الفصل الرابع

العمليات المنطقية الأساسية

لا يستغني أي برنامج جيد من العمليات الأساسية الثلاثة التالية:

- رابط العطف (Conjunction): "و"   "and" ورمزه : $\wedge$
- رابط التخيير (disjunction): "أو"   "or" ورمزه : $\vee$
- رابط النفي (negation): "غير صحيح أن..." "not" ورمزه : $\neg$

وهي العمليات التي سنشرحها في هذا الفصل

رابط العطف (Conjunction): "و" "and" ورمزه : $\wedge$

يمكننا الحصول علي عبارة جديدة مركبة باستخدام عبارتين بسيطين مربوطتين برابط العطف "و" ("and"). ونرمز لهذه العبارة الجديدة كالتالي: $p \wedge q$

وتقرأ " p و q ". قيمة الصدق للعبارة $p \wedge q$ تعتمد علي قيمة الصدق للتعبيرات الجزئية لكل من p و q. تكون العبارة $p \wedge q$ صحيحة في حالة واحدة فقط وذلك عندما يكون p و q صحيحين في نفس الوقت، ويكون $p \wedge q$ خطأ في كل الحالات الأخرى. يمكن تلخيص قيم الصدق للعبارة $p \wedge q$ في جدول عادة ما نسميه جدول الصدق أو الحقائق كما هو موضح في الجدول 1.

فمثلا نفهم من الصف الأول في الجدول أنه إذا كان p صحيحاً و q صحيحاً فإن $p \wedge q$ صحيحاً، وأما في الصف الثاني من الجدول نفهم أنه إذا كان p صحيحاً و q خطأ فإن $p \wedge q$ يكون خطأ وهكذا.

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

الجدول 1

نلاحظ أن هناك أربعة صفوف تغطي الحالات الأربعة الممكنة للصحة (T) والخطأ (F) لكل من التعبيرات الجزئية ρ و q، كما نلاحظ أيضاً أن $\rho \wedge q$ يكون صحيحاً إذا وإذا فقط كان كل من ρ و q صحيحاً.

مثال: بفرض أن لدينا التعبيرات الأربعة التالية:

a) الرياض عاصمة المملكة وجدة مدينة من مدن المملكة.

b) الرياض عاصمة المملكة و $4 + 2 = 7$.

c) جدة عاصمة المملكة و ٦ يقبل القسمة علي ٢.

d) عدد أيام الأسبوع 6 و 0 عدد طبيعي.

ففي هذا المثال فقط العبارة الأولي صحيحة لأن التعبيرات الجزئية فيها صحيحة، أما باقي التعبيرات فكلها خطأ لأن علي الأقل واحد من التعبيرات الجزئية خطأ.

رابط التخيير (disjunction): "أو" "or" ورمزه : $\vee$

يمكننا الحصول علي عبارة جديدة مركبة باستخدام عبارتين بسيطتين جزئيتين مربوطتين برابط العطف "أو" (" or"). ويرمز لهذا العبارة الجديدة كالتالي: $\rho \vee q$

وتقرأ " ρ أو q ". قيمة الصدق للعبارة $\rho \vee q$ تعتمد علي قيم الصدق للتعبيرات الجزئية لكل من ρ و q. تكون العبارة $\rho \vee q$ صحيحة إذا كان أحد أو كلا من التعبيرات الجزئية ρ و q صحيحة، وتكون $\rho \vee q$ خطأ في حالة واحدة وهي عندما يكون ρ و q خطأ في نفس الوقت.

يمكن تلخيص قيم الصدق للعبارة $\rho \vee q$ في جدول الصدق أو الحقائق كما هو موضح في الجدول 2.

فمن الجدول واضح أن $\rho \vee q$ دائما صحيحة إلا في حالة واحدة وهي عندما يكون فيها ρ و q خطأ في نفس الوقت.

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

الجدول 2

مثال: بفرض لدينا التعبيرات الأربعة التالية:

a) الرياض عاصمة المملكة وجدة مدينة من مدن المملكة.

b) الرياض عاصمة المملكة و $4 + 2 = 7$.

c) جدة عاصمة المملكة و ٦ يقبل القسمة علي ٢.

d) عدد أيام الأسبوع 6 و 0 عدد طبيعي.

في هذا المثال فقط العبارة الرابعة خطأ وباقي التعبيرات كل واحد منها صحيحة إذ أن علي الأقل أحد التعبيرات الجزئية صحيحة.

تستخدم كلمة "أو" في اللغة بطريقتين مختلفتين. أحياناً تستخدم كلمة أو بمفهومها الشامل أي أن " p أو q " أو كليهما معا. بمعني آخر أن علي الأقل أحد البديلين يحدث. كما أن كلمة "أو" تستخدم بمفهومها الاستثنائي أي أن " p أو q "يعني إما p يحدث أو q يحدث وليس كليهما معا، بمعنى آخر فقط واحد من البديلين يحدث. فمثلا في الجملة "الخطوط L1 و L_2 متوازيان أو متقاطعان" تستخدم "أو" بالمعني الثاني (الاستثنائي).

سوف نستخدم الرابط "أو" بالمعني الأول في هذه الوحدة إلا إذا ذكر خلاف ذلك. إذن تعرّف $p \vee q$ علي أنها دائما تعني " p و | أو q ".

رابط النفي (negation): "غير صحيح أن..." "not" ورمزه : $\neg$

يمكن الحصول علي عبارة جديدة من عبارة ما بإدخال صيغة النفي عليها. ويتم بإضافة الكلمات "غير صحيح أن......" قبل العبارة، وباستخدام الرموز إذا كانت العبارة هي p فإن نفيها يكتب: $\neg p$.

وتقرأ نفي p. قيمة صدق $\neg p$ تعتمد علي قيمة صدق p صحيح يكون $\neg p$ خطأ وإذا كان p خطأ يكون $\neg p$ صحيح فبالتالي يكون جدول الصدق كما يلي:

p	$\neg p$
T	F
F	T

الجدول 3

مثال: بفرض أن لدينا التعبيرات التالية:

a) الباب مغلق.

b) هذا الثوب أبيض.

c) كل الطلاب أذكياء.

لنفي العبارة الأولي نقول: "غير صحيح أن الباب مغلق" أو ممكن أن نقول "الباب ليس مغلق". وفي العبارة الثانية نقول: "غير صحيح أن هذا الثوب أبيض" أو نقول "هذا الثوب ليس أبياً". وفي العبارة الثالثة نقول: "غير صحيح أن كل الطلاب أذكياء" ولكن من الخطأ أن نقول : "كل الطلاب أغبياء" لأن هذا ليس نفيا للعبارة كما عرفناه.

ليس من الضروري أن تحتوي التعبيرات المركبة علي عبارتين جزئيتين p و q فقط، وإنما يمكن الحصول علي عبارة مركبة من عدة عبارات جزئية وعدة روابط متكررة ولكن في هذا الفصل سنكتفي بإعطاء التعبيرات المركبة من ثلاثة عبارات جزئية كحد أقصي. في حالة وجود ثلاثة عبارات جزئية r، q، p .

يصبح جدول الحقائق يحتوي علي ثمانية صفوف لكي نغطي كل الحالات الممكنة كالتالي:

p	q	r
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

تعريف البوابات المنطقية والدوائر

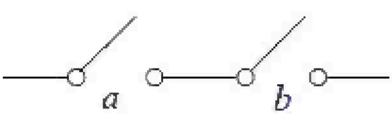
الدوائر المنطقية (كما تسمي كذلك الشبكة المنطقية) هي عبارة عن هياكل مصممة من عدد من الدوائر البدائية تسمي بوابات منطقية. كل واحدة من هذه الدوائر المنطقية يمكن النظر إليها كماكينة L تحتوي علي جهاز أو أكثر للإدخال وجهاز إخراج واحد فقط. في أي لحظة كل جهاز إدخال في L يستوعب وحدة أساسية واحدة من المعلومات 0 أو 1 ثم تعالج هذه البيانات بالدائرة لتعطي الناتج وحدة أساسية واحدة 0 أو 1 علي جهاز إخراج. وبالتالي يمكن تخصيص متتابعات من الوحدات الأساسية لكل جهاز إدخال (حيث كل المتتابعات لها نفس العدد من الوحدات الأساسية) حيث L تعالج وحدة أساسية في كل مرة لتنتج للخروج متتابعة لها نفس العدد من الوحدات. يمكن تفسير الوحدة الأساسية كدفعة فولتية خلال جهاز الإدخال أو الإخراج.

البوابات المنطقية

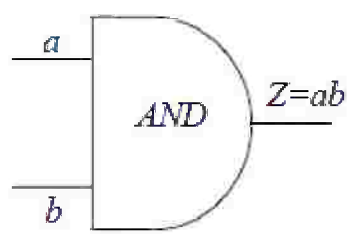
هناك ثلاثة بوابات منطقية أساسية سنذكرها فيما يلي، إضافة إلي بوابات أخري. يمكن افتراض أن البوابات تعالج المتتابعة من اليسار إلي اليمين أو من اليمين إلي اليسار وسوف نعتبر في هذا الفصل الفرضية الأولى ما لم يذكر خلاف ذلك.

البوابة AND (و)

كل إشارة خروج ناتجة من بوابة AND لها قيمة صدق صحيحة (أي 1) إذا وفقط إذا كانت إشارات الإدخال لها قيم صدق صحيحة (أي 1). مفتاحا تشغيل موصلان في تسلسل (الشكل 1a) يشكلان بوابة AND. تعطي إشارة الخروج كالتالي: z=ab. ترسل الإشارة (أي أن الخرج 1) إذا وفقط إذا وفقط إذا كان مفتاحي التشغيل A AND B مقفلين (أي أن a=1 AND b=1). الشكل b1 يمثل البوابة AND.
جدول الصدق يبين المخرج Z للبوابة AND لكل توافيق (حالات) a و b. فمثلا نلاحظ من الجدول أن Z=0 إذا a=0 و b=0. لثلاثة مداخل a,b,c يكون الخرج: z=abc



الشكل $1a$



الشكل $1b$

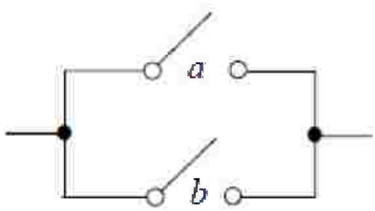
a	b	$Z = ab$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

البوابة OR "أو"

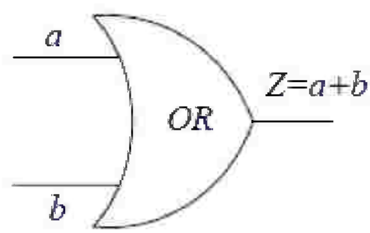
ناتج البوابة OR هو إشارة خروج صحيحة (أي 1) إذا كانت واحدة من إشارات الإدخال صحيحة (أي 1). مفتاحا تشغيل موصلان بشكل موازي (الشكل 2a) يشكلان بوابة OR. تعطي إشارة الخرج كالتالي: Z=a+b. ترسل الإشارة (أي أن Z=1) إذا كان أحد مفتاحي التشغيل مقفل (أي أن a=1 OR b=1).

الشكل 2b يمثل البوابة AND. جدول الصدق يبين المخرج Z للبوابة OR لكل توافيق (حالات) a و b.

فمثلا نلاحظ من الجدول أن Z=1 إذا كان a=0 و b=1.



الشكل 2a



الشكل 2b

a	b	$Z = ab$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

البوابة NOT (النفي)

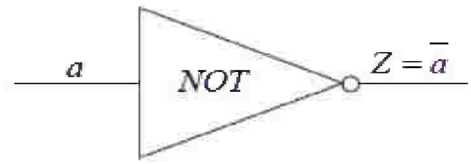
هذه البوابة تزود الشرط أنه لن تكون هناك إشارة خروج عندما يكون هناك إشارة إدخال، أي أن:

a=1 لما Z=0 و a=0 لما Z=1

وهذا يعني أن المخرج Z هو معكوس الإدخال. وهذا يكافئ المتممة في جبر بول، أي أن:

Z=a

تمثيل البوابة NOT وجدول الصدق يكون كالتالي:



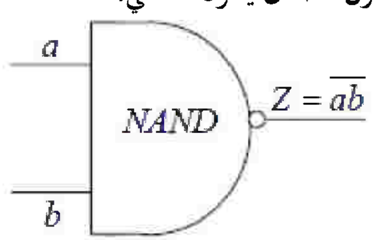
a	$Z=\overline{a}$
0	1
1	0

البوابة NAND

البوابة NAND هي البوابة NOT AND. إشارة الخروج من البوابة NAND هي معكوسة إشارة الخرج من البوابة AND . إذن المخرج من البوابة NAND هو متممة المخرج لبوابة AND ، أي أن:

$$Z=\overline{ab}$$

تمثيل البوابة NAND وجدول الصدق يكون كالتالي:



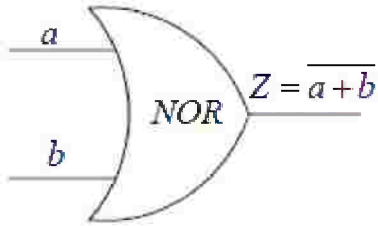
a	b	ab	$Z=\overline{ab}$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

البوابة NOR

البوابة NOR هي البوابة NOT OR. المخرج من البوابة NOR هو معكوس مخرج البوابة OR . إذن إشارة الخرج من البوابة NOR هي معكوسة إشارة مخرج البوابة OR ،

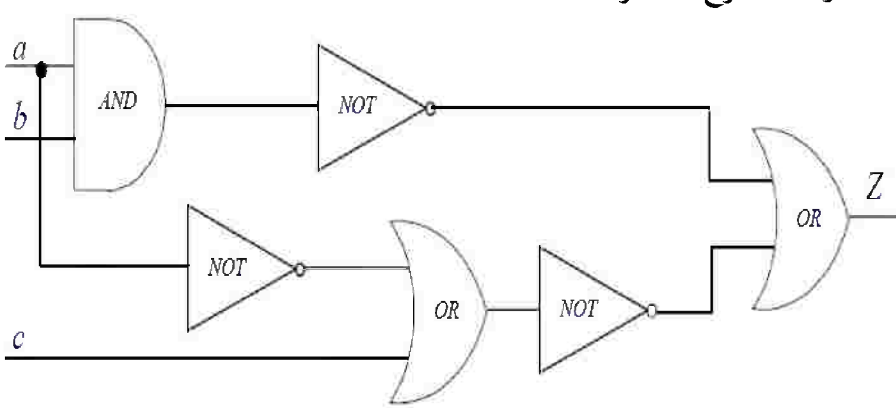
أي أن: $Z=\overline{a+b}$

تمثيل البوابة NOR وجدول الصدق يكون كالتالي:



a	b	$a+b$	$Z = \overline{a+b}$
0	0	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	0

مثال: أوجد المخرج Z لدائرة المنطقية التالية:



الحل:

المدخل علي البوابة $a\ and\ b$: AND المخرج من البوابة ab: AND

للمخرج من البوابة NOT (الأعلي) : $\overline{ab}$ للمخرج من البوابة NOT (الأسفل) : $\overline{a}$

المدخل علي البوابة $\overline{a}\ and\ c$: OR المخرج من البوابة $\overline{a}+c$: OR

المخرج من البوابة $\overline{\overline{a}+c}$: NOT المدخل علي البوابة $\overline{\overline{a}+c}\ and\ \overline{ab}$: OR

وفي النهاية يكون المخرج Z من البوابة OR: Z= ab + a +b

مثال: أوجد واختصر المخرج Z للدائرة المنطقية التالية ثم ارسم الدائرة المنطقية المطابقة لهذا المخرج.

الحل:

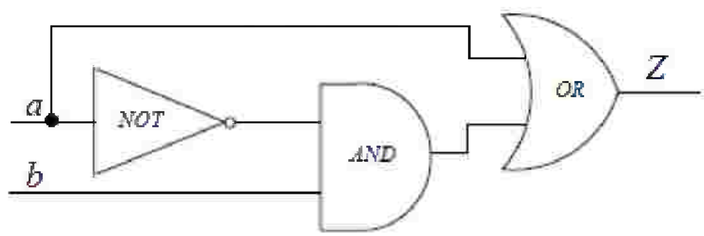
المخرج من البوابة NOT: $\overline{a}$

الدخل علي البوابة AND: $\overline{a} \ and \ b$

الخرج من البوابة AND: $\overline{a}b$

الدخل علي البوابة OR: $\overline{a}b \ \ and \ a$

إذن الخرج من البوابة الأخيرة OR يكون : $Z = a + \overline{a}b$



وكما رأينا من قبل باستخدام قوانين جبر بول:

$$Z = a + ab = (a + \overline{a})(a + b) \quad (\text{قانون } 6 \text{ و } 11)$$

$$Z = a + b \quad (\text{قانون } 11)$$

وخرج مثل هذا يمكن الحصول عليه من البوابة OR كما في الشكل: