المحددات

المحدد هو مجموعة من العناصر مرتبة علي هيئة صفوف وأعمدة بشرط ..... عدد الصفوف = عدد الأعمدة وكل محدد له قيمة محددة .

*** محدد ٢×٢ ويأخذ الصورة** $\begin{vmatrix} أ & ب \\ جـ & ء \end{vmatrix}$

مثال١ : أوجد قيمة :-

[أ] $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix}$ = ٤ - ٦ = -٢

[ب] $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix}$ = جا^٢ أ + جتا^٢ أ = ١

*** محدد ٣×٣**

مثال٢ : أوجد قيمة

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٣ & ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ & ١ \end{vmatrix}$$

المحدد = + ١ $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix}$ -٢ $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix}$ +٣ $\begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix}$ = ٥ + ٢ + ٢١ = ١٨

ملاحظة : فك المحدد ممكن باستخدام أي صف أو أي عمود مع ملاحظة الإشارات .

مثال٣ : حل المعادلة $\begin{vmatrix} س & ٠ & ٠ \\ ١ & س & س \\ ٠ & ٢ & س \end{vmatrix}$ = ٣ س

الحـــــل

∴ س (س^٢ – ٢س) = ٣ س

س^٣ – ٢س^٢ -٣ س = ٠ ، س(س^٢ – ٢س -٣) = ٠

س(س-٣) (س+١) = ٠

∴ س = ٠ ، س = ٣ ، س = -١

مثال٤: إذا كانت (س- ١) أحد عوامل المحدد $\begin{vmatrix} \text{س}+١ & \text{ك} & ٤ \\ \text{ك} & ٤ & \text{س}+١ \\ ٥ & ٧ & ٦ \end{vmatrix}$ فاوجد قيمة ك ؟

الحـــــــــل

∵ (س-١) أحد عوامل المحدد

∴ المحدد = ٠ عندما س-١ = ٠ أي عندما س = ١ ∴ $\begin{vmatrix} ٢ & \text{ك} & ٤ \\ \text{ك} & ٤ & ٢ \\ ٥ & ٧ & ٦ \end{vmatrix} = ٠$

∴ ٢(٢٤-١٤) – ك (٦ك-١٠) + ٤ (٧ك-٢٠) = ٠

٢٠+٦ك² +١٠ك +٢٨ك -٨٠ = ٠

-٦ ك² +٣٨ك -٦٠ = ٠ ÷ -٢

٣ ك² – ١٩ك +٥٠ = ٠

(٣ك- ١٠) (ك- ٣) =٠ ∴ ك = $\frac{١٠}{٣}$ ك = ٣

مثال٥ : إذا كان $\begin{vmatrix} \text{ء} & \text{و} \\ \text{هـ} & ١ \end{vmatrix} = ٢$ فاوجد قيمة $\begin{vmatrix} \text{ء} & \text{و} \\ \text{هـ} & ١ \end{vmatrix}$ ، $\begin{vmatrix} \text{و} & ١ \\ \text{ء} & \text{هـ} \end{vmatrix}$ ، $\begin{vmatrix} \text{ء} & ١ \\ \text{وهـ} & ١ \end{vmatrix}$

الحـــــــــل

∵ $\begin{vmatrix} \text{ء} & \text{و} \\ \text{هـ} & ١ \end{vmatrix} = ٢$

∴ ء- و هـ = ٢ ∴ ء = وهـ + ٢

∴ $\begin{vmatrix} \text{ء} & \text{و} \\ \text{هـ} & ١ \end{vmatrix}$ = ء- وهـ = و هـ + ٢– وهـ = ٢

، $\begin{vmatrix} \text{و} & ١ \\ \text{ء} & \text{هـ} \end{vmatrix}$ = وهـ - ء = وهـ - وهـ -٢ = - ٢

، $\begin{vmatrix} \text{ء} & ١ \\ \text{وهـ} & ١ \end{vmatrix}$ = ء – و هـ = وهـ + ٢ – و هـ = ٢

مثال٦: إذا كانت جـ جذرا للمعادلة س² – س – ١ = ٠

فاثبت ان : $\begin{vmatrix} \text{جـ} & ٣ \\ ١ & \text{جـ} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \text{جـ} & ٠ \\ ٢\text{جـ} & ١ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{جـ} & ٣ \\ ١ & \text{جـ} \end{vmatrix} = ٠$

الحـــــــل

الطرف الأيمن : (جـ^{٢} – ٣) – (جـ) + (١٤ -١٢)

∴ جـ^{٢} -٣ – جـ + ٢

جـ^{٢} – جـ -١

∵ جـ جذرا للمعادلة س^{٢} – س – ١ = ٠

∴ جـ^{٢} – جـ -١ = ٠ وهذا يحقق صحة المطلوب

تمارين (١٢)

(١) أكتب المحددات التي تنشأ من حذف المتغيرات من المعادلات الآتية:-

أ) ٢س = -٢ ، س + ٣ = ٢

ب) ٢س – ص = ١ ، س + ٣ ص =٤ ، ٥ س – ٢ص = ٣

ج) س- ص = ٣ ، ٣س+ ٢ص = ٤ ، - س + ٣ص = -٥

(٢) أوجد قيمة المحددات الآتية : -

[أ] $\begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ -١ & ٢ \end{vmatrix}$ [ب] $\begin{vmatrix} ٠ & ٢ \\ ٥ & ٠ \end{vmatrix}$ [ج] $\begin{vmatrix} -٢ & ١ \\ ٤ & -٢ \end{vmatrix}$

[ء] $\begin{vmatrix} \text{س} & ٠ \\ ٠ & -\text{س} \end{vmatrix}$ [و] $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ \\ -٢ & ٠ \end{vmatrix}$ [هـ] $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٤ \end{vmatrix}$

(٣) باستخدام عناصر الصف الأول ، أوجد قيمة المحددات الآتية :-

[أ] $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ٤ & ٢ \\ -٣ & -١ & ٥ \end{vmatrix}$ [ب] $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٢ & ١ & ٣ \\ ١ & ٣ & ٢ \end{vmatrix}$ [ج] $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \end{vmatrix}$

[ء] $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٥ & ٤ \\ ٩ & ٨ & ٧ \end{vmatrix}$ [و] $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ٤ & ٠ \\ -١ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$ [هـ] $\begin{vmatrix} -٢ & ١ & ٠ \\ -٣ & ٠ & -١ \\ ٠ & ٣ & ٢ \end{vmatrix}$

(٤) حل كلا من المعادلات الآتية:-

أ) $\begin{vmatrix} -٢\text{س} & \text{س}^{٢} \\ \text{س}^{٢} & \text{س} \end{vmatrix} = -١٠$ ب) $\begin{vmatrix} ١ & \text{س} \\ \text{س} & ٣ \end{vmatrix} = ١$ ج) $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & \text{س} \\ \text{س} & \text{س} & ١ \\ \text{س} & ٢ & ٥ \end{vmatrix} = ٣\,\text{س}$

خواص المحددات

(١) قيمة المحدد (Δ) = مجموع حواصل ضرب عناصر أي صف (عمود) × العوامل المرافقة لها.

مثال٧: أوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ٥ & -٢ & ٣ \\ ٤ & ٠ & ٧ \\ ١ & ٢ & -٦ \end{vmatrix}$

الحـــــل

باستخدام عناصر الصف الثاني

$$\therefore \Delta = -٤ \begin{vmatrix} -٢ & ٣ \\ ٢ & -٦ \end{vmatrix} + \text{صفر} - ٧ \begin{vmatrix} ٥ & -٢ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix}$$

$$\therefore \Delta = ٤ \times ٦ - ٧ \times ١٢$$

$$-٢٤ - ٨٤ = -١٠٨$$

(٢) قيمة المحدد لا تتغير .... إذا تبدلت الصفوف بالأعمدة أو الأعمدة بالصفوف بنفس ترتيبها

$\therefore$ المحدد = محورته $\qquad \therefore \Delta = \acute{\Delta}$

مثال٨: حقق الخاصية السابقة إذا كان : $\begin{vmatrix} ٣ & ١ & -٢ \\ ٠ & ١ & -١ \\ ٢ & ٤ & ٥ \end{vmatrix}$

الحـــــل

$$\therefore \Delta = ٣ \begin{vmatrix} ١ & -١ \\ ٤ & ٥ \end{vmatrix} - ١ \begin{vmatrix} ٠ & -١ \\ ٢ & ٥ \end{vmatrix} -٢ \begin{vmatrix} ٠ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix}$$

$$= ٣ \times ٩ - ١ \times ٢ \; -٢ \times -٢ = ٢٧ - ٢ + ٤ = ٢٩$$

$$\acute{\Delta} = \begin{vmatrix} ٣ & ٠ & ٢ \\ ١ & ١ & ٤ \\ -٢ & -١ & ٥ \end{vmatrix} = ٣ \begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ -١ & ٥ \end{vmatrix} - ٠ + ٢ \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ -٢ & -١ \end{vmatrix} = ٣ \times ٩ + ٢ \times ١ = ٢٩$$

$\therefore$ المحدد = محورته

(٣) قيمة المحدد لا تتغير .... بإضافة أي صف أو عمود مضروبا في عدد ثابت إلي صف أو عمود آخر .

مثال٩: بدون فك المحدد اثبت أن :

$$\begin{vmatrix} \text{أ}+١ & \text{ب}+١ & \text{جـ}+١ \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{أ}+\text{ب} & \text{ب}+\text{جـ} & \text{جـ}+\text{أ} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{جـ} & \text{أ} \end{vmatrix}$$

الحـــــــل

نضيف – ص٢ إلي ص١

$$\therefore \begin{vmatrix} \text{أ}+١-\text{أ} & \text{ب}+١-\text{ب} & \text{جـ}+١-\text{جـ} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{أ}+\text{ب} & \text{ب}+\text{جـ} & \text{جـ}+\text{أ} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{أ}+\text{ب} & \text{ب}+\text{جـ} & \text{جـ}+\text{أ} \end{vmatrix}$$ ثم نضيف – ص٢ إلي ص٣

$$\therefore \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{أ}+\text{ب}-\text{أ} & \text{ب}+\text{جـ}-\text{ب} & \text{جـ}+\text{أ}-\text{جـ} \end{vmatrix}$$

$\therefore$ الطرفان متساويان

(٤) قيمة المحدد علي الصورة المثلثية = حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي .

$$\begin{vmatrix} ٥ & ٧ & -١٠ \\ ٠ & -٢ & ٤ \\ ٠ & ٠ & ٣ \end{vmatrix} \quad ، \quad \begin{vmatrix} -١ & ٠ & ٠ \\ ٣ & ٥ & ١ \\ ٦ & ١ & ٤ \end{vmatrix}$$

مثال١٠: أوجد قيمة : $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ٤ \\ ٠ & ٥ & ١ \\ ٠ & ٠ & ٧ \end{vmatrix}$

$\because$ المحدد علي الصورة المثلثية

$\therefore$ قيمة المحدد = حاصل ضرب عناصر قطره الرئيسي

$= ٣ \times ٥ \times ٧ = ١٠٥$

(٥) إذا ضرب كل عنصر من عناصر أي صف أو عمود في عدد ثابت فإن قيمة المحدد تضرب في نفس العدد .

$$\therefore \text{ك} \times \Delta = \begin{vmatrix} 2\text{ك} & 3\text{ك} & 5\text{ك} \\ 4 & 7 & 10 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \therefore \Delta = \frac{1}{\text{ك}} \begin{vmatrix} 2\text{ك} & 3\text{ك} & 5\text{ك} \\ 4 & 7 & 10 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

نتيجة : العامل المشترك لعناصر صف (أو عمود) هو أحد عوامل المحدد .

<u>مثال ١١</u> : بدون فك المحدد اثبت أن:

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{س}^2 & \text{س}^3 \\ \text{ص} & \text{ص}^2 & \text{ص}^3 \\ \text{ع} & \text{ع}^2 & \text{ع}^3 \end{vmatrix} = \text{س ص ع} \begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{س}^2 \\ 1 & \text{ص} & \text{ص}^2 \\ 1 & \text{ع} & \text{ع}^2 \end{vmatrix}$$

الحـــــــل

بأخذ س ← عامل مشترك من ص_1

، ص ← عامل مشترك من ص_2

، ع ← عامل مشترك من ص_3

$$\therefore \text{س ص ع} \begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{س}^2 \\ 1 & \text{ص} & \text{ص}^2 \\ 1 & \text{ع} & \text{ع}^2 \end{vmatrix} = \text{الطرف الأيسر}$$

(٦) تتغير إشارة المحدد إذا تبادل الوضع صفان أو عمودان .

<u>مثال ١٢</u>: بدون فك المحدد اثبت أن:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

الحـــــــل

ص_1 ، ص_3 يتبادلان الوضع : $\therefore - \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ 6 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

ثم ص$_{٢}$ ، ص$_{٣}$ يتبادلان الوضع : $\therefore\ - \times -$ $\begin{vmatrix} ع & ص & س \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ٤ & ٥ & ٦ \end{vmatrix}$ = الأيسر

(٧) خاصية التجزئ (تحويل محدد إلي مجموع محددين) ويستفاد منها :

[١] ينتج عامل مشترك بعد التجزئ كان من الصعب استخراجه قبل التجزئ.

[٢] ينتج بعد التجزئ صفان أو عمودان متساويان .

مثال١٣:

$$\begin{vmatrix} ع+جـ & ص+ب & س+أ \\ و & هـ & ء \\ م & ل & ك \end{vmatrix}$$

الحـــــــل

$$\begin{vmatrix} جـ & ب & أ \\ و & هـ & ء \\ م & ل & ك \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ع & ص & س \\ و & هـ & ء \\ م & ل & ك \end{vmatrix} =$$

<u>نتيجة</u> :

<u>قاعدة جمع المحددات:-</u>

أ- أن يكونا من نفس الدرجة .

ب- أن تتطابق جميع صفوفهما (أو أعمدتهما) ما عدا صف واحد (أو عمود واحد) علي الأكثر.

<u>مثال١٤</u> : بدون فك المحدد أثبت أن :-

$$\text{صفر} = \begin{vmatrix} ٦ & ١ & -٢ \\ -٤ & ٣ & -٧ \\ ٩ & ٠ & ٢ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -٣ & -١ & ٤ \\ ٥ & ٣ & -٧ \\ ٨ & ٠ & ٢ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٦ & -١ & ٤ \\ -٩ & ٣ & -٧ \\ ١ & ٠ & ٢ \end{vmatrix}$$

الحـــــــل

بجمع المحددين الأول والثاني فقط

$$\begin{vmatrix} ٩ & ٠ & ٢ \\ -٤ & ٣ & -٧ \\ ٩ & ٠ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٦ & ١ & -٢ \\ -٤ & ٣ & -٧ \\ ٩ & ٠ & ٢ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٣ & -١ & ٤ \\ -٤ & ٣ & -٧ \\ ٩ & ٠ & ٢ \end{vmatrix}$$

= صفر لأن ص$_{١}$ = ص$_{٣}$

إنعدام المحـــدد

١) ينعدم المحدد إذا تساوي فيه صفان أو عمودان .

مثال١٥ : بدون فك المحدد أثبت أن: $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{س} & \text{أ}^٢ \\ \text{ب} & \text{ص} & \text{أب} \\ \text{جـ} & \text{ع} & \text{أجـ} \end{vmatrix}$ = صفر

الحـــــــل

$\therefore$ أ $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{س} & \text{أ} \\ \text{ب} & \text{ص} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{ع} & \text{جـ} \end{vmatrix}$ ولأن $\text{ع}_١ = \text{ع}_٣$

$\therefore$ المحدد = صفر

٢) ينعدم المحدد إذا كانت جميع عناصراي صف أو عمود أصفار $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٥ & ٤ \end{vmatrix}$ = صفر

٣) ينعدم المحدد إذا وجد تناسب بين عناصر صفين أو عمودين .

$\begin{vmatrix} ٦ & ٧ & ٣ \\ ٤ & ٨ & ٢ \\ ١٠ & ١١ & ٥ \end{vmatrix} = ٠$ لوجود تناسب بين $\text{ع}_١$ ، $\text{ع}_٣$

$$\frac{١}{٢} = \frac{٥}{١٠} = \frac{٢}{٤} = \frac{٣}{٦}$$

٤) ينعدم المحدد إذا وجد به صف أو عمود عناصره تساوي المجموع الجبري للصفين أو العمودين الآخرين .

$\begin{vmatrix} ٥ & ٣ & ١ \\ ٦ & ٤ & ٢ \\ ١١ & ٧ & ٣ \end{vmatrix}$ = صفر

لأن $\text{ص}_٣ = \text{ص}_١ + \text{ص}_٢$

٥) ينعدم المحدد إذا كانت عناصره في توالي عددي بالنسبة للصفوف (الأعمدة) .

$$\begin{vmatrix} ١٥ & ١١ & ٥ \\ ١٦ & ١٢ & ٦ \\ ١٧ & ١٣ & ٧ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

<u>تعريف المحدد المتماثل:</u>

عناصره أعلي القطر الرئيسي = عناصره أسفل القطر الرئيسي $\begin{vmatrix} ص & س & ا \\ ع & ب & س \\ جـ & ع & ص \end{vmatrix}$

٦) ينعدم المحدد إذا كان ملتو التماثل عناصر قطره الرئيسي أصفار وعناصره أعلي القطر الرئيسي = $\begin{vmatrix} -٥ & ١ & ٠ \\ -٣ & ٠ & -١ \\ & ٣ & ٥ \end{vmatrix}$ عناصره أسفل القطر الرئيسي ولكن بإشارة مختلفة والمحدد الملتوي التماثل فردي الدرجة .

<u>مثال١٦</u> : إذا كان $\begin{vmatrix} ١١ & ٤ & ١ \\ ١٢ & س & ٢ \\ ص & ٦ & ٣ \end{vmatrix} = ٠$ **بأربع طرق مختلفة اقترح يمة لكل من س ، ص**

الحـــــــل

١) س = ٥ ، ص = ١٣ — عناصر المحدد في توالي عددي

٢) $ص_١ + ص_٢ = ص_٣$ — ∴ س = ٢ ، ص = ٢٣

٣) تناسب بين $ص_٢$، $ص_٣$ — ∴ $\frac{٢}{٣} = \frac{٤}{٦} = \frac{١١}{١٨}$

∴ س = ٤ ، ص = ١٨

٤) تناسب بين $ع_٢$، $ع_٣$ — ∴ $\frac{٤}{١١} = \frac{س}{١٢} = \frac{٦}{ص}$

∴ س = $\frac{٤٨}{١١}$ ، ص = $\frac{٦٦}{٤}$

كيف تفكر في حل مسائل المحددات ؟

إذا طلب منك إثبات قيمة المحدد بالخواص أو إيجاد قيمة المحدد بالخواص أو حل معادلة في صورة محدد بحيث يكون المجهول متواجد في عناصر القطر الرئيسي أو موزع علي عناصر المحدد أتبع ما يلي :-

[١] أخرج العامل المشترك أولا إن وجد .

[٢] جمع صفين أو عمودين أو ثلاثة صفوف أو ثلاثة أعمدة بشرط ما ينتج من الجمع مقدار ثابت (مقادير متساوية) ثم تخرج هذا الثابت خارج المحدد .

[٣] إذا كانت عناصر أحد الصفوف = واحد تضرب $ع_١ \times -١$ ثم إضافته إلي $ع_٢$ ، $ع_٣$ ينتج صفرين ثم تفك المحدد بالمرافقات .

[٤] إذا كانت أحد الأعمدة = واحد تضرب $ص_١ \times -١$ ثم إضافته إلي $ص_٢$ ، $ص_٣$ ينتج صفرين ثم نفك المحدد بالمرافقات .

مثال١٧ : باستخدام خواص المحددات بالمرافقات باستخدام خواص المحددات أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} \text{س- ص- ع} & \text{٢ ص} & \text{٢ع} \\ \text{٢س} & \text{ص- ع- س} & \text{٢ع} \\ \text{٢س} & \text{٢ ص} & \text{ع- س- ص} \end{vmatrix} = (\text{س} + \text{ص} + \text{ع})^{٣}$$

الحـــــل

$$ع_١ + ع_٢ + ع_٣ \quad \begin{vmatrix} \text{س+ص+ع} & \text{٢ ص} & \text{٢ع} \\ \text{س+ص+ع} & \text{ص- ع- س} & \text{٢ع} \\ \text{س+ص+ع} & \text{٢ ص} & \text{ع- س- ص} \end{vmatrix}$$

$$\therefore (\text{س+ ص+ ع}) \begin{vmatrix} ١ & \text{٢ ص} & \text{٢ع} \\ ١ & \text{ص- ع- س} & \text{٢ع} \\ ١ & \text{٢ ص} & \text{ع- س- ص} \end{vmatrix}$$

$ص_١ \times -١$ ثم إضافته إلي $ص_٢$ ، $ص_٣$

$$\therefore (\text{س + ص + ع}) \begin{vmatrix} ١ & \text{٢ ص} & \text{٢ع} \\ & \text{ص- ع- س} & \text{٢ع} \\ & & \text{ع- س- ص} \end{vmatrix}$$

$= (\text{س+ص+ع})\ (\text{- س- ص- ع})\ (\text{- س- ص- ع})$

$= (\text{س+ص+ع}) \times - (\text{س+ ص +ع}) \times - (\text{س+ ص +ع}) = (\text{س + ص + ع})^{٣}$

مثال١٨: أثبت أن $\begin{vmatrix} س & أ & ب \\ أ & س & ب \\ أ & ب & س \end{vmatrix} = (س-أ)\,(س-ب)\,(س+أ+ب)$

الحـــــــل

$\therefore$ ع$_1$ + ع$_2$ + ع$_3$ $\begin{vmatrix} س+أ+ب & أ & ب \\ أ+أ+ب & س & ب \\ أ+أ+ب & ب & س \end{vmatrix}$

$= (س+أ+ب) \begin{vmatrix} ١ & أ & ب \\ ١ & س & ب \\ ١ & ب & س \end{vmatrix}$

بضرب ص$_1$ × -١ وإضافته إلي ص$_2$ ، ص$_3$

$\therefore (س+أ+ب) \begin{vmatrix} ١ & أ & ب \\ ٠ & س-أ & ٠ \\ ٠ & ب-أ & س-ب \end{vmatrix}$

بفك المحدد بمعلومية ع$_1$

$\therefore \Delta = (س+أ+ب)\,(س-أ)\,(س-ب)$

مثال١٩: بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} س+ص & ص+ع & ع+س \\ ص+ع & ع+س & س+ص \\ ع+س & س+ص & ص+ع \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} س & ص & ع \\ ص & ع & س \\ ع & س & ص \end{vmatrix}$$

الحـــــــل

ع$_1$ + ع$_2$ + ع$_3$ $\begin{vmatrix} ٢(س+ص+ع) & ص+ع & ع+س \\ ٢(س+ص+ع) & ع+س & س+ص \\ ٢(س+ص+ع) & س+ص & ص+ع \end{vmatrix}$

$\therefore ٢ \begin{vmatrix} س+ص+ع & ص+ع & ع+س \\ س+ص+ع & ع+س & س+ص \\ س+ص+ع & س+ص & ص+ع \end{vmatrix}$

$ع_1 - ع_2$

$$= 2 \begin{vmatrix} س & ص + ع & ع + س \\ ص & ع + س & س + ص \\ ع & س + ص & ص + ع \end{vmatrix}$$

$ع_3 - ع_1$

$$= 2 \begin{vmatrix} س & ص + ع & ع \\ ص & ع + س & س \\ ع & س + ص & ص \end{vmatrix}$$

$ع_2 - ع_3$

$$= 2 \begin{vmatrix} س & ص & ع \\ ص & ع & س \\ ع & س & ص \end{vmatrix} = \text{الأيسر}$$

مثال ٢٠: اثبت ان: $\begin{vmatrix} 1 & جتا^2 أ & جتا2أ \\ 1 & جتا^2 ب & جتا2ب \\ 1 & جتا^2 جـ & جتا2جـ \end{vmatrix} = 0$

الحـــــل

$\because$ جتا٢ أ = ٢جتا^2 أ ــ ١

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & جتا^2 أ & 2جتا^2 أ - 1 \\ 1 & جتا^2 ب & 2جتا^2 ب - 1 \\ 1 & جتا^2 جـ & 2جتا^2 جـ - 1 \end{vmatrix}$$

$ع_1 + ع_3$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & جتا^2 أ & 2جتا^2 أ \\ 1 & جتا^2 ب & 2جتا^2 ب \\ 1 & جتا^2 جـ & 2جتا^2 جـ \end{vmatrix}$$

، $\because$ يوجد تناسب بين $ع_2$ ، $ع_3 = \frac{1}{2}$

$\therefore$ المحدد = صفر

مثال ٢١ : باستخدام خواص المحددات أوجد قيمة
$$\begin{vmatrix} \text{٢جتا}^{٢}\text{س} & ١ & \text{٢جا}^{٢}\text{س} \\ \text{-٢جتا}^{٢}\text{ص} & -١ & \text{-٢جا}^{٢}\text{ص} \\ \text{٢ جتا}^{٢}\text{ع} & ١ & \text{٢جا}^{٢}\text{ع} \end{vmatrix}$$

الحـــــل

$$\text{ع}_١ + \text{ع}_٣ \quad \begin{vmatrix} \text{٢جتا}^{٢}\text{س} & ١ & \text{٢جا}^{٢}\text{س+ ٢جتا}^{٢}\text{س} \\ \text{-٢جتا}^{٢}\text{ص} & -١ & \text{-٢جا}^{٢}\text{ص- ٢جا}^{٢}\text{ص} \\ \text{٢ جتا}^{٢}\text{ع} & ١ & \text{٢جا}^{٢}\text{ع + ٢جتا}^{٢}\text{ع} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \text{٢جتا}^{٢}\text{س} & ١ & \text{٢(جا}^{٢}\text{س+ جتا}^{٢}\text{س)} \\ \text{-٢جتا}^{٢}\text{ص} & -١ & \text{-٢(جا}^{٢}\text{ص- جا}^{٢}\text{ص)} \\ \text{٢ جتا}^{٢}\text{ع} & ١ & \text{٢(جا}^{٢}\text{ع + جتا}^{٢}\text{ع)} \end{vmatrix}$$

$$= ٢ \begin{vmatrix} \text{٢جتا}^{٢}\text{س} & ١ & ١ \\ \text{-٢جتا}^{٢}\text{ص} & -١ & ١ \\ \text{٢ جتا}^{٢}\text{ع} & ١ & ١ \end{vmatrix}$$

∴ المحدد = صفر   لأن $\text{ع}_١ = \text{ع}_٢$

ملاحظة:

إذا كان أحد عناصر الصفوف (الأعمدة) = واحد فإنه بالاستفادة بعملية الضرب الخارجي بجعل العناصر المناظرة له أصفار وذلك بضرب العناصر بإشارة مخالفة ثم إضافتها إلي الصفوف أو الأعمدة الأخرى.

مثال٢٢ : باستخدام الخواص أثبت أن
$$\begin{vmatrix} \text{أ}^{٢} & \text{أ} & ١ \\ \text{أ} & ١ & \text{أ}^{٢} \\ ١ & \text{أ}^{٢} & \text{أ} \end{vmatrix} = (\text{١-أ}^{٣})^{٢}$$

الحـــــل

$\text{ص}_١ \times -\text{أ}^{٢} + \text{ص}_٢$

$\text{ص}_١ \times -\text{أ} + \text{ص}_٣$

$$\therefore \text{المحدد} = \begin{vmatrix} \text{أ}^{٢} & \text{أ} & ١ \\ (\text{أ-أ}^{٤}) & (\text{١-أ}^{٣}) & \\ (\text{١-أ}^{٣}) & & \end{vmatrix} = (\text{١-أ}^{٣})(\text{١-أ}^{٣}) = (\text{١-أ}^{٣})^{٢}$$

مثال٢٣: بدون فك المحدد اثبت أن:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4\text{أ} & 6\text{ب}-2\text{جـ} \\ 1 & 3\text{ب} & -\text{جـ}+2\text{أ} \\ -2 & 2\text{جـ} & -4\text{أ}-6\text{ب} \end{vmatrix} = 0$$

الحـــــل

بأخذ ٢ ع. م من ص١ ، -٢ ع. م من ص٣

$$\therefore 2 \times -2 \begin{vmatrix} 1 & 2\text{أ} & 3\text{ب}-\text{جـ} \\ 1 & 3\text{ب} & -\text{جـ}+2\text{أ} \\ 1 & -\text{جـ} & -2\text{أ}-3\text{ب} \end{vmatrix}$$

ع٢ + ع٣

$$\therefore \text{المحدد} = -4 \begin{vmatrix} 1 & 2\text{أ} & 2\text{أ}+3\text{ب}-\text{جـ} \\ 1 & 3\text{ب} & 2\text{أ}+3\text{ب}-\text{جـ} \\ 1 & -\text{جـ} & 2\text{أ}+3\text{ب}-\text{جـ} \end{vmatrix}$$

$$= -4(2\text{أ}+3\text{ب}-\text{جـ}) \begin{vmatrix} 1 & 2\text{أ} & 1 \\ 1 & 3\text{ب} & 1 \\ 1 & -\text{جـ} & 1 \end{vmatrix}$$

∴ المحدد = صفر لأن ع١ = ع٣

مثال٢٤: بدون فك المحدد اثبت أن

$$\begin{vmatrix} \frac{\text{أ}}{2} & \frac{\text{ب}}{2} & 1 \\ \text{جـ} & \text{ء} & 2 \\ 2\text{أ}-\text{جـ} & 2\text{ب}-\text{ء} & 4 \end{vmatrix} = 0$$

الحـــــل

نأخذ $\frac{1}{2}$ ع. م من ص١

$$\therefore \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & 2 \\ \text{جـ} & \text{ء} & 2 \\ 2\text{أ}-\text{جـ} & 2\text{ب}-\text{ء} & 1 \end{vmatrix}$$

ص٢ + ص٣

$$\therefore \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & 2 \\ \text{جـ} & \text{ء} & 2 \\ 2\text{أ} & 2\text{ب} & 4 \end{vmatrix}$$ ∴ المحدد = صفر لوجود تناسب بين ص١ ، ص٣

مثال ٢٥ : اثبت ان

$$\begin{vmatrix} \text{ب}^{2}\text{جـ} + \text{جـ}^{2}\text{ب} & \text{ب جـ} & ١ \\ \text{جـ}^{2}\text{أ} + \text{أ}^{2}\text{جـ} & \text{جـ أ} & ١ \\ \text{أ}^{2}\text{ب} + \text{أ}^{2}\text{ب} & \text{أ ب} & ١ \end{vmatrix} = ٠$$

الحـــــــل

$$\therefore \begin{vmatrix} \text{ب جـ}(\text{ب} + \text{جـ}) & \text{ب جـ} & ١ \\ \text{جـ أ}(\text{جـ} + \text{أ}) & \text{جـ أ} & ١ \\ \text{أ ب}(\text{أ} + \text{ب}) & \text{أ ب} & ١ \end{vmatrix}$$

$\text{ص}_{١} \times \text{أ}$ ، $\text{ص}_{٢} \times \text{ب}$ ، $\text{ص}_{٣} \times \text{جـ}$

$$\therefore \frac{١}{\text{أ ب جـ}} \begin{vmatrix} \text{أ ب جـ}(\text{ب} + \text{جـ}) & \text{أ ب جـ} & \text{أ} \\ \text{أ ب جـ}(\text{جـ} + \text{أ}) & \text{أ ب جـ} & \text{ب} \\ \text{أ ب جـ}(\text{أ} + \text{ب}) & \text{أ ب جـ} & \text{جـ} \end{vmatrix}$$

$$\therefore \frac{١}{\text{أ ب جـ}} \times \text{أ ب جـ} \times \text{أ ب جـ} \begin{vmatrix} \text{ب} + \text{جـ} & ١ & \text{أ} \\ \text{جـ} + \text{أ} & ١ & \text{ب} \\ \text{أ} + \text{ب} & ١ & \text{جـ} \end{vmatrix}$$

$\text{ع}_{١} + \text{ع}_{٣}$

$$\therefore \text{أ ب جـ} \begin{vmatrix} \text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} & ١ & \text{أ} \\ \text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} & ١ & \text{ب} \\ \text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} & ١ & \text{جـ} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{أ ب جـ})(\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ}) \begin{vmatrix} ١ & ١ & \text{أ} \\ ١ & ١ & \text{ب} \\ ١ & ١ & \text{جـ} \end{vmatrix} = ٠ \quad \text{لأن } \text{ع}_{٢} = \text{ع}_{٣}$$

ملاحظة هامة:

$$\begin{vmatrix} \text{س}+١ & \text{ل}+١ & \text{هـ}+١ \\ \text{ص}+١ & \text{م}+١ & \text{و}+١ \\ \text{ع}+١ & \text{ن}+١ & \text{ع}+١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ل} & \text{هـ} \\ \text{ص} & \text{م} & \text{و} \\ \text{ع} & \text{ن} & \text{ع} \end{vmatrix}$$

مثال٢٦: اثبت ان :
$$\begin{vmatrix} س^2+1 & س\,ص+1 & س\,ع+1 \\ س\,ص+1 & ص^2+1 & ص\,ع+1 \\ س\,ع+1 & ص\,ع+1 & ع^2+1 \end{vmatrix} = 0$$

الحـــــــل

$$= \begin{vmatrix} س^2 & س\,ص & س\,ع \\ س\,ص & ص^2 & ص\,ع \\ س\,ع & ص\,ع & ع^2 \end{vmatrix}$$

$$= س\,ص\,ع \begin{vmatrix} س & ص & ع \\ س & ص & ع \\ س & ص & ع \end{vmatrix} = 0$$

مثال٢٧: بدون فك المحدد اثبت أن
$$\begin{vmatrix} 1 & أ & أ^2-ب\,جـ \\ 1 & ب & ب^2-جـ\,أ \\ 1 & جـ & جـ^2-أ\,ب \end{vmatrix} = 0$$

الحـــــــل

نجزئ المحدد

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & أ & أ^2 \\ 1 & ب & ب^2 \\ 1 & جـ & جـ^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & أ & ب\,جـ \\ 1 & ب & جـ\,أ \\ 1 & جـ & أ\,ب \end{vmatrix}$$

$ص_1 \times أ$ ، $ص_2 \times ب$ ، $ص_3 \times جـ$

$$\begin{vmatrix} 1 & أ & أ^2 \\ 1 & ب & ب^2 \\ 1 & جـ & جـ^2 \end{vmatrix} - \frac{أ\,ب\,جـ}{أ\,ب\,جـ} \begin{vmatrix} أ & أ^2 & 1 \\ ب & ب^2 & 1 \\ جـ & جـ^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & أ & أ^2 \\ 1 & ب & ب^2 \\ 1 & جـ & جـ^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & أ & أ^2 \\ 1 & ب & ب^2 \\ 1 & جـ & جـ^2 \end{vmatrix} = 0$$

بدلنا $ع_1$ مع $ع_3$ ، $ع_2$ مع $ع_3$

مثال٢٨: أوجد مجموعة الحل   أ، أثبت أن ك = ٢ تحقق هذه المعادلة

أ، أثبت أن ك = ٢ جذراً لهذه المعادلة

الحــــــل

$$\begin{vmatrix} ١٠-\text{ك} & -٦ & ٢ \\ -٦ & ٩-\text{ك} & -٤ \\ ٢ & -٤ & ٥-\text{ك} \end{vmatrix} = ٠$$

$$٢(\text{ع}_٢ + \text{ع}_٣) + \text{ع}_١ = \text{غ}_١$$

$$\begin{vmatrix} ٢-\text{ك} & -٦ & ٢ \\ ٤-٢\text{ك} & ٩-\text{ك} & -٤ \\ ٤-٢\text{ك} & -٤ & ٥-\text{ك} \end{vmatrix} = ٠$$

$$\begin{vmatrix} (٢-\text{ك}) & -٦ & ٢ \\ ٢(٢-٢\text{ك}) & ٩-\text{ك} & -٤ \\ ٢(٢-٢\text{ك}) & -٤ & ٥-\text{ك} \end{vmatrix} = ٠$$

$$٢(\text{ع}٢ + \text{ع}٣)$$

$$(٢-\text{ك})\begin{vmatrix} ١ & -٦ & ٢ \\ ٢ & ٩-\text{ك} & -٤ \\ ٢ & -٤ & ٥-\text{ك} \end{vmatrix} = ٠$$

ص١ × -٢ ثم إضافته إلي ص٢ ، ص٣

$$٢-\text{ك}\begin{vmatrix} ١ & -٦ & ٢ \\ ٠ & ٢١-\text{ك} & -٨ \\ ٠ & ٨ & ١-\text{ك} \end{vmatrix} = ٠$$

$$(٢-\text{ك})\begin{vmatrix} ٢١-\text{ك} & -٨ \\ ٨ & ١-\text{ك} \end{vmatrix} = ٠$$

$$(٢-\text{ك})(٢١-٢١\text{ك} - \text{ك} + \text{ك}^٢ + ٦٤) = ٠$$

$$(٢-\text{ك})(\text{ك}^٢ - ٢٢\text{ك} + ٨٥) = ٠$$

$$(٢-\text{ك})(\text{ك}-١٧)(\text{ك}-٥) = ٠$$

∴ ك = ٢ ، ك = ٥ ، ك = ١٧

∴ مجموعة الحل {٢ ، ٥ ، ١٧}

مثال٢٩ : باستخدام خواص المحددات أوجد مجموعة الحل للمعادلة

$$\begin{vmatrix} \text{س}-1 & -1 & 2 \\ -1 & \text{س}+2 & -1 \\ 2 & -1 & \text{س}-1 \end{vmatrix} = 0$$

الحـــــــل

$\text{ص}_1 + \text{ص}_2 + \text{ص}_3 \longrightarrow \text{ص}'_1$

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{س} & \text{س} \\ -1 & \text{س}+2 & -1 \\ 2 & -1 & \text{س}-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{س}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \text{س}+2 & -1 \\ 2 & -1 & \text{س}-1 \end{vmatrix} = 0$$

$\text{ع}_1 \times -1$ ثم إضافته إلي كل من ع_2 ، ع_3

$$\text{س}\begin{vmatrix} 1 & & \\ -1 & \text{س}+3 & \\ 2 & -3 & \text{س}-3 \end{vmatrix} = 0$$

$\text{س}\,(\text{س}+3)\,(\text{س}-3) = 0$

$\text{س} = 0$ ، $\text{س} = -3$ ، $\text{س} = 3$

$\therefore$ مجموعة الحل $\{0 ، \pm 3\}$

مثال٣٠: أثبت بالخواص

$$\begin{vmatrix} \text{س}+\text{ص}+\text{ع} & -\text{ع} & -\text{ص} \\ -\text{ع} & \text{س}+\text{ص}+\text{ع} & -\text{س} \\ -\text{ص} & -\text{ع} & \text{س}+\text{ص}+\text{ع} \end{vmatrix} = 2(\text{س}+\text{ص})(\text{ص}+\text{ع})(\text{ع}+\text{س})$$

الحـــــــل

$\therefore \text{ص}_1 + \text{ص}_2 \longrightarrow \text{ص}'_2$ ، $\text{ص}_1 + \text{ص}_3 \longrightarrow \text{ص}'_3$

∴ المحدد
$$\begin{vmatrix} \text{- ص} & \text{- ع} & \text{س+ ص+ع} \\ \text{-(س+ ص)} & \text{س+ ص} & \text{س+ ص} \\ \text{س+ ع} & \text{- (س+ع)} & \text{س+ ع} \end{vmatrix}$$

$$= \text{(س+ ص) (س+ع)} \begin{vmatrix} \text{- ص} & \text{- ع} & \text{س+ ص+ع} \\ -١ & ١ & ٢ \\ ١ & -١ & ١ \end{vmatrix}$$

ص$_2$ + ص$_3$ $\leftarrow$ ص$'_2$

$$\text{(س+ ص) (س+ع)} \begin{vmatrix} \text{- ص} & \text{- ع} & \text{س+ ص+ع} \\ ٠ & ٠ & ٢ \\ ١ & -١ & ١ \end{vmatrix}$$

$$= \text{(س+ ص) (س+ ع)} \times -٢ \begin{vmatrix} \text{- ص} & \text{-ع} \\ ١ & -١ \end{vmatrix}$$

$$= \text{(س+ ص) (س+ ع)} \times -٢\text{(-ع – ص)}$$

$$= ٢\text{(س+ ص) (ص+ ع) (ع- س)}$$

مثال٣١: **باستخدام المحددات اثبت ان:** $\begin{vmatrix} \text{أ جـ} & \text{أ ب} & \text{أ}^2+١ \\ \text{ب جـ} & \text{ب}^2+١ & \text{أ ب} \\ \text{جـ}^2+١ & \text{ب جـ} & \text{أ جـ} \end{vmatrix} = \text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{جـ}^2 + ١$

الحـــــــل

بالتجـــزئ

$$\text{المحدد} = \begin{vmatrix} \text{أ جـ} & \text{أ ب} & \text{أ}^2 \\ \text{ب جـ} & \text{ب}^2+١ & \text{أ ب} \\ \text{جـ}^2+١ & \text{ب جـ} & \text{أ جـ} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ \text{ب جـ} & \text{ب}^2+١ & \text{أ ب} \\ \text{جـ}^2+١ & \text{ب جـ} & \text{أ جـ} \end{vmatrix}$$

أ ع. م من ص$_1$ ، أ ع. م من ع$_1$

$$\therefore \text{أ} \times \text{أ} \begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{ب} & ١ \\ \text{ب جـ} & \text{ب}^2+١ & \text{ب} \\ \text{جـ}^2+١ & \text{ب جـ} & \text{أ جـ} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ب جـ} & \text{ب}^2+١ \\ \text{جـ}^2+١ & \text{ب جـ} \end{vmatrix}$$

ص$_1$ × - ب + ص$_2$ $\leftarrow$ ص$'_2$

ص$_1$ × - جـ + ص$_3$ $\leftarrow$ ص$'_3$

$$\therefore \text{أ}^2 \begin{vmatrix} 1 & \text{ب} & \text{جـ} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \text{ب}^2\text{جـ}^2 + \text{ب}^2 + \text{جـ}^2 + 1 - \text{ب}^2\text{جـ}^2$$

$$= \text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{جـ}^2 + 1$$

<u>ملاحظة هامة:</u>

إذا كان المجهول س متواجد في عناصر صف أو عمود ساوي س (من الدرجة الأولي) بالقيم المناظرة لها .

<u>مثال٣٢</u>: أوجد مجموعة الحل للمعادلة أو أوجد جذور المعادلة أو أوجد س التي تجعل

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{س}^2 & \text{س}^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

الحـــــــل

$\text{س} = 1$ $\quad \therefore \text{ص}_1 = \text{ص}_2 \leftarrow \Delta = 0$

$\text{س} = -1$ $\quad \text{ص}_1 = \text{ص}_3 \leftarrow \Delta = 0$

$\text{س} = 2$ $\quad \text{ص}_1 = \text{ص}_4 \leftarrow \Delta = 0$

$\therefore$ مجموعة الحل $\{\pm 1 ، 2\}$

<u>مثال٣٣</u>: إذا كان $\begin{vmatrix} 0 & \text{س}-2 & 1 \\ 3 & \text{س}^2-1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ **فإن س = ----- أ، -----**

الحـــــــل

$\text{س} - 2 = 0$ $\quad \text{س} = 2$

$\therefore \text{ع}_1 = \text{ع}_2$ $\quad \Delta = 0$

، $\text{س} - 2 = 1$ $\quad \text{س} = 3$

$\therefore \text{ع}_2 = \text{ع}_3$ $\quad \Delta = 0$

تمارين (١٣)

(١) بدون فك المحدد وضح أن كلا من المحددات الآتية يساوي المحدد $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 5 \end{vmatrix}$ مع ذكر الخاصية التي استخدمت في كل حالة.

[أ] $\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$ [ب] $\begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ [ج] $\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ -6 & 5 \end{vmatrix}$

[ء] $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -4 & -6 & 5 \end{vmatrix}$ [هـ] $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 5 \end{vmatrix}$ [و] $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 5 & -6 & 5 \end{vmatrix}$

(٢) بدون فك المحدد وضح أن كلا من المحددات الآتية يساوي صفر مع ذكر الخاصية التي استخدمت في كل حالة .

[أ] $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$ [ب] $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ [ج] $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

[ء] $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -3 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ [هـ] $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ [و] $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 2 \end{vmatrix}$

(٣) باستخدام خصائص المحددات أوجد قيم المحددات الآتية:

[أ] $\begin{vmatrix} \text{س} & 1 & 1 \\ 1 & \text{س} & 1 \\ 1 & 1 & \text{س} \end{vmatrix}$ [ب] $\begin{vmatrix} \text{ص}+\text{ع} & 1 & 1 \\ \text{ص} & \text{س}+\text{ع} & 1 \\ \text{ع} & \text{ع} & \text{س}+\text{ص} \end{vmatrix}$

[ج] $\begin{vmatrix} 0 & -5 & 6 \\ 5 & 0 & -2 \\ 6 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

(٤) اثبت ان:

[أ] $$\begin{vmatrix} ١ & أ & أ^{٢} \\ ١ & ب & ب^{٢} \\ ١ & جـ & جـ^{٢} \end{vmatrix} = (أ - ب)\,(ب - جـ)\,(جـ - أ)\,(أ + ب + جـ)$$

[ب] $$\begin{vmatrix} س & أ & أ \\ أ & س & أ \\ أ & أ & س \end{vmatrix} = (س + ٢أ)\,(س - أ)^{٢}$$

[ج] $$\begin{vmatrix} ١ + س^{٢} & س & ٠ \\ س & ١ + س^{٢} & س \\ ٠ & س & ١ + س^{٢} \end{vmatrix} = ١ + س^{٢} + س^{٤} + س^{٦}$$

(٥) اثبت ان :

$$\begin{vmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{vmatrix} \begin{vmatrix} س & ص \\ ع & ك \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} أس + ب ع & أ ص + ب ك \\ جـ س + د ع & جـ ص + دك \end{vmatrix}$$

ثم عمم هذه القاعدة بالنسبة للمحددات من الدرجة ٣ .

حل المعادلات الخطية

شكل المعادلات الخطية :

هي معادلات من الدرجة الأولي تحتوي كل مجموعة منها علي نفس العدد من المجاهيل .

مثال: ٢س + ٥ص = ١٢ ، ٣س + ٤ص = ١١ ← معادلات خطية ذات مجهولين

، س + ٣ص + ٢ع = ١٣ ، ٢س - ٢ص + ٢ع = ٧ ، ٤س + ٥ص + ٢ع = ٤ ← معادلات خطية ذات ثلاث مجاهيل

حل المعادلات الخطية بطريقة المحددات (كرامر)

طريقة الحل:

١- نوجد محدد المعاملات .

٢- نستبدل $ع_1$ بعمود الثوابت ونوجد Δ_1

٣- نستبدل $ع_2$ بعمود الثوابت ونوجد Δ_2

$\therefore$ س = $\dfrac{\Delta_1}{\Delta}$ ، ص = $\dfrac{\Delta_2}{\Delta}$

مثال: حل المعادلتين س + ص = ٥ ، ٢س – ص = ١

الحـــــــل

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3$$

$$\therefore \Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 1 = -6$$

$$\therefore \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 10 = -9$$

$\therefore$ س = $\dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-6}{-3} = 2$ ، ص = $\dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{-9}{-3} = 3$

$\therefore$ مجموعة الحل هي $\{(2 ، 3)\}$

<u>مثال</u>: أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية :-

٢س+ ص- ٢ع = ١٠

٣س+ ٢ص+ ٢ع = ١

٥س+ ٤ص+ ٣ع = ٤

الحـــــــل

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٢- \\ ٣ & ٢ & ٢ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{vmatrix} = ٢\begin{vmatrix} ٢ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix} ١- \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٣ \end{vmatrix} ٢- \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{vmatrix}$$

= ٢(٦-٨) -١(٩-١٠) -٢(١٢-١٠)

$\therefore \Delta = ٧-$

، $\because \Delta \neq$ صفر $\therefore$ مجموعة المعادلات لها حل وحيد

$$\therefore \Delta_{١} = \begin{vmatrix} ١٠ & ١ & ٢- \\ ١ & ٢ & ٢ \\ ٤ & ٤ & ٣ \end{vmatrix} = ١٠(-٢) -١(-٥) = -٢\times ٤ = ٧-$$

$$\therefore \Delta_{٢} = \begin{vmatrix} ٢ & ١٠ & ٢- \\ ٣ & ١ & ٢ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{vmatrix} = ٢(-٥) -١٠(-١) = -٢\times ٧ = ١٤-$$

$$\therefore \Delta_{٣} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ١٠ \\ ٣ & ١ & ١ \\ ٥ & ٤ & ٤ \end{vmatrix} = ٢\times ٤ -١\times ٧ + ١٠\times ٢ = ٢١$$

$$\therefore س = \frac{\Delta_{١}}{\Delta} = \frac{٧-}{٧-} = ١ \qquad ، \quad ص = \frac{\Delta_{٢}}{\Delta} = \frac{١٤-}{٧-} = ٢$$

$$ع = \frac{\Delta_{٣}}{\Delta} = \frac{٢١-}{٧-} = ٣ -$$

$\therefore$ مجموعة الحل هي { (١، ٢ ، -٣)}

<u>ملاحظة :</u>

يمكن التأكد من صحة الحل بالتعويض بقيمة كل من س، ص ، ع في أحد المعادلات الثلاثة فيتساوى طرفاها.

تمارين (١٤)

(١) حل المعادلات الآتية بطريقة كرامر:-

(أ) ٢س+ ص= ٢ ، ٣س+ ٢ص =٥

(ب) - س + ص =٢ ، ٢س+ ٣ص = ١

(ج) س + ٥ ص =٥ ، ٢س+ ص = ٠

(د) ٢س – ٥ ص =١ ، - س+ ص =٢

(٢) حل المعادلات الآتية بطريقة كرامر:-

(أ) س + ٣ص+ ٢ع=١٣ ، ٢س- ص+ ع=٣ ، ٣س+ ص- ع= ٢

(ب) ٢س+ ص- ٢ع =١٠ ، ٣س+ ٢ص+ ٢ع=١ ، ٥س+ ٤ص+ ٣ع =٤

(ج) س+٢ص- ٢ع= ١٠ ، ٢س- ص- ٤ع = ٢ ، ٤س+ ٣ص- ٢ع = ١٤

(د) س+٢ ص- ٣ع= ٦ ، ٢س- ص+ ع =-٣ ، - س -٢ص + ٢ع =-١

(ه) ٢س+ ص +٣ع= -٢ ، ٣س- ٢ص- ٢ع =٧ ، س- ص+ ع= ١

(و) ٢ع = ٥ ، ٣ص = -١ ، ٥ س = ١

تمارين غير محلولة

١- أثبت أن :
$$\begin{vmatrix} \text{١} & \text{س} & \text{س}^{\text{٢}} \\ \text{أ} & \text{١} & \text{س} \\ \text{ب} & \text{جـ} & \text{١} \end{vmatrix} = (\text{١} - \text{جـ س})(\text{١} - \text{أ س})$$

٢- بدون فك المحدد أثبت أن :
$$\begin{vmatrix} \text{س}+\text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{أ} & \text{س}+\text{ب} & \text{جـ} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{س}+\text{جـ} \end{vmatrix} = \text{س}^{\text{٣}} + (\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ})\,\text{س}^{\text{٢}}$$

٣- أثبت أن :
$$\begin{vmatrix} \text{س}^{\text{٢}}+\text{١} & \text{س ص} & \text{س ع} \\ \text{س ص} & \text{ص}^{\text{٢}}+\text{١} & \text{ص ع} \\ \text{س ع} & \text{ص ع} & \text{ع}^{\text{٢}}+\text{١} \end{vmatrix} = \text{س}^{\text{٢}} + \text{ص}^{\text{٢}} + \text{ع}^{\text{٢}} + \text{١}$$

٤- أثبت أن :
$$\begin{vmatrix} \text{جا أ} & \text{جتا أ} & \text{١} \\ \text{حا ب} & \text{جتا ب} & \text{١} \\ \text{حا جـ} & \text{جتا جـ} & \text{١} \end{vmatrix} = \text{جا}(\text{أ} - \text{ب}) + \text{جا}(\text{ب} - \text{جـ}) + \text{جا}(\text{جـ} - \text{أ})$$

٥- أثبت أن لكل أ ، ب ، جـ $\in$ ح فإن جذور المعادلة
$$\begin{vmatrix} \text{أ} - \text{س} & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{جـ} - \text{س} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$
(تكون أعداداً حقيقية)

٦- أثبت أن :
$$\begin{vmatrix} \text{٢}+\text{٣ت} & \text{٤}+\text{٥ت} \\ -\text{٤}+\text{٥ت} & \text{٢}-\text{٣ت} \end{vmatrix} = \text{٢}^{\text{٢}} + \text{٣}^{\text{٢}} + \text{٤}^{\text{٢}} + \text{٥}^{\text{٢}}$$

ومن ذلك ضع $\text{١}^{\text{٢}} + \text{٣}^{\text{٢}} + \text{٥}^{\text{٢}} + \text{٧}^{\text{٢}}$ في صورة محدد

٧- أثبت أن :
$$\begin{vmatrix} \text{١}+\text{أ} & \text{١} & \text{١} \\ \text{١} & \text{١}+\text{ب} & \text{١} \\ \text{١} & \text{١} & \text{١}+\text{جـ} \end{vmatrix} = \text{أ ب جـ}\left(\frac{\text{١}}{\text{أ}} + \frac{\text{١}}{\text{ب}} + \frac{\text{١}}{\text{جـ}} + \text{١}\right)$$

٨- حل المعادلات الآتية باستخدام كرامر :

$$\text{٧س} - \text{٣ص} - \text{٣ع} = \text{٨}$$
$$-\text{س} + \text{ص} = -\text{١}$$
$$-\text{س} + \text{ع} = -\text{١}$$