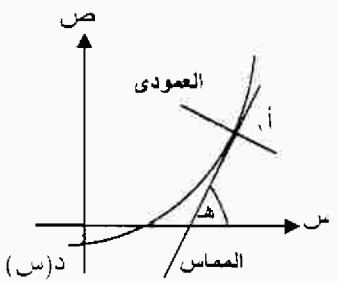
تطبيقات علي المشتقة الأولى

أولاً: التطبيق الهندسي

إذا كانت ص = د(س) دالة فإن **ميل المماس** عند النقطة (س١ ، ص١) والتي تقع علي بيان الدالة هو م١ = $\frac{د ص}{د س}$ وتكون **معادلة المماس** عند هذه النقطة هي :

ص - ص١ = م١(س – س١)



ويكون **ميل العمودي** هو $\frac{-١}{م١}$ **ومعادلة العمودي** هي :

ص – ص١ = $\frac{-١}{م١}$ (س - س١) عند (س١، ص ١)

ملاحظات :

١- ميل المماس م = ظا هـ حيث هـ هى الزاوية التى يصنعها المماس مع الإتجاه الموجب لمحور السينات .

٢- إذا كان المماس // المحور س فإن م = ظا هـ = ٠ ، < هـ = صفر .

٣- إذا كان المماس ⊥ المحور س فإن م = ظا هـ = ∞ ، هـ = ٩٠°

٤- عندما م = موجب ∴ هـ تكون زاوية حادة .

٥- عندما م = سالب ∴ هـ تكون زاوية منفرجة .

٦- إذا تقاطع منحنى د١ مع منحنى د٢ فإن الزاوية بينهما = الزاوية هـ بين مماسيهما عند نقطة التقاطع حيث نعين هـ من ظا هـ = | $\frac{م١ - م٢}{س ٢ + ١}$ | حيث م١ هو ميل المماس الأول ، م٢ هو ميل المماس الثاني .

٧- عند تعامد مستقيمان ميل الأول = م١ وميل الثانى م٢ فإن م١ × م٢ = -١

٨- عند توازي المستقيمان فإن م١ = م٢

أمثلة :

مثال: أوجد معادلتى المماس والعمودى للدالة ص = $\frac{٢ س}{س ٢ + ١}$ عند النقطة (-١ ،-١)

الحـــــــــل

$\because$ ص $= \frac{٢ س}{س^{٢} + ١}$ $\quad\quad$ $\therefore$ م $= \frac{(س^{٢}+١) \times ٢ - ٢س(س^{٢}+١)}{(س^{٢} + ١)^{٢}}$

$\therefore$ عند س $= -١ \Leftarrow$ م $= \frac{(١+١)\ ٢ - ٢ \times (-١)\ (١+١)}{(١ + ١)^{٢}} = \frac{٤ + ٤}{٤} = ٢$

$\therefore$ معادلة المماس ص - ص، = م (س - س،) $\Leftarrow$ ص + ١ = ٢(س+١) $\Leftarrow$ ص = ٢س+١

معادلة العمودى هي : ص+ ١ = $\frac{-١}{٢}$ (س+١) $\Leftarrow$ ٢ص + س+ ٣ = ٠

مثال : أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة ص = س + جا س عند النقطة (٠،٠) وكذا معادلة العمودى عند نفس النقطة .

الحـــــــــل

ميل المماس = $\frac{د\ س}{د\ ص}$

= ١+ جتا س $\quad$ عند النقطة (٠،٠)

ميل المماس = ١+ جتا ٠ = ١+١ = ٢

معادلة المماس هي $\frac{ص - ٠}{س - ٠}$ = ٢

ص = ٢س $\quad$ ، ص - ٢ س = صفر

معادلة العمودى هي $\frac{ص - ٠}{س - ٠} = \frac{-١}{٢}$

٢ص = - س $\quad$ ، ٢ص + س = صفر

مثال: أثبت أن المنحنى س ص = $\sqrt{٣}$ ٧ يتقاطع علي التعامد مع المنحنى ص٢ – س٢ = ٢ أوجد نقط التقاطع .

الحـــــــــل

$\because$ س ص = $\sqrt{٣}$ ٧ ---- (١) $\quad$ $\therefore$ س $\frac{ء ص}{ء س}$ + ص = ٠ $\quad$ $\therefore$ م، = $\frac{- ص}{س}$

، $\because$ ص^{٢} – س^{٢} = ٢ --- (٢) $\quad$ $\therefore$ ٢ ص $\frac{ء ص}{ء س}$ - ٢ س = ٠

∴ م٢ = $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ ∴ م١ × م٢ = - ١

∴ المنحنيان يتقاطعان متعامدين

لكى نوجد نقط التقاطع من (١) ∴ س = $\frac{\sqrt{٣}}{\text{ص}}$ نعوض في (٢)

∴ ص^{٢} - $\frac{٣}{\text{ص}^{٢}}$ = ٢ ∴ ص^{٢} - ٢ ص^{٢} - ٣ = ٠

∴ (ص^{٢}-١) (ص^{٢} + ١) = ٠ ∴ ص^{٢} = -١ مرفوض ∴ ص^{٢} = ٣

∴ ص = ± $\sqrt{٣}$ ∴ من (١) ∴ عند ص = ± $\sqrt{٣}$ ∴ س = ± ١

∴ نقط التقاطع هى (± ١ ، ± $\sqrt{٣}$) أى (١ ، $\sqrt{٣}$) ، (-١ ، - $\sqrt{٣}$)

مثال: أثبت أن المنحنيين ص = $\frac{\text{س}}{\text{٢-٣ س}}$ ، ص = [س - ٢]^{٨} (١ – ٢ س)^{٣} متماسان عند النقطة (١ ، -١) - ثم أوجد معادلة المماس المشترك عند تلك النقطة .

الحـــــــل

∵ ص = $\frac{\text{س}}{\text{٢-٣ س}}$ ∴ م١ = $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = $\frac{(\text{٢-٣ س}) \times ١ - \text{س} \times -٣}{(\text{٢-٣ س})^{٢}}$

∴ (م١) س = ١ = ٢

، ∵ ص = (س- ٢)^{٨} (١-٢ س)^{٣}

∴ م٢ = $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = (س-٢)^{٨} × ٣(١-٢ س)^{٢} × -٢+ [١-٢ س]^{٣} × ٨ [س-٢]^{٧}

∴ (م٢) س = ١ = -٦ + ٨ = ٢

∵ م١ = م٢ ∴ المنحنيين متماسين

معادلة المماس المشترك : ص - ص١ = م (س- س١) ∴ ص+ ١ = ٢ (س -١)

∴ ٢ س – ص – ٣= ٠ معادلة المماس المشترك.

مثال: أوجد النقطة التى عندها المماس يوازى المحور س للمنحنى ص = جا٢ س ، ط > س > ٠

الحـــــــل

ص = جا ٢ س ⇐ (١) ∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٢ جتا ٢ س

، ∵ المماس // المحور س ∴ م = ٠ ∴ جتا ٢ س = ٠

∴ ٢س = $\frac{ط}{٢}$ ⇐ س = $\frac{ط}{٤}$ حيث ط > س > ٠

∴ من (١) ⇐ ص = جا ٢ × $\frac{ط}{٤}$ = ١

∴ النقطة هي ($\frac{ط}{٤}$ ، ١)

مثال: إذا كان المماس للمنحنى ص = س (ب – س^{٢}) عند النقطة س =٢ يصنع زاوية هـ حيث ظا هـ حيث ظا هـ = ٢ – أوجد قيمة ب .

الحـــــــــل

∵ ص = ب س – س^{٣} ⇐ (١) ∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = ب – ٣ س^{٢}

ولكن م = ٢ عند النقطة س = ٢

∴ ب – ٣ × ٤ = ٢ ∴ ب = ١٤

مثال : إذا كان المنحنى د(س) = أس^{٣} + ب س^{٢} + جـ س يمس محور السينات عند النقطة (١،٠) وأن ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة (٠،٠) يساوى٢ فأوجد قيم كل من أ ، ب ، جـ

الحـــــــــل

∵ ص = أس^{٣} + ب س^{٢} + جـ س ⇐ (١)

، $\frac{ء ص}{ء س}$ = م = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س + جـ ⇐ (٢)

عند (٠،٠) ← م = ٢ ∴ ٠ + ٠ + جـ = ٢ ∴ جـ = ٢

عند (١،٠) المنحنى يمس المحور س ∴ م = صفر

∴ من (٢) : ٣ أ + ٢ ب + ٢ = ٠ ⇐ (٣)

النقطة (١،٠) تحقق معادلة المنحنى

∴ أ + ب + ٢ = ٠ ⇐ (٤) بالضرب × (-٢) والجمع مع (٣)

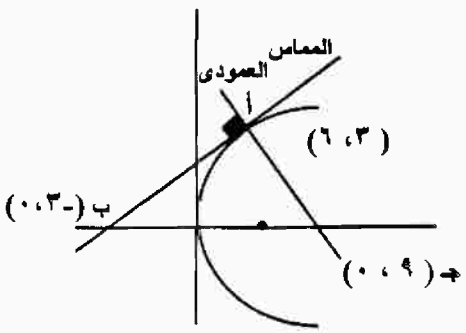
∴ أ – ٢ = ٠ ∴ أ = ٢

من (٤): ب = -٤

مثال : أوجد رؤوس المثلث الذي أضلاعه هى كل من المحور س ، والمماس والعمود لمنحنى

ص^{٢} = ١٢ س عند النقطة (٣ ، ٦)

الحـــــــــل



∵ ص^{٢} = ١٢ س --- (١)

∴ حيث أن أ = (٣،٦) هى نقطة التماس

∴ ٢ ص . $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ١٢

∴ م = $\frac{٦}{\text{ص}}$ عند ص = ٦

∴ م = ١

ص- ٦ = ١× (س-٣) ⇐ ص = س + ٣ ---- (٢)

معادلة العمودى هى ص- ٦ = -١ × (س - ٣) ⇐ ص + س = ٩ ---- (٣)

∴ تقاطع المماس مع المحور س نضع ص = ٠ ∴ س = -٣

∴ الرأس ب = (-٣، ٠)

تقاطع العمودى مع المحور س يعطى الرأس جـ وهى (٩، ٠) وهى رؤوس المثلث أ، ب، جـ

مثال : أثبت أن معادلة المماس لمنحنى الدالة التي معادلتها $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} + \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ب}^{٢}}$ =١ عند النقطة (س$_{١}$، ص$_{١}$) الواقعة عليه هى $\frac{\text{س س}_{١}}{\text{أ}^{٢}} + \frac{\text{ص ص}_{١}}{\text{ب}^{٢}}$ = ١

الحـــــــــل

∵ $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} + \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ب}^{٢}}$ =١ ∴ بالإشتقاق

∴ $\frac{١}{\text{أ}^{٢}} \times \frac{٢\text{ س}}{\text{ب}^{٢}} + \frac{١}{\text{ب}^{٢}} \times ٢\text{ ص} \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٠

∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{-\text{ ب}^{٢}\text{ س}}{\text{أ}^{٢}\text{ ص}} = \frac{-\text{ ب}^{٢}\text{ س}}{\text{أ}^{٢}\text{ ص}}$

∴ $\left(\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}\right)_{(س_1 ، ص_1)} = \frac{-\text{ب}^2}{\text{أ}^2} \frac{\text{س}_1}{\text{ص}_1}$

معادلة المماس بمعلومية ميل ونقطة ص – ص$_1$ = م (س – س$_1$)

∴ ص – ص$_1$ = $\frac{-\text{ب}^2}{\text{أ}^2} \frac{\text{س}_1}{\text{ص}_1}$ (س- س$_2$)

∴ أ^2 ص ص$_1$ + ب^2 س س$_1$ + ب ^{2} س$_1$ ^{2}

∴ أ^2 ص ص$_1$ + ب^2 س س$_1$ = ب ^{2} س$_1$ ^{2} + أ^2 ص$_1$ ^{2} ----- (١)

∴ النقطة (س$_1$، ص$_1$) واقعة علي المنحنى $\frac{\text{س}^2}{\text{أ}^2} + \frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2} = 1$

∴ أ^2 ص$_1$ ^{2} + ب^2 س$_1$ ^{2} = أ^2 ب^2

بالتعويض في (١)

∴ أ^2 ص ص$_1$ + ب^2 س س$_1$ = أ^2 ب^2 بالقسمة علي أ^2 ب^2

∴ $\frac{\text{س س}_1}{\text{أ}^2} + \frac{\text{ص ص}_1}{\text{ب}^2} = 1$ وهو المطلوب

تمرين (٥)

❖ أوجد ميل المماس لكل من منحنيات الدوال الآتية عند النقطة المبينة أمام كل منها :

(١) ص= س^{٤} + ٣ س^{٢} – ٦ عند (١، -٢)

(٢) ص= $\frac{١}{\sqrt{س}}$ عند (١، ١) حيث س > ٠

(٣) س^{٢} – س ص+ ص^{٢} = ٢٧ عند (٦، ٣)

(٤) ص = (س-١) (س+ ٢) (س-٣) عند نقط قطعها مع محور السينات – اوجد قياس الزاوية التى يصنعها المماس لكل من منحنيات الدوال الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة المبينة أمام كل منها .

(٥) ص= س^{٣} - س^{٢} + ١ عند النقطتين (١،١) ، (١،٠)

(٦) ص= [illegible] عند النقطة [illegible]

(٧) س^{٢} + ص^{٢} - ٢ س+ ٦ ص + ٢ = ٠ عند النقطه (٣، -١)

(٨) اوجد النقط على منحنى الدالة ص = ٢ س^{٣} – ٣ س^{٢} – ١٢ س + ١ التى يكون عندها المماس موازيا لمحور السينات .

(٩) أوجد النقط على منحنى الداله ص = (٢س -٣) (س^{٢} - س + ٣) التى يكون عندها المماس موازيا لمحور السينات .

(١٠) اوجد النقط على منحنى الدالة ص = $\frac{\text{ل}(س^{٢}+١)}{س-٢}$ التى يكون عندها المماس موازيا للمستقيم ٣ س- ص = ٠

(١١) أوجد النقط على منحنى الدالة ص = س^{٣} - ٣س + ٥ التى يكون عندها المماس

أولا: موازيا للمستقيم ٣س+ ص = ٥

ثانيا : عموديا على المستقيم س+ ٩ ص – ٤٨ =

(١٢) إذا كان قياس الزاوية بين المماس لمنحنى الدالة ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} - ٢ س + ٦ عند النقطة (١، ٢) الواقعة عليه والاتجاه الموجب لمحور السينات هو $\frac{٣ط}{٤}$ فاوجد كل من أ، ب .

(١٣) اوجد قيم ا، ب،جـ حتي يكون لمنحنيي الدالتين ص= ا س^{٢} + ب س، ص = جـ س^{٢} س مماس مشترك عند النقطة (-١، ٢) .

(١٤) أوجد معادلة المماس ومعادلة العمودى لكل من منحنيات الدوال الآتية عند النقطة المبينة أمام كل منها : وبالصورة المطلوبة .

أ- ص = س^{٣} + ٢ س^{٢} - ٤س - ٣ عند النقطة (١، -٤) الاتجاهية .

ب- ص = $\frac{١ + س}{١ - س}$ عند النقطة (٢، -٣) الاحداثية .

جـ- ص = $\frac{٨ أ^{٣}}{٤ أ^{٢} + س^{٣}}$ عند النقطة التي إحداثيها السينى ٢ ا الاتجاهية .

د- س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س - ٣ص + ٢ = ٠ عند النقطة (-٢ ، ١) الاحداثية .

هـ- ص = س^{٣} - ٣ س^{٢} - س -٥ عند النقطة التي احداثيها السيني ٣ الاتجاهية .

(١٥) أثبت أن العمودى علي منحنى الدالة ٣ ص = ٦س - ٥ س^{٢} عند النقطة (١ ، $\frac{١}{٣}$) يمر بنقطة الأصل .

(١٦) أوجد معادلة المماس للمنحنى ص^{٢} = ٢٠ س الذى يصنع مع المحور وس زاوية قياسها $\frac{ط}{٤}$.

(١٧) أوجد معادلتى المماسين للدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ٥٢ الموازيين للمستقيم ر = (١،١) + ك(٣، -٢) .

(١٨) أوجد معادلة المماس للمنحنى ص= س^{٤} -٣س العمودى علي المستقيم س+٢٩ص+ جـ = ٠

(١٩) أثبت أن المنحنيين ص = ٢ س^{٢} - ٣ س + ٨ ، ص = س^{٢} - ٣ س+ ٩ يتقاطعان علي التعامد عند النقطة (١ ،٧)

(٢٠) أثبت أن المنحنيين ص = س^{٢} - س + ٢ ، ص = ٣ س - س^{٢} متماسين - ثم أوجد معادلة المماس المشترك لهما عند نقطة تماسهما .

ثانياً : المعادلات الزمنية المرتبطة

في هذه الحالة يوجد عدد من المتغيرات التابعة مرتبطة معاً بواسطة متغير مستقل هو ن وذلك يكون في علاقة دالية واحدة ويطبق هذا في إيجاد معدل التغير في المساحا أو الحجوم وغيرها.

مثال: يتساقط رمل على سطح الأرض مكوناً كومة على شكل مخروط دائري قائم ارتفاعه = $\frac{٣}{٤}$ نصف قطر قاعدته وذلك بمعدل ٢٧ قدم^{٣} / دقيقة – فاوجد :

(أ) معدل الزيادة في نصف القطر في اللحظة التى يكون عندها نق = ٦ قدم .

(ب)معدل الزيادة في المساحة الجانبية .

الحـــــــل

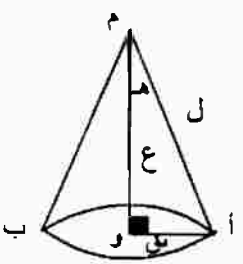
(أ) ح المخروط = $\frac{١}{٣}$ ط نق^{٢} × ع ، ∵ ع = $\frac{٣}{٤}$ نق ∴ ح = $\frac{١}{٤}$ ط نق^{٣} --- (١)

∴ $\frac{د ح}{د ن}$ = $\frac{٣}{٤}$ ط نق^{٢} . $\frac{د نق}{د ن}$

لكن نق = ٦ ، $\frac{د ح}{د ن}$ = ٢٧

∴ ٢٧ = $\frac{٣}{٤}$ ط × ٣٦ .

∴ $\frac{د نق}{د ن}$ = $\frac{١}{ط}$ قدم / ث



(ب) ∵ ع^{٢} = $\frac{٩}{١٦}$ نق^{٢} ، ل^{٢} = نق^{٢} + ع^{٢}

∴ ل^{٢} = نق^{٢} + $\frac{٩}{١٦}$ نق^{٢} = $\frac{٢٥}{١٦}$ نق^{٢} ← ل = $\frac{٥}{٤}$ نق

، ∵ م الجانبية = ط نق ل = ط × $\frac{٥}{٤}$ نق^{٢}

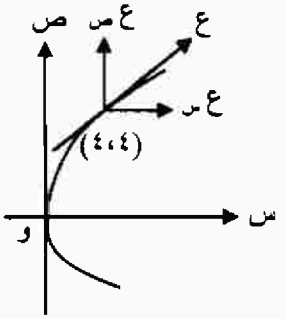
∴ $\frac{د م}{د ن}$ = $\frac{٥}{٤}$ ط × ٢ نق × $\frac{د نق}{د ن}$ = ١٥ قدم^{٢} / دقيقة

مثال: تتحرك نقطة مادية علي القطع المكافئ ص^{٢} = ٤س على الجزء الواقع في الربع الأول بسرعة ثابتة = ٥ قدم / ث ، فإذا كانت الحركة مبتدأه من نقطة الأصل.

- فأوجد ع$_{س}$، ع$_{ص}$ عند النقطة (٤،٤)

الحـــــــــل

ص^{٢} = ٤ س ∴ ٢ ص . $\frac{د ص}{د ن}$ = ٤ $\frac{د س}{د ن}$ عند (٤، ٤)



∴ ٤ ع$_{س}$ = ٢ ع$_{ص}$ ∴ ع$_{س}$ = ٣ ع$_{ص}$ ---- (١)

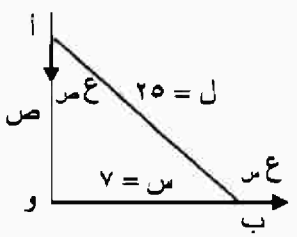
ولكن ع = ٥ = $\sqrt{ع_{س}^{٢} + ع_{ص}^{٢}}$ بالتربيع

ومن (١) ∴ ٢٥ = ٤ ع$_{ص}^{٢}$ + ع$_{ص}^{٢}$ = ٥ ع$_{ص}^{٢}$

∴ ع$_{ص}$ = $\sqrt{٥}$ ، ع$_{س}$ = ٢ $\sqrt{٥}$ وحدة سرعة

مثال : ا ب سلم طوله ٢٥ قدم يرتكز طرفه أ علي حائط رأس وطرفه ب على أرض أفقية تحرك الطرف ب مبتعداً عن الحائط بمعدل ١٢ قدم/ ث ـ فأوجد سرعة انزلاق الطرف العلوي أ عندما يكون الطرف ب يبعد ٧ قدم من الحائط .

الحـــــــــل



بفرض ع$_{س}$ = ١٢ قدم/ ث سرعة الطرف ب

، ع$_{ص}$ = ؟ سرعة انزلاق الطرف أ

أ ب^{٢} = ا و^{٢} + ب و^{٢} ∴ ل^{٢} = س^{٢} + ص^{٢} -----(١)

عند س = ٧ ∴ ص^{٢} = (٢٥)^{٢} ـ ٧ ^{٢} = (٢٥ـ ٧) (٢٥ + ٧)

∴ ص^{٢} = ١٨ × ٣٢ = ٩ × ٦٤ ∴ ص = ٢٤ قدم بتفاضل (١)

∴ صفر = ٢ س . $\frac{د س}{د ن}$ + ٢ ص . $\frac{د ص}{د ن}$

∴ ٢٤ . $\frac{د ص}{د ن}$ = ـ٧ × ١٢ ∴ $\frac{د ص}{د ن}$ = ع$_{ص}$ = - ٣ $\frac{١}{٢}$ قدم / ث

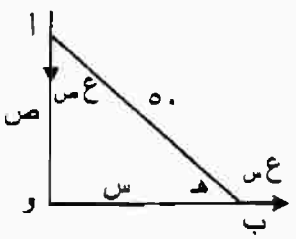
مثال: أ ب سلم طوله ٥٠ قدم يرتكز طرفه أ علي حائط رأسي وطرفه ب علي أرض أفقية فإذا تحرك الطرف ب بعيداً عن الحائط بسرعة ٣ قدم / دقيقة - فأوجد :

أ) سرعة أ عندما تكون ب علي بعد ١٤ قدم من الحائط .

ب) بعد ب عن الحائط عندما تكون | ع ا | = | ع ب | ومنه أوجد ميل السلم على الأرض.

جـ) بعد ب ن الحائط عندما تكون سرعة أ لأسفل = ٤ قدم / دقيقة .

الحـــــــــل



أ) انظر المثال السابق.

ب) س^{٢} + ص^{٢} = ٥٠^{٢} ---- (١)

∴ ٢ س. ع س + ٢ ص . ع ص = ٠ ----- (٢)

عند | ع ا | = | ع ب |

من (٢) ∴ س = - ص أي أن | س | = | ص |

∴ من (١) ∴ س^{٢} + ص^{٢} = ٥٠^{٢} ∴ س = $\sqrt{٧٢٥}$ قدم

∴ بعد ب عن الحائط = س = $\sqrt{٧٢٥}$ قدم ثانياً

جتا هـ = $\frac{\sqrt{٧٢٥}}{٥٠}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ← هـ = ٤٥°

ج) ∵ ع س = ٣ قدم/ ث ع ص = ٤ قدم / ث ∴ نعوض في (٢)

∴ س × ٣ + ص× ٤ = ٠ ∴ س = $\frac{-٣}{٤}$ ص نعوض في (١)

∴ س^{٢} + $\frac{٩ س^{٢}}{١٦}$ = ٥٠^{٢} ∴ $\frac{١٦س^{٢} + ٩ س^{٢}}{١٦}$ = ٥٠^{٢}

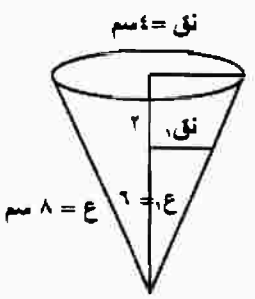
∴ س٢= ١٦ × ١٠٠

∴ س = ٤٠

∴ بعد ب عن الحائط = ٤٠ قدم

مثال: وعاء مخروطى رأسه إلى أسفل ارتفاعه = ٨ سم ، نصف قطر قاعدته = ٤ سم يتسرب سائل منه بمعدل١ سم^{٣}/ ث- أوجد معدل انخفاض سطح السائل عندما يكون على بعد ٢ سم من قاعدة الوعاء .

الحـــــــــل



من التشابه $\frac{ع_{،}}{٨} = \frac{نق_{،}}{٤}$ ∴ نق، = $\frac{١}{٢}$ ع،

∴ نق$^{٢}_{،}$ = $\frac{١}{٤}$ ع$^{٢}_{،}$

∵ ح = $\frac{١}{٣}$ ط نق$^{٢}_{،}$ ع، = $\frac{١}{٣} \times \frac{١}{٤}$ ط ع$^{٣}_{،}$

∴ $\frac{د ح}{د ن} = \frac{١}{١٢}$ ط × ٣ ع$^{٢}_{،}$ × $\frac{د ع_{،}}{د ن}$

عندما يكون ع، = ٦سم ، $\frac{د ح}{د ن}$ = ١ سم^{٣} / ث

∴ ١ = $\frac{١}{٤} \times ٣٦$ ط × $\frac{د ع}{د ن}$ ∴ $\frac{د ع_{،}}{د ن} = \frac{١}{٩ ط}$ سم / ث

مثال : يتحرك جسم أفقيا حسب المعادلة ف = $\frac{٣ ن}{ن^{٢} + ١}$ سم / ثانية من نقطة وأوجد :

أ) ع. عند ن = ٠ ب) أين ومتى يقف الجسم لحظيا .

الحـــــــــل

(أ) ∵ ف = $\frac{٣ ن}{ن^{٢} + ١}$ ---- (١)

∴ ع = $\frac{د ف}{د ن} = \frac{٣ (ن^{٢}+١) - ٣ن (٢ن)}{(ن^{٢} + ١)^{٢}}$

∴ ع = $\frac{-٣ (ن^{٢} - ١)}{(ن^{٢} + ١)^{٢}}$ ---- (٢)

عند ن = ٠ ∴ ع. = $\frac{-٣ (٠ - ١)}{(٠ + ١)^{٢}}$ = ٣ سم / ث

(ب) نضع ع = ٠ في (٢)

∴ $\frac{٣ - ٣ ن^{٢}}{(ن^{٢} + ١)^{٢}}$ = ٠ ∴ ن^{٢} = ١ ∴ ن = ± ١

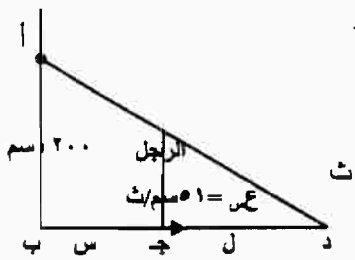
∴ عند ن = ١ث يقف الجسم لحظيا نعوض في (١)

∴ ف = $\frac{٣ \times ١}{١ + ١} = \frac{١}{٢}$ ١ سم وعلي بعد $\frac{١}{٢}$ ١ سم عن النقطة

مثال : يتحرك رجل طوله ١٨٠ سم علي سطح الأرض مبتعداً عن مصباح علي ارتفاع ١٢ متر عن سطح الأرض وذلك بسرعة = ٥١ سم/ ث عن موضع مسقط المصباح علي الأرض - أوجد معدل ازدياد طول ظل الرجل على سطح الأرض .

الحـــــــــل

بفرض أن طول ظل الرجل = ك ، س بعد الرجل عن النقطة ب .



من التشابه ∴ $\frac{ل}{١٨٠} = \frac{ل + س}{١٢٠٠}$ حيث $\frac{ل}{ل + س} = \frac{١٨٠}{١٢٠٠}$

∴ ١٧ ل = ٣ س

∴ $\frac{د ل}{د ن} = \frac{٣}{١٧} \times \frac{د س}{د ن} = \frac{٣}{١٧} \times ٥١ = ٩$ سم / ث

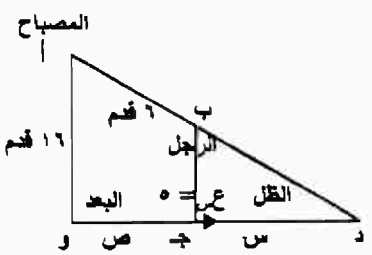
حيث $\frac{د س}{د ن} = ٥١$ سم / ث

مثال : رجل طوله ٦ أقدام يتحرك بسرعة ٥ قدم / دقيقة نحو مصباح يطو عن سطح الأرض بمقدار ١٨ قدم - أوجد : أ) معدل تناقص ظل الرجل .

ب) بعد الرجل عن الحائط عندما يكون طول ظل الرجل = ٨ قدم .

الحـــــــــل

(أ) $\frac{س}{س + ص} = \frac{٦}{١٨} = \frac{١}{٣}$ ∴ ٢ س = ص ---- (١)



٢ $\frac{د ص}{د ن} = \frac{د ص}{د ن}$ ⇐ ٢ $\frac{د س}{د ن} = ٥$

∴ معدل تناقص الظل = $\frac{٥}{٢}$ قدم / ث

(ب) من (١) عندما ص = ٨

∴ س = ٤ قدم

مثال: يتزايد نصف قطر كرة بمعدل ٠,٠٣ بوصة / ث – فأوجد معدل تزايد حجم الكرة . ثم أوجد معدل تزايد مساحة سطح الكرة عندما يكون نصف القطر = ٣ بوصات .

الحـــــــــل

$\because$ ح $= \frac{٤}{٣}$ ط نق^{٣} $\Leftarrow$ $\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = ٤$ ط نق^{٢} . $\frac{\text{د نق}}{\text{د ن}}$

$\therefore$ $\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = ٤$ ط $\times ٩ \times \frac{٣}{١٠٠}$ ١,٠٨ بوصة^{٣} / ث

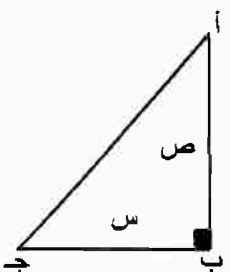
م = مساحة سطح لكرة = ٤ ط نق^{٢} $\therefore$ $\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = ٨$ ط نق . $\frac{\text{د نق}}{\text{د ن}}$

، $\because$ نق = ٣ بوصة ، $\frac{\text{د نق}}{\text{د ن}} = ٠,٠٣$ بوصة / ث

$\therefore$ $\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = ٨$ ط $\times ٣ \times \frac{٣}{١٠٠} = ٧٢$ و ط بوصة^{٢} / ث

مثال: أ ب ج مثلث قائم في ب ، فإذا كان طول أ ب = ١٦سم وينقص بمعدل = ٢ سم/ ث وطول ب جـ = ٩ سم ويزداد بمعدل٣سم/ث ـ فأوجد معدل التغير في مساحة المثلث بعد٢ ثانية.

الحـــــــــل



بعد ٢ ثانية $\therefore$ أ ب = ص = ١٦ـ ٢ × ٢ = ١٢ سم

، ب جـ = س = ٩ + ٢ × ٣ = ١٥ سم

م $= \frac{١}{٢}$ س . ص

$\therefore$ $\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \frac{١}{٢}$ [س . $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$ + ص . $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$]

$\therefore$ $\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \frac{١}{٢}$ [١٥× (ـ٢) + ١٢ × ٣] = ـ ١٥ + ١٨ = ٣ سم^{٢} / ث

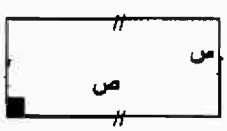
مثال: يتزايد ضلعان متقابلان من مستطيل بمعدل ٤ سم / ث ويتناقص الضلعان الآخران بحيث تبقي مساحة المستطيل ثابت = ٦٠ سم^{٢} ، المطلوب :

(أ) معدل تغير محيط المستطيل عندما يكون طول الضلع المتزايد = ٨ سم .

(ب) أوجد بعد المستطيل عندما يتوقف المحيط عن التناقص .

الحـــــــــل

أ) نفرض أن الضلع المتزايد = س



$\therefore$ $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٤$ سم / ث الضلع الآخر حيث

= ؟ = معدل تناقص الضلع الآخر

$\therefore$ المساحة = س . ص = ٦٠ $\Leftarrow$ ص = $\frac{٦٠}{٨} = ٧\frac{١}{٢}$ سم

∴ بالتفاضل الضمني ∴ س . $\frac{د ص}{د ن}$ + ص . $\frac{د س}{د ن}$ = ٠ ---- (١)

∴ ٨ × $\frac{د ص}{د ن}$ = - ٤ × $\frac{١٥}{٢}$ ∴ = - $\frac{١٥}{٢}$ سم / ث

∵ المحيط ح = ٢ (س + ص)

∴ $\frac{د ح}{د ن}$ = ٢ ($\frac{د س}{د ن}$ + $\frac{د ص}{د ن}$) = ٢ (٤ - $\frac{٣}{٤}$ ٣) ---- (٢)

= ٢ × $\frac{١}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$ سم / ث هـ . ط . ت

ب) عندما يكون التغير في المحيط = صفر ∴ $\frac{د ح}{د ن}$ = صفر ∴ من (٢)

∴ = - من (١)

∴ من (١) س = ص

لكن س× ص = ٦٠ ، ∴ س^{٢} = ص^{٢} = ٦٠

∴ س = ص = ٢ $\sqrt{١٥}$ سم وهما بعد المستطيل

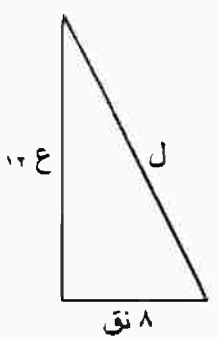
مثـال: يتساقط رمل علي أرض افقيـة بمعدل ٩٦ سم^{٣} / ق مكونـا مجسم علـى شكل مخـروط ارتفاعه = $\frac{١}{٣}$ قطر قاعدته . فأوجد :

أ- معدل التغير في ارتفاعه عندما يكون نصف قطر القاعدة = ١٢ سم

ب- معدل التغير في المساحة الجانبية للمجسم الناتج عند نق = ١٢ سم

الحـــــــــل

أ) ∵ ع = $\frac{١}{٣}$ القطر = $\frac{٢}{٣}$ نق ∴ ع = $\frac{٢}{٣}$ × ١٢ = ٨ سم



، نق = $\frac{٣}{٢}$ ع ---- (١)

∵ ح = $\frac{١}{٣}$ ط نق^{٢} ع = $\frac{١}{٣}$ ط × $\frac{٩}{٤}$ ع^{٢} × ع

∴ $\frac{د ح}{د ن}$ = $\frac{٣}{٤}$ ط × ٣ ع^{٢} × $\frac{د ع}{د ن}$

ولكن $\frac{د ح}{د ن}$ = ٩٦ سم / ق^{٣} ، ع = ٨ سم

∴ ٩٦ = $\frac{٩}{٤}$ ط ٦٤ × $\frac{د ع}{د ن}$

∴ $\frac{د ع}{د ن}$ = $\frac{٢}{٣ ط}$ سم / ق

ب) $\frac{\text{د نق}}{\text{د ن}} = \frac{٣}{٢} \cdot \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = \frac{١}{\text{ط}}$ سم / ق

م الجانبية = ط نق . ل ∴ ل^{٢} = ع^{٢} + نق^{٢}

من (١) ∴ ل^{٢} = $\frac{٤}{٩}$ نق^{٢} + نق^{٢}

∴ ل = $\frac{\sqrt{١٣}}{٣}$ نق

∴ م = $\frac{\sqrt{١٣}}{٣}$ ط نق^{٢} ∴ $\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \frac{\sqrt{١٣}\,٢}{٣}$ ط نق . $\frac{\text{د نق}}{\text{د ن}}$

، ∵ نق = ١٢ سم ، = سم / ق

∴ $\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \frac{\sqrt{١٣}\,٢}{٣}$ ط × ١٢ × $\frac{١}{\text{ط}}$ = ٨ $\sqrt{١٣}$ سم^{٢} / ق

مثال: قطعة من الشمع أسطوانية الشكل تنصهر بمعدل ١٠٨ سم^{٣} / ق محتفظة بشكلها الأسطوانى

- فأوجد ما يأتى عندما يكون الارتفاع = ٤٥ سم :

أ) معدل التغير في الارتفاع ونصف القطر .

ب) معدل التغير في المساحة الجانبية مع العلم أن الارتفاع يساوى $\frac{٣}{٤}$ نصف القطر دائما.

الحـــــــــل

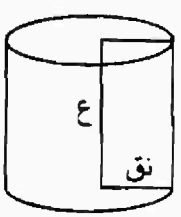
أ) ∵ ع = $\frac{٣}{٤}$ نق ∴ $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = \frac{٣}{٤} \cdot \frac{\text{د نق}}{\text{د ن}}$ ---- (١)

∴ ح = ط نق^{٢} ع = $\frac{٣}{٤}$ ط نق^{٣}

∴ $\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = \frac{٩}{٤}$ ط نق^{٢} ع . ----- (٢)

ولكن $\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}}$ = ١٠٨ سم٣/ ق ، نق = $\frac{٤ \times ع}{٣} = \frac{٤ \times ٤٥}{٣}$ = ٦٠ سم

من (٢) ١٠٨ = $\frac{٩}{٤}$ ط × ٦٠ × ٦٠ . $\frac{\text{د نق}}{\text{د ن}}$



∴ $\frac{\text{د نق}}{\text{د ن}} = \frac{١}{٧٥\,\text{ط}}$ سم / ق

∴ $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = \frac{٣}{٤} \cdot \frac{١}{٧٥\,\text{ط}} = \frac{١}{١٠٠\,\text{ط}}$ سم / ق

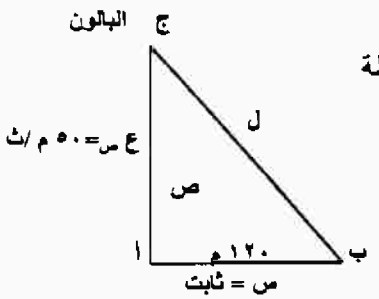
ب) ∵ م الجانبية = ٢ ط نق ع = ٢ ط نق × $\frac{٣}{٤}$ نق = $\frac{٣}{٢}$ ط نق^{٢}

$$\therefore \frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \frac{٣}{٤} \text{ ط} \times ٢ \text{ نق} . \frac{\text{د نق}}{\text{د ن}}$$

$$\therefore \frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = ٣ \text{ ط} \times ٦٠ \times \frac{١}{٧٥ \text{ ط}} = \frac{١٢}{٥} = ٢,٤ \text{ سم}^{٢} / \text{ق}$$

مثال: يقف رجل علي سطح أرض أفقية علي بعد ١٢٠ متر من نقطة أ تقع علي سطح الأرض أيضاً فإذا تحرك بالون رأسيا إلي أعلي من النقطة أ بسرعة ١٠ متر / ث ـ فاوجد معدل تباع البالون عن الرجل بعد ٥ ث من بدء الحركة .

الحـــــــــل



من الرسم نجد أن ل هو بعد البالون عن الرجل عند أي لحظة

$$\therefore \text{ل}^{٢} = \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = (١٢٠)^{٢} + \text{ص}^{٢} \quad \text{---} (١)$$

$$\therefore ٢ \text{ ل} . \frac{\text{د ل}}{\text{د ن}} = ٢ \text{ ص} . \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} \quad \text{----} (٢)$$

بعد ٥ ثانية ∴ ص = ٥٠ م

من (١) $\text{ل}^{٢} = (١٢٠)^{٢} + (٥٠)^{٢} = ١٤٤٠٠ + ٢٥٠٠ = ١٦٩٠٠$

∴ ل = ١٣٠ م

$$\therefore \frac{\text{د ل}}{\text{د ن}} = \frac{٥٠ \times ١٠}{١٣٠} = \frac{٥٠}{١٣} \text{ م / ث}$$

وهو تباعد البالون عن الرجل بعد ٥ ثانية من بدء الحركة

تمرين (٦)

(١) تتحرك نقطة علي المنحنى س^{٢} + س ص + ص = ٧ وكان معدل تغير إحداثيها السيني بالنسبة للزمن عند النقطة (-٣،١) يساوى ٠,١ - أوجد : معدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن عند نفس النقطة .

(٢) تتحرك نقطة (س ، ص) علي المنحنى ص = س^{٢} + ٤ س-٣ عين موضع النقطة عند اللحظة التى تكون فيها سرعة إحداثيها الصادى ضعف سرعة إحداثيها السينى .

(٣) تتحرك نقطة (س،ص) على الدائرة س^{٢}+ ص^{٢}+٤س- ٨ ص = ١٠٨ عين موضع النقطة عند اللحظة التى يكون فيها معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن مساويا لمعدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن .

(٤) قطعة من المعدن مستطيلة الشكل يزيد طولها عن عرضها بمقدار ٢٠ سم تنكمش بالتبريد بحيث يظل طولها يزيد عن عرضها بمقدار ٢٠ سم ، فإذا كان الطول ينكمش بمعدل ٠,٠٢٥ سم/ ث عندما يكون العرض ٨٠سم ،أحسب معدل تغير المساحة عند هذه اللحظة.

(٥) سقط حجر في ماء ساكن فتكونت موجة دائرية يتزايد نصف قطرها بمعدل ٢سم / ث - اوجد معدل الزيادة في مساحة سطح الموجة في نهاية ١٠ ثواني .

(٦) يستند سلم طوله ٦,٥ متر باحد طرفيه علي أرض أفقية و بطرفه الاخر علي حائط رأسي . فإذا إنزلق الطرف السفلي للسلم مبتعدا عن الحائط بمعدل ٣٠ سم / دقيقة عندما يكون علي بعد ٢,٥ متر من الحائط - أوجد : عندئذ معدل إنخفاض الطرف العلوي للسلم . ثم أوجد: بعد الطرف العلوي للسلم عن الارض عندما يتحرك الطرف العلوي و الطرف السفلي بنفس المعدل .

(٧) وضع مصباح كشاف علي ارتفاع ٨ أمتار فوق طريق يسير عليه رجل طوله ١,٦ متر مبتعداً عن الضوء بسرعة ٢ متر / دقيقة . أوجد :

أ) معدل إزدياد طول ظل الرجل . ب) سرعة تحرك نهاية ظل الرجل .

(٨) ونش رأسي طوله ٦ امتار يتحرك بسرعة ٥ أمتار / ثانية في إتجاه مصباح علي إرتفاع ١٦ متر، أوجد: أ) معدل تحرك نهاية ظل الونش . ب) معدل تغير طول ظل الونش.

ج) معدل تغير بعد نهاية الونش العليا عن المصباح عندما يكون الونش علي بعد ١٠ أمتار من قاعدة المصباح .

(٩) إذا كانت ح المساحة المحصورة بين دائرتين متحدتى المركز نصفا قطريهما نق١ ، نق٢ حيث نق٢ > نق١ ، فأوجد معدل تغير ح بالنسبة للزمن عند اللحظة التي عندها نق١ = ٤سم ويتزايد بمعدل ٠,٢ سم / ث ، نق٢ = ٧ سم ويتناقص بمعدل ٠,١ سم/ ث .

(١٠) في لحظة ما كان طولا ضلعى القائمة في مثلث قائم الزاوية هما ٨سم ، ٦ سم – إذا كان الضلع الأول ينقص بمعدل ١ سم / دقيقة وكان الضلع الثانى يزداد بمعدل ٢ سم/ دقيقة – فاوجد معدل التغير في مساحة المثلث بعد دقيقتين.

(١١) أ جـ ، ب جـ طريقان متعامدان ، أ جـ = ٩٠متر ، ب جـ = ٧٠ متر – يسير رجلان الأول من أ نحو جـ بسرعة منتظمة ٦ أمتار/ ث والثانى من ب نحو جـ بسرعة منتظمة ٨أمتار/ ث أثبت أن البعد ف بين الرجلين بعد مضى ن ثانية من لحظة إنطلاقهما معا يعطى بالعلاقة ف^{٢} = ١٠٠(ن^{٢} -٢٢ن + ١٣٠) ثم إستنتج معدل تغير ف بالنسبة إلي ن عندما ن = ٨ ثوانى .

(١٢) في الساعة الثامنة صباحا كانت سفينة تقع علي بعد ٦٠ كم شرق ميناء معين وتقترب منه بسرعة ١٠ كم / ساعة وفي الساعة التاسعة صباحا خرجت من الميناء سفينة أخري متجهة نحو الجنوب بسرعة ٣٠كم / ساعة – أوجد معدل تغير البعد بين السفينتين في الساعة العاشرة صباحا وهل تقترب السفينتان أم تبتعدا حينئذ ؟

(١٣) عمود إنارة طوله ١٥ متر أعلاه مصباح قذفت كرة رأسيا إلي أعلى بسرعة ٥ أمتار / ث من مسافة قدرها ١٢ متر م قاعدة العمود – وجد معدل ابتعاد ظل الكرة على الأرض من قاعدة العمود عند منتصف الثانية الأولى .

(١٤) كرة جوفاء يزداد نصف قطرها الداخلى بمعدل ١سم / ث بحيث يبقى حجم مادة الكرة ثابتا وذلك عند اللحظة التى يكون فيها نصفى قطريها ٣ ، ٩ سم - أوجد عند هذه اللحظة :

(أ) معدل تغير نصف قطرها الخارجى . (ب) معدل تغير مساحة سطحها الخارجي .

(ج) معدل تغير سمكها .

(١٥) تتمدد قطعة من المعدن علي هيئة متوازي مستطيلات طول ضلع قاعدته يزيد عن عرضه ٢ سم وارتفاعها ثلاثة أمثال عرضه بالتسخين بحيث تظل أبعادها محتفظة بهذه النسبة فإذا كان الحجم يزداد بمعدل ٠,٦سم^{٣} / دقيقة عندما يزداد العرض بمعدل ٠,١سم/ دقيقة – فأوجد أبعاد قطعة المعدن .

تمارين غير محلولة

١. إذا كان طول اسطوانة مساوياً $\frac{٧}{١٢}$ من طول نصف قطر قاعدتها فأوجد معدل تغير قطر القاعدة إذا كان معدل تغير الحجم يساوى ٤٢ط قدماً ^{٣} / ثانية عندما يكون القطر = ١٢ قدماً.

٢. يحتوى إناء رأسى على سائل حجمه ح ، يعطى بدلالة ع بعد سطح السائل عن المستوى المار بالحافة بالمعادلة ح = ٥ع^{٢} - ٥ع + ٣ ، فإذا كان بقاعدة الإناء ثقب يتسرب منه السائل بعشر وحدات مكعبة / ثانية وكان معدل زيادة ع يساوى ٢ وحدة/ ثانية – فأوجد البعد ع فى هذه اللحظة .

٣. صندوق من المعدن على شكل متوازى مستطيلات النسب بين أبعاده هى ١:٢:٣ فإذا تمدد الصندوق بالحرارة فاحسب معدل زيادة الحجم بالنسبة للزمن وكذلك معدل زيادة السطح بالنسبة للزمن فى هذه اللحظة التى يكون فيها معدل زيادة أصغر أبعاده ٠,٠٢سم/ ثانية وطول هذا البعد ١٠ سم .

٤. يتساقط رمل على الأرض مكوناً كومة على شكل مخروط دائرى قائم ارتفاعه $\frac{٣}{٤}$ نصف قطر قاعدته بمعدل ٢٧ قدماً مكعباً فى الدقيقة، فأوجد معدل الزيادة فى نصف قطر القاعدة فى اللحظة التى يكون فيها مساوياً ٦ أقدام .

٥. إذا كان الضغط ص بالأرطال على البوصة المربعة من كتلة معلومة حجمها ح بوصة مكعبة مرتبطين بالعلاقة : ص ح = ٨٠ - أوجد معدل نقص الضغط بالنسبة إلى الزيادة فى الحجم عندما يكون الحجم ٨٠ بوصة مكعبة .

٦. أ ب سلم طوله ٥٠ قدماً يرتكز بطرفه أ على حائط رأسى وبطرفه ب على أرض أفقية فإذا تحرك الطرف ب مبتعداً عن الحائط بسرعة مقدارها ٣ أقدام / دقيقة – فأوجد :

أ- سرعة أ عندما تبعد ب عن الحائط بمقدار ١٤ قدماً .

ب- بعد ب عن الحائط عندما تتساوى مقدار سرعة كل من أ ، ب .

ج- بعد ب عن الحائط عندما يتحرك الطرف أ إلى أسفل بسرعة مقدارها ٤ أقدام / دقيقة .