الفصل الثامن

فترات الثقة

Confidence Intervals

(٨-١) مقدمــة Introduction

يعتبر الاستدلال الإحصائي statistical inference فرع في علم الإحصـــاء يـــهتم بطرق الاستدلال أو التعميم بشان المجتمع وذلك بالاعتماد على معلومات يتم الحصول عليها من عينات مختارة من المجتمع . سوف نتناول في هذا الفصل الاستدلال عن معالم مجتمعات مجهولة مثل المتوسط ، النسبة ، الانحراف المعياري ، وذلك بحساب إحصاءات من عينات عشوائية وتطبيـــق نظرية المعاينة التي ناقشناها في الفصل السابع .

ينقسم فرع الاستدلال الإحصائي إلى فرعين أساسين : التقدير estimation واختبارات الفروض tests of hypotheses . سوف تقتصر دراستنا في هذا الفصـــل علـــى موضـــوع التقدير بينما موضوع اختبارات الفروض سوف نتناوله في الفصل التاسع . الأمثلة التالية توضح الفرق بين الفرعين. يقوم مصنع بإنتاج قضبانا حديدية ، فإذا اختيرت عينة عشوائية مكونه مـــن 200 قضيب من إنتاج هذا المصنع وقيست أطوالها وتم حساب متوسط طول القضيب في العينة . هذا المتوسط يمكن أن يستخدم لتقدير المعلمة الحقيقية للمجتمع μ . المعلومات عـــن توزيـــع المعاينة للإحصاء $\overline{X}$ سوف يساعدنا في حساب درجة الثقة في تقديرنا. هذه المشكلة تنتمـــي إلى فرع التقدير . الآن إذا كان معروفا أن جسم الإنسان البالغ يحتاج يوميا في المتوسـط إلى 800 ملليجرامات من الكالسيوم لكي يقوم بوظائفه خير قيام. يعتقد علماء التغذية أن الأفـــراد ذوى الدخل المنخفض لا يستطيعون تحقيق هذا المتوسط . لاختبار ذلك اختيرت عينة عشوائية من 50 شخصا بالغا من بين ذوى الدخل المنخفض وتم حساب متوسط ما يتناولونه من الكالسيوم يوميا. في هذا المثال لم نحاول تقدير معلمة ولكن بدلا من ذلك نحاول الوصول إلى قرار صحيـــح عـــن الفرض الذي وضعه علماء التغذية . مرة أخرى نعتمد على نظرية المعاينة لتمدنا بمقياس لدرجـــة الثقة في القرار الذي نتخذه.

يتم تقدير معلمة المجتمع إما كتقدير بنقطة point estimate أو كتقديـــر بفـــترة interval estimate . تقدير النقطة لمعلمة مجتمع ما θ هي قيمـــة وحيـــدة (مفـــردة) $\hat{\theta}$ للإحصاء $\hat{\Theta}$. على سبيل المثال القيمة $\bar{x}$ للإحصاء $\overline{X}$ ، والمحسوبة من عينة عشـــوائية مـــن الحجم n ، هي تقدير بنقطة لمعلمة المجتمع μ . بنفس الشكل ، $\hat{p}=\dfrac{x}{n}$ هي تقديـــر بنقطـــة للمعلمة الحقيقية p والتي تمثل نسبة صفة ما في مجتمع .

الإحصاء المستخدم لإيجاد تقدير النقطة يسمى المقـــدر estimator أو دالــة القــرار decision function. فعلى سبيل المثال دالة القرار S ، والتي تكـــون دالــة في العينــة العشوائية ، هي مقدر للمعلمة σ . عينات مختلفة تؤدى إلى تقديرات مختلفة .

بفرض أن $\hat{\Theta}$ مقدر حيث القيمة $\hat{\theta}$ هي تقدير بنقطة لمعلمة مجتمع مجهولة θ. من المؤكد أننا نرغب في إيجاد التوزيع العيني للإحصاء $\hat{\Theta}$ والذي متوسطة يساوى المعلمة التي نرغــب في تقديرها. أي مقدر يحقق هذه الخاصية يسمي مقدر غير متحيز **unbiased estimator** .

تعريف : يقال للإحصاء $\hat{\Theta}$ أنه مقدر غير متحيز للمعلمة θ إذا كان $E(\hat{\Theta})=\theta$. إذا كان $\hat{\Theta}_2, \hat{\Theta}_1$ مقدران غير متحيزان لمعلمة مجتمع θ فإننا نختار المقدر الذي توزيعه الاحتمالى له أقـــل تباين . وعلى ذلك إذا كان $\sigma^2_{\hat{\Theta}_1} < \sigma^2_{\hat{\Theta}_2}$ ، فإننا نقول أن $\hat{\Theta}_1$ مقدرا أكثر كفاءة من $\hat{\Theta}_2$.

تعريف : اعتبر كل المقدرات الغير متحيزة لمعلمة θ . يسمي المقدر الذي له أقل تباين بـــالمقدر الأكثر كفاءة **more efficient** للمعلمة θ . للتوزيع الطبيعي تم إثبات أن كلا من $\tilde{X}, \bar{X}$ (الوسيط) مقدران غير متحيزين لمعلمة المجتمع μ ولكن تباين $\bar{X}$ أقل من تباين $\tilde{X}$. وعلـــى ذلك كلا التقديرين $\tilde{x}, \bar{x}$ (وسيط العينة) ، في المتوسط ، سوف يكون لهما نفس متوسط المجتمع μ ، ولكن $\bar{x}$ سوف يكون أقرب للمعلمة μ من $\tilde{x}$.

أي تقدير بفترة لمعلمة θ هو فترة على الشكل $a < \theta < b$ حيث a , b تعتمدان على التقدير بنقطة $\hat{\theta}$ لعينة عشوائية خاصة مختارة من المجتمع موضع الدراسة وأيضا علـــى التوزيـــع العيني للإحصاء $\hat{\Theta}$. على سبيل المثال إذا اختيرت عينة عشوائية تمثل درجـــات التحصيـــل في امتحان القبول لخمسين طالبا من المتقدمين للالتحاق في كلية ما وتم الحصول على الفترة 500 , 550 والتي نتوقع أن المتوسط الحقيقي لدرجات التحصيل داخلها . القيمتان النهائيتان 500 و 550 سوف تعتمدان على متوسط العينة المحسوبة $\bar{x}$ وأيضا على التوزيع العيـــني $\bar{X}$. كلمـــا زادت حجم العينة ، فإن $\sigma^2_{\bar{X}} = \dfrac{\sigma^2}{n}$ سوف تقل ، كما عرفنا في الفصل السابع ، وبالتالى فـإن تقديرنا سوف يقترب من المعلمة μ ويؤدى إلى فترة قصيرة .

عينات مختلفة تؤدى إلى قيم مختلفة لـــ $\hat{\theta}$ وبالتالى إلى تقديرات بفترة لمعلمة المجتمـــع θ . بعض هذه الفترات سوف تحتوى على θ والبعض الآخر لا يحتوى علـــى θ. التوزيـــع العيـــني للإحصاء $\hat{\Theta}$ سوف يساعدنا في إيجاد a , b لكل العينات الممكنة بحيث أن أي نسبة خاصة مـــن هذه الفترات سوف تحتوى على θ . فعلى سبيل المثال ، يتم حساب a , b بحيث تكون 0. 95 من كل الفترات الممكنة ، مع تكرار المعاينة ، سوف تحتوي على θ . وعلى ذلك يكون لدينـــا

احتمال 0.95 لاختيار واحدة من هذه العينات والتي تؤدى إلى فترة تحتوي على θ. هذه الفترة المحسوبة من عينة عشوائية ، تسمي 95% فترة ثقة confidence interval . بمعنى آخر يكون لدينا 95% ثقة أن فترتنا المحسوبة تحتوى على المعلمة θ. عموما توزيع $\hat{\Theta}$ سوف يساعدنا في حساب a , b بحيث يكون لأي نسبه خاصة $1-\alpha$, $0<\alpha<1$ ، من الفترات المحسوبة من كل العينات الممكنة سوف تحتوى على المعلمة θ . الفترة المحسوبة تسمى $(1-\alpha)100\%$ فترة ثقة للمعلمة θ . تعتبر فترة الثقة الأطول ، هي الأكثر ثقة في الحصول على فترة تحتوي على المعلمة المجهولة . بالطبع يكون من الأفضل الحصول على 95% فترة ثقة أن متوسط العمر لنوع معين من البطاريات ينحصر بين 8 و 5 أسابيع عن الحصول على 99% فترة ثقة أن متوسط العمر ينحصر بين 11 و 2 أسبوعا . دائما يفضل الحصول على فترة قصيرة بدرجة عالية من الثقة . في البنود التالية من هذا الفصل سوف نتناول المقدرات الأكثر كفاءة لمعالم المجتمع الشائعة الاستخدام. باستخدام هذه المقدرات وتوزيعاتها الاحتمالية ، يمكن اشتقاق فترات الثقة المقابلة لها.

(٨-٢) فترة ثقة لمتوسط المجتمع μ

Confidence Interval for Population Mean μ

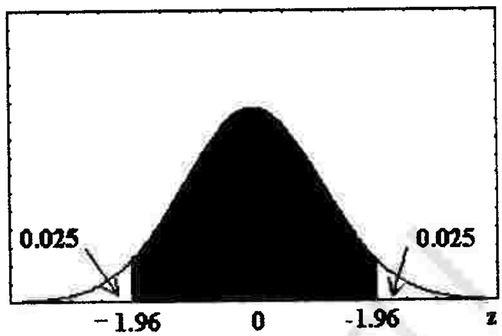
يعتبر الإحصاء $\overline{X}$ هو المقدر الأكثر كفاءة لمعلمة المجتمع μ . التوزيع العيني للإحصاء $\overline{X}$ يرتكز عند μ وتباينه أقل من أي مقدر آخر. وعلى ذلك فمتوسط العينة $\bar{x}$ سوف يستخدم كتقدير بنقطة لمتوسط المجتمع μ . مرة أخرى فإن $\sigma_{\overline{X}}^2=\frac{\sigma^2}{n}$ وعلى ذلك فإن العينة الكبيرة سوف تؤدى إلى قيمة للإحصاء $\overline{X}$ ناتجة من توزيع عيني له تباين صغير. وعلى ذلك فإن $\bar{x}$ تقترب من μ عندما تكون n كبيرة .

الآن سوف نتناول الخطوات المتبقية في إيجاد فترة ثقة لمتوسط المجتمع μ وذلك تحت فرض أن العينة مختارة من مجتمع طبيعي أو، عند عدم تحقق هذا الفرض ،إذا كانت n كبيرة بدرجة كافية. وتبعا للنظريتين (٧-٣) و (٧-٥) فإننا نتوقع أن التوزيع العيني للإحصاء $\overline{X}$ تقريبا يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu_{\overline{X}}=\mu$ وتباين $\sigma_{\overline{X}}^2=\frac{\sigma^2}{n}$. تبعا لذلك فإن المتغير العشوائي الطبيعي القياسي Z سوف ينحصر بين 1.96 , 1.96 وذلك باحتمال 0.95 حيث :

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} .$$

يتضح من شكل (٨-١) أن :

$$P (-1.96 < Z < 1.96) = 0.95.$$



شكل (٨-١)

وبالتعويض عن Z بقيمتها وبضرب كل حد في المتباينة في $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ وطرح $\overline{X}$ من كل حد والضرب في 1- نحصل على :

$$P(\overline{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 0.95 .$$

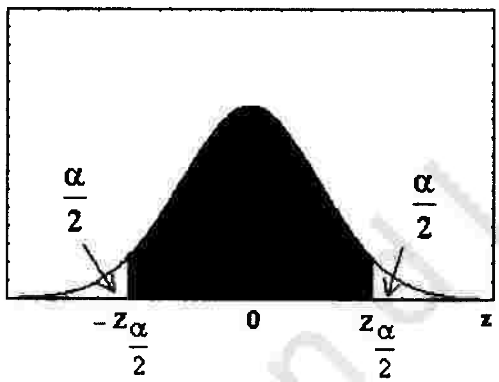
وعلى ذلك يمكن القول أنه باحتمال 95% تحتوى الفترة العشوائية $\overline{X} \pm \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}$ على المعلمة μ. وعلى ذلك نختار عينة عشوائية من الحجم n من المجتمع الذي تباينه σ^2 معلوم ونحسب متوسط العينة $\overline{x}$ وذلك للحصول على 95% فترة ثقة على الشكل :

$$\overline{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} .$$

حيث 1.96 تمثل القيمة الحرجة المقابلة لمعامل الثقة 0.95 وحدي الثقة هما $\overline{x} - 1.96\sigma/\sqrt{n}$, $\overline{x} + 1.96\sigma/\sqrt{n}$ حيث σ معلومة.

الآن سوف نشرح بصورة عامة طريقة الحصول على $(1-\alpha)100\%$ فترة ثقة حيث $0<\alpha<1$. يتضح من شكل (٨-٢) أن $z_{\frac{\alpha}{2}}$ تمثل قيمة z التي تكون المساحة على يمينها تساوي $\frac{\alpha}{2}$. وعلى ذلك يمكن كتابة :

$$P(-z_{\frac{\alpha}{2}}<Z<z_{\frac{\alpha}{2}})=1-\alpha \ .$$



شكل (٨-٢)

وبالتعويض عن Z بقيمتها وبضرب كل حد في المتباينة في $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ وطرح $\bar{X}$ من كل حد والضرب في 1- نحصل على :

$$P(\bar{X}-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})=1-\alpha \ .$$

وعلى ذلك نختار عينة عشوائية من الحجم n من المجتمع الذي تباينه σ^2 معلوم ونحسب متوسط العينة $\bar{x}$ وذلك للحصول على $(1-\alpha)100\%$ فترة ثقة على الشكل :

$$\bar{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ .$$

للعينات العشوائية الصغيرة المختارة من مجتمعات غير طبيعية ، لا نتوقع أن درجة ثقتنا تكون مضبوطة. للعينات من الحجم $n \geq 30$ وبصرف النظر عن شكل المجتمع فإن نظرية المعاينة تؤمن لنا نتائج جيدة.

لحساب $(1-\alpha)100\%$ فترة ثقة للمعلمة μ نفترض أن σ معلومة ولكن عموما لا يتوافر هذا الفرض ، في هذه الحالة يمكن الاستعاضة عن σ بالانحراف المعياري للعينة s بشرط أن $n \geq 30$.

مثال (٨-١) اختيرت عينة عشوائية من 100 سيجارة من نوع معين وكان متوسط النيكوتين فيها 25 ملليجراما والانحراف المعياري هو 6 ملليجرامات . أوجد فترة ثقة لمتوسط النيكوتين في السجائر من هذا النوع بدرجة ثقة 95% و 99% .

الحل . التقدير بنقطة للمعلمة μ هو $\bar{x} = 25$ وحيث أن حجم العينة كبير ، فإن الانحراف المعياري للمجتمع σ يمكن الاستعاضة عنه بالانحراف المعياري للعينة $s=6$. من جدول التوزيع الطبيعي القياسي في ملحق (٣) فإن قيمة z التي على يمينها مساحة قدرها 0.025 وعلى يسارها مساحة قدرها 0.975 هي $z_{0.025} = 1.96$. وعلى ذلك فإن 95% فترة ثقة سوف تكون على الشكل :

$$25 - \frac{(1.96)(6)}{\sqrt{100}} < \mu < 25 + \frac{(1.96)(6)}{\sqrt{100}}$$

والتي تختزل إلى :

$$23.824 < \mu < 26.176$$

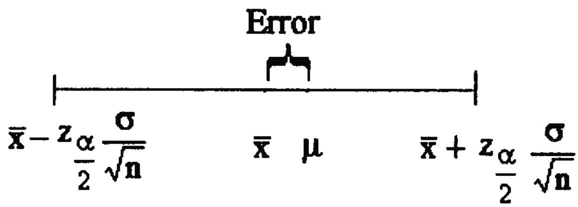
للحصول على 99% فترة ثقة وباستخدام جدول التوزيع الطبيعي القياسي في ملحق (٣) فإن قيمة z التي على يمينها مساحة قدرها 0.005 وعلى يسارها مساحة قدرها 0.995 هي $z_{.005}=2.575$ وعلى ذلك فإن 99% فترة ثقة تكون على الشكل :

$$25 - \frac{(2.575)(6)}{\sqrt{100}} < \mu < 25 + \frac{(2.575)(6)}{\sqrt{100}}$$

والتي تختزل إلى :

$$23.455 < \mu < 26.545 .$$

تمدنا $(1-\alpha)100\%$ فترة الثقة بتقدير لدقة التقدير بنقطة الذي نحصل عليه. إذا وقعت μ عند مركز الفترة فإن $\bar{x}$ تقدر μ بدون أخطاء. في معظم الحالات فإن $\bar{x}$ لا تساوى μ وبالتالي نحصل على تقدير بنقطة ، $\bar{x}$ ، بخطأ error . حجم هذا الخطأ يساوي الفرق بين $\bar{x}$ و μ. يصل هذا الخطأ إلى اقصاة عندما تكون μ قريبة من إحدى حدي الثقة. أي أن $\bar{x}$ سوف تختلف عن μ بمقدار أقل من $z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ كما يتضح من شكل (٨-٣) .



شكل (٨-٣)

نظرية (٨-١) إذا استخدمت $\bar{x}$ كتقدير لمعلمة المجتمع μ فإنه يكون لدينا $(1-\alpha)100\%$ ثقة أن الخطأ سوف يكون أقل من $z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

في المثال (٨-١) يكون لدينا 99% ثقة أن متوسط العينة $\bar{x} = 25$ يختلف عن المتوسط الحقيقي μ بمقدار أقل من 1.545 .

عادة نرغب في معرفة حجم العينة اللازم للتأكد من أن الخطأ في تقدير μ سوف يكون اقل من قيمة e . تعنى نظرية (٨-١) أننا لا بد من اختيار n بحيث $e = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

نظرية (٨-٢) إذا استخدمت $\bar{x}$ كتقدير للمعلمة μ فإن يكون لدينا $(1-\alpha)100\%$ ثقة أن الخطأ سوف يكون أقل من قيمة معينة e وذلك عندما يحسب حجم العينة من الصيغة التالية :

$$n = \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma}{e} \right)^2.$$

الصيغة السابقة تمكن المرء في تحديد مدي كبر العينة التي يحتاج إليها كي يقدر μ لأي درجة يرغبها من درجات الدقة قبل أخذ أي عينة واحدة شريطة أن تكون قيمة σ معلومة . أما إذا لم يكن المرء على علم بقيمة σ ، فلا بد من أخذ عينة مبدئية ، $n \geq 30$ ،كي يحصل على تقدير للمعلمة σ يمكن استخدامه في الصيغة السابقة لتحديد مدي كبر n الواجب .

مثال (٨-٢) ما هو حجم العينة المطلوب في مثال (٨-١) وذلك للحصول على 95% ثقة أن تقديرنا الذي نحصل عليه يختلف عن μ بقيمة أقل من واحد صحيح.

الحل . الانحراف المعياري $s = 6$ والمحسوب من عينة عشوائية من الحجم $n = 100$. سوف تستخدم s بدلا من σ . من نظرية (٨-٢) فإن :

$$n = \left[\frac{(1.96)(6)}{1}\right]^2 = 138.3 \approx 138.$$

وعلى ذلك يمكن القول أن لدينا 95% ثقة أن العينة العشوائية من الحجم 138 سوف تمدنا بتقدير $\bar{x}$ يختلف عن μ بقيمة أقل من الواحد الصحيح .

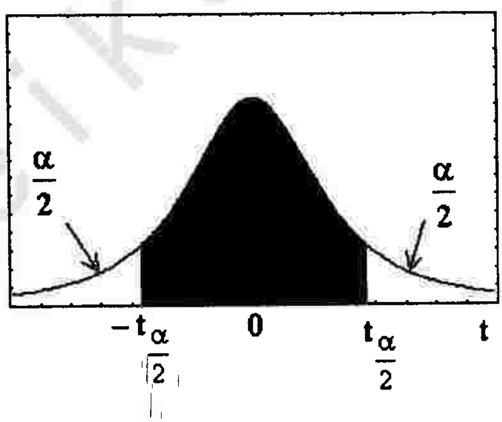
في معظم الأحيان يكون المطلوب تقدير متوسط المجتمع عندما يكون التباين غير معلوم وحجم العينة أقل من 30، فقد تكون التكاليف عاملا محددا لحجم العينة. طالما كان شكل المجتمع (تقريبا) ناقوسى فإنه يمكن حساب فترات الثقة عندما تكون σ^2 غير معلومة وحجم العينة صغير وذلك باستخدام التوزيع العيني للمتغير T ، حيث أن :

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}.$$

طريقة إيجاد $(1-\alpha)100\%$ فترة ثقة في هذه الحالة هي نفسها الطريقة المتبعة في حالة العينات الكبيرة فيما عدا استخدام توزيع t بدلا من التوزيع الطبيعي القياسي.

يتضح من شكل (٨-٤) أن :

$$P(-t_{\frac{\alpha}{2}} < T < t_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha.$$



شكل (٨-٤)

حيث أن $t_{\frac{\alpha}{2}}$ هي قيمة t بدرجة حرية $\nu = (n-1)$ والتي تكون المساحة على يمينها تساوي $\frac{\alpha}{2}$.

ونظرا لخاصية التماثل لتوزيع t فإن مساحة مساوية قدرها $\frac{\alpha}{2}$ تقع على يسار القيمــة $-t_{\frac{\alpha}{2}}$.

بالتعويض عن T بقيمتها فإننا يمكن كتابة :

$$P(-t_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < t_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha.$$

وبضرب كل حد في المتباينة في $\frac{S}{\sqrt{n}}$ وطرح $\overline{X}$ من كل حد والضرب في 1- نحصل على :

$$P(\overline{X} - t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}) = 1-\alpha \ .$$

لعينة خاصة من الحجم n ، يحسب المتوسط $\bar{x}$ والانحراف المعياري s ويتم الحصــول على $(1-\alpha)100\%$ فترة ثقة كما يأتي :

$$\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \ .$$

مثال (٨-٣) في اختبار للزمن الذي يستغرقه تجميع ماكينة معينة وجد أن الزمن الذي اســتغرقه تجميع 6 ماكينات هو على التوالي : 12, 13, 11, 5, 10, 12 (مقاسه بالدقائق). أوجد 95% فترة ثقة لمتوسط المجتمع μ وذلك تحت فرض أن الزمن (في هذا المثال) يتبع توزيعاً طبيعياً.

الحل . متوسط العينة والانحراف المعياري للبيانات المعطـــاة همـــا : $\bar{x} = 10.5 \ , \ s = 2.881$.

باستخدام جدول توزيع t في ملحق (٤) فإن $t_{0.025} = 2.571$ وذلك عند درجات حريه = ν 5 . وعلى ذلك 95% فترة ثقة للمعلمة μ هي :

$$10.5 - \frac{(2.571)(2.881)}{\sqrt{6}} < \mu < 10.5 + \frac{(2.571)(2.881)}{\sqrt{6}}$$

التي تختزل إلى :

$$7.476 < \mu < 13.524.$$

(٨-٣) فترة ثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين $\mu_1 - \mu_2$

Confidence Interval for the Difference Between two Populations Means

إذا كان لدينا مجتمعان ، المجتمع الأول له متوسط μ_1 وتباين σ_1^2 والمجتمع الثاني له متوسط μ_2 وتباين σ_2^2. التقدير الأكثر كفاءة للفرق بين متوسطين $\mu_1 - \mu_2$ هو الإحصاء $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$. وعلى ذلك ، للحصول على تقدير بنقطة للمعلمة $\mu_1 - \mu_2$ لا بد من اختيار عينة عشوائية من الحجم n_1 من المجتمع الأول وعينة عشوائية من الحجم n_2 من المجتمع الثاني ومستقلة عن العينة الأولي وحساب الفرق بين المتوسطين $\overline{x}_1 - \overline{x}_2$. بفرض أن العينتين المستقلين تم اختيارهما من مجتمعين طبيعيين ، أو في حالة عدم توافر ذلك الفرض ، إذا كان كلا من n_1 و n_2 أكبر من أو يساوي 30 فإنه يمكن إيجاد فترة ثقة للمعلمة $\mu_1 - \mu_2$ تعتمد على التوزيع العيني للإحصاء $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$.

بالرجوع إلى نظرية (٧-٦) فإننا نتوقع أن التوزيع العيني للإحصاء $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ تقريبا يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط :

$$\mu_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2} = \mu_1 - \mu_2$$

وانحراف معياري :

$$\sigma_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

وعلى ذلك فإن المتغير العشوائي الطبيعي القياسي :

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

سوف يقع بين $z_{\frac{\alpha}{2}}$ و $-z_{\frac{\alpha}{2}}$ باحتمال $1-\alpha$. وبالرجوع مرة أخرى إلى شكل (٨-٢) فإنه يمكن كتابة :

$$P(-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha .$$

وباستبدال Z بقيمتها فإن :

$$P\left[-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < z_{\frac{\alpha}{2}}\right]=1-\alpha.$$

وبضرب كل حد في المتباينة في $\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ وطرح $\overline{X}_1-\overline{X}_2$ من كل حد والضرب في 1 - نحصل على :

$$P\left[(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}<\mu_1-\mu_2<\right.$$

$$\left.(\overline{X}_1-\overline{X}_2)+z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]=1-\alpha.$$

لأى عينتين عشوائيتين مستقلتين من الحجم n_2 , n_1 مأخوذتين من مجتمعين تباينهما σ_1^2 , σ_2^2 معلومتين ، فإن $\overline{x}_1-\overline{x}_2$ تحسب ويمكن إيجاد $(1-\alpha)100\%$ فترة ثقة كالآتي :

$$(\overline{x}_1-\overline{x}_2)-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}<\mu_1-\mu_2$$

$$<(\overline{x}_1-\overline{x}_2)+z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}.$$

درجة الثقة تكون مضبوطة عندما تختار العينات من مجتمعات طبيعية. للمجتمعات الغير طبيعية يمكن الحصول على فترات ثقة تقريبية والتي تكون جيدة جدا عندما n_2 , n_1 تزيد عن 30. إذا كانت σ_1^2 , σ_2^2 مجهولتين والعينات المختارة كبيرة بدرجة كافية ، فإنه يمكن استبدال σ_1^2 , σ_2^2 بـ s_1^2 , s_2^2 على التوالي بدون التأثير على فترة الثقة .

مثال (٨-٤) أعطى اختبار في مادة الإحصاء إلى 75 طالبة و 50طالباً. فإذا كان متوسط النقاط من عينة الطالبات $\bar{x}_1 = 80$ بانحراف معياري $s_1=7$. وكان متوسط النقـــاط لعينـــة الطلبـــة $\bar{x}_1 = 70$ بانحراف معياري $s_2=6$. أوجد 95% فترة ثقة لــ $\mu_1 - \mu_2$.

الحل . التقدير بنقطة لــ $\mu_1 - \mu_2$ هو $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 80\text{-}70 = 10$. وحيث أن كلا من n_1 , n_2 كبيرة فإنه يمكن استخدام $s_1=7$ بدلا من σ_1 و $s_2=6$ بدلا من σ_2. باستخدام $\alpha = 0.05$ فإن $z_{0.025} = 1.96$ وذلك من جدول التوزيع الطبيعي في ملحق (٣). وبالتعويض في 95% فترة ثقة لــ $\mu_1 - \mu_2$ التالية :

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2$$

$$< (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}.$$

نحصل على 95% فترة ثقة على الشكل :

$$10 - 1.96\sqrt{\frac{7^2}{75} + \frac{6^2}{50}} < \mu_1 - \mu_2 < 10 - 1.96\sqrt{\frac{7^2}{75} + \frac{6^2}{50}}$$

أو

$$7.703 < \mu_1 - \mu_2 < 12.297.$$

تستخدم الطريقة السابقة لتقدير الفرق بين متوسطين إذا كان σ_1^2 , σ_2^2 معلومتان أو يمكن تقديرهما من عينات كبيرة. إذا كانت أحجام العينات صغيرة ، لابد من استخدام توزيع t للحصول على فترات ثقة والتي تكون صحيحة عندما تكون المجتمعات تقريباً تتبع التوزيع الطبيعي.

بفرض أن $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ فإنه يمكن استخدام s_p^2 كتقدير للتباين العام σ^2.

وباستخدام نظرية (٧-١٠) ، يتضح من شكل (٨-٤) أن :

$$P(-t_{\frac{\alpha}{2}} < T < t_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha.$$

حيث :

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\left(\frac{1}{n_1}\right) + \left(\frac{1}{n_2}\right)}}$$

و $t_{\frac{\alpha}{2}}$ هي قيمة t ، بدرجات حرية $\nu = n_1+n_2-2$ ، والتي المساحة على يمينها تساوي $\frac{\alpha}{2}$.

باستبدال T بقيمتها يمكن كتابة :

$$P\left[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-t_{\frac{\alpha}{2}}S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} < \mu_1-\mu_2 < (\bar{X}_1-\bar{X}_2)+t_{\frac{\alpha}{2}}S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right]=1-\alpha.$$

لأي عينتين عشوائيتين مستقلتين من الحجم n_1 , n_2 يتم اختيارهما من مجتمعين طبيعيين فإن الفرق بين متوسطي العينتين ، $\bar{x}_1-\bar{x}_2$ ، والتباين العام للعينة s_p^2 يتم حسابهما واستخدامهما في إيجاد $100(1-\alpha)\%$ فترة ثقة لـ $\mu_1-\mu_2$ على الشكل :

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-t_{\frac{\alpha}{2}}s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} < \mu_1-\mu_2 < (\bar{x}_1-\bar{x}_2)+t_{\frac{\alpha}{2}}s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\ .$$

مثال (٨-٥) اختيرت مجموعتان من الأرانب ، الأولى من 13 أرنباً وأعطيت الغذاء A والثانية من 15 أرنباً وأعطيت الغذاء B وكانت الزيادة في الوزن بعد فترة معينة هي :

A: 35, 30, 30, 23, 21, 12, 24, 23, 33, 27, 29, 25, 21.
B: 20, 17, 34, 31, 29, 39, 30, 46, 7, 21, 33, 43, 21, 34, 20.

أوجد 95% فترة ثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين ، وذلك تحت فرض أن المجتمعين تقريباً يتبعان التوزيع الطبيعي حيث $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

الحل .

$$n_1=13,\quad \bar{x}_1=25.62,\quad s_1=6.05,$$
$$n_2=15,\quad \bar{x}_2=28.33,\quad s_2=10.58,$$

لإيجاد فترة ثقة لـ $\mu_1-\mu_2$ سوف نستخدم التقدير بنقطة $\bar{x}_1-\bar{x}_2=25.62-28.33=-2.71$

التباين العام s_p^2 هو :

$$s_p^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$$

$$= \frac{(12)(6.05)^2 + (14)(10.58)^2}{13+15-2}$$
$$= 77.1669.$$

بأخذ الجذر التربيعي للتباين العام فإن **s_p=8.784**. باستخدام $\alpha = .025$ فـــإن **$t_{.025}$=2.056** تستخرج من جدول توزيع **t** في ملحق (٤) عند درجات حريــة **$v = 13 + 15 - 2 = 26$**.

بالتعويض في الصيغة التالية :

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\frac{\alpha}{2}} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2$$
$$< (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\frac{\alpha}{2}} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} ,$$

فإن **95%** فترة ثقة لـــ $\mu_1 - \mu_2$ هي :

$$-2.71 - (2.056)(8.784)\sqrt{\frac{1}{13} + \frac{1}{15}} < \mu_1 - \mu_2 <$$
$$-2.71 + (2.056)(8.784)\sqrt{\frac{1}{13} + \frac{1}{15}}.$$

والتي يمكن اختزالها الى :

$$-9.553 < \mu_1 - \mu_2 < 4.133.$$

تفترض الطريقة السابقة للحصول على فترات ثقة لـــ $\mu_1 - \mu_2$ أن المجتمعين طبيعيين وأن $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. أيضا يمكن الحصول على نتائج جيدة إذا كانت $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ وذلك تحـــت شرط أن المجتمعين طبيعيين و $n_1 = n_2$.

الآن وعند الرغبة في إيجاد $(1-\alpha)100\%$ فترة ثقة لـــ $\mu_1 - \mu_2$ في حالة العينـــات الصغيرة عندما تكون $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ وعند صعوبة الحصول على عينات ذات أحجام متساوية. الإحصاء الأكثر إستخداماً في هذه الحالة هو :

$$T' = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right) + \left(\frac{S_2^2}{n_1}\right)}}$$

والذي تقريباً يتبع توزيع t بدرجات حرية ν ، حيث :

$$\nu = \frac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\left[\dfrac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{\left(\dfrac{s_2^2}{n_1}\right)^2}{n_2 - 1}\right]}$$

وبما أن ν نادراً ما تكون عدد صحيح ، فإننا نقربها الى أقرب رقم صحيح. وعلى ذلك يمكن كتابة :

$$P(-t_{\frac{\alpha}{2}} < T' < t_{\frac{\alpha}{2}}) \approx 1 - \alpha.$$

حيث $t_{\frac{\alpha}{2}}$ هي قيمة لتوزيع t ، بدرجات حرية ν ، والتي المساحة على يمينـــها تســاوى $\frac{\alpha}{2}$.

بالتعويض عن T' بقيمتها في المتباينة وإتباع الخطوات نفسها المتبعة في الحالات الســابقة يمكــن الحصول على $(1-\alpha)100\%$ فترة ثقة لــ $\mu_1 - \mu_2$ كالتالي :

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2$$

$$< (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}.$$

مثال (٨ –٦) خلال 20 سنة ماضية كان متوسط سقوط المطر في المنطقة A في قطر ما خـــلال شهر يناير 1.8 بوصة بانحراف معياري 0.4 بوصة. بينما كان متوسط سقوط المطر في المنطقــة B من نفس القطر خلال 15 سنة ماضية 1.03 بوصة بانحراف 0.25 بوصة . أوجد %95 فترة ثقة لــ $\mu_1 - \mu_2$ وذلك تحت فرض أن المفـــردات مـــأخوذة مـــن مجتمعـــين طبيعيـــين حيـــث $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

الحل . المنطقة : A فإن $s_1 = 0.4, \quad \bar{x}_1 = 1.8, \quad n_1 = 20,$

وللمنطقة B فإن $s_2 = 0.25, \quad \bar{x}_2 = 1.03, \quad n_2 = 15,$

وعلى ذلك 95% فترة ثقة لـــ $\mu_1 - \mu_2$ حيث $\sigma_2^2 \neq \sigma_1^2$ و $n_1 \neq n_2$ يمكـــن الحصول عليها بالاعتماد على توزيع t بدرجة حرية تحسب كالآتي :

$$\nu = \frac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\left[\dfrac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{\left(\dfrac{s_2^2}{n_1}\right)^2}{n_2 - 1}\right]}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{.4^2}{20} + \dfrac{.25^2}{15}\right)^2}{\left[\dfrac{\left(\dfrac{.4^2}{20}\right)^2}{19}\right] + \left[\dfrac{\left(\dfrac{.25^2}{15}\right)^2}{14}\right]} = 32.11 \approx 32.$$

وعلى ذلك $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 1.8 - 1.03 = 0.77$ وتحت فرض أن $\alpha = 0.05$ ومن الجدول في ملحق (٤) فإن $t_{0.025} = 2.042$ بدرجات حرية $\nu = 32$. وبالتعويض في الصيغة التالية :

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2$$

$$< (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} .$$

يمكن إيجاد 95% فترة ثقة (تقريبية) كالتالي :

$$0.77 - 2.042\sqrt{\frac{.4^2}{20} + \frac{.25^2}{15}} < \mu_1 - \mu_2 <$$

$$0.77 + 2.042\sqrt{\frac{.4^2}{20} + \frac{.25^2}{15}}.$$

والتي تختزل إلى :

$$\mathbf{0.545} < \mu_1 - \mu_2 < \mathbf{0.995} .$$

وأخيراً سوف نناقش في هذا البند طريقة تقدير الفرق بين متوسطين عندما تكون العينتين غير مستقلين. فعلى سبيل المثال عندما تأخذ عينة واحدة ونحصل على قراءات لمفرداتها ثم نضع هذه العينة تحت مؤثر ونعود ونأخذ قراءات أخري لها ، وبمقارنة مجموعتي القراءتين لنفس المفردات يمكننا استنتاج تأثير هذا العامل أو المؤثر. لنفرض مثلا أننا نريد معرفة تأثير دواء على قراءات ضغط الدم المرتفع وأخذنا لذلك عينة من 10 شخصاً وقرأنا ضغط الدم لكل منهما ثم أعطينا كل شخص دواء له تأثير على ضغط الدم المرتفع وأعدنا أخذ القراءات مرة أخرى. في هذه الحالة نقول أننا أمام عينتين غير مستقلين أو عينتين مزدوجتين **paired samples**. أزواج المشاهدات سوف تكون $(x_1-y_1),(x_2-y_2),\ldots,(x_n-y_n)$ الفروق لازواج المشاهدات سوف تكون $d_1=(x_1-y_1),d_2=(x_2-y_2),\ldots,d_n=(x_n-y_n)$.
هذه الفروق تمثل قيم للمتغير العشوائي **D**. التقدير بنقطة لمتوسط المجتمع $\mu_D=\mu_1-\mu_2$ يعطى من $\bar{d}$ والذي يساوى متوسط الفروق في العينة. وبما أن $\bar{d}$ تمثل قيمة للإحصاء $\bar{D}$ كما أن التباين للفروق هو s_d^2 حيث :

$$s_d^2=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}d_i^2-\frac{(\sum_{i=1}^{n}d_i)^2}{n}\right]$$

يمثل قيمة للمتغير العشوائي S_d^2 فإن $(1-\alpha)100\%$ فترة ثقة للمعلمة μ_D يمكن الحصول عليها باستخدام نظرية (٧-١١) والتي تسمح بكتابة :

$$P(-t_{\frac{\alpha}{2}} < T < t_{\frac{\alpha}{2}})=1-\alpha.$$

حيث :

$$T=\frac{\bar{D}-\mu_D}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}}$$

و $t_{\frac{\alpha}{2}}$ هي قيمة لتوزيع **t** ، بدرجات حرية $v=n-1$ والتي تكون المساحة على يمينها تساوى $\frac{\alpha}{2}$. الآن سوف نتبع نفس الخطوات المتبعة في الحالات السابقة وذلك للحصول على $(1-\alpha)100\%$ فترة ثقة كالآتي :

$$\bar{d}-t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s_d}{\sqrt{n}}<\mu_D<\bar{d}+t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s_d}{\sqrt{n}}.$$

حيث $\bar{d}$ و s_d هما المتوسط والانحراف المعياري للفروق لعدد n من ازواج المشاهدات و $t_{\frac{\alpha}{2}}$ هي قيمة لتوزيع t بدرجات حرية $v = n - 1$ والتي تكون المساحة على يمينها تساوى $\frac{\alpha}{2}$.

مثال (٨-٧) أخذت عينة عشوائية من 10 تلاميذ من إحدى المدارس ودونت أوزانهم ثم أعطي كل منهم كوباً من اللبن صباحاً وآخر ظهراً وذلك لمدة ثلاثة شهور متتالية . ثم دونت أوزانهم فكانت النتائج كالآتي :

الوزن قبل تعاطي اللبن	129	124	126	139	133	136	139	135	137	140
الوزن بعد تعاطي اللبن	130	126	129	140	136	134	141	140	138	141

المطلوب إيجاد 99% فترة ثقة للفرق الحقيقي $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$.

الحل . التقدير بنقطة لـ μ_D هو $\bar{d} = -1.7$. التباين s_d^2 لفروق العينة هو :

$$s_d^2 = \frac{1}{n-1}\left[\Sigma d_i^2 - \frac{(\Sigma d_i)^2}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{9}\left[59 - \frac{(-17)^2}{10}\right] = 3.344.$$

وبأخذ الجذر التربيعي للمقدار s_d^2 فإن $s_d=1.829$. باستخدام $\alpha = 0.01$ فإن $t_{0.005}=3.25$ والمستخرجة من جدول توزيع t في ملحق (٤) عند درجات حرية $v = n - 1 = 9$. وبالتعويض في الصيغة التالية :

$$\bar{d}-t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s_d}{\sqrt{n}}<\mu_D<\bar{d}+t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s_d}{\sqrt{n}}.$$

نحصل على 99% فترة ثقة كالتالي :

$$-1.7-(3.25)\frac{(1.829)}{\sqrt{10}}<\mu_D<-1.7+(3.25)\frac{(1.829)}{\sqrt{10}}$$

والتي تختزل الى :

$$-3.58 < \mu_D < 0.18.$$

(٨-٤) فترة ثقة للنسبة Confidence Interval for Proportion

أوضحنا في الفصل السابع أن الإحصاء $\overline{X}$ ليس دائما المطلوب في مجـــال الإحصـــاء. ففي بعض الأحيان يكون الاهتمام بمعرفة نسبة وجود صفة معينة في مجتمع ما مثل نسبة المصـــابين بتسوس الأسنان أو نسبة النباتات المصابة وهكذا. التقدير بنقطة الأكثر كفاءة لنسبة صفة ما p هو الإحصاء $\hat{P} = \frac{X}{n}$. وعلى ذلك ، فإن نسبة العينة $\hat{p} = \frac{x}{n}$ سوف تستخدم كتقدير بنقطـــة للمعلمة p. من الفصل السابق ومن نظرية (٧-٧) نعلم أن $\hat{p}$ تقريباً تتبـــع توزيعـــاً طبيعيـــاً متوسطة $\mu_{\hat{p}} = p$ وتباينه $\sigma^2_{\hat{p}} = \frac{pq}{n}$. وعلى ذلك فإن :

$$P(-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha \ .$$

حيث :

$$Z = \frac{\hat{P}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

و $z_{\frac{\alpha}{2}}$ هي قيمة للمتغير العشوائي الطبيعي القياسي Z والتي المساحة على يمينها تساوى $\frac{\alpha}{2}$.

بالتعويض عن Z بقيمتها فإنه يمكن كتابة :

$$P(-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\hat{P}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} < z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha \ .$$

وبضرب كل حد في المتباينة في $\sqrt{\frac{pq}{n}}$ وطرح $\hat{p}$ والضرب في 1- ، نحصل على :

$$P(\hat{P} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}} < p < \hat{P} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}) = 1-\alpha \ .$$

وحيث أن p عادة ما تكون مجهولة لذلك تستخدم $\hat{p}$ بدلا من p وعلى ذلك فإن :

$$P(\hat{P} - z_{\frac{\alpha}{2}} < \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} < p < \hat{P} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}) \simeq 1-\alpha \ .$$

لعينة عشوائية خاصة من الحجم n (تبعا لقواعد Cochran)كما ذكرنا في الفصـــل الســـابع نحسب نسبة العينة $\hat{p}=\frac{x}{n}$ ويتم الحصول على $(1-\alpha)100\%$ فترة ثقة للمعلمة p كمايلي :

$$\hat{p}-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}<p<\hat{p}+z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\ .$$

مثال (٨-٨) يقوم مصنع بإنتاج منتج على درجة عالية من الجودة ويرغب المسئول في المصنـــع في تقدير نسبة الوحدات المنتجة التالفة. فإذا اختيرت عينة عشوائية من 200 وحدة ووجـــد أن بينهم 40 وحدة تالفة ، أوجد 95% فترة ثقة للمعلمة p.

الحل . التقدير بنقطة للمعلمة p هو $\hat{p}=\frac{40}{200}=0.2$. باستخدام جدول التوزيع الطبيعـــي في ملحق (٣) فإن $z_{0.025}=1.96$. بالتعويض في الصيغة التالية :

$$\hat{p}-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}<p<\hat{p}+z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}.$$

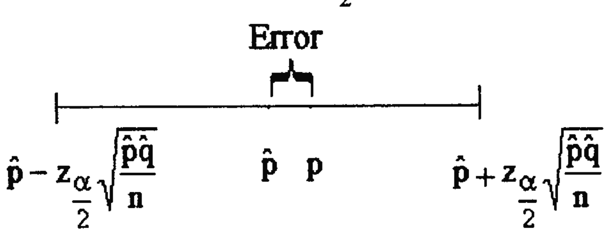
يمكن الحصول على 95% فترة ثقة كالتالي :

$$0.2-1.96\sqrt{\frac{(0.2)(0.8)}{200}}<p<0.2+1.96\sqrt{\frac{(0.2)(0.8)}{200}}$$

والتي يمكن اختزالها الى :

$$0.145\ <\ p\ <\ 0.255\ .$$

إذا وقعت p عند مركز $(1-\alpha)100\%$ فترة الثقة ، فإن $\hat{p}$ سوف تقـــدر p بـــدون أخطاء. في معظم الأحوال ، $\hat{p}$ لا تساوي p وعلى ذلك يكون هناك فرق بين $\hat{p}$ و p والـــذي يمثل الخطأ. هذا الخطأ يصل الى أقصاه عندما تكون p قريبة من إحدى حديّ الثقة. وعلى ذلك $\hat{p}$ سوف تختلف عن p بقيمة أقل من $z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$ كما يتضح من شكل (٨-٥).



شكل (٨-٥)

نظرية (٨–٣) إذا استخدمت $\hat{p}$ كتقدير للمعلمة p فإنه يكون لدينا $(1-\alpha)100\%$ ثقة أن الخطأ سوف يكون أقل من $z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$.

عند الرغبة في تقدير حجم العينة اللازم للتأكد من أن الخطأ في تقدير p اقل من مقدار معين e وتبعا لنظرية (٨–٣) فلا بد من اختيار n بحيث تكون $e = z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$.

نظرية (٨–٤) إذا استخدمت $\hat{p}$ كتقدير بنقطة للمعلمة p فإنه يكون لدينا $(1-\alpha)100\%$ ثقة أن الخطأ سوف يكون أقل من قيمة معينة e عندما يحسب حجم العينة من الصيغة التالية :

$$n = \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}^2 \;\hat{p}\hat{q}}{e^2}$$

وحيث أن $\hat{p}$ في الصيغة السابقة لا بد أن تقدر من عينة ، لذلك لابد من اختيار عينة مبدئية كبيرة وحساب نسبة العينة $\hat{p}$ منها.

مثال (٨–٩) أحسب القيمة العظمى للخطأ في التقدير e عند 95% للمثال (٨–٨).

الحل . حيث e تعطي بالعلاقة :

$$\mathbf{e} = \mathbf{z}_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

وحيث أن $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96 \quad , \quad \hat{p} = 0.2 \quad , \quad \hat{q} = 0.8$ **فإن:**

$$e = 1.96\sqrt{\frac{(0.2)(0.8)}{200}} = 0.0554.$$

مثال (٨–١٠) في عينة عشوائية من 500 مواطن في مجتمع سكاني ما ، وجد منهم 270 مواطناً يحبون أن يضاف الى مياههم قليل من الفلور. المطلوب :

(أ) إيجاد 95% فترة ثقة لنسبة المجتمع الذين يحبذون إضافة الفلور.

(ب) تقدير حجم العينة التي يمكننا التأكد منها باحتمال 95% من أن الخطأ لا يتجاوز 0.05.

الحل . (أ) التقدير بنقطة للمعلمة p هو $\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{270}{500} = 0.54$ **. باستخدام جدول التوزيع الطبيعي القياسي في ملحق (٣) فإن $z_{0.025} = 1.96$ وبالتعويض في الصيغة التالية :**

$$\hat{p}-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}<p<\hat{p}+z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}.$$

يمكن الحصول على 95% فترة ثقة كالتالي :

$$0.54-1.96\sqrt{\frac{(0.54)(0.46)}{500}}<p<0.54+1.96\sqrt{\frac{(0.54)(0.46)}{500}}$$

والتي تختزل إلى :

$$\mathbf{0.496 < p < 0.584.}$$

(ب) باعتبار الأشخاص الذين عددهم 500 يمثلون عينة عشوائية مبدئية حيث أن $\hat{p}=0.54$ وباستخدام نظرية (٨-٤) فإن :

$$n=\frac{(1.96)^2(0.54)(0.46)}{(0.05)^2}=381.70$$

$$\approx 382.$$

(٨-٥) فترة ثقة للفرق بين نسبتين

Confidence Interval for the Difference Between Two Proportions

المقدر بنقطة الأكثر كفاءة للفرق بين نسبتين ، p_1-p_2، هو الإحصاء $\hat{P}_1-\hat{P}_2$. وعلى ذلك ، للحصول على تقدير بنقطة لـ p_1-p_2 سوف تختار عينتين عشوائيتين مستقلتين من الحجم n_2, n_1 وحساب النسبة للصفة موضع الدراسة في كل عينة ، $\hat{p}_1=\frac{x_1}{n_1}, \hat{p}_2=\frac{x_2}{n_2}$، حيث x_2 , x_1 يمثلان عدد المفردات الذين يملكون الصفة موضع الاهتمام في العينتين على التوالي. يتم حساب الفرق $\hat{p}_1-\hat{p}_2$. فترة ثقة لـ $\hat{P}_1-\hat{P}_2$ يمكن الحصول عليها بالاعتماد على التوزيع العيني للإحصاء $\hat{P}_1-\hat{P}_2$ والذي تقريباً ، تبعا لنظرية (٧-٨) ، يتبع توزيعاً طبيعياً بمتوسط :

$$\mu_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}=\mu_1-\mu_2$$

وانحراف معياري :

$$\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}=\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}}.$$

وعلى ذلك يمكن كتابة :

$$P(-z_{\frac{\alpha}{2}}<Z<z_{\frac{\alpha}{2}})=1-\alpha,$$

حيث أن :

$$Z=\frac{(\hat{P}_1-\hat{P}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}}}$$

وحيث $z_{\frac{\alpha}{2}}$ هي قيمة لمنحنى التوزيع الطبيعي القياسي والتي تكون المساحة على يمينها تساوى $\frac{\alpha}{2}$. بالتعويض عن Z بقيمتها يمكن كتابة :

$$P\left[-z_{\frac{\alpha}{2}}<\frac{(\hat{P}_1-\hat{P}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}}}<z_{\frac{\alpha}{2}}\right]=1-\alpha.$$

وبضرب كل حد في المتباينة في $\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}}$ وطرح $\hat{P}_1-\hat{P}_2$ والضرب في -1 نحصل على :

$$P\left[(\hat{P}_1-\hat{P}_2)-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}}<p_1-p_2\right.$$
$$\left.<(\hat{P}_1-\hat{P}_2)+z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}}\right]=1-\alpha.$$

إذا كانت كلا من n_2, n_1 كبيرة فإنه يمكن استبدال $\hat{p}_1-\hat{p}_2$ بتقديراهما $\hat{p}_1=\frac{x_1}{n_1}, \hat{p}_2=\frac{x_2}{n_2}$ وعلى ذلك فإن :

$$P\left[(\hat{P}_1-\hat{P}_2)-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}<(p_1-p_2)\right.$$

$$\left.<(\hat{P}_1-\hat{P}_2)+z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}\right]\approx 1-\alpha.$$

وبالتالي يمكن الحصول على $(1-\alpha)100\%$ فترة ثقة للفرق بين نسبتين كالتالي :

$$(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}<(p_1-p_2)$$

$$<(\hat{p}_1-\hat{p}_2)+z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}.$$

مثال (٨ – ١١) في عينة من 2000 من الرجال و 5000 من النساء الذين يشاهدن برنامجا تليفزيونيا يوميا وجد أن 1100 من الرجال و 2300 من النساء يفضلون هذا البرنامج. أوجد 95% فترة ثقة للفرق بين نسبة كل من الرجال ونسبة كل من النساء الذين يشاهدون هذا البرنامج ويفضلونه.

الحل . بفرض أن p_1-p_2 النسبتين الحقيقتين وعلى ذلك

$$\hat{p}_2=\frac{2300}{5000}=0.46 \quad , \quad \hat{p}_1=\frac{1100}{2000}=0.55$$

وعلى ذلك التقدير بنقطة لـ p_1-p_2 هو $\hat{p}_1-\hat{p}_2$ $=0.55-0.46=.09$.باستخدام جدول التوزيع الطبيعي القياسي في ملحق (٣) فإن $z_{0.025}=1.96$ وبالتعويض في الصيغة التالية :

$$(\hat{p}_1-\hat{p}_2)-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}<p_1-p_2$$

$$<(\hat{p}_1-\hat{p}_2)+z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}.$$

فإن :

$$0.09-1.96\sqrt{\frac{(0.55)(0.45)}{2000}+\frac{(0.46)(0.54)}{5000}}<p_1-p_2$$

$$<0.09+1.96\sqrt{\frac{(0.55)(0.45)}{2000}+\frac{(0.46)(0.54)}{5000}},$$

والتي تختزل الى :

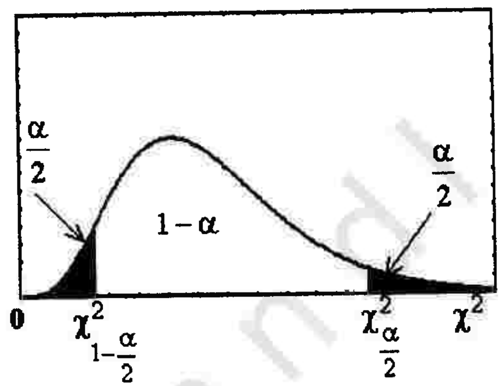
$$\mathbf{0.0642<p_1-p_2<0.1158.}$$

(٨–٦) فترة ثقة للتباين Confidence Interval for the Variance

التقدير بنقطة لتباين المجتمع σ^2 نحصل عليه من تباين العينة. وعلى ذلك يعتبر S^2 مقدر للمعلمة σ^2. التقدير بفترة للمعلمة σ^2 يمكن الحصول عليه باستخدام الإحصاء :

$$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

وبالرجوع إلى نظرية (٧-١٢) فإن الإحصاء X^2 له توزيع χ^2 بدرجات حرية n-1 وذلك عندما تختار العينة من توزيع طبيعي. وبالرجوع الى شكل (٨-٦).



شكل (٨-٦)

يمكن كتابة :

$$P\left[\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} < X^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha.$$

حيث $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$ و $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$ هما قيمتان لتوزيع χ^2 بدرجات حريةn-1 والتي المساحة على يمين $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$ تساوى $\frac{\alpha}{2}$، والمساحة على يمين $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$ تساوي $1-\frac{\alpha}{2}$. بالتعويض عن X^2 بقيمتها يمكن كتابة :

$$P\left[\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha.$$

بقسمة كل حد في المتباينة على $(n-1)\,S^2$ ، وعكس كل حد نحصل على :

$$P\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right] = 1-\alpha.$$

لعينة عشوائية خاصة من الحجم n ، فإن تباين العينة s^2 يحسب ويمكن الحصول على $(1-\alpha)100\%$ فترة ثقة للمعلمة σ^2 كما يلي :

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}.$$

مثال (٨-١٢) تسلم أحد التجار كمية كبيرة من بطاريات السيارات المنتجة بواسطة مصنع جديد وتم اختيار عينة عشوائية من البطاريات التي تسلمها التاجر وتمت تجربتها فكانت أعمارها بالشهر هي :

26.9	28.5	33.6	28.0	23.9
28.7	29.3	29.1	35.9	35.2

أوجد 99% فترة ثقة للمعلمة σ^2 .

الحل . أولا نحصل على تباين العينة s^2 وهو :

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{9}\left[9076.87 - \frac{(299.1)^2}{10}\right] = 14.53.$$

باستخدام جدول توزيع χ^2 في ملحق (٥) بدرجات حرية $\nu = n-1 = 9$ فإن :

$$\chi^2_{0.995} = 1.735 \quad , \quad \chi^2_{0.005} = 23.587$$

بالتعويض في الصيغة التالية :

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}$$

يمكن الحصول على فترة ثقة كالتالي :

$$\frac{(9)(14.53)}{23.587} < \sigma^2 < \frac{(9)(14.53)}{1.735}$$

والتي يمكن اختزالها الى

$$5.544 < \sigma^2 < 75.372.$$

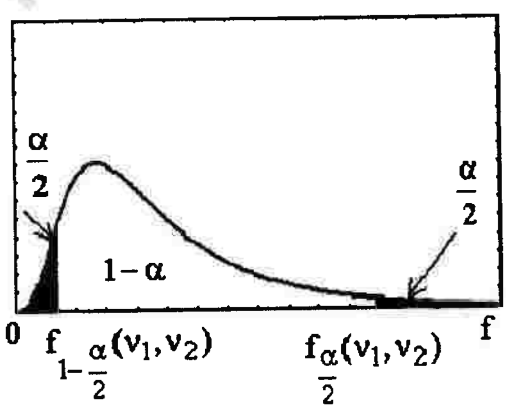
(٨-٧) فترة ثقة لنسبة تباينين

Confidence Interval for the Ratio of two variances

التقدير بنقطة لنسبة تبايني مجتمعين ، σ_1^2/σ_2^2 ، يمكن الحصول عليه من النسبة ، s_1^2/s_2^2، لتبايني عينتين. وعلى ذلك يعتبر S_1^2/S_2^2 مقدر للنسبة σ_1^2/σ_2^2. فإذا كان لدينا مجتمعان الأول يتبع توزيعاً طبيعياً متوسطة μ_1 وتباينه σ_1^2 والثاني يتبع توزيعاً طبيعياً متوسطة μ_2 وتباينه σ_2^2، فإنه يمكن الحصول على $(1-\alpha)100\%$ فترة ثقة لـ σ_1^2/σ_2^2 باستخدام الإحصاء :

$$F = \frac{\sigma_2^2 \; S_1^2}{\sigma_1^2 \; S_2^2}.$$

تبعا لنظرية (٧-١٣) فإن المتغير العشوائي F له توزيع F بدرجات حرية $v_1 = n_1 - 1$, $v_2 = n_2 - 1$. وعلى ذلك يمكن كتابة (كما يتضح من شكل (٨-٧).



شكل (٨-٧)

$$P\left[f_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu_1,\nu_2) < F < f_{\frac{\alpha}{2}}(\nu_1,\nu_2)\right] = 1-\alpha.$$

حيث $f_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu_1,\nu_2)$ ، $f_{\frac{\alpha}{2}}(\nu_1,\nu_2)$ هما قيمتان لتوزيع F بدرجات حريـــة ν_2 ، ν_1 على التوالي (كما يتضح من شكل (٨-٧)).وبالتعويض عن F بقيمتها فإن :

$$P\left[f_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu_1,\nu_2) < \frac{\sigma_2^2\,S_1^2}{\sigma_1^2\,S_2^2} < f_{\frac{\alpha}{2}}(\nu_1,\nu_2)\right] = 1-\alpha.$$

بضرب كل حد في المتباينة في S_2^2/S_1^2 وعكس كل حد نحصل على :

$$P\left[\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{f_{\frac{\alpha}{2}}(\nu_1,\nu_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{f_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu_1,\nu_2)}\right] = 1-\alpha.$$

نتائج نظرية (٧-١٤) سوف تساعدنا في استبدال $f_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu_1,\nu_2)$ بـــ $f_{\frac{\alpha}{2}}(\nu_2,\nu_1)$

وعلى ذلك :

$$P\left[\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{f_{\frac{\alpha}{2}}(\nu_1,\nu_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2} f_{\frac{\alpha}{2}}(\nu_2,\nu_1)\right] = 1-\alpha.$$

لأي عينتين عشوائيتين مستقلتين من الحجم n_2, n_1 مأخوذتين من مجتمعين طبيعيـــين ، فإن النسبة s_1^2/s_2^2 تحسب ويتم الحصول على $(1-\alpha)100\%$ فترة ثقة كما يلي :

$$\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{f_{\frac{\alpha}{2}}(\nu_1,\nu_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2} f_{\frac{\alpha}{2}}(\nu_2,\nu_1).$$

مثال (٨-١٣) إذا كانت درجات كل من الطلاب والطالبات بـإحدى الجامعـات في مـادة الإحصاء يتبع توزيعاً طبيعياً. اختير عينة عشوائية من بين الطلاب وأخرى مـن بـين الطالبـات فكانت درجاهم كما يلي :

: الطلاب	59	79	73	49	88	83	69	44	81
: الطالبات		74	79	49	59	82	69	79	89

أوجد 90% فترة ثقة للنسبة σ_1^2 / σ_2^2.

الحل .

$$n_1 = 9 \ , \ s_1 = 15.57 \ , \ n_2 = 8 \ , \ s_2 = 13.07$$

$f_{.05}(8,7) = 3.73$, $f_{.05}(7,8) = 3.5$ المستخرجتان من جدول توزيع F في ملحق (٦) بدرجات حرية $v_1 = 8, \ v_2 = 7$ للعينة الأولي ودرجات حرية $v_1 = 7, \ v_2 = 8$ للعينة الثانية. يمكن الحصول على 90% فترة ثقة للنسبة σ_1^2 / σ_2^2 وذلك بالتعويض في الصيغة التالية

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \frac{1}{f_{\frac{\alpha}{2}}(v_1, v_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2} f_{\frac{\alpha}{2}}(v_2, v_1) \ .$$

أي أن :

$$\frac{(15.57)^2}{(13.07)^2 (3.73)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{(15.57^2)(3.5)}{(13.07)^2}$$

والتي تختزل إلى :

$$0.3805 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 4.967.$$

<u>تمــارين :</u>

-١- إذا كان عمر المصابيح الكهربائية المنتجة في مصنع ما ، تقريباً تتبع التوزيع الطبيعي بانحراف معياري 40 ساعة . اختيرت عينة عشوائية من 25 مصباحاً ووجد أن متوسط العمر 780 ساعة. أوجد 99% فترة ثقة لمتوسط المجتمع لكل المصابيح المنتجة من هذا المصنع .

-٢- في مركز تجاري كبير ، صممت ماكينة للعصير بحيث أن كمية العصير المستخرجة منها لكل كوب يتبع تقريباً توزيعاً طبيعياً بانحراف معياري 0.5 أوقية لكل كوب . أوجد 95% فترة ثقة للمتوسط μ إذا اختيرت عينة عشوائية من 26 كوب ووجد أن $\bar{x} = 7.4$ أوقية.

-٣- إذا كانت الأطوال لعينة عشوائية من 50 طالباً لها متوسط $\bar{x} = 68.5$ بوصة وانحراف معياري $s = 2.7$ بوصة. المطلوب

(أ) إيجاد 99% فترة ثقة للمتوسط μ .

(ب) تقدير حجم العينة n حتى يمكننا التأكد باحتمال 0.99 من أن الخطأ لا يتجاوز 0.5 .

-٤- في دراسة عن تلوث الهواء بأكسيد الكبريت المنبعث من إحدى المصانع. اختيرت عينة عشوائية من قراءات 70 يومياً وحسب متوسط العينة فوجد أن يساوى 19.1 طناً بانحراف معياري قدره 5.22 أطنان . أوجد 95% فترة ثقة للمتوسط μ .

-٥- يرغب صاحب مصنع في تقدير حجم العينة n حتى يمكنه التأكد تأكداً معقولاً من أن تقديره وباحتمال 0.99 لن يكون مخطئاً بأكثر من 4 وحدات معينة إذا علم أن الانحراف المعياري يساوى 18 وحدة. أوجد حجم العينة التي تحقق الشروط التي وضعها صاحب المصنع.

-٦- مونت 35 سيارة بكمية قدرها 4.8 جالون من البنزين المضاف إليه مادة معينة وسارت حتى نفذ الوقود. وبعد تمام التجربة حسب متوسط الأميال التي قطعتها كل سيارة بكل جالون فكان $\bar{x} = 18.9$ لكل جالون بانحراف معياري $s = 2.4$. أوجد 95% فترة ثقة للمتوسط μ.

-٧- مجموعة قوامها 50 من حيوانات التجارب أطعمت نوعاً معيناً من المقننات الغذائية لمدة شهر فكان متوسط الزيادة في الوزن $\bar{x} = 30$ بانحراف معياري $s=5$ أوقية أوجد 99% فترة ثقة للمتوسط μ .

-٨- دلت الخبرة مع العمال المشتغلين في صناعة معينة أن الزمن الذي يحتاج إليه العامل لإكمال عمل يتبع توزيعاً طبيعياً بانحراف معياري 20 دقيقة فإذا اختيرت عينة عشوائية من 25 عاملاً ووجد أن $\bar{x} = 13$ دقائق أوجد 95% فترة ثقة للمتوسط μ .

-٩- إذا كان ضغط الدم لمجموعة من الأفراد يتبع التوزيع الطبيعي بانحراف معياري $\sigma = 2$ اختيرت عينة عشوائية حجمها 25 فردا من هذه المجموعة وكان متوسط ضغط الدم من العينة$\bar{x} = 91$ أوجد 99% فترة ثقة للمتوسط μ.

-١٠- اختيرت عينة عشوائية من 100 أسرة فكان متوسط دخل الأسرة في العينة $\bar{x} = 1000$ جنيها بانحراف معياري $s = 100$ جنيها. أوجد 95% فترة ثقة للمتوسط μ.

-١١- اختيرت عينة عشوائية من 100 مريض بالسكر وكان متوسط أعمارهم $\bar{x} = 55$ بانحراف معياري $s = 20$ أوجد 99% فترة ثقة للمتوسط μ.

-١٢- لدراسة النمو لنوع معين من الزهور اختيرت عينة عشوائية من 70 زهرة ووجد أن متوسط النمو خلال عام $\bar{x} = 40.9$ بانحراف معياري 5.1 . أوجد 95% فترة ثقة للمتوسط μ.

-١٣- في بحث ميداني ، اختيرت عينة عشوائية من 400 عائلة ووجد أن متوسط ما أنفق على الطعام خلال عام هو 1200 جنية بانحراف معياري قدرة 100 جنيها أوجد 99% فترة ثقة للمتوسط μ.

-١٤- بفرض أن أوزان الدبية في لعب الأطفال يتبع التوزيع الطبيعي بانحراف معياري 3.5 كيلو جرام ما هو حجم العينة اللازم بثقة 95% أن متوسط العينة لا يختلف عن متوسط المجتمع بأكثر من 0.5 كيلو جرام .

-١٥- إذا كان أطوال الطلبة المستجدين في كلية ما يتبع توزيعاً طبيعياً بانحراف معياري 2.5 بوصة. فإذا اختيرت عينة عشوائية من الحجم $n = 25$ من هؤلاء الطلبة ووجد أن $\bar{x} = 68.5$ بوصة أوجد 95% فترة ثقة للمتوسط μ.

-١٦- في دراسة عن حجم المبيعات اليومية في محل تجارى تم تسجيل حجم المبيعات خلال 60 يوماً ، خلال فترة قدرها سنة ، وتم حساب متوسط المبيعات اليومية فكانت $\bar{x} = 218$ جنيها بانحراف معياري $s = 18$ جنيها. المطلوب تقدير 99% فترة ثقة للمتوسط μ.

-١٧- إذا كانت أسعار إحدى السلع تتبع توزيعاً طبيعياً بانحراف معياري 4 جنيها. اختيرت عينة عشوائية من أسعار هذه السلعة حجمها $n = 15$ فكان وسطها الحسابي $\bar{x} = 40$ جنيها. أوجد 99% , 95% فترة ثقة للمتوسط μ.

-١٨- إذا كان معروفا أن الضغط الداخلي لكرات التنس المنتجة بواسطة أحد المصانع يتبع توزيعاً طبيعياً بانحراف معياري $\sigma = 0.25$ رطلاً لكل بوصة. اختيرت عينة عشوائية من الحجم $n = 28$ من الكرات المنتجة من هذا المصنع وكان $\bar{x} = 28$ رطلاً لكل بوصة. أوجد 99% فترة ثقة للمتوسط μ.

-١٩- اختيرت عينة عشوائية من الحجم $n=50$ من إنتاج آلة ما لتعبئة الأرز في أكياس فحصلنا على البيانات التالية $\bar{x} = 4.80$ كجم و $s = 0.6$ كجم. أوجد 95% فترة ثقة للمتوسط μ.

-٢٠- اختيرت عينة عشوائية من 100 فاتورة مباعة وذلك من مجتمع كبير جداً من الفواتير المباعة. فإذا كان متوسط العينة هو $\bar{x} = 18.5$ جنيها بانحراف معياري 6.0 جنيها. أوجد 99% فترة ثقة للمتوسط μ.

-٢١- اختيرت عينة عشوائية من الفواتير المباعة من الحجم $n = 100$ وتم وضعها في التوزيع التكراري التالي :

251-300	201-250	151-200	101-150	51-100	1-50	حدود الفئة

←

عدد الفواتير	10	19	15	26	13	17

استخدم المعلومات في التوزيع التكراري السابقة في إيجاد 95% و 99% فترة ثقة لمتوسط المجتمع.

-٢٢- إذا كانت أوزان 10 صناديق من القمح هي :

12, 10.2, 10.1, 9, 10.1, 10.2, 10.1, 9.8, 9.9, 8.9

(الأوزان مقاسه بالأوقية). أوجد 95% فترة ثقة للمتوسط μ وذلك تحت فرض أن وزن الصندوق من القمح يتبع توزيعاً طبيعياً .

-٢٣- لدراسة اختفاء العلامات الأرضية البيضاء وسط الطرق نتيجة المرور الكثيف. أخذت عينة من 8 مناطق مختلفة ولوحظ اختفاء العلامات بعد مرور السيارات مقربة لأقرب مائة سيارة كالتالي :

163800, 136400, 108200, 125400,
143700, 163000, 159400, 122600

أوجد 99% فترة ثقة كالمتوسط μ وذلك تحت فرض أن توزيع المجتمع الذي اختيرت منه العينة يتبع توزيعاً طبيعياً .

-٢٤- أخذت عينة عشوائية من 20 آلة حاسبة من نوع ما ووجد أن متوسط أعمارهم $\bar{x} = 8$ سنوات بانحراف معياري s=2.6 سنة . أوجد 95% فترة ثقة للمتوسط μ تحت فرض أن توزيع المجتمع الذي اختيرت منه العينة طبيعياً .

-٢٥- إذا كانت كمية النيكوتين في 7 سجائر من نوع معين مقاس بالمليجرامات هو

21, 19, 23, 19, 23, 18, 17

أوجد 95% فترة ثقة للمتوسط μ تحت فرض أن كمية النيكوتين في هذا النوع من السجائر تتبع توزيعاً طبيعياً.

-٢٦- في عينة عشوائية من 10 مرضى في العناية المركزة في مستشفي ما وجد أن متوسط درجة حرارة الجسم 38.1 درجة بانحراف معياري 1.2 . أوجد 95% فترة ثقة لمتوسط المجتمع μ تحت فرض أن متوسط درجة حرارة الجسم للمرضى في العناية المركز يتبع توزيعاً طبيعياً.

-٢٧- في إحدى المراكز الصحية أجريت دراسة على عينة مبدئية ، على الكمية المتوقعة من الأكسجين (باللتر في الدقيقة) الذي يستهلكه الفرد الذي عمره 20-25 سنة ووجد أن الانحراف المعياري 0.5 لتر في الدقيقة. المطلوب تقدير حجم العينة اللازم لبحث قادم حتى يمكننا التأكد باحتمال 0.99 من أن الخطأ لا يتجاوز 0.1 لتر في الدقيقة .

-٢٨- إذا كانت أوزان طلاب إحدى المدارس تتبع توزيعاً طبيعياً. اختيرت عينة عشوائية حجمها 16 طالباً من هذه المدرسة فكانت أوزانهم بالكيلو جرام كما يلي :

42.1	44.2	49	44	45	44	51	52
45.2	46	51.3	44	47	49	41.2	47

أوجد 95% فترة ثقة للمتوسط μ.

-٢٩- في تجربة على 10 من رواد الفضاء في مجال يحاكي مجال انعدام الوزن وجد أن متوسط ضربات القلب لهم 26.22 دقة في الدقيقة بانحراف معياري 4.3 دقة في الدقيقة. أوجد 99% فترة ثقة للمتوسط μ تحت فرض أن ضربات القلب لرائد الفضاء تتبع توزيعاً طبيعياً .

-٣٠- في دراسة للسعرات الحرارية المنتجة من نوع معين من الفحم تم الحصول على البيانات التالية من عينة عشوائية حجمها $n=5$:

8000, 7820, 8200, 8470, 8123

أوجد 95% فترة ثقة للمتوسط μ تحت فرض أن السعرات تحت الدراسة تتبع توزيعاً طبيعياً .

-٣١- اختيرت عينة عشوائية من 10 كرات وتم قياس قطر كل كرة وحساب متوسط القطر فكان $\bar{x} = 4.9$ ملم بانحراف معياري 0.07 ملم. أوجد 95% فترة ثقة للمتوسط μ (تحت فرض أن العينة تم اختيارها من مجتمع طبيعي).

-٣٢- لمقارنة صنفين من القمح من حيث كمية المحصول أخذت 5 فدادين لكل صنف من القمح وزرع فيها الصنفين تحت نفس الظروف. أعطى الصنف A في المتوسط 78.3 وحدة ما لكل فدان بانحراف معياري 5.5 وحدة لكل فدان. بينما أعطى الصنف B في المتوسط 88 وحدة لكل فدان بانحراف معياري 6.2 أوجد 95% فترة ثقة لـ $\mu_1 - \mu_2$ تحت فرض أن العينتين تم اختيارهما من مجتمعين طبيعيين.

-٣٣- في دراسة لتقدير الفرق بين الأجور في كليتين A و B أ أخذت عينة عشوائية من $n_1=25$ أستاذ من الكلية A ووجد أن متوسط الأجر خلال 9 شهور هو 10000دولار بانحراف معياري 1100 دولار. كما أخذت عينة عشوائية أخرى من الحجم $n_2=20$ أستاذ من الكلية B ووجد أن متوسط الأجر خلال 9 شهور 13000 دولار بانحراف معياري 1120 دولار. أوجد 95% فترة ثقة لـ $\mu_1 - \mu_2$ تحت فرض أن $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ وأن العينتين تم اختيارهما من توزيعين طبيعيين.

-٣٤- تحاول شركة لتأجير السيارات اتخاذ قرار بشأن شراء إطارات من النوع A أو من النوع B. لتقدير الفرق بين النوعين أجرت تجربة حيث استخدمت 12 إطاراً من كل نوع وجربت الإطارات حتى انتهاء عمرها وكانت النتائج كما يلي (المسافة التي قطعتها السيارة بالأميال):

A النوع الأول : $\bar{x}_1 = 22500$, $s_1 = 310$

B النوع الثاني : $\bar{x}_2 = 23600$, $s_2 = 380$

بفرض أن العينتين تتم اختيارهما من توزيعين طبيعيين وأن $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ أوجد 95% فترة ثقة لـــ $\mu_1 - \mu_2$.

-٣٥- البيانات التالية تمثل الزمن اللازم لعرض فيلم منتج من قبل شركتين مختلفتين .

	الزمن (بالدقائق)						
الشركة الأولى	100	90	110	80	90		
الشركة الثانية	96	120	90	174	80	108	107

أحسب 90% فترة ثقة لـــ $\mu_1 - \mu_2$ بفرض أن أزمنة العرض تقريباً تتبع التوزيع الطبيعي.

-٣٦- أجريت دراسة على طريقة جديدة لتخفيض الوزن 10 أرطال في المتوسط على 7 سيدات تابعوا نفس الطريقة لتخفيض الوزن وسجلت الأوزان قبل وبعد أسبوعين

السيدة	1	2	3	4	5	6	7
الوزن قبل	128	132	136	150	140	137	124
الوزن بعد	129	120	127	135	128	130	159

أوجد 99% فترة ثقة لـــ μ_D إذا علم أن توزيعات الأوزان تقريباً طبيعية .

-٣٧- لمقارنة عليقتين من ناحية تأثيرهما على نمو العجول خلال شهرين من التغذيـــة اختـــيرت عينة عشوائية من 10 أزواج (توائم من العجول) لكل زوج أعطى إحدى التوأمين العليقـــة A و الآخر العليقة B وتم الحصول على النتائج التالية : $\bar{d} = 10$, $s_{\bar{d}} = 3$ أوجد 95% فـــترة ثقة للمعلمة μ_D.

-٣٨- طبق مقياس للاتجاهات نحو الأطفال في عينة من السيدات الآتي تم قبولهم بقسم دراسات الطفولة فور التحاقهن بالقسم ، ثم طبق نفس المقياس مرة أخرى فور حصولهن على البكالوريوس وتم الحصول على النتائج التالية $\bar{d} = 18$, $s_{\bar{d}} = 3$, $n = 10$ أوجد 99% فـــترة ثقـــة للمعلمة μ_D .

-٣٩- قام شخص بإجراء 10 عمليات حسابية على آلتين حاسبتين وتسجيل الزمن اللازم لكل عملية على كل آلة وقد تم الحصول على البيانات التالية $s_{\bar{d}} = 4$, $\bar{d} = 9$ أوجد 99% فترة ثقة للمعلمة μ_D .

-٤٠- في عينة عشوائية من 1000 شخص من القراء لصحيفة ما وجد أن 400 منهم يفضلون قراءة نوع معين من الإعلانات في الصحيفة أوجد 99% فترة ثقة للنسبة p.

-٤١- في مباراة رياضية للجرى وجد أن 240 طالب من 400 طالب يمكنهم الجري لمدة ميل في أقل من 7 دقائق . أوجد 95% فترة ثقة للنسبة p.

-٤٢- أراد أحد مكاتب الاستقصاء معرفة نسبة الأصوات التي تؤيد مرشحاً معيناً في الانتخابات. اختيرت عينة عشوائية من 100 شخص فوجد أن من بينهم 55 فرداً يؤيدون هذا المرشح أوجد 99% فترة ثقة للنسبة p .

-٤٣- أخذت عينة عشوائية من 200 طالب فكان عدد الناجحين منهم 144طالب . المطلوب

(أ) نسبة النجاح في العينة

(ب) 95% فترة ثقة لنسبة النجاح p .

-٤٤- قدر حجم العينة العشوائية التي يمكن اختيارها لتقدير نسبة الطلاب الناجحين في مادة الإحصاء إذا كانت نسبة النجاح في عينة مبدئية 0.75 وبشرط أن أقصى خطأ لا يزيد عن 0.05 بثقة 95% .

-٤٥- في إحدى مؤسسات رعاية الأحداث بها 6000 نزيل ، أخذت عينة عشوائية مكونة من 300 وأجريت دراسة لتحديد سبب دخول الحدث المؤسسة فوجد أن 80% من العينة يرجع سبب الدخول للمؤسسة إلى عدم رعاية الأم له. أوجد 99% فترة ثقة لنسبة الأحداث في المؤسسة الذين يرجع سبب دخولهم المؤسسة إلى عدم رعاية الأم.

-٤٦- أخذت عينة عشوائية من 100 شخص من أعضاء هيئة التدريس ووجد أن 20% منهم أجورهم تزيد عن 30000 دولار في السنة. أوجد فترة ثقة للنسبة p .

-٤٧- اتحاد جامعي يرغب في تقدير نسبة الطلبة الذين يفضلون هيئة طلابية جديدة. اختيرت عينة عشوائية من 400 طالب. فإذا أعطت نتائج التصويت $\hat{p} = 0.8$. أوجد 95% فترة ثقة للنسبة p .

-٤٨- اختيرت عينة عشوائية من 400 مواطن في مجتمع سكاني ما ووجد أن 300 منهم يفضلون إضافة قليل من الفلور إلى مياههم. استخدم هذه البيانات في إيجاد 99% فترة ثقة للنسبة p.

-٤٩-اختيرت عينة عشوائية من 600 مدخن سجائر في مجتمع سكاني ما ووجد أن 80 منهم يفضلون النوع A استخدم هذه البيانات في إيجاد :

(أ) نسبة النجاح في العينة

(ب) 95% فترة ثقة لنسبة النجاح p .

(ت) تقدير حجم العينة التي يمكن اختيارها لتقدير نسبة المدخنين الذين يفضلون النوع A وذلك بثقة 95% إذا كان حجم الخطأ 0.172.

-٥٠- في دراسة لنسبة ربات البيوت اللاتي يمتلكن غسالة بمجفف وجد أن 55 من 100 سيدة في المدينة A يمتلكن غسالة بمجفف بينما في المدينة B وجد أن 45 من 150 يمتلكن غسالة بمجفف. أوجد 95% فترة ثقة لـ $p_1 - p_2$.

-٥١-أوجد 95% فترة ثقة للمعلمة σ^2 للتمرين 19.

-٥٢-أوجد 95% فترة ثقة للمعلمة σ^2 للتمرين 20.

-٥٣-أوجد 99% فترة ثقة للمعلمة $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ للتمرين 32.

-٥٤-أوجد 95% فترة ثقة للمعلمة $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ للتمرين 33.