الفصل الثالث

مقدمة في الاحتمال

Introduction to Probability

obeikandl.com

(٣-١) فراغ العينة والأحداث **Sample Space and events**

تُجرى الأبحاث في مجالات كثيرة، ففي مجال الطب قد يهتم باحث بدراسة تأثير دواء معين على الشفاء من مرضٍ ما، وفي مجال الاقتصاد قد يهتم باحث بدراسة أسعار ثلاث سلع مختلفة في فترات زمنية مختلفة، وفي مجال الزراعة قد يهتم باحث بدراسة تأثير سماد كيمائي على كمية المحصول. الطريق الوحيد للباحث للحصول على معلومات عن الظاهرة موضع الدراسة هو إجراء تجربة **experiment** وهى أى إجراء نحصل به على بيان (مشاهدة) سواء في الطبيعة أو في المعمل وهذا البيان قد يكون رقمي أو وصفي. كل مثال من الأمثلة التالية يمثل تجربة :

(ا) تسجيل درجة طالب.

(ب) قياس كمية المطر في يوم ما.

(جـ) فحص مصباح كهربائي وتسجيل عمره.

(د) ملاحظة وحدة منتجة وتدوين حالتها : سليمة أو تالفة.

(هـ) إلقاء عملة وملاحظة الوجه الذي يظهر.

نجد في معظم الحالات أن نتيجة التجربة تعتمد على عوامل الصدفة (عوامل خارجة عن إرادة الباحث أى في علم الله) ولايمكن التنبؤ بها بشيء من التأكيد، ولكن يمكن وصف فئة كل النتائج الممكنة لها قبل إجرائها.

تعريف : الفئة التي عناصرها تمثل جميع النواتج الممكنة لتجربة تسمى فراغ العينة.

مثال (٣-١) عند إلقاء زهرة نرد فإن فراغ العينة هو:-

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}.$$

تعريف : يسمى أى عنصر في فراغ العينة نقطة عينة **sample point** .

مثال (٣-٢) عند إلقاء عملة ثلاث مرات فإن فراغ العينة هو :-

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TTT\}$$

حيث H ترمز إلى ظهور صورة **head** و T ترمز إلى ظهور كتابة **tail**. فراغ العينة في هذه التجربة يتكون من 8 نقاط عينة.

تعريف : الحادثة **event** هي أى فئة جزئية من فراغ العينة.

في المثال (٣-٢) تمثل $A = \{HHH\}$ حادثة "ظهور ثلاث صور" ، أيضا $B = \{HHH, HHT, HTH, THH\}$ تمثل حادثة "ظهور صورتين على الأقل" وتعتبر A , B فئتان جزئيتان من فراغ العينة.

تعريف : إذا كانت الفئة الجزئية تحتوى على عنصر واحد فقط تسمى حادثة بسيطة **simple event** ، أما الحادثة المركبة **compound event** فهى التي تنتج من اتحاد أحداث بسيطة.

مثال (٣-٣) عند إلقاء عملتين مرة واحدة فإن فراغ العينة هو $S = \{HH, HT, TH, TT\}$. تمثل الحادثة $A = \{HH\}$ " ظهور صورتين " حادثة بسيطة بينما تمثل الحادثة $B = \{HH, HT, TH\}$ " ظهور صورة واحدة على الأقل" حادثة مركبة.

نقول أن الحادثة وقعت إذا ظهر أحد عناصرها عند إجراء التجربة. تمثل الفئة الخالية ϕ الحادثة المستحيلة الحدوث كما يمثل فراغ العينة S الحادثة المؤكدة الحدوث.

تعريف : يقال أن A , B حادثتان مانعتان (متنافيتان) **exclusive events** إذا كان وقوع إحداهما يمنع وقوع الآخر وفي هذه الحالة فإن $A \cap B = \phi$.

فمثلا عند إلقاء عملة مرة واحدة فإن ظهور الصورة يمنع ظهور الكتابة وبالتالى فإن الحادثة التي تمثل ظهور الصورة والحادثة التي تمثل ظهور الكتابة حادثتان مانعتان.

مثال (٣-٤) عند إلقاء زهرة نرد مرة واحدة، بفرض أن الحادثة $A = \{2,4,6\}$ ظهور رقم زوجي والحادثة $B = \{1,3,5\}$ ظهور رقم فردى فإن $A \cap B = \phi$. وعلى ذلك فإن A و B حادثتان مانعتان.

(٣-٢) طرق العد **Counting Methods**

يعتبر عنصر الصدفة المرتبط بظهور بعض الأحداث من المشاكل التي يقابلها الإحصائي ويحاول تقديرها عند إجراء التجربة ، تنتمي هذه المشاكل إلى فرع الاحتمال والذي سوف نتناوله في البند التالي. في كثيرٍ من الحالات نكون قادرين عل حل مشكلة الاحتمال عن طريق عد النواتج التي تنتمي إلى الحادثة محل السؤال وأيضا العدد الكلى لنواتج التجربة ، ولكن لبعض التجارب قد يكون عدد النواتج كبير جدا، وبالتالي قد يكون عمل قائمة تضمهم جميعا مهمة طويلة وصعبة. القاعدة الأساسية للعد في النظرية الآتية.

نظرية (٣-١) إذا أمكن إجراء عملية ما بطرق عددها n_1 وإذا أمكن إجراء عملية ثانية بطرق عددها n_2 و ... وإذا أمكن إجراء عملية k بطرق عددها n_k ، فإنه يمكن إجراء هذه العمليات معا بطرق عددها $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

مثال (٣-٥) توجد ثلاث طرق بين A , B وتوجد أربع طرق بين B , C بكم طريقة يمكن لسائق أن يصل من A إلى C .

الحل . عدد الطرق الممكنة للوصول من A إلى B هو $n_1 = 3$ وعدد الطرق الممكنة للوصول من B إلى C هو $n_2 = 4$ وعلى ذلك عدد الطرق الممكنة للوصول من A إلى C هو:-

$$n_1 \cdot n_2 = 3 \cdot 4 = 12.$$

مثال (٣-٦) يقدم مطعم 5 أصناف من اللحم و 3 أصناف من الحساء و 3 أصناف من السلطة و 4 أصناف من العصير. كم عدد الوجبات المختلفة التي يمكن تقديمها إذا علم أن الوجبة الواحدة تتكون من لحم وحساء وسلطة وعصير ؟

الحل . عدد الوجبات المختلفة التي يمكن تقديمها هي :-

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 = 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 = 180.$$

عادة يكون الاهتمام بفراغ العينة الذي عناصره كل الترتيبات الممكنة لمجموعة من الأشياء. على سبيل المثال، قد نهتم بمعرفة عدد الترتيبات الممكنة لجلوس ستة أشخاص على مائدة مستديرة. الترتيبات المختلفة تسمى تباديل **Permutations** .

تعريف : التبديل هي ترتيب لكل أو جزء من فئة من الأشياء.

مثال (٣-٧) التباديل الممكنة لفئة الحروف a , b , c تكون :

abc acb bac bca cab cba

أي يوجد ستة من التباديل الممكنة. باستخدام نظرية (٣-١) يمكن الوصول إلى نفس النتيجة بدون الحصول على قائمة بالترتيبات المختلفة. لدينا ثلاثة أماكن يمكن شغلها (ملئها) بالحروف a , b , c. سوف يكون لدينا ثلاثة اختيارات للمكان الأول، ولكن حيث أنه لا يمكن إحلال العنصر الأول فإنه يوجد اختيارين للمكان الثاني ويتبقى اختيار واحد للمكان الأخير حال إتمام اختيار الحرفين الأولين. وعليه فإن عدد التباديل هو $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 = 3!$. عموما فإن n من الأشياء المميزة يمكن ترتيبها بطرق عددها $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ وسوف نرمز لهذا الناتج بالرمز $n!$ الذي يسمى مضروب n (**factorial n**) . وعلى ذلك ثلاثة عناصر مختلفة يمكن ترتيبها بطرق عددها $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 = 3!$. ويجب أن نعرف أن $1! = 1$ ، $0! = 1$.

نظرية (٣-٢) عدد تباديل n من الأشياء المميزة مأخوذة جميعا في نفس الوقت هو $n!$.

في بعض الأحيان قد يكون الاهتمام بعدد التباديل لأشياء مميزة عددها **n** مأخوذة **r** في كل مرة. فعلى سبيل المثال عدد تباديل الحروف a, b, c مأخوذة اثنين في كل مرة هو :

ab ba ac ca bc cb .

باستخدام نظرية (٣-١) مرة أخرى يكون لدينا مكانين يمكن شغلهما بثلاثة اختيارات للمكان الأول واختيارين للمكان الثاني. وعلى ذلك يكون عدد الطرق لشغل المكانين

هو $3\cdot 2 = 6$ • سوف نرمز لعدد التباديل لأشياء عددها r من بين أشياء عددها n بالرمز $P(n\ ,r)$.

نظرية (٣-٣) عدد تباديل n من الأشياء المميزة مأخوذة r في كل مرة هو :-

$$P(n,r) = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

يراد أحيانا معرفة عدد تباديل مجموعة من الأشياء يكون بعضها متماثلا وتنتج الصيغة العامة لهذا العدد من النظرية التالية.

نظرية (٣-٤) عدد التباديل المختلفة لأشياء عددها n حيث n_1 من نوع و n_2 من نوع ثاني و...و n_k من النوع رقم k هو:-

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}.$$

مثال (٣-٨) كم عدد التباديل المختلفة التي يمكن تكوينها من جميع حروف كل كلمة من الكلمات التالية على حدة ؟

(ا) منعم (ب) محمود

الحل . (ا) $\frac{4!}{2!1!1!} = \frac{4!}{2!} = 12$

لأنه يوجد 4 حروف أثنين منهم هو الحرف م .

(ب) $\frac{5!}{2!1!1!1!} = \frac{5!}{2!} = 60$

لأنه يوجد 5 حروف اثنين منها هو الحرف م.

مثال (٣-٩) كم عدد الطرق التي يمكن بها ترتيب 11 كتاباً على رف إذا كان 5 كتب منهم في التاريخ و 3 في الإحصاء و 3 في الرياضيات ؟

الحل . عدد الطرق هو :-

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!} = \frac{11!}{5!3!3!} = 9240.$$

عادةً يكون اهتمامنا بعدد الطرق لتجزئة فئة من الأشياء التي عددها n إلى فئات جزئية عددها r تسمى الخلايا cells . يتحقق التجزئة إذا كان التقاطع لأى زوج من الفئات الجزئية التي عددها r هو الفئة الخالية ϕ والاتحاد بين كل الفئات الجزئية يعطى الفئة الأصلية والترتيب للعناصر داخل الخلية ليس له أهمية. لتكن الفئة $\{a, b, c, d\}$ ، التجزيئات الممكنة لهذه الفئة إلى خليتين بحيث تحتوى الخلية الأولى على ثلاثة عناصر والخلية الثانية تحتوى على عنصر واحد هي :

$$\{(a,b,c),d\},\{(a,b,d),c)\},\{(b,c,d),a\},\{a,c,d),b\}.$$

أى أن هناك 4 طرق لتجزئة الفئة المكونة من 4 عناصر إلى خليتين تحتوى على 3 عناصر في الخلية الأولى وعنصر واحد في الخلية الثانية. عدد التقسيمات للمثال السابق يمكن كتابتها على الشكل

$$\frac{4!}{3!1!}=4.$$

نظرية (٣-٥) عدد الطرق لتجزئة فئة من n من الأشياء إلى r من الخلايا بعناصر عددها n_1 في الخلية الأولى و n_2 من العناصر في الخلية الثانية و ... و n_r من العناصر في الخلية رقم r يكون :-

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}.$$

حيث :-

$$n_1+n_2+\ldots+n_r=n$$

مثال (٣-١٠) بكم طريقة يمكن توزيع 10 كتب على 3 تلاميذ بحيث يتلقى التلميذ المتفوق 4 كتب وكل تلميذ آخر 3 كتب ؟

الحل . في هذا المثال يراد معرفة عدد التجزيئات لـ 10 كتب على ثلاث خلايا تحتوى على 4,3,3 من الكتب على التوالي . من النظرية السابقة عدد التجزيئات هو :-

$$\frac{10!}{4!3!3!}=4200.$$

مثال (٣-١١) بكم طريقة يمكن توزيع 9 أشخاص على 3 غرف في فندق حيث أن غرفتين من ذات سريرين وغرفة ذات 5 أسرة .

الحل . عدد الطرق هو :-

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}=\frac{9!}{2!2!5!}=756.$$

في كثير من المشاكل يكون اهتمامنا بعدد الطرق لاختيار أشياء عددها r من بين أشياء مميزة عددها n ودون اعتبار لطريقة الترتيب. هذه الاختيارات تسمى التوافيق combinations . في الحقيقة التوفيقة combination هو تجزئة بخليتين، خلية تحتوى على r من الأشياء والخلية الأخرى تحتوى على $(n-r)$ من الأشياء الباقية وعدد هذه التوافيق يرمز له بالرمز $\binom{n}{r}$.

نظرية (٣-٦) عدد التوافيق لأشياء مميزة عددها n مأخوذة r كل مرة هو :

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

مثال (٣-١٢) كم عدد الطرق لاختيار 8 أشخاص لفريق كرة السلة من بين 11 ولدا ؟

الحل . عدد الطرق تكون :-

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{11!}{8!3!} = 165.$$

مثال (٣-١٣) كم عدد الطرق لاختيار عملتين من كيس يحتوى على دينار و ريال و درهم و ين و فرنك ؟

الحل . عدد الطرق هي :-

$$\binom{n}{r} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10.$$

مثال (٣-١٤) بكم طريقة يمكن اختيار بعثة علمية تتكون من 3 رجال وسيدتين من بين 7 رجال و 5 سيدات .

الحل . يمكن اختيار 3 رجال من بين 7 رجال بطرق عددها $\binom{7}{3} = 35$ ويمكن اختيار السيدتين من بين 5 سيدات بطرق عددها $\binom{5}{2} = 10$ وبذلك يكون اختيار البعثة بطرق عددها:-

$$\binom{7}{3}\binom{5}{2} = 350.$$

(٣-٣) الاحتمال <u>Probability</u>

عادة، يكون هدف الإحصائي الوصول إلى استنتاجات أو استدلالات من التجارب التي تشتمل على أحداث غير مؤكدة. ولكي تكون استنتاجاته واستدلالاته دقيقه فإن فهمه لنظرية الاحتمالات يكون ضروري. ماذا نعني عندما نقول مثلا أنه من المحتمل أن تمطر السماء بعد ظهر اليوم أو أن الاحتمال ضئيل في أن ينجح طالب معين في الامتحان ...الخ. في كل حالة نعبر عن نتيجة غير متأكدين منها ولكن من معلوماتنا السابقة أو فهمنا لطبيعة التجربة يكون لدينا درجة من الثقة في صحة هذه الجملة .

تمدنا نظرية الاحتمالات بفئة من الأرقام تسمى الأوزان weights تتراوح من الصفر إلى الواحد الصحيح والتي تمكننا من تقدير لإمكانية (فرصة) وقوع الأحداث التي تنتج من تجارب إحصائية. لكل نقطة في فضاء العينة نعين وزن بحيث يكون مجموع الأوزان يساوى الواحد الصحيح. إذا كان لدينا سبب لكي نعتقد أن هناك إمكانية كبيرة لوقوع نقطة في فضاء العينة

فإننا نعين لها رقماً قريباً من الواحد الصحيح. ومن ناحية أخرى يعين وزن قريب من الصفر لنقاط العينة التي إمكانية وقوعها ضئيل. للنقاط خارج نطاق العينة، أى النقاط التي يستحيل حدوثها فإننا نعين لها الرقم صفر وتسمى الأحداث المستحيلة الحدوث. على سبيل المثال احتمال ظهور الرقم 7 عند إلقاء زهرة نرد مرة واحدة يساوى صفر. لإيجاد احتمال أى حدث A فإننا نجمع كل الأوزان المعينة لنقاط العينة في A. هذا المجموع يسمى المقياس measure للحادثة A أو احتمال A ويرمز له بالرمز $P(A)$. الطرق المختلفة لقياس الاحتمالات تمثل مفاهيم مختلفة. في هذا البند سوف نناقش ثلاثة مفاهيم مختلفة لقياس الاحتمالات وهى : المفهوم القديم (المفهوم الكلاسيكي classical concept) و مفهوم التكرار النسبي relative frequency concept والمفهوم الشخصي subject concept .

(٣-٣-١) المفهوم القديم (المفهوم الكلاسيكي)Classical Concept

تبعا لهذا المفهوم تحدد أرقام الاحتمالات أو يمكن تقديرها قَبْلي a priori (قبل الحقيقة before fact) . وعلى ذلك، الاحتمال بالضبط exact probability أن حادثة ما تقع تحدد قبل وقوع الحادثة. لذلك يسمى الاحتمال المقدر بناء على هذا المفهوم بالاحتمال القبلي a priori probability . المفهوم القديم للاحتمال مبنى على أساس أنه إذا كانت تجربة تحتوى على M من النقاط، أى أن عدد النواتج الممكنة لتجربة ما هو M وكانت هذه النواتج متساوية في إمكانية الحدوث وإذا احتوت الحادثة A على عدد m من النقاط فإن احتمال الحادثة هو :

$$P(A) = \frac{m}{M}$$

مثال (٣-١٥) أوجد احتمال ظهور عددين مجموعهما ثمانية عند إلقاء زهرتي نرد مرة واحدة.

الحل . فراغ العينة هو فئة الأزواج المرتبة الآتية :-

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

وكل زوج مرتب من هذه الفئة يمثل أحد نتائج التجربة. فمثلا العنصر (1,6) يمثل ظهور العدد 1 على الزهرة الأولى والعدد 6 على الزهرة الثانية. فراغ العينة يحتوى على ستة وثلاثين زوجاً مرتبا. المجموع ثمانية على النردين سينتج إذا ظهر أى زوج من الأزواج الخمسة التالية :-

(3,5) , (5,3) , (4,4) , (6,2) , (2,6)

أى أن "ظهور عددين مجموعهم يساوى ثمانية " ينتج من 5 نقاط عينة ، وعلى ذلك :-

$$P(A)=\frac{m}{M}=\frac{5}{36}.$$

مثال (٣-١٦) أسرة لديها 3 أطفال. ما احتمال أن يكون جميعهم أولاد (بفرض أن كل طفل له نفس الاحتمال أن يكون ولدا أو بنتا).

الحل . إذا رمزنا للولد بالرمز B وللبنت بالرمز G فإن فراغ العينة هو :-

$$S=\{BBB, BBG, BGB, GBB, GBG, BGG, GGB, GGG\}$$

الحادثة " جميع الأطفال أولاد " هو $A=\{BBB\}$ ، أي أن $M=8, m=1$ وبالتالى فإن:-

$$P(A)=\frac{m}{M}=\frac{1}{8}.$$

(٣-٣-٢) مفهوم التكرار النسبي Relative Frequency Concept

يشترط هذا المفهوم إجراء التجربة عدد كبير من المرات ومعرفة نتائجها وبعد ذلك قياس الاحتمال. فإذا كانت N تمثل عدد المرات (المحاولات trails) التي أجريت بها تجربة ما تحت نفس الظروف و n تمثل عدد مرات (التكرار) ظهور الحادثة A خلال N من المرات التي كررت فيها التجربة فإن احتمال وقوع الحادثة A هو :-

$$P(A)=\lim_{N\to\infty}\frac{n}{N}$$

حيث $\frac{n}{N}$ هو التكرار النسبي للحادثة A في هذه التجارب التي عددها N. عادة تكون قيم التكرار النسبي غريبة الأطوار للقيم الصغيرة من N ولكن عندما تزيد قيمة N، فقد أوضحت الخبرة أن النسبة $\frac{n}{N}$ تكتسب بعض الانتظام الإحصائي وتستقر حول قيمة ثابتة هي $P(A)$ ولذلك عرف الاحتمال بأنه نهاية النسبة $\frac{n}{N}$ عندما يزداد عدد المحاولات أو التجارب ويؤول إلى ما لانهاية. وحيث أن عدد المحاولات نادرا ما يؤول إلى ما لانهاية فإننا نستخدم التكرار النسبي كتقدير لقيمة الاحتمال. الاحتمال المبنى على هذا المفهوم يقدر بعدى a posteriori (بعد الحقيقة after fact) ويعتمد على البيانات الملاحظة، لذلك يسمى في بعض الأحيان الاحتمال التجريبي experiment probability .

مثال (٣-١٧) في مصنع لإطارات السيارات تبين أن كل 100000إطار منتج يكون من بينها 300 إطار تالف. فما احتمال اختيار إطار تالف؟

الحل . عدد الإطارات $N=100000$ عدد الإطارات التالفة $n = 300$ • وعلى ذلك احتمال اختيار إطار تالف هو :-

$$P(A) \approx \frac{300}{100000} = 0.003.$$

(٣-٣-٣) المفهوم الشخصي **Subject Probability**

تبعا لهذا المفهوم، الاحتمال هو درجة الثقة **degree of confidence** في وقوع حادثة ما والمقررة من شخص ما بناء على دليل متوفر لديه **evidence available** • هذا الدليل قد يكون أي معلومات كمية أو غير كمية. على سبيل المثال قد يحدد الشخص القائم على المشتريات في شركة ما الاحتمال 0.25 للحادثة أن شحنة ما تحتوى على الأكثر 2% وحدات تالفة • أيضا قد يصرح المدير الأول في شركة بأن احتمالات زيادة ميزانية الشركة أو انخفاضها أو بقائها على حالها هو 0.04 و 0.13 و 0.83 على التوالي. ويجب ملاحظة أن الاحتمال المقدر لحادثة ما بناء على هذا المفهوم يختلف من شخص إلى آخر وذلك لعوامل كثيرة منها الخبرة •

(٣-٣-٤) الخواص المميزة لقيم الاحتمال

Characteristics of Probability Numbers

إذا كان S فراغ العينة المرافق لتجربة وإذا كانت $A_1, A_2, \ldots$ تمثل كل الأحداث الممكنة فإن قيم الاحتمال المقدرة للأحداث السابقة لابد أن تتوافر فيها الشروط الآتية :-

(ا) يرافق كل حادثة A عدد معين $P(A)$ يسمى احتمال A ويحقق $P(A) \geq 0$.

(ب) احتمال وقوع حادثة مؤكدة يساوى الواحد الصحيح، أي أن $P(S) = 1$

(جـ) إذا كانت $A_1, A_2, A_3 \ldots$ عدد لانهائي من الحوادث المانعة بالتبادل أي $A_i \cap A_j = \phi \;,\; i \neq j$ فإن :-

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots.$$

ويمكن إثبات أنه إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_n$ تمثل n حادثة مانعة بالتبادل فإن :-

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

أيضا إذا كانت $A_1, A_2, \ldots A_n$ تمثل تجزئة لفراغ العينة S فإن :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

مثال (٣-١٨) ما هو احتمال الحصول على مجموع 5 أو 12 عند إلقاء زهرتا نرد مرة واحدة.

الحل . بفرض أن A حادثة "ظهور 5 " و B حادثة "ظهور 12 " . المجموع 5 يحدث من 4 نقط عينة والمجموع 12 يحدث من نقطة واحدة. وحيث أن كل النتائج في فضاء العينة متساوية في إمكانية الحدوث فإن $P(A) = \frac{4}{36}$ ، $P(B) = \frac{1}{36}$. الحادثتان A ، B مانعتان وعلى ذلك :-

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
$$= \frac{4}{36} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36}.$$

(٣-٤) بعض قوانين الاحتمال Some Probability Laws

عادة يكون من السهل حساب احتمال حادثة ما من الاحتمالات المعروفة للأحداث الأخرى وهذا يكون صحيح إذا أمكن تمثيل الحادثة كاتحاد لحادثتين أخرتين أو مكملة لحادثة. في هذا البند سوف نعرض بعض القوانين التي تسهل عملية حساب الاحتمالات.

نظرية (٣-٧) لأى حادثتين A , B فإن :-

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

البرهان :-

كما يتضح من شكل (٣-١) أن $I = A^c \cap B$ ، $II = A \cap B^c$ ، $III = A \cap B$ يمكن تمثيل كل من الحادثتين $A \cup B$ و A كاتحاد لحادثتين مانعتان كما يلي :-

$$A \cup B = (A \cap B^c) \cup B \,,$$
$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c).$$

حيث :

$$(A \cap B^c) \cap B = \phi,$$
$$(A \cap B) \cap (A \cap B^c) = \phi.$$

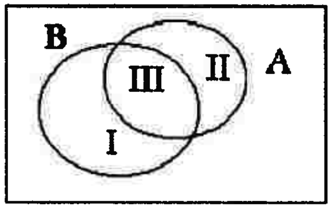
وعلى ذلك :-

$$P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(B),$$
$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c).$$

وبذلك نصل إلى :-

$$P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(B)$$
$$= [P(A) - P(A \cap B)] + P(B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$



شكل (٣-١)

مثال (٣-١٩) وجد أن 40% من المرضى الذين تم فحصهم في العيادة المحلية يعانون من ارتفاع في ضغط الدم ، وأن 30% يعانون من زيادة الوزن وأن 10% يعانون من كليهما. إذا اختير مريضا عشوائيا ، فما هو احتمال أن يعاني من إحدى هاتين الحالتين على الأقل ؟

الحل. بفرض A حادثة " ارتفاع ضغط الدم " و B حادثة " الوزن زائد " و $A \cup B$ حادثة "المعاناة من إحدى هاتين الحالتين " . من نظرية (٣-٧) :-

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0.4 + 0.3 - 0.1 = 0.6.$$

نظريه (٣-٨) إذا كانت A حادثة وكانت A^c الحادثة المكملة لها فإن :-

$$P(A) = 1 - P(A^c).$$

البرهان :-

نعلم أن A^c هي المكملة للفئة A وعلى ذلك $S = A \cup A^c$. وحيث أن : $A \cap A^c = \phi$ لأن $A\,,\,A^c$ حادثتين مانعتان ، فإن :-

$$P(S) = P(A \cup A^c)$$

إذن :

$$P(S) = P(A) + P(A^c)$$
$$1 = P(A) + P(A^c).$$

وعلى ذلك :-

$$P(A) = 1 - P(A^c).$$

مثال (٣-٢٠) إذا ألقيت عملة 7 مرات أوجد احتمال ظهور صورة مرة على الأقل.

الحل، بفرض A الحادثة " ظهور صورة مرة على الأقل " ، عدد نقط العينة في S هو 2^7 (من نظرية (٣-١))، بفرض أن الحادثة A^c تمثل عـــدم ظـــهور أي صـــورة وحيـــث أن الأحداث متساوية في إمكانية الحدوث فإن :

$$P(A^c) = \frac{1}{2^7} = 0.0078125.$$

أي أن :-

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$
$$= 1 - 0.0078125 = 0.9921875.$$

(٣-٥) الاحتمال الشرطي **Conditional Probability**

في بعض التجارب يتأثر الاحتمال الذي يخصص لحادثة ما (لتكن A) بالمعلومات عـــن حدوث أو عدم حدوث حادثة أخرى ولتكن B ، في هذه الحالة سوف نســـتخدم العبـــارة : احتمال وقوع حادثة A بشرط وقوع حادثة B والذي يسمى الاحتمال الشرطي ويرمـــز لـــه بالرمز $P(A|B)$ ويقرأ " احتمال وقوع A الشرط وقوع B "، للتســـهيل بفـــرض أن A حادثة الحصول على رقم 3 عند إلقاء زهرة نرد متزنة مرة واحـــدة. بالاعتمـــاد علـــى فضـــاء العينة $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ فإن احتمال الحصول على الرقم 3 عند إلقاء زهـــرة نـــرد مـــرة واحدة هو $\frac{1}{6}$ ، الآن بفرض أن الشخص الذي قام بإلقاء زهرة النرد أفادنا بأن النتيجة الـــتي حصل عليها كانت رقم فردى ، لنستعرض آثار هذه المعلومات التي توفرت مسبقاً على احتمـــال الحادثة A والتي حسبناها مسبقا. الآن في ظل هذه الحقيقة لم تعد النتائج الممكنـــة ســـتة وإنمـــا أصبحت ثلاثة فقط فهى إما 1 أو 3 أو5. أما النتائج2 أو4 أو 6 فأصبحت مستحيلة. وعلى ذلك فإن احتمال الحادثة A منسوبا إلى الفراغ الجديد المختزل $B = \{1,3,5\}$ هو :

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{3}.$$

حيث $n(B), n(A \cap B)$ تمثل عدد العناصر التابعة للحادثتين B , $A \cap B$ على التوالى،

مثال (٣-٢١) ألقيت عملة ثلاث مرات فإذا علم أن الوجه الظاهر في الرمية الأولى والثانيـــة كتابة ما هو احتمال ظهور كتابة في الرمية الثالثة ؟

الحل ، فراغ العينة هو :-

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TTT\}$$

بفرض أن الحادثة $A=\{HHT, THT, HTT, TTT\}$ "ظهور كتابة في الرمية الثالثة" و الحادثة $B=\{TTH, TTT\}$ " ظهور كتابة في الرمية الأولى والثانية ". الحادثة $A\cap B=\{TTT\}$ تحتوى على نقطة واحدة والحادثة B تحتوى على نقطتين. باستخدام فراغ العينة المختزل B ، وإذا كانت $n(B), n(A\cap B)$ تمثل عدد العناصر التابعة للحادثتين $A\cap B$, B على التوالى. وعلى ذلك يكون الاحتمال المطلوب هو :

$$P(A\mid B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{1}{2}.$$

مثال (٣-٢٢) وعاء يحتوى على 150 وحدة بعضها منتج من المصنع 1 والباقي من المصنع 2، بعض الوحدات سليمة وبعضها تالفة. فإذا اختيرت وحدة عشوائية من الوعاء، ليكن A الحادثة "الوحدة تالفة" وعلى ذلك A^c الحادثة "الوحدة سليمة". أيضا ليكن B الحادثة "الوحدة من إنتاج المصنع 1" ، B^c الحادثة "الوحدة من إنتاج المصنع 2 " . الجدول التالي يمثل عدد الوحدات السليمة والتالفة المنتجة من المصنعين . الآن بفرض أن كل وحدة مرقمة بعلامة توضح المصنع المنتج أوجد $P(A|B)$.

	B	B^c	المجموع
A	50	5	55
A^c	75	20	95
المجموع	125	25	150

الحل . يمكن حساب احتمال أن الوحدة تالفة بشرط وقوع الحادثة B وباستخدام الفراغ المختزل B كالتالي :-

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{50}{125}=\frac{2}{5}.$$

أيضا يمكن كتابة $P(A\mid B)$ على الشكل :

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{n(A\cap B)/n(S)}{n(B)/n(S)}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},$$

حيث $P(B)$, $P(A\cap B)$ يتم الحصول عليهما من فراغ العينة الأصلي S ، للتحقق من النتيجة فإن :-

$$P(B)=\frac{125}{150}\ ,$$
$$P(A\cap B)=\frac{50}{150}.$$

وعلى ذلك :-

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{50}{125}=\frac{2}{5}.$$

تعريف : الاحتمال الشرطي للحادثة A شرط B يمثل بالصيغة $P(A|B)$ و يعرف بالمعادلة :

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\ ,\ P(B)\neq 0.$$

يعتبر هذا التعريف عام ولا يعتمد على فراغ عينة يحتوى على أحداث متساوية في إمكانية الحدوث كما في الأمثلة السابقة وبنفس الشكل يمكن القول أن :

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\ ,\ P(A)\neq 0.$$

مثال (٣- ٢٣) في إحدى الكليات نجح 75% من الطلبة في امتحان الرياضيات ونجح 85% من الطلبة في امتحان الإحصاء ونجح 10% في الرياضيات والإحصاء ، اختير أحد الطلبة بطريقة عشوائية ، المطلوب :-

(ا) إذا كان ناجحا في الإحصاء ما هو احتمال أن يكون ناجحا في الرياضيات ،

(ب) إذا كان ناجحا في الرياضيات فما هو احتمال أن يكون ناجحا في الإحصاء ،

الحل ، بفرض أن A حادثة " النجاح في الرياضيات" و B حادثة "النجاح في الإحصاء"

وعلى ذلك :-

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.1}{0.85}=\frac{10}{85}=\frac{2}{17} \qquad (\text{ا})$$

$$P(B\,|\,A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.1}{0.75}=\frac{10}{75}=\frac{2}{15} \qquad (\text{ب})$$

نظرية (٣-٩) إذا وقعت حادثة ما A في تجربة ما، يتبعها حادثة B فإن :-

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A).$$

وعلى ذلك احتمال وقوع A , B في ترتيب هو احتمال أن تقع A أولا مضروبا في احتمال وقوع B، شرط أن A وقعت ، كما يمكن أن يكون:-

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B).$$

وهذا يتوقف على أى الحادثتين قد تقع أولا .

مثال (٣-٢٤) كيس يحتوى على 4 كرات بيضاء و7 حمراء فإذا أختار شخص كرتين من الكيس اختيارا عشوائيا فما احتمال أن تكون الأولى بيضاء والثانية حمراء ؟ (إذا كان السحب بدون إرجاع) .

الحل . بفرض أن A الحادثة "الكرة الأولى بيضاء" و B الحادثة "الكرة الثانية حمراء" وعلى ذلك احتمال أن تكون الكرة الأولى بيضاء والثانية حمراء هو :-

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = (\frac{4}{11})\ (\frac{7}{10}) = \frac{14}{55}.$$

نظرية (٣-١٠) في أي تجربة إذا وقعت الحادثة A_1، يتبعها الحادثة A_2، يتبعها الحادثة A_3، وهكذا ، فإن :-

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)\ldots$$

في بعض الأحيان ، احتمال وقوع حادثة ما A لا يتأثر ولا يعتمد على وقوع أو عدم وقوع حادثة أخرى B . بعبارة أخرى وفي هذه الحالة يقال أن A مستقلة عن B وعلى ذلك $P(A|B) = P(A)$ وفى هذه الحالة فإن :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A).$$

ومنها :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

إذا كانت A مستقلة عن B فإن B تكون مستقلة عن A لأن :-

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B).$$

ومنها :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

تعريف : يقال أن الحادثتين A ، B مستقلتين **independent** ، إذا وفقط إذا :-

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

مثال (٣-٢٥) في المثال السابق إذا كان السحب بإرجاع المطلوب إيجاد احتمال أن تكون الكرة الأولى بيضاء والثانية حمراء؟

الحل، بفرض أن A الحادثة " الكرة الأولى بيضاء " ، B الحادثة " الكرة الثانية حمراء " الحادثتين A و B مستقلتين وعلى ذلك احتمال أن تكون الكرة الأولي بيضاء والثانية حمراء هو:-

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = (\frac{4}{11})\ (\frac{7}{11}) = \frac{28}{121}.$$

مثال (٣-٢٦) ألقيت عملة وزهرة نرد معا، ما هو احتمال ظهور الصورة على العملة والرقم 6 على زهرة النرد ؟

الحل، بفرض أن الحادثة A "ظهور الصورة على العملة " والحادثة B ظهور رقم 6 على النرد، ولأن الحادثتين مستقلتين فإن :-

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$
$$= (\frac{1}{2})(\frac{1}{6}) = \frac{1}{12}.$$

مثال (٣-٢٧) ألقيت زهرتي نرد مرة واحدة ما هو احتمال ظهور الرقم 5 على الزهرة الأولى والرقم 2 على الزهرة الثانية ؟

الحل، بفرض أن A الحادثة ظهور الرقم 5 على الزهرة الأولى، B الحادثة ظهور الرقم 2 على الزهرة الثانية ،بما أن الحادثتين مستقلتين فإن:-

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$
$$= (\frac{1}{6})(\frac{1}{6}) = \frac{1}{36}.$$

مثال (٣-٢٨) ألقيت زهرتي نرد مرتين، ما هو احتمال أن مجموع الوجهين 5 في رمية و7 في الرمية الأخرى ؟

الحل، بفرض أن A_1 ,A_2 ,B_1 ,B_2 على التوالى ظهور مجموع 5 في الرمية الأولى و مجموع 5 في الرمية الثانية و ظهور مجموع 7 في الرمية الأولى و مجموع 7 في الرمية الثانية (تمثل أحداث مستقلة) ، اهتمامنا سوف يكون في حساب احتمال الاتحاد لحادثتين مانعتين $A_1 \cap B_2$, $B_1 \cap A_2$ ، وعلى ذلك :-

$$P[(A_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap A_2)] = P(A_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap A_2)$$
$$= P(A_1)P(B_2) + P(B_1)P(A_2)$$
$$= (\frac{4}{36})(\frac{6}{36}) + (\frac{6}{36})(\frac{4}{36}) = 0.037037.$$

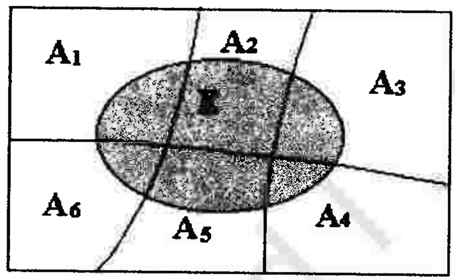
(٣-٦) الاحتمال الكلى وقاعدة بييز

Total Probability and Bayes` Rule

بفرض أن الأحداث $A_1, A_2, ..., A_n$ تمثل تجزيئا لفراغ العينة ومانعة لبعضها البعض واتحادهم هو S (أحداث مانعة وشاملة **mutually exclusive and exhaustive**)

كما في شكل (٣-٢) حيث **n=6** ٠ بفرض أن E أى حادثة أخرى فإن :-

$$E = S \cap E = (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) \cap E$$
$$= (A_1 \cap E) \cup (A_2 \cap E) \cup ... \cup (A_n \cap E)$$



شكل (٣-٢)

الصيغة السابقة مفيدة في النظرية الآتية :-

نظرية (٣-١١) (نظرية الاحتمال الكلى **total probability**)

بفرض أن $A_1, A_2, \ldots, A_n$ تمثل n حادثة مانعة وشاملة، وعلى ذلك لأى حادثة E فإن :-

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(E|A_i).$$

البرهان :-

الأحداث $A_1 \cap E, A_2 \cap E, ..., A_n \cap E$ مانعة بالتبادل، وعلى ذلك :-

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap E),$$

وبتطبيق نظرية (٣-٩) على كل حد نحصل على برهان النظرية ٠

مثال (٣-٢٩) تنتج ثلاث ماكينات A , B , C 40% , 35% , 25% على التوالي من الإنتاج الكلى لمصنع، ونسبة الإنتاج السليم لهذه الماكينات هـي 98% , 96% , 94%

فإذا اختيرت وحدة بطريقة عشوائية، ما هو الاحتمال أن تكون سليمة ؟

الحل. بفرض أن الحادثة E "الوحدة المختارة سليمة " ، والحادثة A_1 "الوحدة من إنتاج الماكينة A" والحادثة A_2"الوحدة من إنتاج الماكينة B" والحادثة A_3 "الوحدة من إنتاج الماكينة C" وعلى ذلك :-

$$P(E) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(E \mid A_i)$$

$$= (0.4)(0.98) + (0.35)(0.96) + (0.25)(0.94)) = 0.9630 .$$

نظرية (٣-١٢) نظرية بيز **Bayes` Theorem**

إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_n$ تمثل n حادثة مانعة وشاملة وكان ظهور إحداهما ينتج عنه ظهور حادثة أخرى E (أي أن E تقع إذا وقعت واحدة من الحوادث المانعة) فإن :-

$$P(A_k \mid E) = \frac{P(A_k)P(E \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(E \mid A_i)}, k = 1,2,\ldots,n.$$

البرهان :-

نعلم من النظرية السابقة أن :-

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(E|A_i).$$

وحيث أن :-

$$P(A_k|E) = \frac{P(A_k \cap E)}{P(E)} = \frac{P(A_k)P(E|A_k)}{P(E)}.$$

وبالتعويض عن $P(E)$ بقيمتها من نظرية (٣-١١) يتم البرهان.

مثال (٣-٣٠) تُنتج إحدى شركات المشروبات نوع معين من العصائر. يستمر الإنتاج خلال ورديتين بحيث أن 70% من الإنتاج اليومي من الوردية الأولى. من دراسة المنتج وجد أن نسبة العبوات السليمة من إنتاج الوردية الأولى 95% ونسبة العبوات السليمة من إنتاج الوردية الثانية 97%. فإذا سُحبت إحدى العبوات عشوائيا وكانت سليمة ما هو احتمال أن تكون من إنتاج الوردية الثانية ؟

الحل. بفرض أن E الحادثة "العبوة سليمة" و A_1 الحادثة "العبوة من إنتاج الوردية الأولى" و A_2 الحادثة "العبوة من إنتاج الوردية الثانية " وعلى ذلك الاحتمال المطلوب هو :-

$$P(A_2 | E) = \frac{P(A_2)P(E | A_2)}{P(A_1)P(E | A_1) + P(A_2)P(E | A_2)}$$
$$= \frac{(0.3)(0.97)}{(0.7)(0.95) + (0.3)(0.97)} = 0.3043933.$$

تماريـــــــن

– ١ – ألقى زوج من زهرتي النرد مرة واحدة أذكر الحادثة :–

(ا) مجموع الوجهين الظاهرين يساوى 9 ٠

(ب) مجموع الوجهين الظاهرين إما 4 أو 5 ٠

– ٢ – ألقيت عملتين مرة واحدة أذكر الحادثة :–

(ا) ظهور كتابة واحدة٠

(ب) ظهور كتابة واحدة على الأقل٠

– ٣ – في تجربة لاختيار ثلاث وحدات من مصنع وملاحظة ما إذا كانت الوحدة سليمة أو تالفة (يرمز للتالفة D والسليمة D') أذكر :–

(ا) فضاء العينة٠

(ب) الحادثة عدم ظهور وحدات تالفة٠

(جـ) كيف يمكن تعريف الحادثة ؟

$$A = \{(DDD'), (DD'D), (D'DD)\}$$

– ٤ – اختير أربعة أشخاص عشوائيا لاختبار تفضيل أو عدم تفضيل لنوع معين من القهوة حيـــث يعطى 1 للتفضيل و 0 لعدم التفضيل أذكر :–

(ا) فضاء العينة٠

(ب) الحادثة ثلاث أشخاص على الأقل يفضلون٠

– ٥ – قام مسئول بمراقبة الجودة في مصنع لإنتاج أسماك السلامون باختبار كل صندوق منتج وأخذ عينة والاستمرار في الاختبار حتى ظهور صندوق تالف٠ أذكر فضاء العينة لعملية الاختبار مع العلم أن Y ترمز للصندوق السليم و N ترمز للصندوق التالف٠

– ٦ – قام باحث متخصص في التسويق بتصنيف العملاء إلى ثلاث مجموعات حســـب الدخـــل: منخفض 0 ومتوسط 1 وعالي 2 ٠ كما قام بتصنيفهم تبعاً لخاصية أخرى وهى القوة الشرائية إلى (لا يشترى 0) و (يشترى ولو مرة واحدة في الشهر 1)٠عرف فضاء العينة٠

– ٧ – بفرض عدم السماح بالتكرار (ا) كم عددا مكون من ثلاث أرقام يمكن تركيبة من الأرقام التالية 8,7,3,2,1 ؟ (ب) كم عدداً منهم زوجياً ؟ (جـ) كم عدداً منهم فردياً ؟

– ٨ – بكم طريقة يمكن أن يجلس أربعة طلاب من قسم الكيمياء وأربعة طلاب من قسم النبات وثلاثة طلاب من قسم الرياضيات وطالبان من قسم الحيوان في صف بحيث يجلس الأشخاص ذو التخصصات الواحدة معا ؟

– ٩ – حل نفس التمرين السابق إذا جلس الجميع حول مائدة مستديرة.

– ١٠ – كم عدد الطرق لاختيار ثلاثة عملات من صندوق يحتوى على جنيه و ريال و دينار و ين و فرنك ؟

– ١١ – كم عدد الطرق لاختيار ثمانية أشخاص لفريق كرة القدم من 14 شخصا ؟

– ١٢ – صنعت زهرة نرد بحيث يكون احتمال ظهور الرقم واحد ثلاثة أضعاف أي رقم آخر، بينما كل الوجوه الأخرى لها نفس الفرصة في الظهور. ما هو احتمال ظهور الرقم اثنين عند إلقاء النرد مرة واحدة ؟ وما هو احتمال ظهور الرقم واحد ؟

– ١٣ – مطلوب من طالب دراسة مادة في العلوم ومادة في الرياضيات ومادة في الاجتماع. ما هو عدد الطرق لاختيار هذه المواد من بين 3 مواد في العلوم و 4 في الاجتماع و مادتين في الرياضيات ؟

– ١٤ – ما عدد الطرق الممكنة لشخص داخل محل ملابس لاختيار رابطة عنق و قميص وذلك إذا توافر له 4 أربطة عنق و 5 قمصان في المحل ؟

– ١٥ – بكم طريقة يمكن زراعة 8 شجرات على شكل دائرة ؟

– ١٦ – كم عددا مكون من ثلاثة أرقام التي يمكن تكوينها من الأعداد 0,1,2,3,4,5 ؟ وإذا كان كل رقم يظهر مرة واحدة (ا) كم عدد الأرقام الفردية ؟ (ب) كم عدد الأرقام الزوجية ؟

– ١٧ – إذا لعب فريق كرة القدم ثمانية مباريات خلال الموسم. بكم طريقة يستطيع الفريق في نهاية الموسم أن يكسب 4 ويفقد 3 ويتعادل 1 ؟

– ١٨ – بكم طريقة يمكن الإجابة 10 على أسئلة من نوع صح وخطأ ؟

– ١٩ – أعطى امتحان في مادة الإحصاء لطالب. يتكون الامتحان من 9 أسئلة منهم 6 أسئلة اختياري وثلاثة إجبارى. فإذا كان المطلوب منه الإجابة على ستة أسئلة. بكم طريقة يمكن للطالب اختيار الأسئلة التي يرغب الإجابة عليها ؟

– ٢٠ – بكم طريقة يمكن لمدرس أن يختار طالبا من بين سبعة طلاب ؟

– ٢١ – أوجد عدد الطرق التي يمكن بها تصنيف 5 كتب من الحجم الكبير و 4 من الحجم المتوسط و 3 من الحجم الصغير على إحدى الرفوف بشرط أن تكون جميع الكتب ذات الحجم الواحد مصفوفة معا.

– ٢٢ – ثلاث أجزاء من كتاب موضوعة على رف ما احتمال (ا) الأجزاء في وضعها الصحيح ؟ (ب) الجزء الثاني في المكان الأول ؟

– ٢٣ – اختيرت ثلاثة كتب عشوائيا من رف يحتوى على 5 كتب في التاريخ و3 كتب في العلوم وقاموس ما هو احتمال (ا) القاموس هو المختار ؟ (ب) كتابين في العلوم و واحد في التاريخ هما المختارتان ؟

– ٢٤ – في مدينة ما احتمال أن أسرة تشترى تلفزيون هو 0.8 واحتمال أن تشترى غسالة ملابس هو 0.5 واحتمال أن تشترى الاثنين معا هو 0.45 ، ما هو احتمال أن تشترى الأسرة واحد من الاثنين على الأقل ؟

– ٢٥ – احتمال أن تمطر السماء في بلد ما في 4 يوليو هو 0.1 واحتمال حدوث رعد هو 0.5 واحتمال حدوث مطر أو رعد هو 0.3 ما هو احتمال حدوث مطر ورعد في نفس اليوم ؟

– ٢٦ – لاعب كرة يكسب 50% من مبارياته . ما هو احتمال أن يكسب بالضبط 3 من الأربع مباريات القادمة ؟

– ٢٧ – وعاء يحتوى على 10 وحدات منهم 3 تالفين سحبت وحدتين من الوعاء الواحدة تلو الأخرى بدون إرجاع . المطلوب تقدير (ا) احتمال أن الوحدتين غير تالفتين (ب) احتمال وجود وحدة تالفة .

– ٢٨ – صندوق يحتوى على 5 كرات سوداء و3 كرات خضراء . سحبت ثلاث كرات الواحد تلو الأخرى بدون إرجاع ما احتمال أن كل الكرات المسحوبة من نفس اللون ؟

– ٢٩ – إذا كان A , B حادثتين بحيث أن :–

$$P(A \cap B) = \frac{1}{10} \quad , P(A^c \cap B) = \frac{1}{5}, P(A \cap B^c) = \frac{2}{3}$$

(ا) ما هو احتمال A^c , B^c ؟

(ب) هل الحادثتين مستقلتين ؟

– ٣٠ – مستحضر في أنبوبة اختبار يحتوى على عشرين من حبوب لقاح الصنوبر وخمسة من حبوب لقاح البلوط . اختيرت عينة عشوائية تحتوى على أربعة حبوب لقاح، ما هو احتمال أن :

(ا) تحتوى العينة على أربع حبوب من الصنوبر .

(ب) تحتوى العينة على ثلاث حبوب من البلوط .

(جـ) تحتوى العينة على الأقل على ثلاث حبوب لقاح الصنوبر .

– ٣١ – أطلق صياد 7 طلقات نارية على حيوان مفترس فإذا كان احتمال أن يصيب الهدف هو 0.6 ما هو احتمال أن الصياد ما زال على قيد الحياة ؟

– ٣٢ – صوب شخصان ناحية هدف ما، فإذا كان في المتوسط A يكسب 3 من 5 و B يكسب 4 من 8 ما هو احتمال أن الهدف لا يستهدف إذا صوب الاثنين ناحية الهدف ؟

– ٣٣ – تقدم ثلاثة أشخاص A , B , C إلى ثلاث وظائف مختلفة. احتمال أن يكسب A الوظيفة هو 0.8 واحتمال أن يكسب B الوظيفة هو 0.5 واحتمال أن يكسب C الوظيفة 0.45 . ما هو احتمال (ا) أن الثلاثة يحصلون على الوظائف ؟ (ب) عدم تعيين أى واحد في الوظيفة المقدم لها ؟ (جـ) واحد فقط يحصل على الوظيفة ؟

– ٣٤ – مجموعة مكونة من عشرة أشخاص، منهم ستة أشخاص مصابين بتسوس الأسنان. اختيرت منهم عينة عشوائية من ثلاثة أشخاص. ما هو احتمال أن تحتوى العينة على ثلاثة أشخاص مصابين بتسوس الأسنان.

– ٣٥ – آلة تتكون من ثلاثة أجزاء، الآلة تعتبر تالفة إذا كان واحد أو أكثر تالفا. احتمال أن الجزء A يتلف هو 0.01 واحتمال الجزء B يتلف هو 0.02 واحتمال الجزء C يتلف هو 0.1 أوجد احتمال (ا) الآلة تالفة (ب) أن تلف الآلة يرجع إلى فشل الجزء C فقط.

– ٣٦ – شركة طيران لها ست رحلات من بلد A إلى B وسبع رحلات من B إلى C (يوميا) ما عدد الرحلات التي تنجزها يوميا من A إلى C ؟

– ٣٧ – اختيرت ثلاثة فئران من مجموعة مكونة من خمسة فئران بيضاء اللون وأربعة بنية اللون لاستخدامها في تجربة معينة . ما هو احتمال أن تكون :–

(ا) جميع الفئران المختارة بيضاء اللون ؟

(ب) الفئران المختارة مكونة من فأر بنى وفأرين لونهما أبيض ؟

(جـ) جميع الفئران المختارة بنية اللون ؟

– ٣٨ – اختيرت ثلاث بذرات لنبات مزهر عشوائيا من كيس يحتوى على عشرة بذور زهورها حمراء وخمس زهورها بيضاء، ما هو احتمال أن تكون :–

(ا) زهور البذور الثلاثة من نفس اللون ؟

(ب) زهور البذور الثلاثة المختارة مختلفة الألوان ؟

– ٣٩ – في مستعمرة كبيرة لذبابة الفاكهة ، 20% من الذباب به طفرة في بالجناح، 35% به طفرة في العين، 10% به طفرة بكل من الجناح والعين. اختيرت ذبابة من المستعمرة عشوائيا. ما هو احتمال أن يكون بها أحد الطفرتين على الأقل ؟

– ٤٠ – حقنت ثمانية فئران بعقار معين وتم رصد عدد الفئران التي ماتت خلال يوم. إذا كان احتمال موت ستة بالضبط هو 0.03 واحتمال أن يموت سبعة أو ثمانية هو 0.04 . أوجد احتمال أن :–

(ا) يموت ستة فئران أو أكثر .

(ب) يموت خمسة أو أقل .

– ٤١ – إذا عُلم أن احتمال أن يكون الجو في بلد ما في شهر يناير ملبداً بالغيوم هو 0.6 واحتمال أن يكون الجو عاصفاً هو 0.65 واحتمال أن يكون ملبداً بالغيوم وعاصفاً هو 0.25 أوجد الاحتمالات الآتية :–

(ا) أن يكون الجو ملبدا بالغيوم وغيرعاصف .

(ب) أن يكون غير ملبد بالغيوم وغير عاصف .

(جـ) أن يكون الجو غير ملبد بالغيوم وعاصف .

– ٤٢ – بفرض أن 100 مستودع تم تصنيفهم حسب الإدارة (A,B,C) وحسب المبيعات (عالي، متوسط، منخفض) في الجدول المزدوج التالي :–

المجموع	C	B	A	المبيعات
		الإدارة		
26	2	4	20	عالى
64	14	46	4	متوسط
10	7	2	1	منخفض
100	23	52	25	المجموع

أستخدم البيانات الموجودة في الجدول في حساب :–

(ا) احتمال أن المبيعات عالية .

(ب) احتمال أن المبيعات متوسطة إذا علم أن الإدارة A .

(حـ) احتمال أن المبيعات متوسطة إذا علم أن الإدارة B .

– ٤٣ – في استطلاع للرأي عن تأثير الإعلانات على البيع في مركز لتسويق الأغذية، أُخذت عينة من 230 فرد من المترددين على المركز وسُجلت إجابتهم . الجدول المزدوج التالي يوضح توزيع الأفراد حسب الشراء (يشترى ولا يشترى) وحسب مشاهدة الإعلانات (يشاهد ولا يشاهد) . سحبت استمارة عشوائيا فإذا علم أن الشخص المختار يشاهد الإعلانات ما هو احتمال أن يشترى .

المجموع	لا يشترون	يشترون	
180	100	80	يشاهد
50	30	20	لايشاهد
230	130	100	المجموع

– ٤٤ – في بحث ميداني لدراسة العلاقة بين العمر و استخدام حزام الأمان في مدينة بها 1000 وقائد سيارة تم الحصول على البيانات التالية :–

المجموع	يستخدمون الحزام	لا يستخدمون الحزام	
427	177	250	تحت 40
573	248	325	40 فأكبر
1000	425	575	المجموع

(ا) ما هو احتمال أن قائد السيارة يستخدم حزام الأمان ؟

(ب) ما هو احتمال أن قائد السيارة تحت 40 سنة ولا يستخدم حزام الأمان ؟

(جـ) إذا علم أن قائد السيارة يستخدم حزام الأمان ما هو احتمال أن عمره 40 فأكبر.

– ٤٥ – في متجر لبيع الملابس النسائية تم تصنيف 230 فرد من المترددين على المتجر حسب الشراء إلى (يشترون ولا يشترون) وحسب الجنس (ذكور إناث)كما في الجدول المزدوج التالي :–

(ا) ما هو الاحتمال أن المشترى أنثى ؟

(ب) إذا تم الشراء ما هو احتمال أن المشترى أنثى ؟

(جـ) هل إمكانية الشراء مستقلة عن نوع المشترى (ذكر أو أنثى) ؟

لا يشترون	يشترون	
100	80	إناث
30	20	ذكور

– ٤٦ – طائرة تطير يوميا بين مدينتي فإذا كان احتمال أن تقوم في ميعادها 0.8 ، احتمال أن يكون الجو جيد عندما تطير في موعدها هو 0.9 ،وعندما لا تطير في موعدها فإن احتمال أن يكون الجو رديئا هو 0.7 ،إذا ركب شخص الطائرة وكان الجو جيد ما هو احتمال أن الطيران يكون في ميعاده ؟

– ٤٧ – بفرض أن 1% من سكان مدينة ما يعانون من مرض ما، فإذا ظهر اختبار جديد للكشف عن المرض وأجرى على سكان المدينة، أعطى الاختبار نتيجة موجبة في 95% من الحالات التي عندها المرض، كما أعطى الاختبار نتيجة سالبة في 97% من الحالات التي ليس عندها المرض، اختير شخص بطريقة عشوائية وكانت نتيجة الكشف عنده موجبة، ما احتمال أنه يعانى من المرض،

-٤٨ - مصنع ينتج ثلاثة أصناف من المصابيح بنسب %60 , %30 , %10 • التالف في الإنتاج هي %4 , %3 , %2 على التوالي اختير إحدى أصناف الإنتاج واختير منه مصباح أوجد:-

(ا) احتمال أن المصباح تالف •

(ب) إذا كان المصباح تالف أوجد احتمال أن يكون من إنتاج الصنف الأول •

- ٤٩ - تمثل الطالبات %30 من حجم الدارسين في كلية ما • يدرس %30 من الطلاب مـــادة الرياضيات وتدرس %20 من الطالبات مادة الرياضيات • إذا اختير واحد من الكلية ووجد أنـــه يدرس الرياضيات ما هو احتمال أن يكون المختار طالبة •

- ٥٠ - في دراسة ميدانية في إحدى الكليات وجد أن %7 من الذكور ، %2 من الإناث أطـول من 1.7 مترا وأن %70 من الدارسين من الإناث • اختير واحد عشوائيا ووجد أنه أطول من 1.7 فما احتمال أن تكون أنثى •

- ٥١ - إذا كان %20 من العاملين في شركة ما يحملون شهادات عليا وإذا كان %25 مـــن الذين يحملون شهادات متوسطة يشغلون مناصب عليا • أيضا %75 من الذين يحملون شـــهادات عالية يشغلون مناصب عليا • فإذا اختير أحد الأشخاص عشوائيا ما هو احتمال أن يحمل شهادة عليا إذا علم أنه يشغل منصب عالي •

- ٥٢ - لدينا ثلاث أوعية كما يلي :- الوعاء الأول به 4 كرات بيضاء، والوعاء الثاني به ثـــلاث كرات حمراء و 4 بيضاء ، والوعاء الثالث به 2 حمراء و 3 بيضاء اختير وعـــاء بطريقـــة عشـــوائية وسحبت منه كرة ووجد أن الكرة بيضاء فما احتمال أن تكون من الوعاء الأول ؟

- ٥٣ - يذهب رجل إلى عمله يوميا إما بسيارته أو بوسائل النقل العام• احتمال أن يركب سيارته هو 0.4 واحتمال أن يتأخر عن عمله إذا أستخدم وسائل النقل العام هو 0.3 واحتمال أن يتـــأخر عن عمله إذا أستخدم سيارته هو 0.1 فإذا ذهب إلى عمله متأخرا في يوما ما أوجد احتمـــال أن يكون قد أستقل سيارته •