=$ س١ س٢ – ص١ ص٢ ، س١ ص٢ + س٢ ص١

$= ٦ + ٣ ، ٣\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٣} = (٩ ، \sqrt{٣})$

العدد المرافق لعدد مركب

إذا كان العدد المركب ع = س + ت ص فإن العدد المركب عَ = س – ت ص يسمي مرافق العدد ع

- لاحظ أن العدد المركب ع ، مرافقه عَ لا يختلفان إلا في إشارة الجزء التخيلي منهما.

مثلاً : العدد ٣ + ٤ ت مرافقه ٣ – ٤ ت ، مرافق العدد ٣ هو نفسه

∴ العددان المركبان المترافقان :

أ) جزآ هما الحقيقيان متساويان .

ب) جزآ هما التخيليان مختلفان في الشارة فقط .

خواص العددان المترافقان :

(١) مجموع عددين مترافقين هو عدد حقيقي قيمته ضعف الجزء الحقيقي لأيهما .

فإذا كان ع = س + ت ص فإن عَ = س – ت ص

∴ ع + عَ = س + ت ص + س – ت ص = ٢ س = عدد حقيقي .

(٢) حاصل ضرب أي عددين مركبين مترافقين = عدد حقيقي

لأن ع × عَ = (س + ت ص) (س- ت ص) = $س^٢ - ص^٢ ت^٢ = س^٢ + ص^٢$ = عدد حقيقي قيمته مربع الجزء الحقيقي + مربع الجزء التخيلي .

(٣) الفرق بين العددين المركبين المترافقين عدد تخيلي.

(٤) المرافق لمجموع عددين مركبين = مجموع مرافقيهما

أي $\overline{ع_١ + ع_٢} = \overline{ع_١} + \overline{ع_٢}$

(٥) المرافق لحاصل ضرب عددين مركبين يساوي حاصل ضرب مرافقيهما

أي أن : $\overline{ع_١ \times ع_٢} = \overline{ع_١} \times \overline{ع_٢}$

(٦) المرافق لخارج قسمة عددين مركبين يساوي خارج قسمة مرافقيهما

أي : $\overline{ع_١ \div ع_٢} = \overline{ع_١} \div \overline{ع_٢}$

ملاحظة:

$$\overline{\left(\frac{١}{ع}\right)} = \frac{١}{\bar{ع}} \quad ، \quad \overline{(\bar{ع})} = ع$$

مثال: إذا كانت $ع^{-١} = (٣ ، ١)$ فإن ع = ...

الحـــــل

∵ $ع^{-١} = (٣ ، ١)$ ∴ $ع = (٣ ، ١)^{-١}$

$$= \left(\frac{٣}{١٠} ، \frac{١}{١٠}\right)$$

مثال: إذا كان (س، ص) عدداً مركباً وكان (س، ص) = $\frac{(٣،٢)}{(٣،٢)}$ فإن س = ... ، ص = ...

الحـــــل

∵ $(س، ص) = \frac{(٣،٢)}{(٣،٢)} = \left(\frac{٦+٦}{١٣} ، \frac{٩-٤}{١٣}\right)$

∴ $(س، ص) = \left(\frac{١٢}{١٣} ، \frac{-٥}{١٣}\right)$

∴ $س = \frac{١٢}{١٣}$ ، $ص = \frac{-٥}{١٣}$

مثال: اوجد $\sqrt{\frac{-٧ + ت}{١ + ت}}$

الحـــــل

نفرض المقدار = س+ ت ص ثم بالتربيع للطرفين

∴ $\frac{-٧ + ت}{١ + ت} \times \frac{١ - ت}{١ - ت} = -٣ + ٤ ت$

∴ $س^٢ - ص^٢ = -٣$ ---- (١)

، ٢س ص = ٤ ---- (٢) ، ∵ $س^٢ + ص^٢ = \sqrt{٩ + ١٦} = ٥$

∴ س = ± ١ ، ص = ± ٢

مثال: اوجد قيمة $س^٢ + ص^٢$ إذا كان : س + ت ص = $\frac{٣ - ٢ت}{٣ + ٢ت}$

الحـــــل

الطرف الأيسر = $\frac{٣ - ٢ت}{٣+٢ت} \times \frac{٣ - ٢ت}{٣-٢ت} = \frac{٥-١٢ت}{١٣}$

∴ س + ت ص = $\frac{٥-١٢ت}{١٣} = \frac{٥}{١٣} - \frac{١٢}{١٣}$ ت

∴ س = $\frac{٥}{١٣}$ ، ص = $\frac{-١٢}{١٣}$

∴ س^{٢} + ص^{٢} = $\frac{٢٥}{١٦٩}$ + $\frac{١٤٤}{١٦٩}$ = ١

<u>مثال</u>: حل المعادلة (١، ٢) ع + (٣، ٢) = (٤، -٢) حيث ع عدد مركب

الحــــــل

(١، ٢) ع = (٤ ، -٢) − (٣، ٢) = (١، -٤)

∴ ع = $\frac{(١،-٤)}{(١،٢)}$ = ($\frac{١-٨}{٥}$ ، $\frac{-٤-٢}{٥}$) = ($\frac{-٧}{٥}$ ، $\frac{-٦}{٥}$)

<u>مثال</u>: أوجد قيمتي (س، ص) الحقيقيتين:

$$\frac{(١+ت)\,(٢س+ت\,ص)}{٣-ت} = \frac{١+٢ت}{٢-ت}$$

الحــــــل

بضرب الطرفين في (٣-ت) (٢-ت)

∴ (١+ت) (٢-ت) (٢س + ت ص) = (١+٢ت) (٣-ت)

∴ ٢س + ت ص = $\frac{(١+٢ت)(٣-ت)}{(١+ت)(٢-ت)}$

= $\frac{٣+٥ت-٢ت^{٢}}{٢+ت-ت^{٢}}$ = $\frac{٥+٥ت}{٣+ت}$

∴ ٢س + ت ص = $\frac{٥+٥ت}{٣+ت}$ × $\frac{٣-ت}{٣-ت}$ = $\frac{١٥+١٠ت-٥ت^{٢}}{٩-ت^{٢}}$

= $\frac{٢٠+١٠ت}{١٠}$ = $\frac{١٠(٢+ت)}{١٠}$ = ٢ + ت

∴ ٢س = ٢ ∴ س = ١ ، ص = ١ ∴ ص = ١

<u>مثال</u>: إذا كان (أ+ب ت) (١+ت) − ٥ = ت حيث ت = $\sqrt{-١}$ فأوجد القيمتين لكل من أ ، ب

الحــــــل

∴ (أ+ب ت) (١+ت) = ٥ + ت

∴ أ + أ ت + ب ت − ب = ٥ + ت ∴ (أ-ب) + (أ ت + ب ت) = ٥ + ت

∴ (أ-ب) + (أ + ب) ت = ٥ + ت

∴ أ − ب = ٥ ---- (١)

∴ أ + ب = ١ ---- (٢)

٢أ = ٦ ∴ أ = ٣ ، ب = ٢

مثال: إذا كان (-٢) أحد جذري المعادلة $س^{٣} + ٤س^{٢} + ١٧س + ٢٦ = ٠$ فأوجد الجذرين الآخرين وأثبت أنهما مترافقان .

الحـــــــل

$$\begin{array}{l|l} س^{٣} + ٤س^{٢} + ١٧س + ٢٦ & س + ٢ \\ \hline س^{٣} + ٣س^{٢} & س^{٢} + ٢س + ١٣ \\ \hline ٢س^{٢} + ١٧س & \\ -٢س^{٢} + ٤س & \\ \hline ١٣س + ٢٦ & \\ ١٣س + ٢٦ & \\ \hline ٠ \quad\quad ٠ & \end{array}$$

$\therefore (س+٢)(س^{٢} + ٢س + ١٣) = ٠$ إما $س = -٢$

أو $س^{٢} + ٢س + ١٣ = ٠$

$\therefore س = \dfrac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$ حيث $أ = ١$ ، $ب = ٢$ ، $جـ = ١٣$

$= \dfrac{-٢ \pm \sqrt{٤ - ٤ \times ١ \times ١٣}}{٢} = \dfrac{-٢ \pm \sqrt{٤٨}}{٢} = \dfrac{-٢ \pm ٤\sqrt{٣}\,ت}{٢}$

$= -١ \pm ٢\sqrt{٣}\,ت$

$\therefore$ الجذران $-١ + ٢\sqrt{٣}\,ت$ ، $-١ - ٢\sqrt{٣}\,ت$ مترافقان

مثال: إذا كان $ل = \dfrac{٨+٦ت}{٣+ت}$ ، $م = \dfrac{١٢-١٤ت}{٥-٣ت}$ اثبت أن ل ، م مترافقان

ثم أحسب قيمة $\dfrac{ل^{٣} - م^{٣}}{ل - م}$

الحـــــــل

$ل = \dfrac{(٨+٦ت)(٣-ت)}{(٣+ت)(٣-ت)} = \dfrac{٢٤+١٠ت+٦}{٩+١} = ٣ + ت$

$م = \dfrac{(١٢-١٤ت)(٥+٣ت)}{(٥-٣ت)(٥+٣ت)} = \dfrac{٦٠-٣٤ت+٤٢}{٢٥+٩} = ٣ - ت$

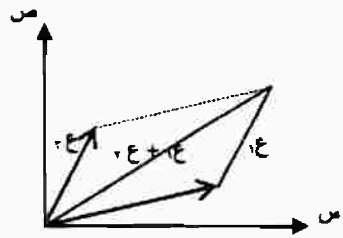
، $ل + م = ٦$ ، $ل م = ١٠$

$\therefore \dfrac{ل^{٣} - م^{٣}}{ل - م} = \dfrac{(ل - م)(ل^{٢} + ل م + م^{٢})}{(ل - م)} = [(ل + م)^{٢} - ل م]$

$= ٣٦ - ١٠ = ٢٦$

المعني الهندسي لجمع وطرح الأعداد المركبة

(١) الجمع:-



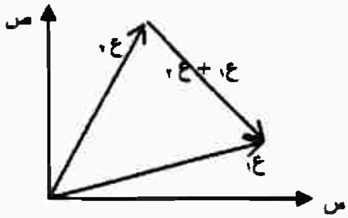
مثلا : ع١ = (٦ ، ٢)

ع٢ = (-٢، ٤)

∴ ع١ + ع٢ = (٦ ، ٢) + (-٢، ٤)

= (٤ ، ٦)

(٢) الطرح:



مثلا : ع١ = (٤ ، ٢)

ع٢ = (-٣، ٥)

∴ ع١ - ع٢ = (٤، ٢) - (-٣، ٥)

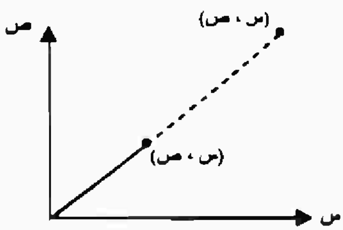
= (٤ ، ٢) + (٣ ، -٥)

= (٧ ، -٣)

المعني الهندسي لضرب عددين مركبين

(١) ضرب عدد حقيقي ك في عدد مركب ع = س + ت ص

(أ) إذا كان ك > ٥ (موجب)



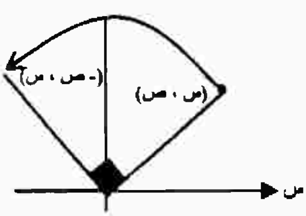
(٢) عند ضرب ت في عدد مركب ع = س + ت ص

ت (س+ ص) = ت س + ت٢ ص = - ص + ت س

أي تتحول النقطة (س ، ص) إلي النقطة (- ص، س)

وهو دوران موجب بزاوية ٩٠ ° في الإتجاه الموجب

حول نقطة الأصل.



مثلا : ع = ١ + ٢ ت   ∴ ت ع = -٢ + ت

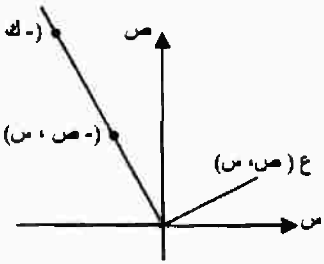
(٣) ضرب ك ت في العدد المركب ع = س + ت ص

ك ت (س+ ت ص) = - ك ص + ت ك س

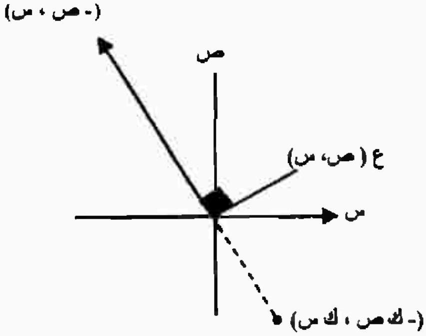
∴ النقطة (س، ص) يحدث لها دوران موجب حول نقطة الأصل بزاوية مقدارها ٩٠°

فتصبح (- ص ، س) فتنتج النقطة (- ك ص ، ك س) .

(أ) ك > صفر



(ب) ك < صفر



مثال: ع = ٣ + ٢ت

∴ ٣ت ع ------ ؟

∵ (٣، ٢) $\xrightarrow{\text{دوران بزاوية ٩٠}}$ (-٢، ٣) $\xrightarrow[\text{٣}]{\text{تكبير بمعامل}}$ (- ٦، ٩)

(٤) ضرب عددين مركبين:-

$ع_1$ = $س_1$ + ت $ص_1$ ، $ع_2$ = $س_2$ + ت $ص_2$

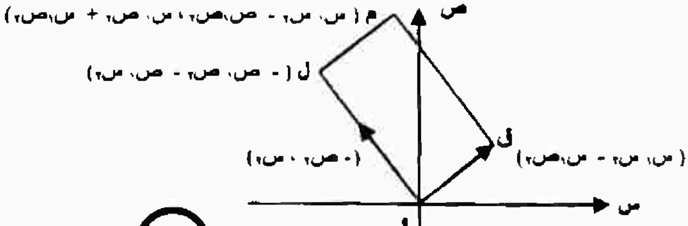
∴ التفسير الهندسي لحاصل ضرب $ع_1$ × $ع_2$ نتبع ما يلي:-

(أ) نعين النقطة التي تمثل حاصل ضرب $س_1$ في ($س_2$+ ت $ص_2$) وهي النقطة (س $س_2$+ $س_1$ $ص_2$)

(ب) دوران ($س_1$ $ص_2$) بزاوية قدرها ٩٠° ضد حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل فتنتج النقطة (- $ص_2$ ، $س_2$) التي هي عبارة عن حاصل ضرب ت في ($س_2$ + ت $ص_2$) والتي عبارة هي عن حاصل ضرب ت في ($س_2$ + ت $ص_2$) .

(ج) تعيين النقطة (- $ص_1$$ص_2$ ، $ص_1$ $س_2$) الناتجة من حاصل ضرب ($ص_2$ ، $س_2$) في $ص_1$

(د) توجد النقطة التي تمثل مجموعة الصورتين ($س_1$ $س_2$ ، $س_1$$ص_2$) ، (- $ص_1$$ص_2$، $ص_1$$س_2$)



تمارين (٧)

■ **أوجد قيم س، ص الحقيقية في كل مما يأتي :**

(١) (٣ + ٤ت) (٥ - ٧ت) = س + ت ص

(٢) (٣ - ٢ت) س + (٥ + ٣ ت) ص = ٤ - ٩ ت

(٣) (٢س - ٣ت ص) (١ + ٢ ت) = $(\text{٢ - ت})^{٢}$

(٤) $\frac{\text{س + ت ص}}{\text{١ + ت}} + \frac{\text{٢س + ٣ت ص}}{\text{١ - ت}} = \frac{\text{٧}}{\text{٢}}$

(٥) $\frac{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}}{\text{س - ت ص}} = \frac{\text{٣ت - ١}}{(\text{٣ + ت})^{٢}} + \frac{\text{ت - ٣}}{(\text{١ + ٣ت})^{٢}}$

(٦) $\frac{\text{١ + ت}}{\text{٢ + ت}} + \frac{\text{٢ + ت}}{\text{١ + ٢ت}} = \frac{\text{س + ص + ت}}{\text{س - ص + ت}}$

(٧) إذا كان $\frac{\text{أ + ب ت}}{\text{أ - ب ت}}$ = س + ت ص

أثبت أن $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}$ = ١ مهما كانت قيمة كل من أ ، ب

(٨) إذا كان أ + ب ت = $\frac{\text{٢ + ت}}{\text{١ - ت}}$ حيث أ ، ب حقيقيان

فأثبت أن ٢($\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}$) = ٧

(٩) إذا كان $(\text{س + ت ص})^{٢} + \frac{\text{١٠ (١ - ٢ت)}}{\text{١ + ٢ت}}$ + ٢١ = ٠

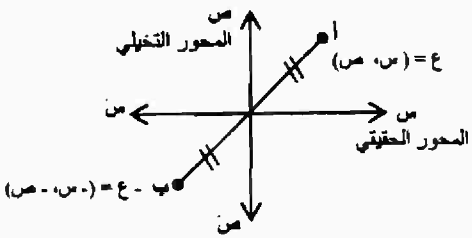
فأوجد قيمة كل من س، ص

(١٠) إذا كان ل + ن ت أحد جذري المعادلة أ $\text{س}^{٢}$ + ب س + جـ = ٠

حيث ل ، ن ، أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية فأثبت أن أ $\text{ن}^{٢}$ = أ $\text{ل}^{٢}$ + ب ل + جـ

التمثيل البياني للأعداد المركبة

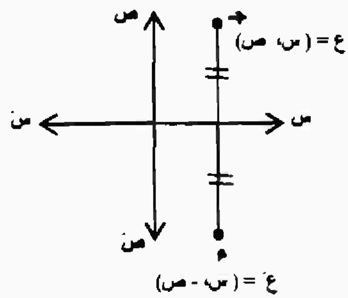
العدد المركب ع = س + ص ت نمثله بيانياً في نظام أحداثي متعامد (شكل أرجاند) بالنقطة (س، ص) حيث س تمثل الأعداد الحقيقية ، ص تمثل الأعداد التخيلية البحته .



(١) تمثيل العدد ومعكوسه الجمعي :

أ ، ب تمثلان ع ، - ع

وهما متماثلان بالنسبة لنقطة الأصل.



(٢) تمثيل العدد المرافق له:

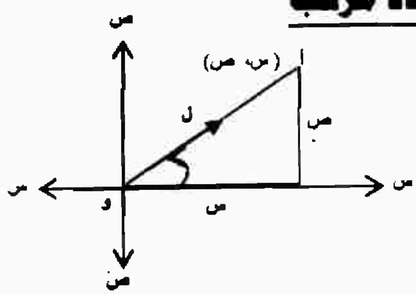
جـ ، ء تمثلان ع ، ع̄ وهما متماثلان بالنسبة للمحور $\overleftrightarrow{\text{س س}}$

ومما سبق نستنتج أن:

(١) العددان المركبان المترافقان يمثلان بيانياً بنقطتين متماثلتان بالنسبة للمحور $\overleftrightarrow{\text{س و س}}$.

(٢) العدد المركب ومعكوسه لجمعي يمثلان بطرفي قطعة مستقيمة تكون نقطة الأصل في منتصفها.

المقياس والسعة لعدد مركب



أي مركب ع = س + ت ص

تمثله في الشكل المقابل نقطة أ حيث | و أ | = ل

(١) مقياس العدد (ع) هو: ع = ل = $\sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$

وهو عدد حقيق موجب.

(٢) سعة العدد (ع) قياس الزاوية التي يصنعها $\overleftarrow{\text{و أ}}$

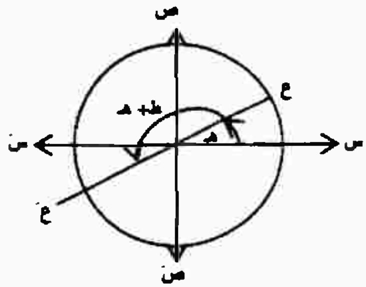
مع الأتجاه الوجب لمحور السينات (وهو عدد حقيقي)

والسعة الأساسية للعدد (ع) = هـ حيث هـ ∈ [٠، ٢ط[

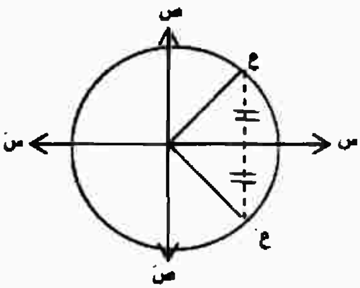
(٣) جتا هـ = $\frac{س}{ل}$ ← س = ل جتا هـ ، جا هـ = $\frac{ص}{ل}$ ← ص = ل جا هـ

∴ الصورة المثلثية (القطبية) للعدد ع هي

ع = ل (جتا هـ + ت جا هـ) حيث ل المقياس ، هـ السعة



العلاقة بين سعة ع ، سعة (- ع)



العلاقة بين سعة ع ، سعة (عَ)

لاحظ أن:

إذا كان سعة العدد ع = هـ فإن:

(أ) سعة المعكوس الجمعي (-ع) = ط + هـ

∴ - ع = ل [جتا (ط+ هـ) + ت جا (ط + هـ)]

(ب) سعة المرافق له عَ = (٢ط – هـ)

∴ عَ = ل [جتا (٢طـ هـ) + ت جا (٢طـ هـ)]

كيف تحسب القيمة الأساسية لسعة ع = س+ ت ص ؟

(١) نحسب | ع | = ل = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$

(٢) نحسب قياس الزاوية الحادة وليكن (ي) من:

جتا ي = | $\frac{س}{ل}$ | أو جا ي = | $\frac{ص}{ل}$ | ونصرف النظر مؤقتاً عن اشارات س ، ص عند حساب ي

(٣) نعين القيمة الأساسية لسعة ي بناء علي إشارتي س ، ص طبقاً للجدول التالي:-

إشارة س	إشارة ص	المربع الذي تقع فيه ع	السعة الأساسية
+	+	الأول	هـ = ي
-	+	الثاني	هـ = ١٨٠ - هـ
-	-	الثالث	هـ = ١٨٠ + هـ
+	-	الرابع	هـ = ٣٦٠ - هـ

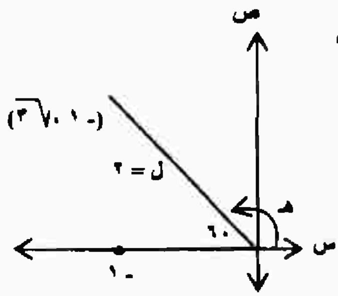
مثال: أوجد المقياس والسعة لكل من الأعداد المركبة الآتية ثم أكتب كلا منها علي الصورة المثلثية:

[١] $-١+\sqrt{٣}$ ت   [٢] ١ + ت

[٣] ١ − ت   [٤] −٣ − ٤ ت

الحـــــل

[١] العدد تمثله النقطة ($-١، \sqrt{٣}$) وهي تقع في الربع الثاني



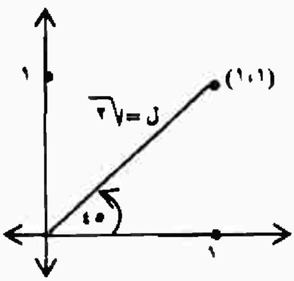
$\therefore$ ل = | ع١ | = $\sqrt{١+٣}$ = ٢

، جتا هـ = $\frac{\text{س}}{\text{ل}}$ = $-\frac{١}{٢}$

$\therefore$ هـ = ١٨٠ − ٦٠ = ١٢٠ = $\frac{٢}{٣}$ ط

$\therefore$ ع١ = ٢ (جتا $\frac{٢}{٣}$ ط + ت جا $\frac{٢}{٣}$ ط)

[٢] العدد تمثله النقطة (١،١) وهي تقع في الربع الأول

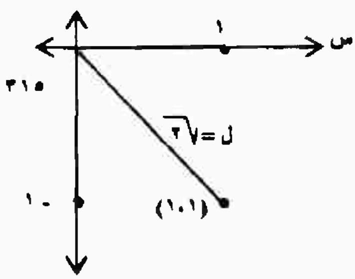


$\therefore$ ل = |ع٢| = $\sqrt{١+١}$ = $\sqrt{٢}$

، جتا هـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ $\therefore$ هـ = ٤٥ = $\frac{\text{ط}}{٤}$

$\therefore$ ع٢ = $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{\text{ط}}{٤}$ + ت جا $\frac{\text{ط}}{٤}$)

[٣] العدد تمثله النقطة (١، −١) وهي تقع في الربع الرابع



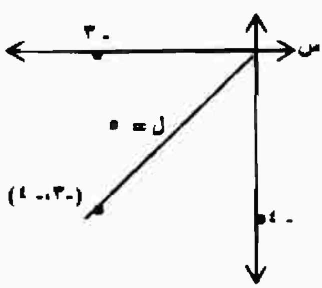
$\therefore$ ل = |ع٣| = $\sqrt{١+١}$ = $\sqrt{٢}$

، جتا هـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

$\therefore$ هـ = ٣٦٠ − ٤٥ = ٣١٥ = $\frac{٧\text{ط}}{٤}$

$\therefore$ ع٣ = $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{٧\text{ط}}{٤}$ + ت جا $\frac{٧\text{ط}}{٤}$)

[٤] العدد تمثله النقطة (−٣،−٤) وهي تقع في الربع الثالث



$\therefore$ ل = | ع٤ | = $\sqrt{٩+١٦}$ = ٥

، جتا هـ = $\frac{-٣}{٥}$

$\therefore$ هـ = ١٨٠ + $٨'\ ٥٣^\circ$ = $٨'\ ٢٣٣^\circ$

$\therefore$ ع٤ = ٥ (جتا $٨'\ ٢٣٣^\circ$ + ت جا $٨'\ ٢٣٣^\circ$)

<u>مثال</u>: اكتب الصورة الجبرية لكل من الأعداد المركبة التالية:-

١) $ع_١$: مقياسه ٢ ، سعته $\frac{ط}{٤}$

٢) $ع_٢$: مقياسه ٢ $\sqrt{٣}$ وسعته $\frac{٢}{٣}$ ط

٣) $ع_٣$: مقياسه ٥ وسعته $\frac{٧}{٦}$ ط

٤) $ع_٤$: مقياسه ٧ وسعته $\frac{٣ط}{٢}$

الحــــــــل

١) $ع_١ = ٢ \left(\text{جتا} \frac{ط}{٤} + \text{ت جا} \frac{ط}{٤} \right) = ٢ \left(\frac{١}{\sqrt{٢}} + \text{ت} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \right) = \sqrt{٢} + \sqrt{٢}\ \text{ت}$

٢) $ع_٢ = ٢\sqrt{٣} \left(\text{جتا} \frac{٢ط}{٣} + \text{ت جا} \frac{٢ط}{٣} \right)$

$= ٢\sqrt{٣} \left(\text{جتا } ١٢٠ + \text{ت جا } ١٢٠ \right) = ٢\sqrt{٣} \left(- \frac{١}{٢} + \text{ت} \frac{٣}{٢} \right) = -\sqrt{٣} + ٣\text{ت}$

٣) $ع_٣ = ٥ \left(\text{جتا} \frac{٧ط}{٦} + \text{ت جا} \frac{٧ط}{٦} \right) = ٥ \left(-\text{جتا} \frac{ط}{٦} - \text{ت جا} \frac{ط}{٦} \right)$

$= ٥ \left(- \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \text{ت} \times \frac{١}{٢} \right) = \frac{-٥\sqrt{٣}}{٢} - \frac{٥}{٢}\ \text{ت}$

٤) $ع_٤ = ٧ \left(\text{جتا} \frac{٣ط}{٢} + \text{ت جا} \frac{٣ط}{٢} \right) = ٧ \left(٥ + \text{ت} \times -١ \right) = -٧\ \text{ت}$

.

<u>مثال</u>: أوجد الصورة المثلثية لكل من:

١) العدد ٢ ٢) العدد ٢ ت

الحــــــــل

١) العدد ٢ تمثله النقطة (٢، ٥)

∴ ل = ٢ ، هـ = ٥

∴ $ع_١$ = ٢(جتا ٥ + ت جا ٥)

٢) العدد ٢ ت تمثله النقطة (٥، ٢)

∴ ل = ٢ ، هـ = ٩٠°

∴ $ع_٢$ = ٢(جتا ٩٠ + ت جا ٩٠)

مثال:

ضع العدد $ع = \frac{١ - ٥ت}{٢ + ٣ت}$ علي الصورة الجبرية س+ ت ص ثم علي الصورة المثلثية

الحـــــل

$ع = \frac{١ - ٥ت}{٢ + ٣ت} \times \frac{٢ - ٣ت}{٢ - ٣ت} = \frac{-١٣ - ١٣ت}{١٣} = -١ - ت$

$\therefore ل = \sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{١ + ١} = \sqrt{٢}$ --- (١)

والعدد ع تمثله النقطة (-١، -١) وهي في الربع الثالث

$\therefore$ طا هـ $= \frac{ص}{س} = ١$ $\therefore$ هـ $= ١٨٠ + ٤٥ = ٢٢٥$ --- (٢)

من (١) ، (٢)

$\therefore$ الصورة القطبية هي $ع = \sqrt{٢}$ (جتا ٢٢٥ + ت جا ٢٢٥)

مثال: إذا كان ع = ل (جتا هـ + ت جا هـ)

فأكتب علي الصورة القطبية كلا من: -ع ، عَ ، $\frac{١}{ع}$ ، $\frac{١}{عَ}$

الحـــــل

-ع = ل [جتا (ط+ هـ) + ت جا (ط+ هـ)]

عَ = ل [جتا (- هـ) + ت جا (- هـ)]

$\frac{١}{ع} = \frac{١}{ل(جتا هـ + ت جاهـ)} = \frac{١}{ل} \times \frac{جتا هـ - ت جاهـ}{جتا^٢ هـ + جا^٢ هـ}$

$= \frac{١}{ل}$ [جتا (- هـ) + ت جا (- هـ)]

$\frac{١}{عَ} = \frac{١}{ل(جتا هـ + ت جاهـ)} = \frac{١}{ل} \quad \frac{جتا هـ + ت جاهـ}{جتا^٢ هـ + جا^٢ هـ}$

$= \frac{١}{ل}$(جتا هـ + ت جا هـ)

ملاحظة:

سعة العدد ع = هـ

(-ع) = ط+ هـ

عَ = ٢ط - هـ = - هـ

$\frac{١}{ع}$ = ٢ط - هـ = - هـ

$\frac{١}{عَ}$ = هـ

مثال: ضع علي الصورة القطبية كلا من :-

١) جتا هـ - ت جا هـ
٢) جا هـ + ت جتا هـ
٣) - جا هـ + ت جتا هـ
٤) - جا هـ - ت جتا هـ

الحـــــل

١) جتا هـ - ت جا هـ = جتا (- هـ) + ت جا (- هـ)

٢) جا هـ + ت جتا هـ = جتا ($\frac{ط}{٢}$ - هـ) + ت جا ($\frac{ط}{٢}$ - هـ)

٣) - جا هـ + ت جتا هـ = جتا ($\frac{ط}{٢}$ + هـ) + ت جا ($\frac{ط}{٢}$ + هـ)

٤) - جا هـ - ت جتا هـ = جتا ($\frac{٣ط}{٢}$ - هـ) + ت جا ($\frac{٣ط}{٢}$ - هـ)

<u>ملاحظة:</u>

إذا كان ع = ل (جتا هـ + ت جا هـ)

-ع (المعكوس الجمعي) <u>الصورة القطبية</u> ل [جتا (ط+ هـ) + ت جا (ط+ هـ)]

عَ (المرافق) ← ل [جتا (- هـ) + ت جا (- هـ)

$\frac{١}{ع}$ (المعكوس الضربي) ← $\frac{١}{ل}$ [جتا (- هـ) + ت جا (- هـ)]

$\frac{١}{ع}$ ← (جتاهـ + ت جا هـ)

تمارين (٨)

▪ أوجد المقياس والسعة لكل من الأعداد الآتية ثم عبر عن كل منها بالصورة المثلثية:-

١) $-١ + ت$ ٢) $\sqrt{٣} - ت$

٣) $-٢ + ٢ت$ ٤) $\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

٥) $٣\sqrt{٢} + ٣\sqrt{٢}$ ت ٦) ٢ت

▪ أكتب الصورة الجبرية لكل من الأعداد المركبة الآتية:-

٧) العدد الذي مقياسه $٢\sqrt{٣}$ وسعته ١٢٠°

٨) العدد الذي مقياسه $\sqrt{٢}$ وسعته $\frac{٥ ط}{٤}$

٩) العدد الذي مقياسه $\sqrt{٣}$ وسعته $\frac{١١ ط}{٤}$

١٠) العدد الذي مقياسه $\sqrt{٦}$ وسعته $(- \frac{٥ ط}{٦})$

▪ ضع كلا من الأعداد الآتية علي صورة أ+ ب ت حيث أ، ب ∋ ح ثم أكتب الصورة المثلثية لكل منها

١١) $\frac{٥ - \sqrt{٣}ت}{\sqrt{٣} - ٢ت}$ ١٢) $\frac{٨ (٢ + \sqrt{٣} ت)}{٥ - \sqrt{٣} ت}$

١٣) $\frac{٦ + ٢\sqrt{٣}ت}{٣ - \sqrt{٣} ت}$ ١٤) $\frac{\sqrt{٣} - ت}{٢(حتا \frac{ط}{٢} + ت جا \frac{ط}{٢})}$

١٥) إذا كانت ع = ٢-٢ ت فأكتب الصورة المثلثية لكل من الأعداد ع ، -ع ، $\bar{ع}$ ، $\frac{١}{ع}$

١٦) مثل علي شكل أرجاند الأعداد $ع_١ = -٣ + ٤ت$ ، $ع_٢ = -٢ + ٣ت$ ، $ع_٣ = ع_١ - ع_٢$ ثم أوجد مقياس وسعة $ع_٣$

▪ أوجد المقياس والسعة لكل من الأعداد الآتية:-

١٧) $-٣ (جتا ٦٠^\circ + ت جا ٦٠^\circ)$

١٨) $٤ (جتا ١٥٠^\circ - ت جا ١٥٠^\circ)$

١٩) $-٢ (جا ٢١٠^\circ - ت جتا ٢١٠)$

٢٠) ل (- جا هـ + ت جتا هـ)

ملاحظات هامة

مثال: عبر عن كل من الأعداد الآتية بالصورة المثلثية:-

١) ١ ‏‏ ٢) ت ‏‏ ٣) -١ ‏‏ ٤) -ت

الحل

١) ١ + ٠ × ت ‏ ∴ س = ١ ، ص = ٠ ، ل = $\sqrt{١ + ٠}$ = ١

جتا هـ = $\frac{\text{س}}{\text{ل}} = \frac{١}{١}$ = ١ ، جا هـ = $\frac{\text{ص}}{\text{ل}} = \frac{٠}{١}$ = ٠

∴ هـ = ٠ ‏ ∴ ١ = ١ × (جتا ٠ + ت جا ٠)

أي أن : ١ = جتا٠ + ت جا ٠

٢) ت = ٠ + ١ × ت

∴ س = ٠ ، ص = ١ ، ل = $\sqrt{٠ + ١}$ = ١

، جتا هـ = $\frac{\text{س}}{\text{ل}} = \frac{٠}{١}$ = ٠ ، جاهـ = $\frac{\text{ص}}{\text{ل}} = \frac{١}{١}$ = ١

∴ هـ = ٩٠° = $\frac{\text{ط}}{٢}$ ‏ ∴ ت = ١ × (جتا$\frac{\text{ط}}{٢}$ + ت جا$\frac{\text{ط}}{٢}$)

أي أن : ت = جتا $\frac{\text{ط}}{٢}$ + ت جا$\frac{\text{ط}}{٢}$

٣) -١ = -١ + ٠ × ت ‏ ∴ س = -١ ، ص = ٠ ، ل = $\sqrt{١ + ٠}$ = ١

جتا هـ = $\frac{\text{س}}{\text{ل}} = \frac{-١}{١}$ = -١ ، جا هـ = $\frac{\text{ص}}{\text{ل}} = \frac{٠}{١}$ = ٠

∴ هـ = ١٨٠° = ط ‏ ∴ -١ = جتا ط + ت جا ط

أي أن : -١ = جتا ط + ت جا ط

٤) -ت = ٠ - ١ × ت ‏ ∴ س = ٠ ، ص = -١ ، ل = $\sqrt{٠ + ١}$ = ١

، جتا هـ = $\frac{\text{س}}{\text{ل}} = \frac{٠}{١}$ = ٠ ، جا هـ = $\frac{\text{ص}}{\text{ل}} = \frac{-١}{١}$ = -١

هـ = ٢٧٠° = $\frac{٣\text{ط}}{٢}$ ‏ ∴ -ت = ١ × (جتا$\frac{٣\text{ط}}{٢}$ + ت جا $\frac{٣\text{ط}}{٢}$)

أي أن: -ت = جتا $\frac{٣\text{ط}}{٢}$ + ت جا $\frac{٣\text{ط}}{٢}$

الخلاصة:

١ = جتا٠ + ت جا ٠ ‏ ت = جتا$\frac{\text{ط}}{٢}$ + ت جا $\frac{\text{ط}}{٢}$

-١ = جتا ط + ت جا ط ‏ -ت = جتا $\frac{٣\text{ط}}{٢}$ + ت جا $\frac{٣\text{ط}}{٢}$

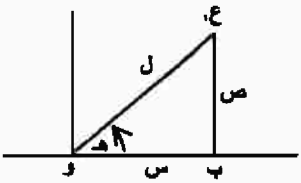
تحويل الصورة المثلثية الغير قياسية للعدد ع إلي الصورة المثلثية القياسية

ل (جتا هـ + ت جا هـ)

١) إذا كانت ع١ = ل (جا هـ + ت جتا هـ)

∴ $\frac{\text{س}}{\text{ل}}$ = جا هـ　　　∴ $\frac{\text{جاهـ}}{\text{ل}}$ = جا هـ

، جتا هـ = $\frac{\text{جتاهـ}}{\text{ل}}$

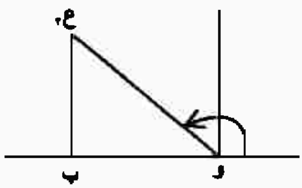


∴ السعة (هـ) في الربع الأول

∴ جا هـ ⇐ جتا هـ وذلك انتسابها للعدد $\frac{\text{ط}}{٢}$ = ٩٠°

∴ ع١ = ل [جتا ($\frac{\text{ط}}{٢}$ - هـ) + ت جا ($\frac{\text{ط}}{٢}$ - هـ)]

٢) إذا كانت ع٢ = ل (- جا هـ + ت جتا هـ)

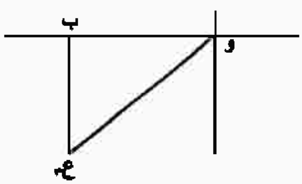


∵ س = -　، ص = +

∴ العدد المركب يقع في الربع الثاني

∴ ع٢ = ل [جتا ($\frac{\text{ط}}{٢}$ + هـ) + ت جا ($\frac{\text{ط}}{٢}$ + هـ)]

٣) إذا كانت ع ٣ = ل (- جا هـ - ت جتا هـ)



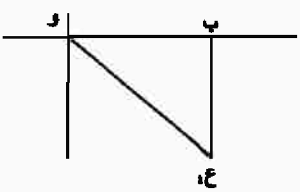
س= -　، ص = -

∴ العدد المركب يقع في الربع الثالث

∴ السعة تنسب للعدد $\frac{٣\text{ط}}{٢}$ = ٢٧٠°

∴ ع٣ = ل [جتا ($\frac{٣\text{ط}}{٢}$ + هـ) + ت جا ($\frac{٣\text{ط}}{٢}$ + هـ)]

٤) إذا كانت ع٤ = ل (جا هـ - ت جتا هـ)



س = +　، ص = -

∴ العدد المركب يقع في الربع الرابع

∴ السعة تنسب للعدد ($\frac{٣\text{ط}}{٢}$ + هـ)

∴ ع٤ = ل [جتا ($\frac{٣\text{ط}}{٢}$ + هـ) + ت جا ($\frac{٣\text{ط}}{٢}$ + هـ)]

الخلاصة : النسب المثلثية للعدد المركب وإشارتها غير مضبوطة وفي هذه الحالة تنسب الزوايا إلي $\frac{ط}{٢}$ ، $\frac{٣ط}{٢}$

- ل (- جتاهـ + ت جا هـ) = ل [جتا (ط- هـ) + ت جا (ط – هـ)]
- ل (- جتاهـ - ت جا هـ) = ل [جتا (ط + هـ) + ت جا (ط + هـ)]
- ل (جتاهـ - ت جا هـ) = ل [جتا (٢ط - هـ) + ت جا (٢ط - هـ)]

الخلاصة: النسب المثلثية للعدد المركب مضبوطة ولكن إشارتها غير مضبوطة

∴ تنسب الزوايا إلي ط ، ٢ ط

مثال: اكتب كل من الأعداد المركبة الآتية في الصورة القطبية الصحيحة:-

١) $ع_١$ = -٤ (جا ٣٠ – ت جا ٣٠)

٢) $ع_٢$ = -٢ (جا$\frac{١}{٤}$ ط – ت جتا $\frac{١}{٤}$ ط)

٣) $ع_٣$ = -٩ (جا$\frac{٥}{٣}$ ط + ت جتا $\frac{٥}{٣}$ ط)

الحـــــل

١) $ع_١$ = -٤ [جتا (٩٠ – ٣٠) + ت جا(٩٠ – ٣٠)]

= -٤ [جتا ٦٠ + ت جا ٦٠] = ٤ (- جتا ٦٠- ت جا ٦٠)

٢) $ع_٢$ = -٢ (جا $\frac{١}{٤}$ ط – ت جتا $\frac{١}{٤}$ ط)

= -٢ (جا ٤٥ – ت جتا ٤٥)

= -٢ [جتا (٩٠-٤٥) – ت جا (٩٠-٤٥)]

= -٢ (جتا ٤٥ – ت جا ٤٥)

= ٢ (جتا ٤٥ + ت جا ٤٥)

٣) $ع_٣$ = -٢ (جا $\frac{٥}{٣}$ ط – ت جتا $\frac{٥}{٣}$ ط)

= -٩ (جا ٣٠٠ – ت جتا ٣٠٠)

= -٩ [جا (٣٦٠-٦٠) + ت جتا (٣٦٠-٦٠)]

= -٩ (جا ٦٠ + ت جتا ٦٠)

= ٩ (- جا ٦٠ + ت جتا ٦٠) = ٩ (- جتا ٣٠ – ت جا ٣٠)

لأن ٦٠ تتم ٣٠°

- **حقائق هندسية:**

جا (أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ حا ب

جتا (أ+ ب) = جتا أ جتا ب – جا أ جا ب

جا (أ – ب) = جا أ جتا ب – جتا أ جا ب

جتا (أ – ب) = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب

جا٢أ = ٢ جا أ جتا أ ⇐ جا أ = ٢ جا $\frac{أ}{٢}$ جتا $\frac{أ}{٢}$

جتا ٢أ = جتا^{٢} أ – جا^{٢} أ ⇐ جتا أ = جتا^{٢} $\frac{أ}{٢}$ - جا^{٢} $\frac{أ}{٢}$

= ٢ جتا^{٢} أ – ١ = ٢ جتا^{٢} $\frac{أ}{٢}$ - ١

= ١ – ٢ جا^{٢} أ = ١- ٢ حا^{٢} $\frac{أ}{٢}$

أولاً : المقياس والسعة لحاصل ضرب عددين مركبين

مقياس (حاصل ضرب عددين مركبين) = حاصل ضرب مقياسهما
سعـــة (حاصل ضرب عددين مركبين) = مجموع سعتيهما

إذا كان ع$_{١}$ = ل$_{١}$ (جتاهـ$_{١}$ + ت جا هـ$_{١}$)

ع$_{٢}$ = ل$_{٢}$ (جتاهـ$_{٢}$ + ت جا هـ$_{٢}$)

∴ ع$_{١}$ ع$_{٢}$ = ل$_{١}$ ل$_{٢}$ [جتا (هـ$_{١}$+ هـ$_{٢}$) + ت جا (هـ$_{١}$+ هـ$_{٢}$)]

نتيجة(١):

إذا كان ع = ل (جتا هـ + ت حا هـ)

∴ ع^{٢} = ل^{٢} (جتا ٢ هـ + ت ج ٢ هـ)

نتيجة(٢):

إذا كان ع = ل (جتا هـ + ت جاهـ) ، ن عدد صحيح موجب فإن

ع^{ن} = ل^{ن} (جتا ن هـ + ت جا ن هـ)

ناتج قسمة عدد مركب علي آخر

$\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ل_١}{ل_٢}$ [جتا ($هـ_١ - هـ_٢$) + ت جا ($هـ_١ - هـ_٢$)]

∴ خارج قسمة عددين مركبين هو عدد مركب

فمثلاً : إذا كان $ع_١$ = ٣ (جتا ٧٥ + ت جا ٧٥)

$ع_٢$ = ٢ (جتا ٤٥ + ت جا ٤٥)

فإن : $\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{٣}{٢}$ [جتا (٧٥-٤٥) + ت جا(٧٥-٤٥)]

$= \frac{٣}{٢}$ (جتا ٣٠ + ت جا ٣٠)

، $\frac{ع_٢}{ع_١} = \frac{٢}{٣}$ [جتا (٤٥-٧٥) + ت جا(٤٥-٧٥)]

$= \frac{٢}{٣}$ (جتا -٣٠ + ت جا -٣٠)

$= \frac{٢}{٣}$ (جتا ٣٣٠ + ت جا ٣٣٠)

نتيجة : إذا كان ع = ل (جتا هـ + ت جا هـ) فإن

$\frac{١}{ع} = \frac{١}{ل}$ [جتا (- هـ) + ت جا (- هـ)]

أما $\bar{ع}$ = ل (جتا (- هـ) + ت جا (- هـ)

فمثلاً : ع = ٢ (جتا ٤٥ + ت جا ٤٥)

∴ $\frac{١}{ع} = \frac{١}{٢}$ [جتا (- ٤٥) + ت جا (-٤٥)]

$= \frac{١}{٢}$ (جتا ٤١٥ + ت جا ٤١٥)

ملاحظة هامة

إذا كان $ع_١ = ل_١$ (جتا $هـ_١$ + ت جا $هـ_١$)

$ع_٢ = ل_٢$ (جتا $هـ_٢$ + ت جا $هـ_٢$)

$ع_٣ = ل_٣$ (جتا $هـ_٣$ + ت جا $هـ_٣$)

فإن : $\frac{ع_١ ع_٢}{ع_٣} = \frac{ل_١ ل_٢}{ل_٣}$ [جتا ($هـ_١ + هـ_٢ - هـ_٣$) + ت جا ($هـ_١ + هـ_٢ - هـ_٣$)]

مثال:
إذا كان $ع_١ = ٦$ (جتا ٧٠ + ت جا ٧٠) ، $ع_٢ = ٣$ (جتا ٤٠ + ت جا ٤٠) فأوجد $\frac{ع_١}{ع_٢}$ ثم ضع الناتج علي صورة زوج مرتب .

الحـــــل

$\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ل_١}{ل_٢}$ [جتا ($هـ_١ - هـ_٢$) + ت جا ($هـ_١ - هـ_٢$)] ،

$= \frac{٦}{٣}$ [جتا (٧٠ - ٤٠) + ت جا (٧٠ - ٤٠)] = ٢ (جتا ٣٠ + ت جا ٣٠)

$= ٢ (\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}$ ت $) = \sqrt{٣}$ + ت $= (\sqrt{٣} ، ١)$

مثال: ضع العدد (١ - ت) علي الصورة المثلثية ثم أوجد قيم $(١ - ت)^٦$

الحـــــل

س = ١ ، ص = ١ ، ل $= \sqrt{١+١} = \sqrt{٢}$

جتا هـ $= \frac{س}{ل} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جا هـ $= \frac{ص}{ل} = - \frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ هـ = ٣٦٠ − ٤٥ = ٣١٥

١ - ت $= \sqrt{٢}$ (جتا ٣١٥ + ت جا ٣١٥)

$(١ - ت)^٦ = (\sqrt{٢})^٦$ (جتا ٦ × ٣١٥ + ت جا ٦ × ٣١٥)

= ٨ (جتا ١٨٩٠ + ت جا ١٨٩٠)

= ٨ (جتا ٩٠ + ت جا ٩٠) = ٨ ت

مثال: إذا كان $ع_١ = ل_١$ (جتا (أ + ب) + ت جا (أ + ب) ، $ع_٢ = ل_٢$ (جتا (أ - ب) + ت جا (أ - ب)
أوجد $ع_١ ع_٢$

الحـــــل

$ع_١ ع_٢ = ل_١ ل_٢$ (جتا ٢أ + ت جا ٢أ)

مثال: أوجد الصورة المثلثية لحاصل ضرب $ع_١ ع_٢$ إذا كان :

$ع_١ = -$ جا ٢٤٠ − ت جتا ٢٤٠ ، $ع_٢ = ٧$ (جا ١٢٠ - ت جتا ١٢٠)

الحـــــل

$ع_١$ = جا٦٠ + ت جتا٦٠ = جتا ٣٠ + ت جا ٣٠

$ع_٢$ = ٧(جا ٦٠+ت جتا ٦٠) = ٧(جتا ٣٠ + ت جا ٣٠)

∴ $ع_١ ع_٢$ = ٧(جتا ٦٠ + ت جا٦٠)

∴ مقياس $ع_١ ع_٢$ يساوي ٧ سعة $ع_١ ع_٢$ = ٦٠°

<u>مثال</u>: إذا كان $ع_١$ = - ٣٠ (جتا هـ + ت جا هـ) ، $ع_٢$ = ٥(جتاهـ - ت جا هـ) أوجد $\frac{ع_١}{ع_٢}$

الحـــــل

$ع_١$ = ٣٠(- جتا هـ - ت جا هـ)

= ٣٠ [جتا (ط + هـ) + ت جا (ط + هـ)]

$ع_٢$ = ٥ [جتا (- هـ) + ت جا (- هـ)]

∴ $\frac{ع_١}{ع_٢}$ = ٦ [جتا (ط + ٢هـ) + ت جا (ط + ٢هـ)]

<u>مثال</u>: اختصر لأبسط صورة : $\frac{(\text{جتا } \frac{ط}{٤} + \text{ت جا } \frac{ط}{٤})^{٦} \; (\text{جتا } \frac{ط}{٦} + \text{ت جا } \frac{ط}{٦})^{٥}}{(\text{جتا } \frac{ط}{٣} + \text{ت جا } \frac{ط}{٣})^{٤}}$

الحـــــل

$$\frac{(\text{جتا } \frac{٦ط}{٤} + \text{ت جا } \frac{٦ط}{٤})^{٦} \; (\text{جتا } \frac{٥ط}{٦} + \text{ت جا } \frac{٥ط}{٦})^{٥}}{(\text{جتا } \frac{ط}{٣} + \text{ت جا } \frac{ط}{٣})^{٤}}$$

= جتا ($\frac{٣ط}{٢}$ + $\frac{٥ط}{٣}$ - $\frac{٢ط}{٣}$) + ت جا ($\frac{٣ط}{٢}$ + $\frac{٥ط}{٢}$ - $\frac{٢ط}{٣}$)

= جتا $\frac{٥ط}{٢}$ + ت جا $\frac{٥ط}{٢}$ = ت

<u>مثال</u>: إذا كان $ع_١$ = ١٠٠ (جتا هـ + ت جا هـ) ، $ع_٢$ = $\frac{١}{٢٠}$ (جا ٢ هـ + ت جتا ٢ هـ)

حيث طا هـ = $\frac{٣}{٤}$ ، هـ ∋] ٠ ، ٩٠[أوجد الصورة المثلثية والصورة الجبرية لحاصل الضرب $ع_١ ع_٢$.

الحـــــل

$ع_٢ = \frac{١}{٢٠} [\text{جتا} (٩٠-٢هـ) + ت(٩٠-٢هـ)]$

$ع_١ ع_٢ = ١٠٠ \times \frac{١}{٢٠} [\text{جتا} (هـ+٩٠-٢هـ) + ت\ \text{جا} (هـ+٩٠-٢هـ)]$

$= ٥ [\text{جتا} (٩٠- هـ) + ت\ \text{جا} (٩٠- هـ)]$

$= ٥ [\text{جا}\ هـ + ت\ \text{جا}\ هـ)$

$= ٥ [\frac{٣}{٥} + \frac{٤}{٥} ت] = ٣ + ٤ ت$ وهي الصورة الجبرية

<u>مثال</u>: اوجد قيمة $\left(\frac{١-ت}{١+ت}\right)^٤$

الحـــــل

$\frac{١-ت}{١+ت} \times \frac{١-ت}{١-ت} = \frac{١-٢ت+ت^٢}{١-ت^٢} = \frac{-٢ت}{١+١} = - ت$

$\therefore \left(\frac{١-ت}{١+ت}\right)^٤ = (- ت)^٤ = ١$

<u>مثال</u>: إذا كان $ع_١ = ١٠(\text{جتا}\ ٣١٠ + ت\ \text{جا}\ ٣١٠)$ ، $ع_٢ = ٥(\text{جتا}\ ١٠٠ + ت\ \text{جا}\ ١٠٠)$

أوجد الصورة المثلثية والجبرية لكل من $\frac{ع_١}{ع_٢}$ ، $\frac{ع_٢}{ع_١}$

الحـــــل

$\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{١٠}{٥} [\text{جتا} (٣١٠- ١٠٠) + ت\ \text{جا} (٣١٠- ١٠٠)]$

$= ٢ [\text{جتا}\ ٢١٠ + ت\ \text{جا}\ ٢١٠]$

$= ٢[- \text{جتا}\ ٣٠- ت\ \text{جا}\ ٣٠]$ الصورة المثلثية

$= ٢ [- \frac{\sqrt{٣}}{٢} - ت \times \frac{١}{٢}] = -\sqrt{٣} - ت$ الصورة الجبرية

$\frac{ع_٢}{ع_١} = \frac{١}{٢} [\text{جتا} (-٢١٠) + ت\ \text{جا} (-٢١٠)]$

$= \frac{١}{٢} [\text{جتا}\ ١٥٠ + ت\ \text{جا}\ ١٥٠]$

$= \frac{١}{٢} [- \text{جتا}\ ٣٠+ت\ \text{جا}\ ٣٠]$ الصورة المثلثية

$= \frac{١}{٢} [- \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢} ت] = - \frac{\sqrt{٣}}{٤} + \frac{١}{٤} ت$ الصورة الجبرية

مثال: ضع كل من العددين $\sqrt{٢}$ ت ، ١+ ت علي الصورة المثلثية ثم أوجد $\left(\frac{\sqrt{٢}\,ت}{١+ت}\right)^{٨}$

الحـــــــل

$\sqrt{٢}\,ت = \sqrt{٢}\,(جتا\frac{ط}{٢} + ت\,جا\frac{ط}{٢})$

$١+ت = \sqrt{٢}\,(جتا\frac{ط}{٤} + ت\,جا\frac{ط}{٤})$

$= جتا\,(\frac{ط}{٤}) + ت\,جا\frac{ط}{٤}$

$\left(\frac{\sqrt{٢}\,ت}{١+ت}\right)^{٨} = جتا\,٢\,ط + ت\,جا\,٢\,ط = ١ + ت \times ٠ = ١$

تمارين (٩)

- **أوجد الصورة المثلثية لكل من $ع_١\,ع_٢$ ، $ع_١ \div ع_٢$ في كل مما يأتي :-**

(١) $ع_١ = ٦\,(جتا\frac{ط}{٣} + ت\,جا\frac{ط}{٣})$ ، $ع_٢ = ٢\,(جتا\frac{ط}{٣} + ت\,جا\frac{ط}{٣})$

(٢) $ع_١ = ٨\,(جتا\frac{ط}{٤} + ت\,جا\frac{ط}{٤})$ ، $ع_٢ = ٤\,(جتا\frac{ط}{٢} - ت\,جا\frac{ط}{٢})$

(٣) $ع_١ = ١٠\,(جتا\,٣٠٠^\circ - ت\,جا\,٣٠٠^\circ)$ ، $ع_٢ = ٤\,(جا\,٣٠٠^\circ - ت\,جتا\,٣٠٠^\circ)$

(٤) $ع_١ = ل_١\,(جتاهـ + ت\,جاهـ)$ ، $ع_٢ = ل_٢\,(جتاهـ - ت\,جاهـ)$

- **أوجد الصور المثلثية لكل من $ع^٢$ ،   في كل مما يأتي:-**

(٥) $ع = \frac{١}{\sqrt{٢}}\,(جتا\frac{٣ط}{٢} + ت\,جا\frac{٣ط}{٢})$

(٦) $ع = \frac{١}{٢}\,(جا\,أ - ت\,جتا\,أ)$

(٧) أكتب الصورة المثلثية لكل من العددين المركبين :

$ع_١ = \frac{١}{٢}\,(-١ + ت\sqrt{٣})$ ، $ع_٢ = \frac{١}{٢}\,(-١ - ت\sqrt{٣})$ ثم أثبت أن :

أولاً: $ع_١^{\,٢} = ع_٢$ **ثانياً:** $ع_٢^{\,٢} = ع_١$ **ثالثاً:** $ع_١^{\,٣} = ع_٢^{\,٣} = ١$

(٨) إذا كان $ع_١ = ٤\,(جتا\,٣هـ - ت\,جا\,٣هـ)$ ، $ع_٢ = -٢\,(جتا\,هـ - ت\,جا\,هـ)$ حيث هـ $\in$]١٨٠ ، ٢٧٠[

، طا هـ = $\frac{١}{٢}$ فأوجد الصورة المثلثية والصورة الجبرية لخارج القسمة $\frac{ع_١}{ع_٢}$

(٩) إذا كان $س = \sqrt{٣} + ت$ ، $ص = ١ - ت$ فأوجد الصورة المثلثية لكل من س ، ص ،

$ص^٢ \div س^٢$

(١٠) اختصر لأبسط صورة $\frac{(جتا\frac{ط}{[illegible]} + ت\,جا\frac{ط}{[illegible]})^{٦}\,(جتا\frac{ط}{[illegible]} + ت\,جا\frac{ط}{[illegible]})^{٥}}{(جتا\frac{ط}{[illegible]} + ت\,جا\frac{ط}{[illegible]})^{٤}}$

نظرية ديموافر

- **إذا كان ن عددا نسبيا فإن :** (جتا هـ + ت جا هـ)$^{\text{ن}}$ = جتا هـ + ت جا ن هـ
- **إذا كان ن عدد صحيح موجب أو سالب فإن:**

(جتا هـ + ت جا هـ)$^{\text{ن}}$ = [جتا (هـ + ٢ ر ط) + ت جا (هـ+ ٢ رط)]$^{\text{ن}}$

= جتا ن هـ + ت جا ن هـ

- **إذا كان ن كسر حقيقي وليكن ن =** $\frac{١}{\text{ك}}$ (جتا هـ + ت جا هـ)$^{\frac{١}{\text{ك}}}$

= جتا $\frac{\text{هـ + ٢ رط}}{\text{ك}}$ + ت جا $\frac{\text{هـ + ٢ رط}}{\text{ك}}$

لذلك المقدار (جتا هـ + ت جا هـ)$^{\frac{١}{\text{ك}}}$ له ك من القيم المختلفة نحصل عليها بالتعويض في

المقدار (جتا $\frac{\text{هـ + ٢ رط}}{\text{ك}}$ + ت جا $\frac{\text{هـ + ٢ رط}}{\text{ك}}$) عن ر = ٠، ١، ٢،..... إلي (ك - ١)

<u>مثال</u>: اختصر الآتي: (جتا $\frac{\text{٣ ط}}{٤}$ + ت جا $\frac{\text{٣ ط}}{٤}$)^{٤}

الحـــــــل

(جتا $\frac{\text{٣ط}}{٤}$ + ت جا $\frac{\text{٣ ط}}{٤}$)^{٤} = جتا $\frac{\text{٣ط}}{٤}$ × ٤ + ت جا $\frac{\text{٣ط}}{٤}$ × ٣

= جتا ٣ ط + ت جا ٣ ط

= -١ + ت × ٠ = -١

<u>مثال</u>: أثبت ان $\frac{\text{(جتا } \frac{\text{ط}}{٦} \text{ + ت جا } \frac{\text{ط}}{٦}\text{)}^{٥} \text{ (جتا } \frac{\text{ط}}{٦} \text{ + ت جا } \frac{\text{ط}}{٦}\text{)}^{٤}}{\text{(جتا } \frac{\text{٥ط}}{٦} \text{ + ت جا } \frac{\text{٥ط}}{٦}\text{)}^{٢}}$ = ت

الحـــــــل

$\frac{\text{(جتا } \frac{\text{ط}}{٦} \text{ + ت جا } \frac{\text{ط}}{٦}\text{)}^{٥} \text{ (جتا } \frac{\text{ط}}{٦} \text{ + ت جا } \frac{\text{ط}}{٦}\text{)}^{٤}}{\text{(جتا } \frac{\text{٥ط}}{٦} \text{ + ت جا } \frac{\text{٥ط}}{٦}\text{)}}$

= $\frac{\text{(جتا } \frac{\text{٥ط}}{٦} \text{ + ت جا } \frac{\text{٥ط}}{٦}\text{) (جتا } \frac{\text{٤ط}}{٦} \text{ + ت جا } \frac{\text{٤ط}}{٦}\text{)}}{\text{(جتا } \frac{\text{٥ط}}{٦} \text{ + ت جا } \frac{\text{٥ط}}{٦}\text{)}}$

$$= \frac{\text{جتا}\left(\frac{٥ط}{٦}+\frac{٤ط}{٣}\right) + \text{ت جا}\left(\frac{٥ط}{٦}+\frac{٤ط}{٣}\right)}{\text{جتا}\frac{٥ط}{٣} + \text{ت جا}\frac{٥ط}{٣}} = \frac{\text{جتا}\frac{١٣ط}{٦} + \text{ت جا}\frac{١٣ط}{٦}}{\text{جتا}\frac{٥ط}{٣} + \text{ت جا}\frac{٥ط}{٣}}$$

$$= \text{جتا}\left(\frac{١٣ط}{٦} - \frac{٥ط}{٣}\right) + \text{ت جا}\left(\frac{١٣ط}{٦} - \frac{٥ط}{٣}\right)$$

$$= \text{جتا}\frac{ط}{٢} + \text{ت جا}\frac{ط}{٢} = ٠ + \text{ت} + ١ = \text{ت}$$

مثال: أثبت أن: $\frac{\text{ت}}{\left(\text{جتا}\frac{ط}{٦} - \text{ت جا}\frac{ط}{٦}\right)^{٧}} = \frac{١}{٢}\left(١ - \sqrt{٣}\ \text{ت}\right)$

الحـــــــل

الطرف الأيمن $= \frac{\text{ت}}{\left(\text{جتا}\frac{ط}{٦} - \text{ت جا}\frac{ط}{٦}\right)^{٧}} = \frac{\text{ت}}{\left[\text{جتا}\left(-\frac{ط}{٦}\right) + \text{ت جا}\left(-\frac{ط}{٦}\right)\right]^{٧}}$

$$= \frac{\text{ت}}{\text{جتا}\left(-\frac{٧ط}{٦}\right) + \text{ت جا}\left(-\frac{٧ط}{٦}\right)} = \frac{\text{ت}}{\text{جتا}\frac{٧ط}{٦} - \text{ت جا}\frac{٧ط}{٦}}$$

$$= \frac{\text{ت}}{\text{جتا}\ ٢١٠^{\circ} - \text{ت جا}\ ٢١٠^{\circ}} = \frac{\text{ت}}{-\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}\text{ت}} = \frac{٢\ \text{ت}}{-\sqrt{٣} + \text{ت}}$$

$$= \frac{٢\ \text{ت}}{-\sqrt{٣} + \text{ت}} \cdot \frac{-\sqrt{٣} - \text{ت}}{-\sqrt{٣} - \text{ت}}$$ بالضرب في مرافق المقام

$$= \frac{٢\left(١ - \sqrt{٣}\ \text{ت}\right)}{٤} = \frac{١}{٢}\left(١ - \sqrt{٣}\ \text{ت}\right)$$ = الطرف الأيسر

مثال: باستخدام نظرية ديموافر عبر عن كل من : جا٣هـ ، جتا ٣هـ بدلالة قوي جاهـ ، جتا هـ

الحـــــــل

الفكرة: نكتب العدد الذي مقياسه = ١ ، سعته = ٣ هـ علي صورة ديموافر

$\because$ جتا ٣هـ + ت جا٣هـ = (جتاهـ + ت جا هـ)^{٣}

بفك الطرف الأيسر بنظرية ذات الحدين

= جتا^{٣} هـ + ٣ جتا^{٢}هـ (ت جاهـ) + ٣ جتا هـ (ت جاهـ)^{٢} + (ت جاهـ)^{٣}

= جتا^{٣} هـ + ٣ جتا^{٢}هـ جتا^{٢} هـ ت – ٣جا^{٢} هـ جتاهـ - ت جا^{٣} هـ

= (جتا^{٣} هـ - ٣جا^{٢}هـ جتا هـ) + (٣جاهـ جتا^{٢} هـ - جا^{٣}هـ) ت

وبمساواة الحقيقي بالحقيقي والتخيلي بالتخيلي

∴ جتا٣هـ = جتا^{٣}هـ - ٣جا^{٢}هـ جتا هـ

= جتا^{٣}هـ - ٣(١ - جتا^{٢}هـ) جتا هـ

= جتا^{٣}هـ - ٣جتاهـ + ٣جتا^{٣}هـ

= ٤جتا^{٣}هـ - ٣ جتا هـ

، جا٣هـ = ٣جاهـ جتا^{٢}هـ - جا^{٣} هـ

= ٣جاهـ (١ - جا^{٢}هـ) – جا^{٣} هـ

= ٣جاهـ - ٤جا^{٣}هـ

<u>مثال</u>: باستخدام نظرية ديموافر أو جد قيمة كل من جتا ٢هـ ، جا٢هـ بدلالة النسب المثلثية للزاوية هـ .

الحـــــــل

من ديموافر (جتا هـ + ت جاهـ)^{٢} = جتا ٢هـ + ت جا٢هـ ----- (١)

، جبرياً (جتا هـ + ت جاهـ)^{٢} = جتا^{٢}هـ + ت^{٢} جا^{٢}هـ + ٢جاهـ جتاهـ ت

= جتا^{٢}هـ - جا^{٢}هـ + ٢جاهـ جتاهـ ت

= (جتا^{٢}هـ - جا^{٢}هـ) + ٢جاهـ جتاهـ ت---- (٢)

من(١) ، (٢) واستخدام خصائص تساوي عددين مركبين

∴ جتا٢هـ+ ت جا ٢هـ = (جتا^{٢}هـ - جا^{٢}هـ) + ٢جاهـ جتاهـ ت

∴ جتا٢هـ = جتا^{٢}هـ - جا^{٢}هـ ، جا٢هـ = ٢جاهـ جتاهـ ت

<u>مثال</u>: إذا كان $ع_{١}$ = ٢(جتا هـ + ت جاهـ) ، $ع_{٢}$ = ٤(جتا٢هـ + ت جا٢هـ)

$ع_{٣}$ = $\frac{١}{٢}$ (جتا$\frac{هـ}{٢}$ + ت جا$\frac{هـ}{٢}$) أوجد الصورة الجبرية للعدد: $\frac{ع_{١}^{٥} \times ع_{٢}^{-٣}}{ع_{٣}}$

علماً بأن هـ ∈]٠ ، ٩٠[، ظا هـ = $\frac{٣}{٤}$

الحـــــــل

$ع_{١}^{٥}$ = $٢^{٥}$ (جتا ٥هـ + ت جا٥هـ) ---- (١)

، $ع_{٢}^{-٣}$ = $٤^{-٣}$ [جتا(-٦هـ) + ت جا(-٦هـ)]

= $٢^{-٦}$ [جتا(-٦هـ) + ت جا (-٦هـ)] ----- (٢)

$ع_٣^٢ = (\frac{١}{٢})^٢$ [جتاهـ + ت جا هـ] ----- (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣)

$$\frac{ع_١^٥ \times ع_٢^{-٣}}{ع_٣} = \frac{٢^٥ \times ٢^{-١٠}}{(\frac{١}{٢})^٢}$$ [جتا(٥هـ ٦هـ - هـ) + ت جا(٥هـ ٦هـ هـ)]

= ٢[جتا(-٢هـ) + ت جا (-٢هـ)] ---- (٤)

، ∵ طاهـ = $\frac{٣}{٤}$ ، هـ ∈] ٠ ، ٩٠[

∴ جتا (-٢هـ) = جتا ٢هـ = ٢جتا^٢ هـ -١

$= ٢\times(\frac{٤}{٥})^٢ - ١ = \frac{٣٢}{٢٥} - ١ = \frac{٧}{٢٥}$

، جا(-٢هـ) = - جا٢هـ = -٢جاهـ جتاهـ

$= -٢\times \frac{٣}{٥} \times \frac{٤}{٥} = -\frac{٢٤}{٢٥}$

، بالتعويض في (٤) ينتج أن :-

$$\frac{ع_١^٥ \times ع_٢^{-٣}}{ع_٣} = ٢(\frac{٧}{٢٥} - \frac{٢٤}{٢٥} ت) = \frac{١٤}{٢٥} - \frac{٤٨}{٢٥} ت$$

<u>مثال</u>: أوجد المقياس والسعة للعدد المركب ع = (١+ جتاأ + ت جاأ)^٥

الحـــــل

نضع ١+ جتا أ + ت جا أ في الصورة القطبية

∵ ١+ جتا أ = ٢ جتا^٢ $\frac{أ}{٢}$ ، جا أ = ٢ جا$\frac{أ}{٢}$ جتا$\frac{أ}{٢}$

∴ ١+ جتا أ + ت جا أ = ٢ جتا^٢ $\frac{أ}{٢}$ + ت × ٢ جا$\frac{أ}{٢}$ جتا$\frac{أ}{٢}$

= ٢ جتا $\frac{أ}{٢}$ (جتا$\frac{أ}{٢}$ + ت جا $\frac{أ}{٢}$)

∴ ع^٥ = ٢^٥ جتا^٥$\frac{أ}{٢}$(جتا٥ × $\frac{أ}{٢}$ + ت جا ٥ × $\frac{أ}{٢}$)

∴ | ع | = ٣٢ جتا^٥ $\frac{أ}{٢}$ ، سعة العدد = $\frac{٥أ}{٢}$

<u>مثال</u>: اختصر العدد الآتي إلي الصورة الجبرية :-

$$ع = \frac{\left(\text{جتا}\frac{ط}{٣} + \text{ت جا}\frac{ط}{٣}\right)^{٥} \times \left(\text{جتا}\frac{ط}{٤} + \text{ت جا}\frac{ط}{٤}\right)^{٣}}{\left(\text{جتا}\frac{ط}{٦} + \text{ت جا}\frac{ط}{٦}\right)^{٧}}$$

الحـــــــل

بتطبيق نظرية ديموافر علي البسط والمقام

$$\therefore ع = \frac{\left(\text{جتا}\frac{٥}{٣}ط + \text{ت جا}\frac{٥}{٣}ط\right) \times \text{جتا}\left(\frac{٣}{٤}ط + \text{ت جا}\frac{٣}{٤}ط\right)}{\text{جتا}\left(\frac{٧}{٦}ط\right) + \text{ت جا}\left(\frac{٧}{٦}ط\right)}$$

$$= \left[\text{جتا}\left(\frac{٥}{٣}ط + \frac{٣}{٤}ط - \frac{٧}{٦}ط\right) + \text{ت جا}\left(\frac{٥}{٣}ط + \frac{٣}{٤}ط - \frac{٧}{٦}ط\right)\right]$$

$$= \text{جتا}\frac{٥}{٤}ط + \text{ت جا}\frac{٥}{٤}ط = \text{جتا } ٢٢٥ + \text{ت جا } ٢٢٥$$

$$= \text{جتا}\left(١٨٠ + ٤٥\right) + \text{ت جا}\left(١٨٠ + ٤٥\right)$$

$$= -\frac{١}{٢}\sqrt{٢} - \frac{١}{٢}\sqrt{٢}\ \text{ت} = -\frac{١}{٢}\sqrt{٢}\left(١ + \text{ت}\right)$$

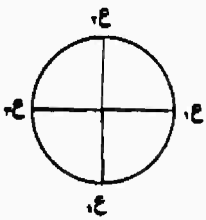
استخدام نظرية ديموافر لإيجاد جذور الأعداد المركبة

إذا كان العدد المركب ع = ل(جتا هـ + ت جا هـ) ، ن عدد صحيح موجب فإن ع له ن من الجذور المختلفة التي تعطي بالقانون :

$$ع^{\frac{1}{ن}} = ل^{ن} \left[جتا \frac{هـ + ٢ ك ط}{ن} + ت جا \frac{هـ + ٢ ك ط}{ن} \right] ، ك = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ......$$

مثال: للمعادلة $س^٤ = ١$ أربعة جذور أحدهما $ر_١$ = جتا. + ت جا.) أوجد الجذور الأخري.

الحـــــل



$\therefore$ $س^٤ = ١$

$\because$ $ع_١$ = جتا. + ت جا.

لإيجاد بقية الجذور يضاف لكل زاوية ($\frac{٣٦٠}{٤} = ٩٠$)

$\therefore$ $ع_٢$ = جتا ٩٠ + ت جا ٩٠

$ع_٣$ = جتا ١٨٠ + ت جا ١٨٠

$ع_٤$ = جتا ٢٧٠ + ت جا ٢٧٠

مثال: ضع العدد المركب $-٨ + ٨ \sqrt{٣}$ ت في الصورة ر(جتاهـ + ت جاهـ)

ثم أوجد $\sqrt[٤]{-٨+٨\sqrt{٣}\,ت}$

الحـــــل

$-٨ + ٨ \sqrt{٣}$ ت = ر(جتاهـ + ت جا هـ)

س = -٨ ، ص = $٨\sqrt{٣}$ $\therefore$ ر = $\sqrt{٦٤ + ٦٤ \times ٤} = ١٦$

$\therefore$ طا هـ = $\left|\frac{س}{ص}\right| = \left|\frac{٨\sqrt{٣}}{-٨}\right| = \sqrt{٣}$ $\therefore$ هـ = ٦٠^{0} وتقع في الربع الثاني

$\therefore$ هـ = ١٨٠ – ٦٠ = ١٢٠

$\therefore$ $-٨ + ٨ \sqrt{٣}$ ت = ١٦ (جتا ١٢٠ + ت جا ١٢٠)

لإيجاد الجذر الرابع فقط لابد من ايجاد الجذر الأول

$ع_١ = \sqrt[٤]{١٦}$ [جتا $\frac{١٢٠}{٤}$ + ت جا $\frac{١٢٠}{٤}$] = ٢ [جتا ٣٠ + ت جا ٣٠]

$ع_٢$ = ٢[جتا (٣٠ + ٢٧٠) + ت جا(٣٠ + ٢٧٠)] = ٢[جتا ٣٠٠ + ت جا٣٠٠]

مثال: اثبت ان $(١ + ت)^{٢٠}$ = ـ ١٠٢٤ حيث ت = $\sqrt{-١}$

الحـــــــل

$(١ + ت)^{٢٠} = [(١ + ت)^{٢}]^{١٠}$

$= (١ - ١ + ٢ت)^{١٠} = (٢ت)^{١٠}$

$= ٢^{١٠} \times ت^{١٠} = ١٠٢٤ \times ت^{٢} = ١٠٢٤ \times -١ = -١٠٢٤$

مثال: أوجد الجذور الخمسة للعدد ٣٢

الحـــــــل

٣٢ × ١ = ٣٢ [جتا . + ت جا.]

$\therefore$ $ع_١ = \sqrt[٥]{٣٢}$ [جتا $\frac{٠}{٥}$ + ت جا $\frac{٠}{٥}$] = ٢ [جتا ٠ + ت جا ٠]

لإيجاد بقية الجذور يضاف لكل زاوية علي التتابع $\frac{٣٦٠}{٥}$ = ٧٢

$ع_٢$ = ٢ [جتا٧٢ + ت جا ٧٢]

$ع_٣$ = ٢[جتا١٤٤ + ت جا ١٤٤]

$ع_٤$ = ٢ [جتا ٢١٦ + ت جا ٢١٦]

$ع_٥$ = ٢ [جتا٢٨٨ + ت جا ٢٨٨]

مثال: إذا كانت س = ١+ ت فحول س إلس الصورة المثلثية ثم أوجد قيمة $س^{١٠}$

الحـــــــل

س = ١ + ت

ر = $\sqrt{١ + ١}$ = ٢

طاهـ = $\frac{١}{١}$ = ١ $\therefore$ هـ = ٤٥°

س = $\sqrt{٢}$ (جتا ٤٥ + ت جا٤٥)

$س^{١٠}$ = [$\sqrt{٢}$ (جتا ٤٥ + ت جا ٤٥) $]^{١٠}$ = $(\sqrt{٢})^{١٠}$ (جتا ٤٥٠ + ت جا٤٥٠)

= ٢^{5} (جتا٩٠ + ت جا٩٠) = ٣٢ ت

إيجاد الجذرين التربيعين للعدد المركب

لكل عدد مركب ع = ل (جتاهـ + ت جاهـ) يوجد جذران تربيعيان مقياس كل منهما = $\sqrt{ل}$

وسعة الأولى = $\frac{هـ}{٢}$ وسعة الثاني = ($\frac{هـ}{٢}$ + ط)

<u>أي الجذران هما</u>

$\sqrt{ل}$ (جتا $\frac{هـ}{٢}$ + ت جا $\frac{هـ}{٢}$) ، $\sqrt{ل}$ [جتا ($\frac{هـ}{٢}$ + ط) + ت جا ($\frac{هـ}{٢}$ + ط)]

<u>مثال</u>: أوجد الجذرين التربيعين للعدد ع = -٢ + ٢ $\sqrt{٣}$ ت بتحويله إلي الصورة القطبية

الحـــــل

نضع العدد ع بالصورة القطبية

|ع| = $\sqrt{(-٢)^٢ + (٢\sqrt{٣})^٢}$ = $\sqrt{٤ + ١٢}$ = ٤ = ل

جتا ي = | $\frac{س}{ل}$ | = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$ ∴ ي = ٦٠°

∵ ع = (-٢ ، ٢ $\sqrt{٣}$) تقع في الربع الثاني ∴ هـ = ١٨٠ - ٦٠ = ١٢٠

∴ ع = ٤ (جتا ١٢٠ + ت جا ١٢٠)

∴ $\sqrt{ع}$ = $\sqrt{٤}$ (جتا $\frac{١٢٠}{٢}$ + ت جا $\frac{١٢٠}{٢}$)

= ٢ (جتا ٦٠ + ت جا ٦٠) = ١ + $\sqrt{٣}$ ت

، $\sqrt{ع}$ = $\sqrt{٤}$ [جتا (٦٠+١٨٠) + ت جا (٦٠+١٨٠)]

= ٢ [(- جتا ٦٠) - (ت جا ٦٠)] = -١ - $\sqrt{٣}$ ت

<u>ملاحظة :</u>

كل من الجذرين التربيعين لأي عدد مركب هو المعكوس الجمعي للآخر فإذا كان الجذر الأول هو س + ت ص فإن الآخر - س - ت ص = - (س+ ت ص) .

إيجاد الجذرين التربيعين لعدد مركب جبرياً

مثال: أوجد جبرياً الجذرين التربيعين للعدد ع = -٧ + ٢٤ ت

الحـــل

نفرض أن $\sqrt{\text{-٧ + ٢٤ ت}}$ = س + ت ص وبتربيع الطرفين

-٧ + ٢٤ ت = س^{٢} - ص^{٢} + ٢ س ص ت

∴ س^{٢} − ص^{٢} = -٧ ---- (١)

، ٢ س ص = ٢٤ ---- (٢)

∴ ص = $\frac{\text{١٢}}{\text{س}}$

بالتعويض في (١) ∴ س^{٢} - $\frac{\text{١٤٤}}{\text{س}}$ = -٧

∴ س^{٤} + ٧ س^{٢} − ١٤٤ = ٠

(س^{٢} - ٩) (س^{٢} + ١٦) = ٠ ∴ س^{٢} = ٩

∴ س = + ٣ أو س^{٢} = -١٦ وهذا مرفوض

بالتعويض في (٢) ∴ ص = ± $\frac{\text{١٢}}{\text{٣}}$ = ٤

∴ الجذران التربيعيان هما ± (٣ + ٤ ت)

مثال: ضع العدد ٢ت بالصورة القطبية

الحـــل

∴ ٢ت = ٢ (جتا٩٠ + ت جا٩٠)

∴ $\sqrt{\text{٢ت}}$ = $\sqrt{\text{٢}}$ (جتا $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ × ٩٠ + ت جا $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ × ٩٠)

= $\sqrt{\text{٢}}$ (جتا ٤٥ + ت جا٤٥) = ١ + ت

، $\sqrt{\text{٢ت}}$ = $\sqrt{\text{٢}}$ [جتا(٤٥ + ١٨٠) + ت جا (٤٥ + ١٨٠)]

= $\sqrt{\text{٢}}$ (- جتا ٤٥ - ت جا٤٥) = -١ - ت

∴ الجذران هما ± (١ + ت)

ثانيا : الطريقةالجبرية :-

نفرض أن $\sqrt{\text{٢ ت}}$ = س + ت ص

∴ ٢ت = (س^{٢} - ص^{٢}) + ٢ س ص ت

∴ س^{٢} − ص^{٢} = ٠ ----- (١) ، ٢س ص = ٢

∴ س ص = ١ ∴ ص = $\frac{\text{١}}{\text{س}}$ ----- (٢) بالتعويض في (١)

∴ $س^2 - \frac{1}{س^2} = ٠$ ∴ $س^4 = ١$ ∴ $س = \pm ١$

بالتعويض في (٢) ∴ $ص = \pm ١$

∴ الجذران هما $\pm ١ \pm ١ \times ت = \pm (١+ت)$

<u>مثال</u>: إذا كان $\sqrt{\frac{-٧ + ٢٦ت}{٥ - ٢ت}} = أ + ت ب$ **حيث أ ، ب حقيقيان أوجد قيم أ ، ب**

الحـــــل

الكسر $= \frac{-٧ + ٢٦ت}{٥ - ٢ت} \times \frac{٥ + ٢ت}{٥ + ٢ت} = \frac{-٣٥ + ١٦٦ت + ٢٥ت^2}{٢٥ - ٤ت^2}$

$= \frac{-٨٧ + ١١٦ت}{٢٩} = -٣ + ٤ت$

∴ $\sqrt{-٣ + ٤ت} = أ + ب ت$ وبالتربيع

∴ $-٣ + ٤ت = أ^2 - ب^2 + ٢ أ ب ت$

∴ $أ^2 - ب^2 = -٣$ ------ (١)

، $٢ أ ب = ٤$ ∴ $ب = \frac{٢}{أ}$ وبالتعويض في (١)

∴ $أ^2 - \frac{٤}{أ^2} = -٣$ ∴ $أ^4 + ٣أ^2 - ٤ = ٠$

∴ $(أ^2 + ٤)(أ^2 - ١) = ٠$

∴ $أ^2 = ١$ ∴ $أ = \pm ١$ ∴ $ب = \pm ٢$

<u>مثال</u>: أوجد قيم س ، ص الحقيقية التي تحقق المعادلة :

$(س + ت ص)^2 - ٤ \frac{\sqrt{٣} + ت}{\sqrt{٣} - ت} + ٤ = صفر$

الحـــــل

$\frac{\sqrt{٣} + ت}{\sqrt{٣} - ت} = \frac{\sqrt{٣} + ت}{\sqrt{٣} - ت} \times \frac{\sqrt{٣} + ت}{\sqrt{٣} + ت} = \frac{٣ + ٢\sqrt{٣} ت + ت^2}{٣ - ت^2} = \frac{٢ + ٢\sqrt{٣} ت}{٤}$

بالتعويض بهذه القيمة عن الكسر في المعادلة

∴ $(س + ت ص)^2 - ٤ \frac{٢ + ٢\sqrt{٣} ت}{٤} + ٤ = صفر$

∴ $(س + ت ص)^2 - ٢ - ٢\sqrt{٣} ت + ٤ = ٠$

∴ $(س + ت ص)^2 = -٢ + ٢\sqrt{٣} ت$

∴ $س^2 - ص^2 + ٢ س ص ت = -٢ + ٢\sqrt{٣} ت$

$\therefore س^{٢} - ص^{٢} = -٢$ ----- (١) ، $٢ س ص = ٢\sqrt{٣}$ ----- (٢)

$\therefore س ص = \sqrt{٣}$ $\therefore ص = \frac{\sqrt{٣}}{س}$

بالتعويض في (١) $\therefore -٢ = س^{٢} - \frac{٣}{س^{٢}}$

بالضرب في $س^{٢}$ $\therefore -٢ س^{٢} = س^{٤} - ٣$

$\therefore س^{٤} + ٢س^{٢} - ٣ = ٠$ $\therefore (س^{٢} + ٣)(س^{٢} - ١) = ٠$

$\therefore س^{٢} = -٣$ (مرفوض) أ، $س^{٢} = ١$ $\therefore س = \pm ١$

بالتعويض في (٢) $\therefore ص = \pm \sqrt{٣}$

<u>مثال</u>: إذا كانت س ∈ ك فأوجد مجموعة الحل للمعادلة $س^{٢} - (٢+ت) س - (١+٥ت) = ٠$

الحـــــل

$\because س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$ حيث أ = ١ ، ب = $-(٢+ت)$ ، جـ = $-(١+٥ت)$

$\therefore س = \frac{(٢+ت) \pm \sqrt{٣ + ٤ت + ٤ + ٢٠ت}}{٢} = \frac{(٢+ت) \pm \sqrt{٧ + ٢٤ت}}{٢}$

ثم نفرض أن $\sqrt{٧ + ٢٤ت} = ل + ت م$ وبتربيع الطرفين

$\therefore ٧ + ٢٤ت = ل^{٢} - م^{٢} + ٢ل م ت$

$\therefore ل^{٢} - م^{٢} = ٧$ ----- (١) ، $٢ل م = ٢٤$ ----- (٢)

بتربيع (١) ، (٢) والجمع $\therefore (ل^{٢} + م^{٢})^{٢} = ٦٢٥$

$\therefore ل^{٢} + م^{٢} = ٢٥$ ------ (٣)

بجمع (١) ، (٣) $\therefore ٢ل^{٢} = ٣٢$ $\therefore ل^{٢} = ١٦$ $\therefore ل = \pm ٤$

بطرح (١) من (٣) $\therefore ٢م^{٢} = ١٨$ $\therefore م^{٢} = ٩$ $\therefore م = \pm ٣$

$\therefore \sqrt{٧ + ٢٤ت} = \pm (٤ + ٣ت)$

$\therefore س = \frac{(٢+ت) \pm (٤ + ٣ت)}{٢}$

$\therefore س = \frac{٢+ت+٤+٣ت}{٢} = \frac{٦+٤ت}{٢} = ٣ + ٢ت$

أ، $س = \frac{٢+ت-٤-٣ت}{٢} = \frac{-٢-٢ت}{٢} = -١ - ت$

$\therefore$ مجموعة الحل للمعادلة هي : $\{٣ + ٢ت ، -١ - ت\}$

تمارين (١٠)

- إستخدم نظرية ديموافر الجذرين التربيعين لكل من الأعداد الآتية:

١) -٢ ت   ٢) ١ - $\sqrt{٣}$ ت

٣) -٢ + ٢$\sqrt{٣}$ ت   ٤) ٤ (جتا $\frac{ط}{٣}$ - ت جا $\frac{ط}{٣}$)

٥) ٩ (جتا ٣٠٠° + ت جا ٣٠٠°)   ٦) $\frac{-٨}{١+\sqrt{٣}\,ت}$

- أوجد الجذرين التربيعين لكل مما يأتي دون التحويل للصورة المثلثية :-

٧) -٨ - ٦ ت   ٨) ٥ - ١٢ ت

٩) $\frac{-٧+ت}{١+ت}$ ١٠) $\frac{٣١+١٧ت}{١-ت}$

١١) إذا كان ع^{٢} = ٣ + ٤ ت أثبت أن ع + ٥ ع$^{-١}$ = ± ٤

١٢) إذا كان (س+ ت ص)^{٢} + $\frac{٨(١-ت)}{١+ت}$ + ١٥ = صفر فأوجد قيمتى س ، ص الحقيقية التى تحقق المعادلة .

١٣) إذا كان س+ ت ص = $\frac{٧-٤ت}{٢+ت}$ حيث س ، ص حقيقيتان فأوجد قيمة $\sqrt{٢س - ت ص}$

١٤) إذا كانت س = $\frac{١+٢ت}{١-ت}$ ، ص = $\frac{١-٢ت}{١+ت}$ أوجد : قيمة $\sqrt{٥س + ٣ص}$

١٥) إذا كانت س ∈ ك حل المعادلة

(٢+ت) س^{٢} - ٣ (١+ ٣ت) س- ٤(١- ٢ ت) = صفر

- أوجد الصورة المثلثية لقيم المقادير الآتية:-

١٦) $(-\sqrt{٣} + ت)^{\frac{٢}{٣}}$ ١٧) $(-٦٤ ت)^{\frac{١}{٣}}$

١٨) $(١ + ت)^{\frac{٢}{٣}}$ ١٩) $(٣٢)^{\frac{١}{٥}}$

- حل كل من المعادلات الآتية في ك :-

٢٠) س^{٥} + ١ = ٠

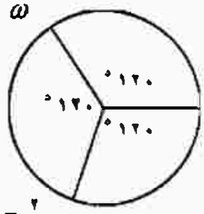
٢١) ع^{٥} = ١ - $\sqrt{٣}$ ت

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

$\left[\ \text{س} = ١ \ ، \ \omega = \frac{-١ + \sqrt{٣}\ \text{ت}}{٢} \ ، \ \omega^{٢} = \frac{-١ - \text{ت}\sqrt{٣}}{٢}\ \right]$

أي للواحد الصحيح ثلاثة جذور أحدهما حقيقي والجذران الآخران تخيليان مترافقان

$\omega = \frac{-١ + \sqrt{٣}\ \text{ت}}{٢}$



س = ١

$\omega^{٢} = \frac{-١ - \text{ت}\sqrt{٣}}{٢}$

- **خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :**

١. مربع أحد الجذرين التخيلين = الجذر التخيلي الآخر .

٢. مجموع الجذور التكعيبية للواحد الصحيح = صفر .

٣. الفرق بين الجذرين التخيلين = $\pm$ ت $\sqrt{٣}$

٤. حاصل ضرب الجذرين التخيلين = ١

- **علاقات هامة بين الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :**

$١ + \omega + \omega^{٢} = ٠$	$\omega \times \omega^{٢} = ١$	$\omega - \omega^{٢} = \pm \text{ت}\sqrt{٣}$
جمع الجذور $١ + \omega = -\omega^{٢}$ $١ + \omega^{٢} = -\omega$ $\omega^{٢} + \omega = -١$ $١ + أ\omega + أ\omega^{٢} = ٠$	**ضرب الجذور** $\omega = \frac{١}{\omega^{٢}}$ $\omega^{٢} = \frac{١}{\omega}$ $\omega^{٣} = ١$	**طرح الجذور** إذا اعتبرنا $\omega - \omega^{٢} = \text{ت}\sqrt{٣}$ فإن: $\omega^{٢} + \omega = -\text{ت}\sqrt{٣}$ والعكس صحيح

- **<u>كيفية اختزال قوى ω :</u>**

اقسم الأس علي ٣ وباقي خارج القسمة هو الأس الجديد لـ ω .

$$\omega^{16} = \omega \quad ، \quad \omega^{29} = \omega^{2} \quad ، \quad \omega^{32} = \omega^{2} \quad ، \quad \omega^{30} = 1$$

<u>مثال</u>: اثبت أن $(1+\omega^2)^{15} = -1$

الحـــــل

$\because 1+\omega+\omega^2 = 0 \qquad \therefore (1+\omega^2) = -\omega$

$(1+\omega^2)^{15} = (-\omega)^{15} \qquad \therefore$ **الأس يقبل القسمة علي ٣**

$\therefore [(-\omega)^3]^5 = (-1)^5 = -1 =$ **الطرف الأيسر**

<u>مثال</u>: اثبت ان : $\dfrac{1}{4+3\omega+2\omega^2} + \dfrac{1}{5+3\omega+-\omega^2} = 1$

الحـــــل

نجعل المقدار المكون من ثلاثة حدود ثنائي الحد

$\therefore 4+3\omega+2\omega^2 \quad ، \quad \because \omega^2 = -1-\omega$

$\therefore 4+3\omega-2-2\omega = 2+\omega$

$\therefore 5+3\omega+4\omega^2 = 5+3\omega-4-4\omega = 1-\omega$

$\therefore$ المقدار $= \dfrac{1}{2+\omega} + \dfrac{1}{1-\omega} = \dfrac{1-\omega+2+\omega}{(1-\omega)(2+\omega)} = \dfrac{3}{2-2\omega+\omega-\omega^2}$

$= \dfrac{3}{2-\omega-\omega^2} = \dfrac{3}{2-(\omega+\omega^2)} = \dfrac{3}{2+1} = \dfrac{3}{3} = 1$

<u>مثال</u>: إذا كان ω أحد الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فأوجد قيمة :

$$\left(\frac{2+3\omega-4\omega^2}{-3+4\omega+2\omega^2} - \frac{2-3\omega-4\omega^2}{2س+3\omega^2-4} \right)^8$$

الحـــــل

الكسر الأول : $\dfrac{2+3\omega-4\omega^2}{-3+4\omega+2\omega^2} = \dfrac{\omega(2\omega^2+3-4\omega)}{(-3+4\omega+2\omega^2)} = \omega$

الكسر الثاني : $\frac{٢ - ٣\omega - ٤\omega^٢}{٢س + ٣\omega^٢ - ٤} = \frac{٢ + ٣\omega - ٤\omega^٢}{\omega(٢ + ٣\omega - ٤\omega^٢)} = \frac{١}{\omega}$

$\therefore$ المقدار $\left[\omega - \frac{١}{\omega}\right]^٨ = \left[\omega - \omega^٢\right]^٨$

$(\pm\sqrt{٣}\,ت)^٨ = \left[(\pm\sqrt{٣}\,ت)^٢\right]^٤ = (٣ت^٢)^٤ = ٣\,ت^٤ = ٣$

<u>مثال</u>: اثبت أن:

$$\left(٢ + ٢\omega + \frac{٣}{\omega}\right)^٢ + \left(٢ + ٣\omega + \frac{٢}{\omega}\right)^٢ + \left(٣ + ٢\omega^٢ + \frac{٢}{\omega}\right)^٢ = \text{صفر}$$

الحـــــل

الطرف الأيمن $= (٢ + ٢\omega + ٣\omega^٢)^٢ + (٢ + ٣\omega + ٢\omega^٢)^٢ + (٣ + ٢\omega^٢ + ٢\omega)^٢$

$= \left[٢(١+\omega) + ٣\omega^٢\right]^٢ + \left[٢(١+\omega^٢) + ٣\omega\right]^٢ + \left[٢(\omega + \omega^٢) + ٣\right]^٢$

$= \left[-٢\omega^٢ + ٣\omega^٢\right]^٢ + \left[٢\times -\omega + ٣\omega\right]^٢ + (-٢ + ٣)^٢$

$= (\omega^٢)^٢ + \omega^٢ + ١ = \omega^٤ + \omega^٢ + ١$

$= \omega + \omega^٢ + ١ = \text{صفر}$

<u>مثال</u>: اثبت أن : $\frac{١ + \omega - \omega^٢}{١ - \omega + \omega^٢} = \omega$

الحـــــل

$$\frac{(١ + \omega) - \omega^٢}{(١ + \omega^٢) - \omega} = \frac{-\omega^٢ - \omega^٢}{-\omega - \omega} = \frac{-٢\omega^٢}{-٢\omega} = \omega$$

<u>مثال</u>:اثبت أن : $\frac{٣ + \omega}{١ + ٢\omega} + \frac{٣ + \omega^٢}{١ + ٢\omega^٢} = ١$

الحـــــل

الطرف الأيمن $= \frac{(٣ + \omega)(١ + ٢\omega^٢) + (٣ + \omega^٢)(١ + ٢\omega)}{(١ + ٢\omega)(١ + ٢\omega^٢)}$

$= \frac{٣ + ٦\omega^٢ + \omega + ٢\omega + ٣ + ٦\omega + \omega^٢ + ٢\omega^٣}{١ + ٢\omega^٢ + ٢\omega + ٤\omega^٣}$

$$= \frac{١٠ + ٧\omega + ٧\omega^{٢}}{٥ + ٢(\omega + \omega^{٢})} = \frac{١٠ + ٧(\omega + \omega^{٢})}{٥ + ٢(\omega + \omega^{٢})} = \frac{١٠ - ٧}{٥ - ٢} = \frac{٣}{٣} = ١$$

<u>مثال</u>: إذا كانت ١، ω ، $\omega^{٢}$ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فأثبت أن:

$$\omega - \omega^{٢} = \omega^{٢} - \omega = \pm \sqrt{٣}\,ت$$

الحـــــل

$$\omega = \frac{-١ + \sqrt{٣}\,ت}{٢} \quad ، \quad \omega^{٢} = \frac{-١ - \sqrt{٣}\,ت}{٢}$$

$$\omega - \omega^{٢} = \sqrt{٣}\,ت \quad ، \quad \omega^{٢} - \omega = -\sqrt{٣}\,ت$$

الفرق بين ω ، $\omega^{٢}$ $= \pm \sqrt{٣}\,ت$

<u>مثال</u>: اثبت أن : $\sqrt{\dfrac{٥ + ٥\omega^{٢} + ٦\omega}{٧ + ٦\omega^{-١} + ٦\omega^{-٢}}} = \pm \omega^{٢}$

الحـــــل

بالتربيع للطرفين

$$\frac{٥ + ٥\omega^{٢} + ٦\omega}{٧ + \frac{٦}{\omega} + \frac{٦}{\omega^{٢}}} = \omega^{٤}$$

$$= \frac{٥(١ + \omega^{٢}) + ٦\omega}{٧ + \frac{٦}{\omega} + \frac{٦}{\omega^{٢}}} = \omega^{٤}$$

$$= \sqrt{\frac{٥ \times -\omega + ٦\omega}{٧ + ٦\omega^{٢} + ٦\omega}} = \sqrt{\frac{\omega}{١}} = \sqrt{\omega^{٤}} = \omega^{٢}$$ **الطرف الأيسر**

<u>مثال</u>: حل المعادلة س^{٢} $= ١ + \omega^{٢}$ حيث س ∈ ك

الحـــــل

$$س^{٢} = ١ + \frac{-١ + \sqrt{٣}\,ت}{٢} = ١ - \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,ت = \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,ت$$

$$= \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,ت$$

$س^2 = [\text{جتا}60 + ت\ \text{جا}60]$

$س = \left(\text{جتا}\,\frac{60}{2} + ت\ \text{جا}\,\frac{60}{2}\right) = (\text{جتا}30 + ت\ \text{جا}\,30)$

يضاف $\frac{360}{2} = 180$ $\therefore$ $س_2 = (\text{جتا}\ 210 + ت\ \text{جا}210)$

مثال: اثبت ان

$$\frac{1}{2 - 2\omega + \omega^2} + \frac{1}{3 + 2\omega - \omega^2} = \frac{5}{13}$$

الحـــــــل

$\because\ 2 - 2\omega + \omega^2 = 2 - 2\omega - 1 - \omega = 1 - 3\omega$

، $3 + 2\omega - \omega^2 = 3 + 2\omega - 1(-1-\omega) = 3 + 2\omega + 1 + \omega = 4 + 3\omega$

الطرف الأيمن $= \frac{1}{1-3\omega} + \frac{1}{4+3\omega}$

$$= \frac{4+3\omega+1-3\omega}{(1-3\omega)(4+3\omega)} = \frac{5}{4+3\omega-12\omega-9\omega^2}$$

$$= \frac{5}{4-9\omega-9\omega^2} = \frac{5}{4-9(\omega+\omega^2)} = \frac{5}{13}$$

مثال: اثبت ان $\sqrt{\frac{1+10\omega+10\omega^2}{1-3\omega+3\omega^2}} = \pm\frac{3}{2}ت$

الحـــــــل

الطرف الأيمن $= \sqrt{\frac{1+10(\omega+\omega^2)}{1-3(\omega+\omega^2)}} = \sqrt{\frac{1-10}{1+3}} = \sqrt{\frac{-9}{4}} = \pm\frac{3}{2}ت$

مثال: إذا كانت $س = \frac{-1+\sqrt{3}\,ب}{2}$ فاثبت ان $س^{10} + س^8 + 1 = 0$

الحـــــــل

$س = \omega = \frac{1+\sqrt{3}\,ب}{2}$

$\omega^{10} + \omega^8 + 1 = 0$ $\omega + \omega^2 + 1 = 0$

مثال: اثبت ان $(١+\omega)^{٣} + (١-\omega-\omega^{٢})^{٣} = ٧$

الحـــــل

$(١+\omega)^{٣} + [١-(\omega+\omega^{٢})]^{٣}$

$= (-\omega^{٢})^{٣} + (١+١)^{٣}$

$= -\omega^{٦} + ٢^{٣} = -١ + ٨ = ٧$

مثال: اختصر إلي ابسط صورة $(٢+\frac{١}{\omega})^{٢} - (\frac{\omega^{٥}-١}{\omega^{٢}})^{٢}$

الحـــــل

$(٢+\omega^{٢})^{٢} + (\omega^{٣} - \frac{١}{\omega})^{٢}$

$= ٤ + ٤\omega^{٢} + \omega^{٤} + ١ - ٢\omega + \omega^{٢}$

$= ٥ + ٥\omega^{٢} + \omega - ٢\omega$

$= ٥(١+\omega^{٢}) - \omega$

$= -٥\omega - \omega = -٦\omega$

تمارين (١١)

■ إذا كانت ١ ، ω ، $\omega^٢$ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فأثبت أن:

(١) $(٢+١١\omega+٢\omega^٢)(٢+١١\text{و}^٢+٢\omega^٤) = ٨١$

(٢) $\left(\frac{١}{١+\omega^٥} - \frac{١}{١+\omega^٤}\right)^٢ = -٣$

(٣) $\left(\frac{٢\omega+١}{\omega}\right)^٢ - \left(\frac{\omega^٢-١}{\omega^٢}\right)^٢ = -٣$

(٤) $\frac{(٢+١١\omega+٢\omega^٢)(٢+١١\omega^٢+٢\omega)}{(١-\quad+\omega^٢)(١+\omega-\quad)} = \frac{٩}{٢}$

(٥) $(\omega-\omega^٢)\left(\frac{\omega-٣}{٤+٢\omega} - \frac{\omega^٢-٣}{٤+٢\omega^٢}\right) = -\frac{٥}{٢}$

(٦) $(٥+\omega)\left(\frac{١}{٥+٤\omega+٣\omega^٢} - \frac{١}{٣\omega+٢\omega^٢}\right) = ٤$

(٧) $\left(\frac{١}{١+٢\omega-٢\omega^٢} - \frac{١}{١-٢\omega+٢\omega^٢}\right) = -\frac{٤٨}{١٦٩}$

(٨) $\left(أ+\frac{ب}{\omega}\right)\left(أ+\frac{ب}{\omega^٢}\right) = (أ-ب)^٢+أب$

(٩) $\left(١+٣\omega^٢-\frac{٤}{\omega^٢}\right)\left(١+٣\omega-\frac{٤}{\omega}\right) =$ عدد حقيقي

(١٠) $\left(\frac{أ+١}{أ+(٢أ+١)\omega+أ\omega^٢}\right)^٦$ لا يتوقف على قيمة أ

(١١) $\left(\frac{٥-٣\omega^٢}{٥\omega-٣} - \frac{٢-٧\omega}{٢\omega^٢-٧}\right)^٤ = ٩$

(١٢) <u>اوجد مجموعة ن حداً الأولى من المتتابعة:</u>

(١، ω ، $\omega^٢$ ، $\omega^٣$ ، ......) ثم أوجد هذا المجموع في أبسط صورة عندما

ن = ٣م ، ٣م+١ ، ٣م + ٢ حيث م عدد صحيح

(١٣) إذا كانت س = $-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت فأثبت أن $س^{٢٢} + س^{١١} + ١ =$ صفر

(١٤) أوجد جذري المعادلة : $س^٢ + (١+٢\omega+\omega^٢)(١+\omega+٢\omega^٢) = ٠$

(١٥) أوجد قيمة $ت + \omega^{٢} + ت^{٣} + \omega^{٤} + ت^{٥} + \omega^{٦} + ...$ إلي ١٥ حداً

(١٦) أوجد مجموع ٢٣ حداً من المتتابعة الآتية إبتداء من الحد الأول :

$(\omega ، ت^{٢} ، \omega^{٣} ، ت^{٤} ، \omega^{٥} ، ت^{٦} ، .....)$

(١٧) أوجد قيمة $(١ - \omega)(١ - \omega^{٢})(١ - \omega^{٤})(١ - \omega^{٨})$

(١٨) كون المعادلة التي جذرها $(١ + \omega - \omega^{٢})^{٣}$ ، $(١ - \omega + \omega^{٢})^{٣}$

(١٩) إذا كان $س + ص ت = \left(\frac{١}{ت} - \omega - \omega^{٢}\right)^{٦}$ حيث س ، ص عددان حقيقيان فأوجد س ، ص

(٢٠) إذا كان $(١ - ت)(س + ص ت) = ١٩ \left(\frac{١}{٢ - ٣\omega^{٢}} + \frac{١}{٥ + ٣\omega^{٢}}\right)$ فاثبت أن $س = ص = \frac{٧}{٢}$

(٢١) حل المعادلة $س^{٢} = ١ + \omega^{٢}$