ثالثا: التفاضل والتكامل

الباب الأول

النهايـــات

نهاية الدوال المعرفة بأكثر من قاعدة

لدراسة مفهوم النهايات ندرس المنحنى المعرف بالمعادلة ص = $\frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ نجد أن المقدار غير معرف عندما س = ١ ولمحاولة رسم هذا المنحنى نأخذ قيم تقترب من ١

جهة اليمين ←   → جهة اليسار

س	١,١	١,٠١	١,٠٠١	⇐	١	⇒	٠,٩٩٩	٠,٩٩	٠,٩
د(س)	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	⇐	٢	⇒	١,٩٩٩	١,٩٩	١,٩

من الجدول نجد أن كلما تقترب س من العدد (١) أكثر وأكثر يقترب المقدار $\frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ من العدد (٢) أكثر وأكثر ويعبر عن ذلك جبرياً بالآتي :

نها$_{س \leftarrow ١}$ $\frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ = ٢ ويقرأ نهاية المقدار $\frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ عندما س تؤول إلى ١ هو ٢

ملاحظات :

١) نهاية دالة عند نقطة لا يعني قيمة الدالة عند هذه النقطة

مثلاً : د$_{١}$ (س) = س + ٣ ، د$_{٢}$ (س) = $\frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣}$

، د$_{٣}$ (س) = $\begin{cases} \frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣} & \text{، س} \neq ٣ \\ ٧ & \text{عندما س = ٣} \end{cases}$

∴ نها د$_{١}$ (س) = نها$_{س \leftarrow ٣}$ (س+ ٣) = ٦ ، د$_{١}$ (س) = ٣ + ٣ = ٦

نها$_{س \leftarrow ٣}$ د$_{٢}$ (س) = ٦ ، د$_{٢}$ (٣) = كمية غير معروفة

نها$_{س \leftarrow ٣}$ د$_{٣}$(س) = ٦ ، د$_{٣}$ (٣) = ٧

∴ نهاية د$_{٢}$ (س) ، د$_{٣}$ (س) عندما س ← ٣ لا تساوى د$_{٢}$ (٣) ، د$_{٣}$ (٣) .

٢) نهاية الدالة لها وجود عند نقطة ما إذا كان الاقتراب من اليمين واليسار يؤول إلي قيمة واحدة .

مثلاً :

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} + ٣ & \text{عندما س} \le ٣ \\ ٢\text{س} - ١ & \text{عندما س} \ge ٣ \end{cases}$$

<u>نلاحظ</u> : كلما أقتربت س من العدد ٣ من جهة اليسار أقتربت الدالة من العدد ٥ وكلما أقتربت من العدد ٣ من جهة اليمين كلما أقتربت من العدد ٦ .

∴ كلما تقترب س حول العدد ٣ تقترب الدلة من قيمتين مختلفتين هما ٥، ٦

∴ نهاية الدالة عندما س تؤول إلي ٣ ليس لها وجود .

<u>الخلاصة</u> : إذا كان

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{ق}(\text{س}) & \text{عندما س} > ١ \\ \text{ق}(\text{س}) & \text{عندما س} < ١ \end{cases}$$

<u>فـإن</u> : نهاية الدالة التي علي يمين أ تكتب د $(\text{أ})^+$ ∴ د$(\text{أ})^+$ = نها$_{\text{س} \to \text{أ}}$ ق(س)

، نهاية الدالة التي علي يسار أ تكتب د$(\text{أ})^-$ ∴ د$(\text{أ})^-$ = نها$_{\text{س} \to \text{أ}}$ ك(س)

وإذا كان د$(\text{أ})^+$ = د$(\text{أ})^-$ = ل فإن الدالة لها نهاية عند س = أ

∴ نها$_{\text{س} \to \text{أ}}$ د(س) = ل

<u>مثال</u>: أبحث وجود نهاية د(س) =

$$\begin{cases} \text{س}^٢ - ٢ & \text{عندما س} < ٢ \\ ٥\text{س} - ٤ & \text{عندما س} > ٢ \end{cases} \qquad \text{عندما س} = ٢$$

الحـــــــــل

النهاية اليمني د$(٢)^+$ = نها$_{\text{س} \to ٢}$ ٥ س- ٤ = ١٠ ـ ٤ = ٦

النهاية اليسري د $(٢)^-$ = نها$_{\text{س} \to ٢}$ س^٢-٢ = ٨ ـ ٢ = ٦

∴ د$(٢)^+$ = د $(٢)^-$ = ٦

∴ نها$_{\text{س} \to ٢}$ د(س) = ٦

مثال: إذا كان $د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٢ + ٢س - ٢}{س^٢ - ١} & \text{عندما } س > ٢ \\ ٢س - ١ & \text{عندما } س < ٢ \end{cases}$ - أوجد $\lim_{س \to ١} د(س)$

الحـــــــــل

$د(١)^+ = \lim_{س \to ١} \dfrac{س^٢ + ٢س - ٢}{س^٢ - ١} = \lim_{س \to ٢} \dfrac{(س-١)(س+٢)}{(س-١)(س+١)}$

$= \lim_{س \to ١} \dfrac{(س + ٣)}{(س + ١)} = \dfrac{٤}{٢} = ٢$

، $د(١) = \lim_{س \to ١} ٢س - ١ = ٣ - ١ = ٢$

$\therefore د(١)^+ = د(١)^- = ٢$

مثال: إذا كان $د(س) = \begin{cases} \dfrac{حا ٤س}{س} & \text{عندما } س > ٠ \\ ٢ + حتا ٢س & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$ - أوجد $\lim_{س \to ٠} د(س)$

الحـــــــــل

$د(٠)^+ = \lim_{س \to ٠} \dfrac{حا ٤س}{س} = ٤$

$د(٠)^- = \lim_{س \to ٠} ٢ + حتا ٣س = ٣ + حتا ٠ = ٣ + ١ = ٤$

$د(٠)^+ = د(٠)^- = ٤$

$\therefore \lim_{س \to ٠} د(س) = ٤$

مثال: إذا كان $د(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ & -١ < س < ٢ \\ ٢س - ١ & ٢ \le س < ٥ \\ س + ٤ & ٥ \le س < ٢ \end{cases}$

ابحث وجود: ١) $\lim_{س \to ١-} د(س)$ ٢) $\lim_{س \to ٢} د(س)$

٣) $\lim_{س \to ٥} د(س)$ ٤) $\lim_{س \to ٧} د(س)$

الحـــــــــل

(١) $\lim_{س \to ١-} د(س) = \lim س^٢ + ١ = ١ + ١ = ٢$

(٢) $د(٢)^+ = \lim_{س \to ٢} - ١ = ٦ - ١ = ٥$

$د(٢)^- = \lim_{س \to ٢} س^٢ + ١ = ٤ + ١ = ٥$

$\therefore د(٢)^+ = د(٢)^- = ٥$ $\quad \therefore \lim_{س \to ٢} د(س) = ٥$

(٣) $د(٥)^+ = \lim_{س \to ٥} س + ٤ = ٥ + ٤ = ٩$

$د(٥)^- = \lim_{س \to ٥} ٣س - ١ = ١٥ - ١ = ١٤$

$\because د(٥)^+ \neq د(٥)^-$

$\therefore$ نها$_{س \to ٥}$ د(س) ليس لها وجود

(٤) $\lim_{س \to ٧} د(س) = \lim_{س \to ٧} س + ٤ = ٧ + ٤ = ١١$

مثال: إذا كان $د(س) = \begin{cases} \dfrac{٩س - جا٥س}{س} & \text{عندما } س < ٠ \\ ٣ + جتا٢س & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$ **عند س = ٠**

الحــــــل

$د(٠)^- = \lim_{س \to ٠} \dfrac{٩س}{س} - ٥ \lim_{س \to ٠} \dfrac{جا ٥س}{٥س} = ٩ - ٥ \times ١ = ٤$

$د(٠)^+ = \lim ٣ + جتا ٢س = ٣ + ١ = ٤ = د(٠)^-$

$\therefore \lim_{س \to ٠} د(س) = ٤$

مثال : $د(س) = \begin{cases} ٣ - ٢جاس & \text{عندما } س < \frac{ط}{٢} \\ \dfrac{جتا س}{(\frac{ط}{٢} - س)} & \text{عندما } س > \frac{ط}{٢} \end{cases}$ **عند س =** $\frac{ط}{٢}$

الحــــــل

$د(\frac{ط}{٢})^- = \lim_{س \to \frac{ط}{٢}} ٣ - ٢ جا س = ٣ - ٢ \times ١$

، $د(\frac{ط}{٢})^+ = \lim_{س \to \frac{ط}{٢}} \dfrac{جا(\frac{ط}{٢} - س)}{(\frac{ط}{٢} - س)} = ١ = د(\frac{ط}{٢})^-$

$\therefore \lim_{س \to \frac{ط}{٢}} د(س) = ١$

تمرين (١)

(١) إذا كان: $د(س) = \begin{cases} س+٢ & \text{عندما } س < ١ \\ ٣ & \text{عندما } س > ١ \end{cases}$ فأوجد $\lim_{س \to ١} د(س)$

(٢) إذا كان: $د(س) = \begin{cases} س^{٢}+٢ & \text{عندما } س < -٢ \\ ٢س+٣ & \text{عندما } س > -٢ \end{cases}$ فأوجد $\lim_{س \to -٢} د(س)$

(٣) إذا كان: $د(س) = \begin{cases} ٤س-١ & \text{عندما } س < ١ \\ ٣ & \text{عندما } س > ١ \end{cases}$ فأوجد $\lim_{س \to ١} د(س)$

(٤) إذا كان: $د(س) = \begin{cases} س^{٢}-٣ & \text{عندما } س \geq ٢ \\ ٣ & \text{عندما } س < ٢ \end{cases}$ فأوجد $\lim_{س \to ٢} د(س)$

(٥) إذا كان: $د(س) = \begin{cases} ٤س-١ & \text{عندما } س \neq ١ \\ ٣ & \text{عندما } س = ١ \end{cases}$

(٦) إذا كان: $د(س) = \begin{cases} -١ & س < \text{صفر} \\ \text{صفر} & س = ٠ \\ ١ & س > ٠ \end{cases}$

(٧) ناقش نهاية الدالة الحقيقية عند أي نقطة في نطاقها

$$د(س) = \begin{cases} س^{٢} & -١ \leq س \leq ٢ \\ ٢س+١ & ٢ < س < ٣ \\ ٣ & س = ٣ \\ ٧ & ٣ < س < ٥ \\ ١٢-س & ٥ \leq س \leq ٧ \end{cases}$$

(٨) إذا كان: $د(س) = \frac{حا(س-٣)^{٢}}{|س-٣|}$ عند $س = ٣$

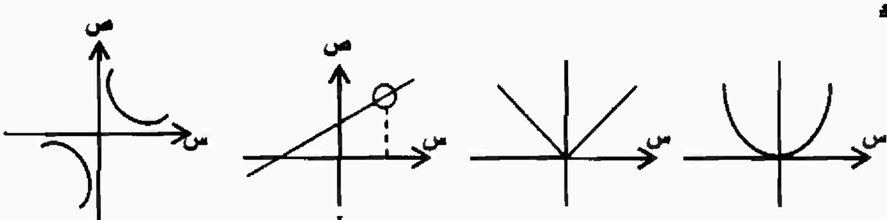
(٩) إذا كان: $د(س) = \begin{cases} \frac{طاس - ٥س}{٣س + حاس} & \text{عندما } س < ٠ \\ ٣س-١ & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$ عند $س = ٠$

(١٠) إذا كان: $د(س) = \begin{cases} ٥-٢س & \text{عندما } -١ < س < ٢ \\ \frac{١٣}{٣س-٧} & \text{عندما } ٢ \leq س \leq ٥ \end{cases}$

الدوال المتصلة (المستمرة)

الدوال المستمرة أو المتصلة : هي التي شكلها البياني ليس به قفزات أو فراغات.

مثال:



د(س) مستمرة
د(س) = س^{٢}
(تربيعية)

دالة مستمرة
د(س) = | س |
(المقياس)

د(س) = $\frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٦}{\text{س} - ٢}$
ليست مستمرة

د(س) = $\frac{١}{\text{س}}$
(ليست مستمرة)

مثال توضيحي :

إذا كانت د(س) = س^{٣} − ٣س^{٢} + ٥ س + ٤ إبحث اتصال هذه الدالة عندما س = ٢

الحـــــــــــل

١- نوجد د(٢) = ٨ − ١٢ + ١٠ + ٤ = ١٠

٢- نوجد نها$_{\text{س}\to ٢}$ د(س) = (٢)^{٣} − ٣ (٢)^{٢} + ٥ × ٢ + ٤ = ١٠

نلاحظ أن نها$_{\text{س}\to ٢}$ د(س) = د(٢) ∴ الدالة المتصلة عند س = ٢

❖ شروط اتصال الدالة :

١- د(س) معرفة عند س = أ

بمعني أن أ ∈ نطاق الدالة أو د (أ) لها وجود .

٢- د(س) لها نهاية محدودة عند س = أ

أي نها$_{\text{س}\to \text{أ}^{+}}$ د(س) = نها$_{\text{س}\to \text{أ}^{-}}$ د(س)

٣- نها$_{\text{س}\to \text{أ}}$ د(س) = د (أ)

❖ خطوات بحث استمرارية (اتصال) الدالة :-

١- نوجد د (أ) .

٢- نوجد النهاية اليمنى للدالة نها$_{\text{س}\to \text{أ}^{+}}$ د(س) .

٣- نوجد النهاية اليسرى للدالة نها$_{\text{س}\to \text{أ}^{-}}$ د(س)

إذا كانت $نهاس_{\leftarrow ا^+}$ د(س) = $نهاس_{\leftarrow ا^-}$ د(س) = د (أ)

فإن الدالة تكون متصلة عند س = أ

<u>مثال</u>: ابحث اتصال كل من الدوال الآتية عند النقطة المبينة:-

أ) د(س) = ١٥ عندما س = أ

ب) د(س) = $س^٢$ ـ ٣ س + ٥ عندما س = ١

ج) د(س) = جتا س عندما س = أ

د) د(س) = $\sqrt{س ـ ٢}$ عندما س = ١

الحـــــــــل

(أ) د(س) = ١٠ **عند س = أ** **∴ د (أ) = ١٠**

∴ $نهاس_{\leftarrow ا}$ د(س) = ١٠

∴ د (أ) = $نهاس_{\leftarrow ا}$ د(س) = ١٠ ∴ الدالة متصلة.

(ب) د (س) = $س^٢$ ـ ٣ س + ٥ عند س = ١

د (١) = ١ ـ ٣ + ٥ = ٣

$نهاس_{\leftarrow ١}$ د(س) = ١ ـ ٣ + ٥ = ٣

∴ د (١) = $نهاس_{\leftarrow ١}$ د(س) = ٣ ∴ الدالة متصلة

(ج) د(س) = جتا س

د (أ) = جتا أ

، $نهاس_{\leftarrow ا}$ د(س) = جتا أ

∴ د (أ) = $نهاس_{\leftarrow ا}$ د(س) = جتا أ ∴ الدالة متصلة

(ء) د (س) = $\sqrt{س ـ ٣}$ عند س = ٥

د(٥) = $\sqrt{٥ ـ ٣}$ = $\sqrt{٢}$

، $نهاس_{\leftarrow ٥}$ $\sqrt{س ـ ٣}$ = $\sqrt{٢}$

∴ د (أ) = $نهاس_{\leftarrow ٥}$ د (س) = $\sqrt{٢}$ ∴ الدالة متصلة

❖ **<u>ملاحظة : من الدوال المتصلة</u>** :-

د(س) = $\sqrt{\text{س}}$ متصل لكل س ٠ ، د (س) = طا س متصل لكل س - T + ن T ، س^{ن}
متصل في ح ، المقادير التي تحتوى علي بسط ومقام يكون متصلاً في ح عدا عند أصفار المقام .

☐ <u>متي تكون الدالة غير متصلة ؟</u>

(١) إذا كانت / ح فإن الدالة غير معرفة .

مثلا : د(س) = $\sqrt{\text{س} - ٥}$ عندما س = ٢

د (٢) = $\sqrt{٢ - ٥}$ = $\sqrt{-٣}$ / ح غير معرفة .

(٢) إذا كانت الدالة ليس لها نهاية عندما س = أ

مثلا : نها$_{س}$ ٢ $\frac{٣}{\text{س} - ٢}$ = $\frac{٣}{٠}$ ليس لها وجود الدالة غير متصلة .

(٣) إذا كانت د (أ) نها$_{س}$ أ د (س)

(٤) إذا كانت نها$_{س}$ أ$^{+}$ د (س) نها$_{س}$ أ$^{-}$ د (س)

(٥) إذا كان للدالة نهاية يمنى فقط أو يسرى فقط .

<u>مثال</u> : ناقش اتصال الدالة عند س = ٠ حيث د (س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} + ٢ & \text{س} \quad ٠ \\ ٥ & \text{س} = ٠ \end{cases}$

الحـــــــــل

نها$_{س}$ ٠$^{+}$ د(س) = (٠)^{٢} + ٢ = ٢ ، نها$_{س}$ ٠$^{-}$ د (س) = س^{٢} + ٢ = ٠ + ٢ = ٢

ولكن د (٠) = ٥ من الفرض الدالة غير متصلة لأن نها$_{س}$ ٠ د(س) د(٠)

<u>مثال</u> : ناقش اتصال الدالة عند س = -١ حيث د(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} + \text{س} + ٢ & \text{س} < -١ \\ ٣\,\text{س} & \end{cases}$

الحـــــــــل

نها$_{س}$ -١$^{-}$ د (س) = نها$_{س}$ -١$^{-}$ س^{٢} + س + ٢ = (-١)^{٢} + (-١) + ٢ = ٢

نها$_{س}$ -١$^{+}$ د (س) = نها$_{س}$ -١$^{+}$ ٣ س = ٣ × -١

نها$_{س}$ أ$^{+}$ د(س) نها$_{س}$ أ$^{-}$ د(س) الدالة ليست متصلة .

<u>مثال</u> : ابحث اتصال الدالة عند س = $\frac{١}{٢}$ د (س) = $\begin{cases} -\text{س} + \frac{٣}{٢} & \text{حيث س} > \frac{١}{٢} \\ ٣\,\text{س} & \frac{١}{٢} \end{cases}$

مثال : ابحث اتصال الدالة عند س = $\frac{1}{2}$ د (س) = $\begin{cases} -س + \frac{3}{2} & \text{حيث س} < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{س} & س \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

الحـــــــل

د₁(س) = - س + $\frac{3}{2}$ | د₂(س) = $\frac{1}{س}$

د₁ ($\frac{1}{2}$) = - $\frac{1}{2}$ + $\frac{3}{2}$ = ١ | د₂ ($\frac{1}{2}$) = $\frac{1}{\frac{1}{2}}$ = ٢

نهاس ← $\frac{1}{2}$ د₁(س) = - $\frac{1}{2}$ + $\frac{3}{2}$ = ١ | نهاس ← $\frac{1}{2}$ د₂ (س) = $\frac{1}{\frac{1}{2}}$ = ٢

∴ نهاس ← ($\frac{1}{2}$)⁻ د₁(س) ≠ نهاس ← ($\frac{1}{2}$)⁺ د₂(س)

∴ الدالة ليست متصلة (مستمرة)

مثال: ابحث اتصال الدالة عند س = ٣ د (س) = $\begin{cases} \frac{2س^2 + س - 21}{س^2 - 9} & س \neq 3 \\ \frac{13}{6} & س = 3 \end{cases}$

الحـــــــل

نهاس ← ٣ د(س) = $\frac{2س^2 + س - 21}{س^2 - 9}$

= $\frac{(س-3)(2س+7)}{(س-3)(س+3)}$ = $\frac{7+6}{3+3}$ = $\frac{13}{6}$ ---- (١)

، ∵ د (٣) = $\frac{13}{6}$ ------ (٢)

∴ نهاس ← ٣ د(س) ≠ د (٣) ∴ الدالة ليست مستمرة .

مثال: ابحث اتصال الدالة د (س) = $\begin{cases} 2س + \frac{3}{2} & \text{عندما س} \leq 1 \\ \frac{3}{س-1} & 1 < س < 3 \\ س^2 - 5 & \text{عندما س} \geq 3 \end{cases}$

الحـــــــل

عند س = ١ : د₁ (س) = ٢س + $\frac{3}{2}$

د₁ (١) = ٢ + $\frac{3}{2}$ = $\frac{7}{4}$

نها د₁(س) = نها $_{س \to (1)^-}$ ٢س + $\frac{٣}{٢}$ = $\frac{٧}{٤}$

نها د₁(س) = نها $_{س \to (1)^+}$ $\frac{٣}{س - ١}$ = $\frac{٣}{٠}$ = ∞

∴ لا يوجد للدالة نهاية عند س = (١)$^+$ ∴ الدالة غير مستمرة

عند س = ٣ د₂(س) = $\frac{٣}{س - ١}$

د₂(٣) = $\frac{٣}{٣ - ١}$ = $\frac{٣}{٢}$

نها $_{س \to (3)^-}$ د₂(س) = $\frac{٣}{٣ - ١}$ = $\frac{٣}{٢}$ ، ∵ د₃(س) = س^2 - ٥

، نها $_{س \to (3)^+}$ د₃(س) = ٩ - ٥ = ٤

∴ نها $_{س \to (3)^-}$ د₂(س) ≠ نها $_{س \to (3)^+}$ د(س) ∴ الدالة ليست مستمرة

❖ كيفية إزالة عدم اتصال الدالة عند نقطة معينة :-

مثلاً : د(س) = $\frac{س^2 - ٤}{س^2 - ٥س + ٦}$ س ≠ ٢

١) نزيل العامل المسبب للصفر من البسط والمقام.

د(س) = $\frac{(س - ٢)(س + ٢)}{(س - ٢)(س + ٣)}$ = $\frac{س + ٢}{س + ٣}$ ——— (١)

٢) نعوض في الناتج من الخطوة السابقة س = ٢

∴ د(٢) = $\frac{٢ + ٢}{٢ + ٣}$ = $\frac{٤}{٥}$

٣) نضع الدالة ع(س) معرفة بأكثر من قاعدة

∴ ع(س) = $\begin{cases} \frac{س^2 - ٤}{س^2 - ٥س + ٦} & س ≠ ٢ \\ \frac{٤}{٥} & س = ٢ \end{cases}$

مثال : أعد تعريف الدالة الآتية عند النقطة المعينة حتى تكون متصلة

$$د(س) = \frac{٢س^٢ + س - ١}{س + ١} \qquad س = -١$$

الحـــــــل

$$د(س) = \frac{٢س^٢ + س - ١}{س + ١} \qquad س = -١$$

$$= \frac{(س+١)(٢س-١)}{س + ١} = ٢س - ١$$

بوضع $س = -١$ $\qquad$ $\therefore$ $د(س) = ٢ \times -١ - ١ = -٣$

$$\therefore ع(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٢ + س - ١}{س + ١} & س \neq -١ \\ -٣ & س = -١ \end{cases}$$

مثال: إذا كانت $ع(س) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{٤ + س} - ٢}{س} & س \neq -١ \\ -٣ & س = -١ \end{cases}$

الحـــــــل

$د(س) = \dfrac{\sqrt{٤ + س} - ٢}{س}$ بضرب البسط والمقام في مرافق البسط

$$\therefore د(س) = \frac{\sqrt{٤ + س} - ٢}{س} \times \frac{\sqrt{٤ + س} + ٢}{\sqrt{٤ + س} + ٢} = \frac{(٤ + س) - ٤}{(س)(\sqrt{٤ + س} + ٢)}$$

$$= \frac{س}{س\ [\sqrt{٤ + س} + ٢]} \qquad \text{بوضع } س = ٠$$

$$\therefore د(٠) = \frac{١}{\sqrt{٤ + ٠} + ٢} = \frac{١}{٤} = أ$$

$$\therefore ع(س) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{٤ + س} - ٢}{س} & \text{عند } س \neq ٠ \\ \dfrac{١}{٤} & س = ٠ \end{cases}$$

مثال: إذا كانت الدالة د حيث د (س) = $\begin{cases} ١ - \frac{١}{٤}\,\text{س} & \text{عندما س} \le ٢ \\ \frac{\text{أ}}{\text{س}} & \text{عندما س} > ٢ \end{cases}$ متصلة عند س= ٢

فأوجد قيمة الثابت أ

الحــــــــــل

∵ الدالة متصلة

∴ $\text{نها}_{\text{س} \to (٢)^-}\ \text{د(س)} = \text{نها}_{\text{س} \to (٢)^+}\ \text{د(س)}$

، ∵ $\text{نها د}_٢\text{(س)} = \text{نها}_{\text{س} \to (٢)^+}\ \frac{\text{أ}}{\text{س}} = \frac{\text{أ}}{٢}$

، $\text{نها د}_١\text{(س)} = \text{نها}_{\text{س} \to (٢)^-}\ ١ - \frac{١}{٤}\,\text{س} = ١ - \frac{١}{٤} \times ٢ = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{\text{أ}}{٢} = \frac{١}{٢}$ ∴ أ = ١

مثال: إذا كان د(س) = $\begin{cases} \frac{١}{\text{س}}\left(٢\,\text{جتا}^٢\,\frac{٢\text{ط} - ٦\,\text{س}}{٤} - ١\right) & \text{س} \ne ٠ \\ \text{ك} + ٢ & \text{س} = ٠ \end{cases}$

أوجد قيمة ك لتكوين الدالة متصلة عند س = ٠

الحــــــــــل

$\text{نها}_{\text{س} \to ٠}\ \text{د(س)} = \text{نها}_{\text{س} \to ٠}\ \frac{٢\,\text{جتا}^٢\,\frac{\text{ط} - ٦\,\text{س}}{٤} - ١}{\text{س}}$

∵ ٢ جتا^٢ أ − ١ = جتا ٢ أ

∴ $٢\,\text{جتا}^٢\,\frac{\text{ط} - ٦\,\text{س}}{٤} - ١ = \text{جتا}\ ٢ \times \frac{\text{ط} - ٦\,\text{س}}{٤} = \text{جتا}\ \frac{\text{ط} - ٦\,\text{س}}{٢}$

∴ $\text{نها}_{\text{س} \to ٠}\ \frac{\text{جتا}\ \frac{\text{ط} - ٦\,\text{س}}{٢}}{\text{س}} = \text{نها}_{\text{س} \to ٠}\ \frac{\text{جتا}\left(\frac{\text{ط}}{٢} - \frac{٦\,\text{س}}{٢}\right)}{\text{س}}$

∴ $\text{نها}_{\text{س} \to ٠}\ \frac{\text{جتا}\,(٩٠ - ٣\,\text{س})}{\text{س}} = \text{نها}_{\text{س} \to ٠}\ \frac{\text{جا}\ ٣\,\text{س}}{\text{س}} = ٣$

∴ لكى تكون الدالة متصلة عند س = صفر

فإن د(٠) = نها د(س) ∴ ك + ٢ = ٣ ∴ ك = ١

تمرين (٢)

(١) إذا كان: $د(س) = \begin{cases} س^٢ - س + ٢ & س \geq ١ \\ ٢ س & س < ١ \end{cases}$ ابحث اتصال الدالة د(س) عندما س = ١

(٢) ابحث اتصال الدالة عند س = ٣ $د(س) = \begin{cases} \dfrac{|س^٢ - ٧س + ١٢|}{س - ٣} & س \neq ٣ \\ ١ & س = ٣ \end{cases}$

(٣) إذا كانت $د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٢ + س}{س^٢ + ١} & س \neq -١ \\ ك & س = -١ \end{cases}$

أوجد قيمة ك التي تجعل د متصلة عند س = -١

(٤) ابحث اتصال الدالة د(س) عند س = ٣ $د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٢ - ٩}{س - ٣} & س \neq ٣ \\ ك & س = ٣ \end{cases}$

(٥) ابحث اتصال الدالة د(س) عند س = ٤ $د(س) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{٢س + ١} - ٣}{س - ٤} & س \neq ٤ \\ \dfrac{١}{٣} & س = ٤ \end{cases}$

(٦) أوجد قيمة ك بحيث تكون د متصلة عند النقطة س = ٢

$د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٢ - ٤}{٢س - ٤} & س \neq ٢ \\ ك & س = ٢ \end{cases}$

(٧) إذا كانت $د(س) = \begin{cases} س^٢ & س \geq ٢ \\ أ س + ٢ & س < ٢ \end{cases}$ أوجد قيمة أ لكي تكون د(س) متصلة عند س=٢

(٨) ابحث اتصال الدالتين $د(س) = \dfrac{س^٢}{|س|}$ عند س = ٠ ، $د(س) = س^٢ - |س|$ عند س = ٠

(٩) أوجد قيمة الثوابت أ ، ب إذا علم أن الدالة :

$د(س) = \begin{cases} س^٢ + ب س + ٣ & س > ١ \\ أ س + ب & س \leq ١ \end{cases}$ متصلة عند س = ١ وكان د(١) = ٧

(١٠) ابحث اتصال الدالة:

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} - ٣\,\text{س} + ٢ & ، \ \text{س} \geq ٣ \\ ٢ & ، \ ٣ > \text{س} \geq ١ \\ ٦ - \text{س} & ، \ \text{س} < ٤ \end{cases}$$

(١١) أوجد قيمة الثابت م إذا علم أن الدالة :

$$\text{د(س)} = \frac{\text{س}^{٧} - \text{م}^{٧}}{\text{س}^{٣} - \text{م}^{٣}}$$ متصلة عند س = م ، وكانت $\text{د(م)} = \frac{٢٨}{٣}$

(١٢) ابحث اتصال الدالة:

$$\text{د(س)} = \frac{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ٤}{\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ٤}$$ عند س = -١