الفصل الثاني

بعض المفاهيم الرياضية

Some Mathematical Concepts

يتناول هذا الفصل بعض المفاهيم الأساسية في الرياضيات والضرورية لدراسة الإحصاء.

(٢-١) الفئات Sets

الفئة هي مجموعة من الأشياء المعرفة تماما. على سبيل المثال الأنهار في أفريقيا، الأعداد الصحيحة الموجبة ...,1,2,3، الحروف الأبجدية من أ إلى ى كلها تمثل فئات. الأشياء التي تتكون منها الفئة تسمى عناصر **elements** أو أعضاء **members** في الفئة. عادة يمكن تمثيل الفئة بالحروف الإنجليزية الكبيرة مثل A, B, C, Y. هناك طريقتان لوصف الفئة، إذا احتوت الفئة على عدد محدود من العناصر بحيث يمكن عمل قائمة بهذه العناصر، فعلى سبيل المثال الفئة A والتي تتكون من العناصر 2,5,6,7 يمكن كتابتها على الشكل, $A = \{2,5,6,7\}$ أو الفئة B ، والتي تمثل نواتج إلقاء زهرة نرد يمكن كتابتها على الشكل $B = \{1,2,3,4,5,6\}$. يمكن وصف الفئة بجملة **statement** أو قاعدة **rule** فعلى سبيل المثال إذا كانت Y تمثل الفئة من كل الأشخاص في العالم وإذا كان y عنصر اختياري في Y ، فإنه يمكن كتابة الفئة Y على الشكل :

$$Y = \{y \mid y \text{ is a person living in the earth}\}.$$

ويعتمد وصف الفئة، سواء بقائمة أو قاعدة على نوع المشكلة موضع الدراسة. على سبيل المثال يكون من الصعوبة وضع قائمة بعناصر الفئة من الأزهار الحمراء في العالم. ومن ناحية أخرى لا توجد قاعدة بسيطة لوصف الفئة :

$$D = \{\text{family, book, flower}\}.$$

باستخدام صيغ الفئة فإن الرمز $\in$ يعني " أنه عضو في " أو " ينتمي إلى " والرمز $\notin$ يعني " ليس عضو في " أو " لا ينتمي إلى " . إذا كان x عنصر في الفئة A و y ليس عنصر في A فإن $x \in A, y \notin A$.

مثال (٢-١) ليكن $A = \{2,4,6,8\},\ B = \{x | x \text{ is an integer divisible by } 7\}$

فإن $8 \in A\ ,\ 3 \notin A\ ,\ 49 \in B$

تعريف : تتساوى فئتين إذا احتوت الاثنتان بالضبط على نفس العناصر .

إذا كانت الفئة A تساوى أو تماثل الفئة B ، فإن كل عنصر ينتمي إلى A ينتمي إلى B، وكل عنصر ينتمي إلى B ينتمي إلى A . وسوف نرمز لهذا التساوي بكتابة $A = B$. في بعض الأحيان، إذا كانت إحدى الفئتين A أو B تحتوى على عنصر واحد على الأقل لا ينتمي إلى الاثنين، فإننا نقول أن الفئتين غير متساويتين، وفي هذه الحالة نكتب $A \neq B$.

مثال (٢-٢) لتكن $A = \{1,4,5\}, B = \{4,6,9\}, C = \{1,5,4\}$ فإن :-

$$A = C \ , B \neq C.$$

ويجب أن نتذكر أن الفئات لا تتغير عندما نغير ترتيب العناصر ٠

تعريف : الفئة الخالية **empty** أو فئة العدم **null set** هى الفئة التي لا تحتوى على أى عناصر ويرمز لها بالرمز ϕ ٠

إذا كانت :

$$A = \{x | x \text{ is a letter before A in the alphabet}\}$$

و

$$B = \{x | x^2 = 4, x \text{ is an odd number}\}$$

فإن B و A فئتان خاليتان ٠

لتكن الفئة $A = \{1,4\} , B = \{1,4,7,8,9\}$ ٠يلاحظ أن كل عنصر في الفئة A هو أيضا عنصر في الفئة B ٠ الفئة A تسمى فئة جزئية **subset** من B وتكتب $A \subset B$ ٠

تعريف : إذا كان كل عنصر في الفئة A هو عنصر في الفئة B فإن A تسمى فئة جزئية من B ٠

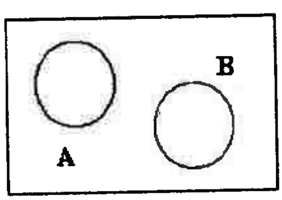
بناء على ذلك، فإن أى فئة تعتبر فئة جزئية من نفسها ٠

في كثير من المناقشات كل الفئات تعتبر فئات جزئية من فئة واحدة خاصة، هذه الفئة تسمى الفئة الشاملة ويرمز لها بالرمز U ٠

مثال (٢-٣) كل الفئات الجزئية من الفئة الشاملة $U = \{4,5,6\}$ هي :- $\{4\},\{5\},\{6\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,6\},\{4,5,6\},\{\phi\}$ أى أن عدد الفئات الجزئية من الفئة الشاملة التي عدد عناصرها n هو 2^n من الفئات الجزئية ٠

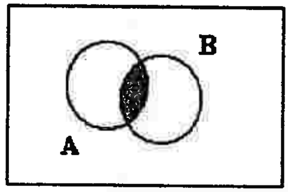
(٢-٢) عمليات الفئات **Sets Operations**

سوف نستعرض بعض العمليات على الفئات والتي تنتج فئات جديدة ٠ هذه الفئات الجديدة تعتبر فئات جزئية من الفئة الشاملة ٠ العلاقة بين الفئات الجزئية والفئة الشاملة يمكن توضيحها بما يسمى شكل فن **Venn diagram** ٠ تمثل الفئة الشاملة بمستطيل و الفئات الجزئية بدوائر داخل المستطيل كما في شكل (٢-١)٠



شكل (٢-١)

سوف نرمز لتقاطع الفتتين A , B بالرمز $A \cap B$ • العناصر في $A \cap B$ لابد أن ينتمـــي إلى كل من B , A • يوضح الشكل (٢-٢) الفئة $A \cap B$ بالجزء المظلل.



شكل (٢-٢)

مثال (٢-٤) إذا كان $A = \{1,7,8,9,10\}, B = \{2,8,9,10,11\}$

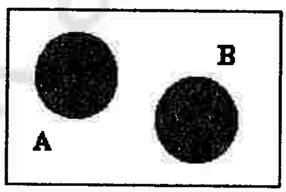
فإن $A \cap B = \{8,9,10\}$

مثال (٢-٥) إذا كان :-

$$A = \{x|x \text{ is an integer and } 1 \le x \le 6\},$$
$$B = \{y|y \text{ is an integer greater than } 4\}$$

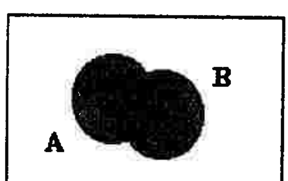
فإن $B = \{5,6,7,8,...\}, A \cap B = \{5,6\}$

تعريف : إذا كان $A \cap B = \phi$، يقال للفتتين B , A أنهمــــا منفصلتـــان **disjoint**، أى لا يوجد أي عناصر مشتركة بينهما كما في شكل (٢-٣) •



شكل (٢-٣)

تعريف : الاتحاد بين فتتين B , A هو الفئة من العناصر التي تنتمي إلى A أو B أو كلاهما • سوف نرمز للاتحاد بين A و B بالرمز $A \cup B$ • يوضح الشـــكل (٢-٤) الفئـــة $A \cup B$ بالجزء المظلل.

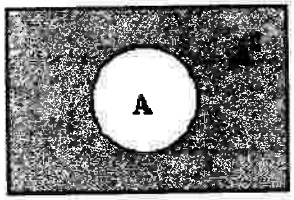


شكل (٢-٤)

مثال (٢-٦) إذا كان :-

$A \cup B = \{1,5,7,8,9,10,12\}$ فإن $A = \{1,5,7,8\}$, $B = \{8,9,10,12\}$

إذا كانت A فئة جزئية من الفئة الشاملة U ، فإن مكمل الفئة A هو الفئة من العناصر في U والغير موجودة في A . سوف نرمز لمكمل الفئة A بالرمز A^c . ويوضح شكل (٢-٥) الفئة المكملة بالجزء المظلل .



شكل (٢-٥)

مثال (٢-٧) بفرض أن :-

$A^c = \{8,9,10,12\}$ فإن $U = \{1,5,7,8,9,10,12\}$, $A = \{1,5,7\}$

هناك عدة نتائج من التعاريف السابقة مثل :-

$$A \cap \phi = \phi$$
$$A \cup \phi = A$$
$$A \cap A^c = \phi$$
$$A \cup A^c = U$$
$$U^c = \phi$$
$$\phi^c = U$$
$$(A^c)^c = A$$

(٢-٣) صيغ الجمع **Summation Notation**

سوف نحتاج في التحليل الإحصائي للبيانات إلى جمع مجموعة من الأعداد . إذا كانت x_i تمثل أي قيمة من القيم التالية التي عددها n : $x_1, x_2, \ldots, x_n$ والتابعة للمتغير X . الحرف i في x_i ، الذي يأخذ أي من الأرقام $1,2,\ldots,n$ ، يسمى الدليل **subscript** أو **index** . من الواضح أنه يمكن استخدام أى حرف غير i مثل s, p, q, j, k . الصيغة

$\sum_{i=1}^{n} x_i$ تستخدم لتمثيل جمع كل قيم x_i من $i = 1$ إلى $i = n$ • الرمز $\sum$ يسمى سيجما • وعلى ذلك فإن :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

للتبسيط عادة يكتب المجموع بأشكال كثيرة مثل $\sum x$ أو $\sum x_i$ أو $\sum_i x_i$ • إذا كـان :-

$x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$, $x_4 = 1$, $x_5 = 2$ فإن :-

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = (2)^2 + (3)^2 + (5)^2 + (1)^2 + (2)^2 = 43.$$

مثال (٢-٨) إذا كان $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 6$, $x_4 = 3$, $x_5 = 4$ أوجد :-

(ا) $\sum_{i=2}^{5} (x_i - 1)$ (ب) $\sum_{i=3}^{5} 4x_i$

الحل •

(ا)
$$\sum_{i=2}^{5} (x_i - 1) = (5-1) + (6-1) + (3-1) + (4-1)$$
$$= 4 + 5 + 2 + 3 = 14.$$

(ب)
$$\sum_{i=3}^{5} 4x_i = (4)(6) + (4)(3) + (4)(4) = 52.$$

مثال (٢-٩) إذا كان $x_1 = 5$, $x_2 = 4$, $x_3 = 3$, $x_4 = 1$ أوجد :-

(ا) $\sum_{i=1}^{4} (x_i - c)$ (ب) $\sum_{i=1}^{3} (c - i + 2)$ (جـ) $\sum_{i=1}^{3} x_i - 1$ حيث c عدد حقيقي •

الحل •

(ا)

$$\sum_{i=1}^{4} (x_i - c) = (x_1 - c) + (x_2 - c) + (x_3 - c) + (x_4 - c)$$
$$= (5 - c) + (4 - c) + (3 - c) + (1 - c) = 13 - 4c.$$

(ب)

$$\sum_{i=1}^{3} (c - i + 2) = (c - 1 + 2) + (c - 2 + 2) + (c - 3 + 2)$$
$$= 3c.$$

(جـ)

$$\sum_{i=1}^{3} x_i - 1 = (5+4+3) - 1 = 11.$$

(٢-٤) بعض النظريات المفيدة للجمع Useful Theorems Relating to Sums

نظرية (٢-١) إذا كان c عدد حقيقي فإن :-

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc.$$

البرهان :-

$$\sum_{i=1}^{n} c = c + c + \ldots + c.$$

حيث أن c تتكرر n من المرات فإن :-

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc.$$

مثال (٢-١٠)

$$\sum_{i=1}^{5} 4c = 5(4c) = 20c.$$

مثال (٢-١١)

$$\sum_{i=1}^{4} (5c-3) = 4(5c-3).$$

نظرية (٢-٢) إذا كان c عدد حقيقي فإن :-

$$\sum_{i=1}^{n} cx_i = c\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

البرهان :-

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} cx_i &= cx_1 + cx_2 + \ldots + cx_n \\ &= c(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \\ &= c\sum_{i=1}^{n} x_i.\end{aligned}$$

مثال (٢- ١٢) للبيانات في مثال (٢-٩) :-

$$\sum_{i=2}^{4} 7x_i = 7(4+3+1) = 56.$$

نظرية (٢-٣)

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i + z_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} z_i.$$

البرهان :-

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i + z_i) = x_1 + y_1 + z_1 + x_2 + y_2 + z_2 + x_3 + y_3 + z_3$$

$$+ \ldots + x_n + y_n + z_n$$

وبإعادة التجميع :-

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i + z_i) = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$$

$$+ (z_1 + z_2 + \ldots + z_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} z_i.$$

مثال (٢-١٣) للبيانات في مثال (٢-٩) :-

$$\sum_{i=1}^{4}(x_i^2 + cx_i + 6) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 + \sum_{i=1}^{4} cx_i + \sum_{i=1}^{4} 6$$

$$= \sum_{i=1}^{4} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{4} x_i + 4(6)$$

$$= (5)^2 + (4)^2 + (3)^2 + (1)^2 + c(5+4+3+1) + 24$$

$$= 51 + 13c + 24 = 75 + 13c.$$

مثال (٢-١٤)

$$\sum_{i=1}^{3}(c^2 + 7i) = \sum_{i=1}^{3} c^2 + \sum_{i=1}^{3} 7i$$

$$= 3c^2 + 7\sum_{i=1}^{3} i$$

$$= 3c^2 + 7(1+2+3)$$

$$= 3c^2 + 42.$$

(٢–٥) الدالة Function

تعريف : بفرض أن X , Y فئتان غير خاليتين القاعدة التي تعين لكل عنصر $x \in X$ عنصر وحيد $y \in Y$ تسمى دالة من X إلى Y •

العنصر الوحيد y المعين بدالة ما والمناظر لعنصر محدد x يقال له قيمة الدالة عند x ويرمز للدالة بالرمز h, p, y, f ••• الخ•

مثال (٢–١٥) إذا كانت X , Y فئتين من الأعداد حقيقية وكان $y = x + 3$ فإن y دالة في x • عندما $x = 1$ فإن $y = 4$ وعندما $x = -3$ فإن $y = 0$ وهكذا•

بفرض أن f دالة ما معطاة فإن الفئة X التي تعين الدالة f لكل عنصر من عناصرها عنصرا وحيدا $y \in Y$ يقال لها مجال domain الدالة • الفئة التي عناصرها العناصر المناظرة $y \in Y$ المعينة بالدالة f يقال لها مدى range الدالة f •

إذا كانت الدالة f تعين قيمة y في مداها لعنصر x في مجالها فإننا نكتب $y = f(x)$ وتسمى y قيمة f عند x • بفرض أن $y = 5x + 3$ وباستخدام صيغة الدالة فإننا يمكن أن نكتب $f(x) = 5x + 3$ وعلى ذلك $f(6) = 5(6) + 3 = 33$ •

مثال (٢–١٦) إذا كانت $g(x) = x^2$ المطلوب إيجاد (ا) $g(2)$ (ب) المجال والمدى للدالة $g(x)$ •

الحل•

(ا) $g(2) = 2^2 = 4$ (ب) المجال للدالة $g(x)$ هو جميع الأعداد الحقيقية والمدى جميع الأعداد الحقيقية الغير سالبة•

مثال (٢–١٧) إذا كانت $p(x) = \frac{1}{x^2}$ المطلوب إيجاد (ا) $p(3)$ (ب) المجال والمدى للدالة $p(x)$ •

الحل• (ا) $p(3) = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ (ب) المجال للدالة $p(x)$ هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا $x = 0$ والمدى جميع الأعداد الحقيقية الغير سالبة ما عدا $y = 0$ •

تمارين

– ١ – أكتب عناصر الفئات التالية :–

(ا) الفئة من الأعداد الصحيحة بين 9 , 13 •

(ب) الفئة من الأعداد الصحيحة أقل من 9•

(جـ) الفئة من الأعداد الصحيحة بين 1 و 20 القابلة للقسمة على 3.

– ٢ – أكتب عناصر كل من الفئات التالية :–

(ا) الفئة $A = \{x | x^2 + x - 6 = 0\}$

(ب) فئة نواتج إلقاء زهرة نرد وعملة في نفس الوقت.

(جـ) الفئة $B = \{x | 2x - 4 = 0 \text{ and } x > 5\}$

– ٣ – بفرض أن $A = \{x | 3x = 6\}$ هل الجملة $A = 2$ صحيحة ؟

– ٤ – لتكن $E = \{3 , 5 , 6 , 8 , 9\}$ أى من الجمل التالية صحيح وأى خطأ ؟

(ا) $5 \in E$ (ب) $7 \in E$ (جـ) $9 \notin E$ (د) $\phi \subset E$

– ٥ – أي الفئات التالية تتساوى ؟

$$\{t,s,r\}, \{r,s,t\}, \{t,r,s\}, \{s,r,t\}.$$

– ٦ – أكتب عناصر كل من الفئات التالية :

(ا) الفئة $A = \{x | x \text{ is an integer and } 9 \le x \le 13\}$

(ب) الفئة $C = \{x | x + 2 = 0\}$

(جـ) الفئة $D = \{y | y^2 + 3y = 28\}$

– ٧ – لتكن $U = \{x, y, 6, z\}$ أكتب كل الفئات الجزئية من U.

– ٨ – أكتب كل الفئات الجزئية من $U = \{\text{man , woman, baby, home}\}$

– ٩ – لتكن $U = \{1,2,...,9\}, A = \{1,2,3,4\}, B = \{2,4,6,8\}, C = \{3,4,5,6\}$

أوجد :– (ا) A^c (ب) $A \cap B$ (جـ) $(A \cap C)^c$ (د) $A \cup B$

– ١٠ – لتكن $U = \{10,11,12,13,14,15\}, A = \{10,11,12,13\}, B = \{12,13,14\}$

أوجد :– (ا) $A \cup B$ (ب) $A \cap B$ (جـ) A^c

– ١١ – إذا كانت :–

$$A = \{x | x \text{ is an integer and } x > 17\},$$
$$B = \{x | x \text{ is an integer and } 12 < x < 20\}$$

أوجد $A \cap B$

–١٢ – إذا كانت :–

$$A = \{x | x^2 - 7x = 8\},$$
$$B = \{x | 2x - 16 = 0\}$$

أوجد $A \cap B$

– ١٣ – إذا كانت :–

$X = \{x | x^2 + x - 12 = 0\},$
$Y = \{y | y^2 = 4\}$

أوجد $X \cap Y \ , \ X \cup Y$

- ١٤ - إذا كانت :

$A = \{x | x^2 + x - 12 = 0\},$
$B = \{x | 2x - 6 = 0\}$

أوجد $A \cap B$

- ١٥ - إذا كانت :-

$x_1 = 2 \ , \ x_2 = 5 \ , \ x_3 = 6 \ , \ x_4 = 3 \ , \ x_5 = 4, x_6 = 9, x_7 = 11$ أوجد :-

(ا) $\sum_{i=1}^{7}(5x_i + 3)$ (ب) $\sum_{i=1}^{5}(x_i + c) + 2$ (جـ) $\sum_{i=1}^{4}(x_i + c)^2$

- ١٦ - إذا كانت :-

$x_1 = 8 \ , \ x_2 = 9 \ , \ x_3 = 6 \ , \ x_4 = 3 \ , \ x_5 = 4 \ , \ x_6 = 7$ أوجد :-

(ا) $\sum_{i=1}^{6}(x_i^2 + x_i + 3)$ (ب) $\sum_{i=1}^{6}(x_i + x_i c^2)^3$ (جـ) $\sum_{i=1}^{6}(x_i^3 + 3i)$

- ١٧ - إذا كانت :- $x_1 = 7 \ , \ x_2 = 5 \ , \ x_3 = 2 \ , \ x_4 = 10 \ , \ x_5 = 8$ أوجد :-

(ا) $\sum_{i=1}^{5}(x_i^2 + 6x_i)$ (ب) $\sum_{i=1}^{5}(x_i + x_i^2 c)^2$ (جـ) $\sum_{i=1}^{5}(x_i + i)^2$

- ١٨ - إذا كانت :- $f(x) = 3x^2 + 4x + 2$ أوجد :-

(ا) $f(0)$ (ب) $f(-0.5)$ (جـ) $f(3)$

- ١٩ - يعطى حجم مستعمرة حشرية عند لحظة زمنية t (الزمن قيس بالأيام) بالعلاقة :-

$$f(t) = 5000 - \frac{1000}{1 + t^2}$$

أوجد :- (ا) $f(0)$ (ب) $f(2)$ (جـ) $f(5)$

- ٢٠ - يعطى حجم مزرعة بكتريا عند لحظة زمنية t (الزمن قيس بالساعات) بالعلاقة :-

$$f(t) = 2000 + 1000t - 1000t^2$$

أوجد :- (ا) $f(0)$ (ب) $f(2)$ (جـ) $f(5)$