الإشتقاق

قابلية الاشتقاق : تكون الدالة قابلة للاشتقاق عند س = أ

إذا كانت نها هـ ← ٠ $\frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$ لها وجود

أي:

إذا كانت ($\frac{ء ص}{ء س}$) أو دَ (أ) لها وجود (عدد حقيقي وحيد)

❖ **المشتقة اليمني عند س = أ**

هي نها هـ ← ٠$^{+}$ $\frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$ ورمزها دَ (أ$^{+}$) حيث هـ > ٠

❖ **المشتقة اليسري عند س = أ**

هي نها هـ ← ٠$^{-}$ $\frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$ ورمزها دَ (أ$^{-}$) حيث هـ < ٠

❖ **بحث قابلية الدالة د(س) للإشتقاق عند س = أ ، أ ∈ لنطاق الدالة :-**

أولاً: نوجد المشتقة اليمنى	ثانياً: نوجد المشتقة اليسرى
(١) نوجد د(أ) ---- (١)	(١) نوجد د(أ) ---- (١)
(٢) نوجد د (أ + هـ) ----- (٢)	(٢) نوجد د (أ + هـ) ----- (٢)
حيث هـ كمية صغيرة جداً هـ ← ٠ عندما س ← أ	
(٣) نطرح (١) من (٢) د (أ + هـ) – د (أ)	(٣) نطرح (١) من (٢) د (أ + هـ) – د (أ)
(٤) دَ (أ$^{+}$) = نها هـ ← ٠ $\frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$	(٤) دَ (أ$^{-}$) = نها هـ ← ٠ $\frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$
= م	= ك

- تكون الدالة قابلة للاشتقاق إذا كانت م = ك

- تكون الدالة غير قابلة للاشتقاق إذا كانت م ≠ ك
- إذا كان نها هـ ← ٠ $\frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ} = \frac{عدد}{٠} = \infty$

∴ الدالة غير قابلة للإشتقاق .

مثال: ابحث قابلية اشتقاق الدالة د (س) = $\begin{cases} س^{٢} + س + ٣ & س > ١ \\ ٣س + ٢ & س < ١ \end{cases}$

الحـــــــــل

أولاً : المشتقة اليمنى للدالة عندما س = ١

د+ (س) = ٣س +٢ بوضع س = ١ + هـ بدلاً من س ، هـ ← ٠ عندما س ← ١

∴ د (١+ هـ) = ٣ (١+ هـ) + ٢ = ٣ + ٣ هـ + ٢ = ٥ +٣هـ

د(١) = ٣ + ٢ = ٥

∴ د(١+ هـ) – د(١) = ٥ + ٣ هـ ـ ٥ = ٣ هـ

∴ د (١)+ نها هـ ← ٠ $\frac{د+(١ + هـ) - د١}{هـ}$ = نها هـ ← ٠ $\frac{٣ هـ}{هـ}$ = ٣ --- (١)

ثانياً : المشتقة اليسرى للدالة عند س = ١

د- (س) = $س^{٢}$ + س + ٣

بوضع س = ١+ هـ هـ ← ٠ عندما س ← ١

∴ د(١+ هـ) = $(١+ هـ)^{٢}$ + (١+ هـ) + ٣ = $هـ^{٢}$ + ٣ هـ + ٥

د- (١) = ١+ ١ + ٣ = ٥

د (١+ هـ) – د(هـ) = $هـ^{٢}$ + ٣ هـ + ٥ـ ٥ = $هـ^{٢}$ + ٣ هـ

∴ د (١)- = نها هـ ← ٠ $\frac{د-(١ + هـ) - د(هـ)}{هـ}$ = نها هـ ← ٠ $\frac{هـ^{٢} + ٣ هـ}{هـ}$

= نها هـ ← ٠ $\frac{هـ(هـ + ٣)}{هـ}$ = ٣ ---- (٢)

∴ د (١)+ = د (١) ∴ الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ١

مثال: بين هل الدالة د قابلة للاشتقاق عند هـ أم لا

د(س) = $\begin{cases} ٢ س^{٢} + ١ & س \geq ١ \\ ٤ س - ١ & س < ١ \end{cases}$ هـ = ١

الحـــــــــل

أولاً : المشتقة اليمنى للدالة عندما س = ١

د، (س) = ٤ س ـ١ ∴ د، (١)$^{+}$ = ٤ × ١ ـ ١ = ٣

د، (١ + هـ) حيث هـ ← ٠ عندما س ← ٠

= ٤ (١ + هـ) ـ١ = ٤ + ٤ هـ ـ١ = ٣ + ٤ هـ

∴ د، (١)$^{+}$ نها هـ ← ٠ $\frac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ}$

= نها هـ ← ٠ $\frac{٣ + ٤ هـ - ٣}{هـ}$ = $\frac{٤ هـ}{هـ}$ = ٤

ثانياً : المشتقة اليسرى للدالة عند س = ١

د، (س) = ٢ س^{٢} + ١ ∴ د، (١)$^{-}$ = ٢ × ١ + ١ = ٣

د، (١ + هـ) = ٢ (١ + هـ)^{٢} + ١ = ٣ + ٤ هـ + ٢ هـ^{٢}

دَ، (١)$^{-}$ = نها هـ ← ٠ $\frac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ}$ = نها هـ ← ٠ $\frac{٣ + ٤ هـ + ٢ هـ^{٢} - ٣}{هـ}$

= نها هـ ← ٠ $\frac{هـ (٤ + ٢ هـ)}{هـ}$ = ٤

∴ دَ، (١)$^{+}$ = دَ (١)$^{-}$ ∴ الدالة قابلة للاشتقاق عند هـ = ١

مثال: أوجد قيم أ ، ب التي تجعل الدالة د حيث :

د(س) = { س^{٢} ، س < ١ ؛ أ س + ب ، س ≤ ١ } قابلة للاشتقاق عند س = ١

الحـــــــــل

∵ الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ١ ∴ الدالة متصلة عند س = ١

∴ د(١)$^{+}$ = د(١)$^{-}$ ∴ نها س ← ١ أ س + ب = نها س ← ١ س^{٢}

∴ أ + ب = ١ ----- (١)

، ∵ الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ١ ∴ دَ (١)$^{+}$ = دَ (١)$^{-}$

∴ نها هـ ← ٠ $\frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$ = نها هـ ← ٠ $\frac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ}$

∴ نها هـ ← ٠ $\frac{أ(١+هـ)+ب-(أ+ب)}{هـ}$ = نها هـ ← ٠ $\frac{(١+هـ)^{٢}-١}{هـ}$

نها هـ ← ٠ $\frac{أ+أهـ+ب-أ-ب}{هـ}$ = نها هـ ← ٠ $\frac{١+هـ^{٢}+٢هـ-١}{هـ}$

∴ نها هـ ← ٠ . أ = نها هـ ← ٠ . هـ + ٢

∴ أ = ٢ بالتعويض في (١)

∴ ٢ + ب = ١ ∴ ب = -١

مثال : بين هل دالة القيمة المطلقة المعرفة بالمعادلة د(س) = | س | - قابلة للاشتقاق عند س = ٠ أم لا.

الحـــــــل

د (س) = | س |

تعريف الدالة د(س) = { س ، س > ٠ ؛ - س ، س < ٠

د(٠) = ٠ ∈ ح

$\frac{د(٠+هـ)-د(٠)}{هـ} = \frac{د(هـ)}{هـ}$

إذا كانت هـ < ٠

∴ $\frac{د(هـ)}{هـ}$ = ١ ∴ د(٠)$^{+}$ = ١

∴ د(٠)$^{-}$ ≠ د(٠)$^{+}$ ∴ غير قابلة للاشتقاق

العلاقة بين الاتصال والاشتقاق

(١) الدالة متصلة ⟸ قابلة للاشتقاق / غير قابلة للاشتقاق

(٢) الدالة غير متصلة ⟸ غير قابلة للاشتقاق

(٣) الدالة قابلة للاشتقاق ⟸ الدالة متصلة

(٤) الدالة غير قابلة للاشتقاق ⟸ متصلة / غير متصلة

بحث اتصال الدالة	بحث اشتقاق الدالة
(١) نوجد د (أ)	(١) نوجد د (أ)
(٢) نها هـ ← (أ)$^{+}$ د(س) النهاية اليمنى = م	(٢) نوجد دَ (أ)$^{+}$
(٣) نها هـ ← (أ)$^{-}$ د(س)النهاية اليسرى = ن	نها هـ ← . $\frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$ = م
إذا كانت م = ن	(٣) نوجد دَ (أ)$^{-}$
∴ الدالة متصلة	نها هـ ← . $\frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$ = ك
إذا كانت م ≠ ن	إذا كانت م = ك ∴ الدالة قابلة للاشتقاق
الدالة ليست متصلة	إذا كانت م ≠ ك ∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق

ملاحظة :

إذا كانت م أ، ك = ∞ فإن الدالة غير قابلة للاشتقاق .

مثال: اثبت أن د(س) = $\begin{cases} ٣ - س & س > ٣ \\ س - ٣ & س \leq ٣ \end{cases}$ دالة متصلة عندما س = ٣ ولكنها غير قابلة للاشتقاق عندما س = ٣

الحـــــــــل

نبحث اتصال الدالة:

نها $_{س \leftarrow ٣^+}$ د(س) = س – ٣ = ٣ – ٣ = ٠ ----- (١)

نها $_{س \leftarrow ٣^-}$ د(س) = س – ٣ = ٣ – ٣ = ٠ ---- (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الدالة متصلة عند س = ٣

نبحث الاشتقاق :

د، (س) = س – ٣ د، (٣) = ٣ – ٣ = ٠

د، (٣ + هـ) = ٣ + هـ – ٣ = هـ

د، (٣)$^-$ = نها $_{هـ \leftarrow ٠}$ $\frac{د(٣ + هـ) - د(٣)}{هـ}$ = نها $_{هـ \leftarrow ٠}$ $\frac{هـ - ٠}{هـ}$ = ١

د$_{٢}$ (س) = ٣ – س د$_{٢}$ (٣) = ٣ – ٣ = ٠

د$_{٢}$ (٣ + هـ) = ٣ – (هـ + ٣) = ٣ – ٣ – هـ = – هـ

د$_{٢}$ (٣)$^-$ = نها $_{هـ \leftarrow ٠}$ $\frac{د(٣ + هـ) - د(٣)}{هـ}$ = نها $_{هـ \leftarrow ٠}$ $\frac{- هـ}{هـ}$ = – ١

∴ د، (٣$^+$) ≠ د$_{٢}$ (٣$^-$)

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق ∴ الدالة متصلة وغير قابلة للاشتقاق

مثال : إذا كانت د(س) = $\begin{cases} ٣ - س^{٢} & س \geq ٣ \\ س - ٩ & س < ٣ \end{cases}$

أثبت أن الدالة متصلة عند س = ٣ ثم ابحث قابلية اشتقاق الدالة عند س = ٣

الحـــــــــل

نبحث اتصال الدالة :

د، (س) = ٣ – س^{٢} ، د، (٣) = ٣ – ٩ = – ٦

نها $_{س \leftarrow ٣^+}$ د(س) = ٣ – ٩ = – ٦

، د$_{٢}$ (س) = س – ٩ ، د$_{٢}$ (٣) = ٣ – ٩ = – ٦

نها $_{س \leftarrow ٣^-}$ د(س) = ٣ – ٩ = – ٦

∴ نهاس ← ٣+ د(س) = نهاس ← ٣- د(س)

∴ الدالة متصلة عند س = ٣

- **نبحث قابلية الدالة للاشتقاق :**

النهاية اليمنى للدالة :

د١ (س) = ٣- س٢ ، د١ (٣+ هـ) = ٣ – (٣+ هـ)٢ = - ٦

د١ (٣+ هـ) – د١ (٣) = ٣ – (٩+٦ هـ + هـ٢) + ٦ = - ٦ هـ - هـ٢

د (٣)+ = نها هـ ← ٠ $\frac{د١(٣ + هـ) - د١(٣)}{هـ}$ = نها هـ ← ٠ $\frac{هـ(-٦ - هـ)}{هـ}$ = -٦

النهاية اليسرى للدالة :

د٢ (س) = س - ٩ ∴ د٢ (٣) = ٣ – ٩ = - ٦

د٢ (٣+ هـ) = ٣+ هـ - ٩ = هـ - ٦

د (٣)- = نها هـ ← ٠ $\frac{د٢(٣ + هـ) - د٢(٣)}{هـ}$ = نها هـ ← ٠ $\frac{هـ}{هـ}$ = ١

∴ د١ (٣+) ≠ د٢ (٣-)

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق

تمرين (٣)

(١٣) إذا كانت الدالة د حيث د(س) =
$$\begin{cases} ١ - \frac{١}{٤}س & \text{عندما } س \geq ٢ \\ \frac{أ}{س} & \text{عندما } س < ٢ \end{cases}$$
متصلة عند س = ٢ فأوجد قيمة الثابت أ ، ثم ابحث قابلية اشتقاق الدالة عند س = ٢

(١٤) إذا كانت الدالة د حيث د (س) =
$$\begin{cases} س^{٢} + أ س - ١ & \text{عندما } س > ٢ \\ ٥ & \text{عندما } س = ٢ \\ أ + ب س & \text{عندما } س < ٢ \end{cases}$$
متصلة عند س =٢ فأوجد قيمة الثابتين أ ، ب ثم ادرس قابلية الاشتقاق للدالة د عند س = ٢

(١٥) إذا كانت الدالة د حيث د (س) =
$$\begin{cases} س + أ & \text{عندما } س < ١ \\ ٣ - س & \text{عندما } س \geq ١ \end{cases}$$
متصلة عند س =١ فأوجد قيمة أ ثم ابحث قابلية الدالة د للاشتقاق عند س = ١

(١٦) أوجد قيمة كل من أ ، ب التين تجعلان الدالة د حيث :

د (س) =
$$\begin{cases} س^{٢} - ١ & \text{عندما } س < ١ \\ ٢ أ س + ب & \text{عندما } س \geq ١ \end{cases}$$
قابلة للاشتقاق عند س = ١

(١٧) ابحث الاتصال وقابلية الاشتقاق للدالة د المعرفة كالآتي :

د (س) =
$$\begin{cases} س^{٢} + ١ & \text{عندما } س \geq ١ \\ س + ١ & \text{عندما } س = ١ \end{cases}$$

(١٨) أثبت أن الدالة : د (س) =
$$\begin{cases} س & \text{عندما } س \geq ١ \\ \frac{١}{٢} س^{٢} + \frac{١}{٢} & \text{عندما } س < ١ \end{cases}$$
متصلة وقابلة للاشتقاق مرة واحدة فقط عند س = ١

(١٩) إذا كانت الدالة د المعرفة كالتالي:

د (س) = { س^{٣} عندما س < ١ ؛ أ س^{٢} + ب س + جـ عندما س ≤ ١ } قابلة للاشتقاق مرتين عند س = ١ ،

فأوجد قيم الثوابت أ ، ب ، جـ

(٢٠) إذا كانت د(س) = { ١ – (س-١)^{٢} عندما س ≥ ١ ؛ ١ + (س-١)^{٢} عندما س < ١ }

فابحث قابلية الدالة للاشتقاق عند س = ١

(٢١) إذا كانت الدالة د : ح ← ح معرفة بالقاعدة

د (س) = { ٢ س^{٢} - ٣ عندما س ≥ ١ ؛ ٤ س - ٥ عندما س < ١ }

(٢٢) إذا كان د (س) = { $\frac{س^{٣} - س^{٢} - ٥ س - ٣}{س - ٣}$ س ≠ ٣ ؛ أ س = ٣ }

فأوجد قيمة أ لتكون الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ٣ وأوجد معادلة العمودي للمنحنى عند هذه النقطة .

الدالة الضمنية – الاشتقاق الضمنى

❖ الدوال الضمنية :

هي الدوال لتي تكون علي الصورة د (س، ص) = ٠

مثلاً : $س^{٢} - ٣ س ص + ٤ = ٠$ ، $س + جتا ص = (س + ص)$

العلاقات الضمنية :

$س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$ ، $\frac{س^{٢}}{١٦} - \frac{ص^{٢}}{٩} = ١$

ملاحظات :

بعض الدوال والعلاقات الضمنية يمكن جعلها صريحة .

مثال ذلك : $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$ ، $ص^{٢} = ٢٥ - س^{٢}$ ∴ $ص = \pm \sqrt{٢٥ - س^{٢}}$

والطريقة العملية لتفاضل الدوال الضمنية تتلخص في الآتي:

هو تفاضل س ، ص معاً ولكن عند تفاضل ص يلزم ضربها في $\frac{ء ص}{ء س}$ ثم استخلاص $\frac{ء ص}{ء س}$ في الطرف الأيمن .

المشتقات العليا:

المشتقة الثانية يرمز لها بالرموز : $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ أ، د (س) أ، $ص''$

المشتقة الثالثة يرمز لها بالرموز : $\frac{ء^{٣} ص}{ء س^{٣}}$ أ، $د^{٣}$ (س) أ، $ص'''$

مثال: أوجد المشتقة الأولى للدالة الآتية : $س^{٢} - ٢ ص ص + ٢ ص^{٢} = ٨$

الحـــــــل

$٢س - (٢ \times ص + \frac{ء ص}{ء س} \times ٢ س) + ٤ ص \frac{ء ص}{ء س} = ٠$

$٢س - ٢ص - ٢س \frac{ء ص}{ء س} + ٤ص \frac{ء ص}{ء س} = ٠$ بالقسمة علي ٢

∴ $س - ص - س \frac{ء ص}{ء س} + ٢ \frac{ء ص}{ء س} = ٠$

∴ $\frac{ء ص}{ء س} (٢ص - س) = ص - س$ ∴ $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{ص - س}{٢ص - س}$

مثال: أوجد $\frac{ع ص}{ع س}$ من المعادلة : $ص^{٢} + ٥ س ص + ٣ س^{٢} - ٧ = ٠$

الحـــــــــل

$ص^{٢} + ٥ س ص + ٣ س^{٢} - ٧ = ٠$

$٢ص \frac{ع ص}{ع س} + ٥ [س \times \frac{ع ص}{ع س} + ص \times ١] + ٦ س = ٠$

$٢ص \frac{ع ص}{ع س} + ٥ س \frac{ع ص}{ع س} + ٥ ص + ٦ س = ٠$

$٢ ص \frac{ع ص}{ع س} + ٥س \frac{ع ص}{ع س} = - (٥ ص + ٦ س)$

$\frac{ع ص}{ع س} (٢ص + ٥ س) = - (٥ ص + ٦ س)$

$\therefore \frac{ع ص}{ع س} = \frac{- (٥ ص + ٦س)}{(٢ ص + ٥ س)}$

مثال : إذا كان $ص^{٢} + ٣ س^{٢} = ٢س$ اثبت أن $ص ص_{ن} + (ص_{ن})^{٢} + ٣ = ٠$

الحـــــــــل

$٢ص ص_{ن} + ٦س = ٢$ بالقسمة ÷ ٢

$\therefore ص ص_{ن} + ٣ س = ١$ $\therefore ص_{ن} \times ص_{ن} + ص_{ن} \times ص + ٣ = ٠$

$\therefore (ص_{ن})^{٢} + ص ص_{ن} + ٣ = ٠$

مثال : إذا كان $٢ ص^{٣} = ٣ ص^{٢}$ اثبت أن : $ص ص_{ن} + ٢ (ص_{ن})^{٢} = \frac{١}{ص}$

الحـــــــــل

$٦ ص^{١} = ٦ س$ بالقسمة ÷ ٦ $\therefore ص^{٢} ص = س$

$\therefore ٢ ص ص_{ن} \times ص_{ن} + ص_{ن} \times ص^{٢} = ١$

$٢ص (ص_{ن})^{٢} + ص^{٢} (ص_{ن})^{٢} = ١$ بالقسمة ÷ ص

$\therefore ٢(ص_{ن})^{٢} + ص ص_{ن} = \frac{١}{ص}$

مثال: إذا كان س^{٢} + ص^{٢} = ٩ أثبت أن : ص^{٢} ص$_{١}^{٢}$ + ٩ = صفر

الحـــــــل

٢س + ٢ص ص$_{١}$ = ٠ بالقسمة ÷ ٦ ∴ ص ص$_{١}$ = س

∴ ٢ ص ص$_{١}$ × ص$_{١}$ + ص^{٢} × ص^{٢} = ٠ ∴ ١ + (ص$_{١}$)^{٢} + ص ص$_{١}$ = ٠

١ + ($\frac{-س}{ص}$)^{٢} + ص ص$_{١}$ = ٠ ∴ ١ + $\frac{س^{٢}}{ص^{٢}}$ + ص ص$_{١}$ = ٠ بالضرب في ص^{٢}

∴ ص^{٢} + س^{٢} + ص^{٢} ص$_{١}^{٢}$ = صفر ∴ ٩ + ص^{٢} ص$_{١}^{٢}$ = صفر

مثال: أوجد معادلتي المماس والعمودي : س٢ + ص٢ – ٤س + ٦ص – ٢٤ = ٠ عند (٣،١)

الحـــــــل

٢س + ٢ص $\frac{ء ص}{ء س}$ – ٤ + ٦ $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٠

∴ ٢ ص $\frac{ء ص}{ء س}$ + ٦ $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٤ – ٢س

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ (٢ص+٦) = ٤ – ٢ س

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{٤ - ٢س}{٢ص + ٦}$ وعند النقطة (٣،١)

المماس	العمودي
م$_{١}$ = $\frac{٤ - ٢}{٦ + ٦}$ = $\frac{٢}{١٢}$ = $\frac{١}{٦}$	م$_{٢}$ = – ٦
∴ (ص – ٣) = $\frac{١}{٦}$ (س – ١)	(ص – ٣) = – ٦ (س – ١)

مثال: إذا كان س ص = (س + ص) ٢ فاثبت أن س صَ = ص

الحـــــــــل

س ص = س٢ + ٢ س ص + ص٢ = س٢ + س ص + ص٢ = ٠

(س- ص) (س٢+ س ص + ص٢) = ٠ ∴ (س- ص) = ٠

∴ س٢ = ص٢ ∴ ٣ س٢ = ٣ ص٢ $\frac{ع ص}{ع س}$ بالضرب × س

س٢ = س ص٢ ∴ ص٣ = س ص٢ $\frac{ع ص}{ع س}$

∴ ص = س $\frac{ع ص}{ع س}$ ∴ س $\frac{ع ص}{ع س}$ = ص

مثال : إذا كانت ص = ٢ جا س – س جتا س – أثبت أن صَ + ص = ٢ جا س

الحـــــــــل

ص= ٢جا س – س جتا س

$\frac{ع ص}{ع س}$ = ٢ جتا س – [(١) (جتا س) + (- جا س) (س)]

= ٢ جتا س – جتا س + س جا س = جتا س + س جا س

∴ صَ = - جا س + [١× جا س + جتا س × س]

= - جا س + جا س + س جتا س = س جتا س

∴ صَ + ص = س جتا س + ٢ جا س – س جتا س = ٢ جا س

مثال: إذا كانت ص = $\frac{جتا س}{س}$ اثبت أن : س صَ + ٢ صَ + س ص = ٠

الحـــــــــل

ص = $\frac{جتا س}{س}$ ، ∵ س ص = جتا س

∴ ١× ص + $\frac{ع ص}{ع س}$ × س = - جا س ∴ ص + س $\frac{ع ص}{ع س}$ + جا س = ٠

∴ $\frac{ع ص}{ع س}$ + [١× $\frac{ع ص}{ع س}$ + صَ × س] + جتا س = صفر

∴ $\frac{ع ص}{ع س}$ + $\frac{ع ص}{ع س}$ + س صَ + جتا س = ٠ ∴ ٢ صَ + س صَ + س ص = ٠

تمرين (٤)

(١) إذا كان $س^{٢} + ص^{٢} - ٥ س + ٣ ص = ١٥$ ـ أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$

(٢) إذا كان $س^{٢} + س ص - ص^{٢} = ٦$ ـ أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ عند النقطة (٣،٢)

(٣) إذا كان ص = $\frac{١}{٥} س^{٥} + \frac{١}{٥} س^{٤} - ٢س^{٣} + ٧س - ٥$ ـ أوجد صَ عندما س = ـ١

(٤) إذا كانت $ص^{٣} = \frac{٢}{س^{٢} + ١}$ ـ أثبت أن : $\frac{٣ ص^{٢}}{س}$ × صَ + $ص^{٦}$ = صفر (حيث س ≠ ٠)

(٥) إذا كانت ص = جـ (س ـ حـ)^{٢} حيث حـ مقدار ثابت فأثبت أن :

$ص^{≡}$ ـ ٣س ص صَ + ٨ $ص^{٢}$ = صفر

(٦) إذا كان س ص = أ $س^{٢}$ + ب حيث أ ، ب ثابتان ـ أثبت أن : س صّ + ٢ صَ = ٢ أ

(٧) إذا كانت ٢ $ص^{٣}$ = ٣ س ـ أثبت أن : س صّ + ٢ (صَ)^{٢} = $\frac{١}{ص}$

(٨) إذا كان ص $\sqrt{١ + س^{٢}}$ = ١ ـ أثبت أن: (١ + $س^{٢}$) صّ + ٣ س صَ + ص = ٠

(٩) أوجد إذا عرفت ص بالمعادلة :

٣ ص حا س + ٥ $ص^{٢}$ جتا س ـ $س^{٣}$ = صفر

(١٠) أوجد معادلتي المماس والعمودي للمنحنى :

$س^{٢}$ + ٤ $ص^{٢}$ = ٢٠ عند النقطة ق (٣،٢)