الفصل التاسع

اختبارات الفروض

Tests of Hypotheses

(٩-١) الفروض الإحصائية **Statistical Hypotheses**

تعتبر اختبارات الفروض الإحصائية أهم فرع في نظرية القرارات. أولا، دعنا نعرف بدقة ماذا نعني بالفرض الإحصائي .

تعريف : الفرض الإحصائي هو جملة ما تخص واحد أو أكثر من المجتمعات، من الممكن أن تكون صحيحه أو غير صحيحة .

للتأكد من صحة أو عدم صحة الفرض الإحصائي لا بد من دراسة كل مفردات المجتمع تحت الدراسة وهذا بالطبع غير عملي في معظم الحالات. بدلا من ذلك فإننا نختار عينة عشوائية من المجتمع ونستخدم المعلومات الموجودة في العينة لنتخذ قرار بقبول أو رفض الفرض الإحصائي. القرار الذي نتخذه سوف يكون سليم إذا كان الفرض صحيح وتم قبوله أو خطأ وتم رفضه. بينما يكون القرار غير سليم إذا كان الفرض صحيح وتم رفضه أو غير صحيح وتم قبوله.

الفروض التي نضعها على أمل أن نرفضها تسمى فروض العدم **null hypotheses** . ويرمز لفرض العدم بالرمز H_0 . رفض فرض العدم يؤدى إلى قبول فرض بديل **hypothesis alternative** و يرمز للفرض البديل بالرمز H_1 . فعلى سبيل المثال إذا كان فرض العدم H_0 أن متوسط الطول في مجتمع ما $\mu = 160$ (مقاسه بالسنتيمتر) فإن الفرض البديل H_1 قد يكون $\mu \neq 160$ أو $\mu < 160$ أو $\mu > 160$.

(٩-٢) الخطأ من النوع الأول والخطأ من النوع الثاني :

Type I Error and Type II Error

سوف نسهل المفاهيم المستخدمة في اختبارات الفروض والتي تخص مجتمع ما بالمثال التالي : بفرض أنه تم إجراء اختبار قدرات لعدد من المتقدمين لشغل وظيفة ما في مجال الحاسب الآلي. يشتمل الاختبار على 15سؤال وكل سؤال له 5 أجوبة ممكنة واحد منهم الصحيح. من شروط اجتياز الاختبار حصول المتقدم على 7 درجات فأكثر. هذا يعنى أن المتقدم لديه بعض المعلومات والتي تؤهله للعمل في مجال الحاسب الآلي. فرض العدم في هذه الحالة أن معلمة ذي الحدين (احتمال النجاح) في محاولة معطاة (سؤال) هو $p = \frac{1}{5}$ ، أى أن الشخص المتقدم للاختبار يعتمد على التخمين. الفرض البديل في هذه الحالة $p > \frac{1}{5}$. وعلى ذلك يمكن وضع فرض العدم والفرض البديل على الصورة التالية :

$$H_0 : p = \frac{1}{5}$$

$$H_1 : p > \frac{1}{5}$$

أن الطريقة السابقة في اتخاذ القرار قد تودى إلى استنتاجين غير صحيحين . فقد يحصل المتقدم للوظيفة على 7 درجات أو اكثر عن طريق التخمين. في هذه الحالة نكون قد وقعنا في خطأ عند رفض فرض العدم وقبول الفرض البديل مع أن H_0 صحيحا. مثل هذا الخطأ يسمى خطأ من النوع الأول.

تعريف : يحدث الخطأ من النوع الأول إذا كان فرض العدم صحيح ويتخذ قرار برفضه .

النوع الثاني من الخطأ والذي يمكن الوقوع فيه إذا حصل المتقدم للوظيفة على درجة أقل من 7 درجات وتستنتج أنه يخمن بينما هو في الحقيقة لديه بعض المعلومات عن الإجابة الصحيحة.

تعريف : يحدث الخطأ من النوع الثاني إذا قبلنا فرض العدم وهو خطأ.

يعتمد قرارنا في هذا المثال على الإحصاء X الذي يمثل عدد الإجابات الصحيحة التي يحصل عليها المتقدم في الاختبار حيث أن $x = 0, 1, 2, \ldots, 15$. القيم الممكنة من 0 إلى 15 تقسم إلى مجموعتين. تضم المجموعة الأولي القيم الأقل من 7 أما المجموعة الثانية فتضم القيم التي تساوي 7 فأكثر. كل الدرجات الممكنة والتي تساوى 7 فأكثر تكون منطقة الرفض **region rejection** بينما الدرجات التي أقل من 7 تكون منطقة القبول **acceptance region** . الرقم 7 يسمى القيمة الحرجة **critical region**. إذا وقعت قيمة الإحصاء الذي يعتمد عليه قرارنا في منطقة الرفض نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1 بينما إذا وقعت قيمة الإحصاء في منطقة القبول نقبل H_0 ونرفض H_1 .

تعريف : احتمال الوقوع في خطأ من النوع الأول يسمى مستوى المعنوية **level of significance** للاختبار ويرمز له بالرمز α .

في مثالنا فإن الخطأ من النوع الأول يقع إذا حصل المتقدم للاختبار على 7 درجات أو أكثر عن طريق التخمين. فإذا كانت X تمثل عدد الإجابات الصحيحة فإن :

$$\alpha = P\ (\text{الخطأ من النوع الأول})$$

$$= P\ (\text{رفض } H_0 \text{ وهو صحيح})$$

$$= P(X \geq 7 \mid p = \frac{1}{5}\ )$$

$$= \sum_{x=7}^{15} b\left(x;\ 15,\ \frac{1}{5}\right)$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{6} b\left(x;\ 15,\ \frac{1}{5}\right)$$

$$= 1 - 0.982 = 0.018.$$

وهذا يعنى أنه تقريباً في 1.8% من كل التجارب من هذا النوع حيث $n = 15$ تؤدى إلى الوقوع في خطأ من النوع الأول، أى رفض H_0 وهو صحيحا.في هذه الحالة يمكن القول أن $H_0 : p = \frac{1}{5}$ تختبر عند مستوى معنوية $\alpha = 0.018$.أحيانا تسمى α حجم منطقة الرفض **size of rejection** .

احتمال الوقوع في خطأ من النوع الثاني يرمز له بالرمز β ولحساب قيمة β لابد من وضع فرض بديل معين. فمثلا عند اختبار فرض العدم $p = \frac{1}{5}$ ضد الفرض البديل $p = \frac{7}{10}$ فإننا نكون قادرين على حساب احتمال حصول المتقدم للاختبار على درجة أقل من 7 عندما تكون $p = \frac{7}{10}$ ، في هذه الحالة :

$$\beta = P\ (\text{خطأ من النوع الثاني})$$

$$= P\ (\text{قبول } H_0 \text{ وهو خطأ})$$

$$= P\left(X < 7 \,\middle|\, p = \frac{7}{10}\right)$$

$$= \sum_{x=0}^{6} b\left(x;\ 15,\ \frac{7}{10}\right) = 0.015$$

وهذا يعنى أن تقريباً 1.5% من كل التجارب من هذا النوع حيث $n = 15$ تؤدى إلى قبول فرض العدم وهو خطأ. في الحقيقة لكل قيمة من α لا يوجد قيمة وحيدة من β بل يوجد قيم مختلفة لـ β وذلك لقيمة $p = \frac{1}{5}$. على سبيل المثال يوجد قيمة لـ β عند $p = 0.6$ وقيمة لـ β عند $p = 0.7$ وهكذا. الجدول التالي يعطى قيم β لقيم مختلفة مختارة من p (كل واحدة تمثل الفرض البديل لفرض العدم $H_0 : p = \frac{1}{5}$).

p	0.6	0.7	0.8	0.9
β	0.095	0.015	0.001	0.000

يُلاحظ من الجدول أنه كلما بعدت قيمة p (تحت الفرض البديل) عن $p = \frac{1}{5}$ كلما قل الوقوع في خطأ من النوع الثاني أي كلما قلت قيمة β عند منطقة الرفض $X \geq 7$.

مثال (٩-١) إذا كانت p تمثل نسبة الأصوات المؤيدة للشخص A ضد الشخص B في ترشيح ما. اختيرت عينة عشوائية من الحجم $n = 20$ فإذا كانت X تمثل عدد الأشخاص الذين يؤيدون الشخص A في العينة .

المطلوب : (أ) حساب احتمال الوقوع في خطأ من النوع الأول إذا كان $H_0: p = 0.5$ ضد الفرض البديل $H_0 : p \neq 0.5$ ومنطقة الرفض $X \leq 5$ أو $X \geq 12$.

(ب) حساب احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الثاني تحت الفرض البديل $H_1: p = 0.9$.

الحل . (أ) $\alpha = P$ (الخطأ من النوع الأول)

$= P$ (رفض H_0 وهو صحيح)

$$= P(X \geq 12 \mid p = 0.5) + P(X \leq 5 \mid p = 0.5)$$

$$= (1 - \sum_{x=0}^{11} b\ (x;\ 20, 0.5)) + \sum_{x=0}^{5} b\ (x;\ 20, 0.5)$$

$$= (1 - 0.748) + 0.021$$

$$= 0.252 + 0.021 = 0.273$$

(ب) $\beta = P$ (الخطأ من النوع الثاني)

$= P$ (قبول H_0 وهو خطأ)

$$= P(5 < X < 12 \mid p = 0.9) = p(6 \leq X \leq 11 \mid p = 0.9)$$

$$= \sum_{x=0}^{11} b\ (x;\ 20, 0.9) - \sum_{x=0}^{5} b\ (x;\ 20, 0.9)$$

$$= 0.0000 - 0.0000 = 0.0000 .$$

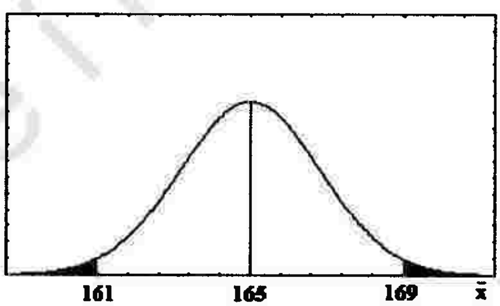
عموماً الاختبار الجيد هو الذي يجعل كلا من β, α أصغر ما يمكن ومن الصعب الحصول على هذا الاختبار لأنه لا يمكن تصغير كل من β, α في آن واحد حيث أن تصغير إحداهما يؤدى إلى تكبير الأخرى. لذلك لجأ الإحصائيون إلى تثبيت مستوى المعنوية α عند قيمة محددة تم اختيار الاختبار الإحصائي الذي يجعل β أقل ما يمكن. من القيم الشائعة لمستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ أو $\alpha = 0.01$. يقال للاختبار أنه معنوي significant عند $\alpha = 0.05$ إذا رفض فرض العدم

عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ ويعتبر الاختبار معنوي جدا إذا رفض فرض العدم عند مستوي معنوية $\alpha = 0.01$.

من السهل توضيح المفاهيم السابقة بيانياً عندما يكون المجتمع متصلا. على سبيل المثال إذا كان فرض العدم أن متوسط الطول لمجموعة من الطلبة في جامعة ما هو $\mu = 165$ سم ضد الفرض البديل أن متوسط الطول لا يساوى 165سم . أى أننا نرغب في اختبار :

$$H_0 : \mu = 165,$$
$$H_1 : \mu \neq 165.$$

الفرض البديل يمكن أن يكون $\mu < 165$ أو $\mu > 165$. بفرض أن الانحراف المعياري لمجتمع الأطوال $\sigma = 10$ ، الإحصاء الذي سوف نبنى عليه قرارنا والذي يعتمد على عينة عشوائية من الحجم $n = 30$ سوف يكون $\overline{X}$ والذي يعتبر التقدير الأكثر كفاءة للمعلمة μ . علمنا في الفصل السابع أن التوزيع العيني للإحصاء $\overline{X}$ تقريباً يتبع التوزيع الطبيعي بانحراف معياري $\sigma_{\overline{X}} = \sigma/\sqrt{n} = 10/\sqrt{30} = 1.8$. بفرض أننا اخترنا منطقة الرفض ممثلة في قيم $\bar{x}$ الأقل من 161 أو قيم $\bar{x}$ التي أكبر من 169. أى أن $\overline{X} < 161$ أو $\overline{X} > 169$ والموضحة في شكل (٩-١) . منطقة القبول سوف تكون $161 < \overline{X} < 169$. وعلى ذلك إذا وقع متوسط العينة $\bar{x}$ في منطقة القبول نقبل H_0 ونرفض H_1 وغير ذلك نرفض H_0 . احتمال الوقوع في خطأ من النوع الأول، أو مستوى المعنوية للاختبار، يساوى مجموع المساحات المظللة في كل من جانبي التوزيع العيني للإحصاء $\overline{X}$ في شكل (٩-١).



شكل (٩ – ١)

وعلى ذلك فإن :

$$\alpha = P(\ \overline{X} < 161 \mid \text{صحيح } H_0) + P(\ \overline{X} > 169 \mid \text{صحيح } H_0)$$

القيمتين الحرجتين للمتغير العشوائي Z والمقابلتين للقيمتين $\bar{x}_1 = 161$, $\bar{x}_2 = 169$ عندما تكون H_0 صحيحةً هما :

$$z_1 = \frac{161-165}{1.8} = -2.22,$$
$$z_2 = \frac{169-165}{1.8} = 2.22.$$

وعلى ذلك فإن :

$$\begin{aligned}
\alpha &= P(Z < -2.22) + P(Z > 2.22) \\
&= 2P(Z > 2.22) \\
&= 2[0.5 - P(0 < Z < 2.22)] \\
&= 2[0.5 - 0.4868] = 2(0.0132) \\
&= 0.0264 .
\end{aligned}$$

مثال (٩-٢) إذا كان الزمن اللازم لجفاف طلاء من نوع ما يتبع توزيعاً طبيعياً بمتوسط 75 دقيقه وانحراف معياري $\sigma = 9$ دقيقة. فإذا أضيفت تعديلات على هذا الطلاء وذلك لتقليل زمن الجفاف وإذا كان الطلاء بعد التعديل لا يزال يتبع توزيعاً طبيعياً بنفس الانحراف المعياري (σ=9) وإذا كان μ تمثل متوسط زمن الجفاف للطلاء بعد التعديل .

المطلوب : (أ) حساب احتمال الوقوع في خطأ من النوع الأول إذا كان $H_0 : \mu = 75$ و $H_1 : \mu < 75$ وذلك بالاعتماد على عينة عشوائية حجمها $n = 25$ ومنطقة الرفض $\overline{X} \le 70.8$.

(ب) حساب احتمال الوقوع في خطأ من النوع الثاني تحت فرض العدم $H_0: \mu$ =75 ضد الفرض البديل أن $H_1: \mu = 70$ و 72 .

الحل . (أ) $\alpha = P$ (الخطأ من النوع الأول)

$= P$ (رفض H_0 وهو صحيح)

$$= P(\overline{X} \le 70.8 \mid \mu = 75)$$

قيمة z المقابلة لقيمة $\bar{x} = 70.8$ في هذه الحالة هي :

$$z = \frac{70.8-75}{9/\sqrt{25}} = -2.33,$$

وعلى ذلك يكون :

$$\begin{aligned}
\alpha &= P(Z < -2.33) = P(Z > 2.33) \\
&= 0.5 - P(0 < Z < 2.33)
\end{aligned}$$

$$= 0.5 - 0.4901 = 0.0099.$$

(ب) حساب β عندما $H_1: \mu = 72$

$$\beta = P \text{ (الخطأ من النوع الثاني)}$$

$$= P \text{ (قبول فرض العدم وهو خطأ)}$$

$$= P (\overline{X} > 70.8 \mid \mu = 72)$$

قيمة z المقابلة لقيمة $\overline{x} = 70.8$ في هذه الحالة هي :

$$z = \frac{70.8 - 72}{9/\sqrt{25}} = -0.67,$$

وعلى ذلك تكون :

$$\beta = P (Z > -0.67)$$
$$= 0.5 + P (0 < Z < 0.67)$$
$$= 0.5 + 0.2486 = 0.7486.$$

حساب β عند $H_1: \mu = 70$

$$\beta = P \text{ (الخطأ من النوع الثاني)}$$

$$= P \text{ (قبول فرض العدم وهو خطأ)}$$

$$= P (\overline{X} > 70.8 \mid \mu = 70)$$

قيمة z المقابلة لقيمة $\overline{x} = 70.8$ في هذه الحالة هي :

$$z = \frac{70.8 - 70}{9/\sqrt{25}} = 0.44,$$

وعلى ذلك تكون :

$$\beta = P (Z > 0.44)$$
$$= 0.5 - P (0 < Z < 0.44)$$
$$= 0.5 - 0.17 = 0.33.$$

(٩-٣) اختبارات من جانب واحد أو من جانبين :

One – tailed and Two – tailed Tests

يسمى الاختبار ، لأى فرض إحصائي ، أنه من جانب واحد إذا كان على الصورة :

$$H_0 : \theta = \theta_0 ,$$
$$H_1 : \theta > \theta_0$$

أو على الشكل :

$$H_0 : \theta = \theta_0 ,$$
$$H_1 : \theta < \theta_0$$

منطقة الرفض للبديل $\theta > \theta_0$ تقع في الجانب الأيمن من التوزيع بينما منطقة الرفض للبديل $\theta < \theta_0$ تقع في الجانب الأيسر من التوزيع.

يسمى الاختبار، لأي فرض إحصائي، أنه من جانبين إذا كان على الصورة :

$$H_0 : \theta = \theta_0 ,$$
$$H_1 : \theta \neq \theta_0$$

منطقة الرفض للبديل $\theta \neq \theta_0$ سوف تكون $\theta > \theta_0$ أو $\theta < \theta_0$ ، المفاضلة بين اختبار من جانب واحد أو من جانبين سوف يتوقف على الاستنتاج الذي يرغب الباحث في الوصول إليه عند رفض فرض العدم :

في البنود التالية من هذا الفصل سوف نناقش بعض اختبارات الفروض الشائعة الاستخدام.

(٩-٤) اختبارات حول متوسط المجتمع μ

Tests About a Population Mean μ

الحالة الأولى : اختبار الفرض أن المتوسط لمجتمع بتباين معلوم σ^2 ، يساوى قيمة معينة μ_0 ضد الفرض البديل ذي جانبين أن المتوسط لا يساوى μ_0 يكون على الشكل:

$$H_0 : \mu = \mu_0 ,$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

الإحصاء المناسب والذي يعتمد عليه قرارانا هو المتغير العشوائي $\overline{X}$. إذا كان المجتمع الذي اختيرت منه العينة يتبع التوزيع الطبيعي فإن التوزيع العيني للإحصاء $\overline{X}$ يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu_{\overline{x}} = \mu$ وتباين $\sigma^2_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma^2}{n}$ حيث أن μ و σ^2 هما المتوسط والتباين على التوالي للمجتمع الذي اختيرت منه العينات من الحجم n . عندما لا يتحقق هذا الفرض فقد علمنا من الفصل السابع أن التوزيع العيني للإحصاء $\overline{X}$ تقريباً يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu_{\overline{x}} = \mu$ وتباين $\sigma^2_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma^2}{n}$. باستخدام القيمتين الحرجتين $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$ فإن $\overline{x}_1 < \overline{X} < \overline{x}_2$ تمثل منطقة القبول. الذيلين للتوزيع $\overline{X} > \overline{x}_2$ أو $\overline{X} < \overline{x}_1$ يمثلان منطقة الرفض .

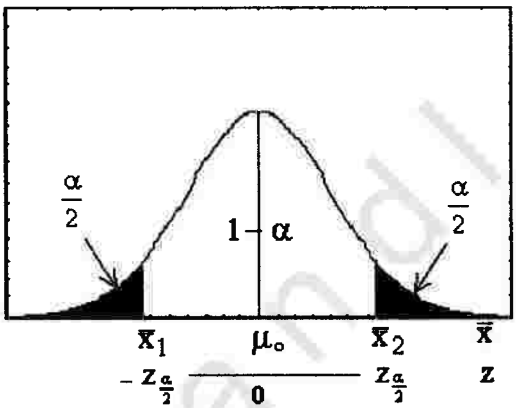
منطقة الرفض يمكن أن تُعطى في صورة قيم z وذلك بعمل التحويلة التالية :

$$z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$

حيث ، لمستوى معنوية α ، القيمتين الحرجتين للمتغير العشوائي Z المقابلة لكل من $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ والموضحَين في شكل (٩-٢) هما :

$$-z_{\alpha/2} = \frac{\bar{x}_1 - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}},$$

$$z_{\alpha/2} = \frac{\bar{x}_2 - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$



شكل (٩ – ٢)

الآن لإجراء الاختبار نختار عينة عشوائية من الحجم n من المجتمع موضع الدراسة ونحسب منها متوسط العينة $\bar{x}$. إذا وقعت $\bar{x}$ في منطقة القبول $\bar{x}_1 < \bar{X} < \bar{x}_2$ فإن قيمة الإحصاء :

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

تقع في المنطقة $-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{\frac{\alpha}{2}}$. الاستنتاج سوف يكون $\mu = \mu_0$ وغير ذلك نرفض H_0 ونقبل الفرض البديل $\mu \neq \mu_0$. عادةً تصاغ منطقة الرفض في صورة Z أكثر من $\bar{X}$. إذا كان تباين المجتمع مجهول فإننا نحسب تباين العينة s^2 ونستخدمه بدلاً من σ^2 تحت شرط أن حجم العينة أكبر من أو يساوى 30 ($n \geq 30$) .

مثال (٩–٣) ينتج مصنع للأغذية المعلبة نوعا من المعلبات. قام المسئولين خلال فترة طويلة بمراقبة أوزان هذه المعلبات ووجد أنها تخضع للتوزيع الطبيعي بانحراف معياري 2.6 جرام. جرت العادة في المصنع أن يكتب على العلبة الوزن الصافي وهو 300 جرام. اختيرت عينة عشوائية من 20 علبة وكان متوسط الوزن من العينة $\bar{x} = 305$. أختبر فرض العدم $\mu = 300$ ضد الفرض البديل $\mu \neq 300$ وذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$.

الحل .

$$H_0 : \mu = 300,$$
$$H_1 : \mu \neq 300.$$
$$\alpha = 0.01 .$$

$z_{0.005} = 2.575$ والمستخرجة من جدول التوزيع الطبيعي القياسي في ملحق (٣)

منطقة الرفض $Z > 2.575$ أو $Z < -2.575$

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{305 - 300}{\frac{2.6}{\sqrt{20}}} = 8.6.$$

نرفض فرض العدم لأن z تقع في منطقة الرفض.

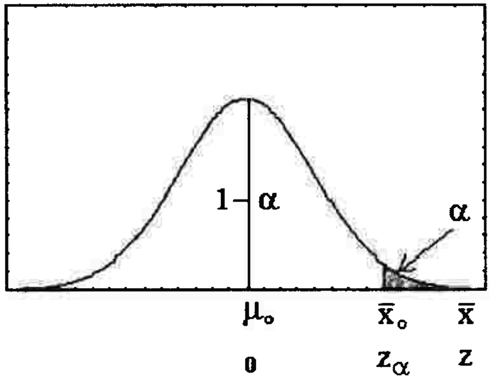
عند الاهتمام باختبار الفرض أن متوسط المجتمع بتباين معلوم ، σ^2 ، يساوى قيمة معينة μ_0 ضد الفرض البديل من جانب واحد أي $\mu > \mu_0$ فإن فرض العدم والفرض البديل سوف يكونان على الشكل :

$$H_0 : \mu = \mu_0,$$
$$H_1 : \mu > \mu_0.$$

منطقة الرفض سوف تقع في الجانب الأيمن من توزيع $\bar{X}$. لمستوى معنوية α نحسب قيمة حرجة واحدة $\bar{x}_0$ بحيث $\bar{X} < \bar{x}_0$ تمثل منطقة القبول بينما $\bar{X} > \bar{x}_0$ تمثل منطقة الرفض . في شكل (٩–٣). القيمة الحرجة z_α التي تقابل القيمة $\bar{x}_0$ هى :

$$z_\alpha = \frac{\bar{x}_0 - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

وعلى ذلك منطقة الرفض من الحجم α تصبح $Z > z_\alpha$ ، للفرض البديل $\mu < \mu_0$ سوف نتبع خطوات الطريقة السابقة فيما عدا أن منطقة الرفض سوف تكون $Z < -z_\alpha$.



شكل (٩–٣)

مثال (٩–٤) من المعروف أن أحد أدوية إزالة الألم المستخدمة يمكنها إزالة الألم للمريض في فترة زمنية متوسطها 3.7 دقيقة . ولمقارنة هذا الدواء بدواء جديد لإزالة الألم اختيرت عينة عشوائية من 60 مريضا وتم إعطاء الدواء الجديد لهم فكان المتوسط الحسابي لطول فترة إزالة الألم في هذه العينة 2.2 دقيقة بانحراف معياري 1.2 دقيقة . فهل تدل هذه النتائج أن الدواء الجديد أفضل من الدواء القديم من حيث الفترة اللازمة لإزالة المرض ؟ وذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

الحل .

$$H_0 : \mu = 3.7 ,$$
$$H_1 : \mu < 3.7 .$$
$$\alpha = 0.05 .$$

وبما أن $n \geq 30$ فإنه يمكننا استخدام s بدلا من σ في صيغة z .

أن $z_{0.05} = 1.645$ والمستخرجة من جدول التوزيع الطبيعي القياسي في ملحق (٣)

منطقة الرفض $Z < -1.645$

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{2.2 - 3.7}{\frac{1.2}{\sqrt{60}}} = -9.682.$$

نرفض فرض العدم لأن z تقع في منطقة الرفض. أى أن الدواء الجديد أفضل من الدواء القديم من حيث الفترة اللازمة لإزالة المرض.

مثال (٩-٥) اتفق أحد مصدري البيض مع أحد التجار على أن يورد الأخير للأول عدد من البيض من الحجم الكبير ولما أحضر التاجر البيض قام المصدر باختيار عينة عشوائية من 100 بيضة فوجد أن متوسط وزن البيضة 67 جراما بانحراف معياري 1.6. اختبر فرض العدم $H_0 : \mu = 65$ ضد الفرض البديل $H_1 : \mu > 65$ (مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$)

الحل .

$$H_0 : \mu = 65,$$
$$H_1 : \mu > 65.$$
$$\alpha = 0.05.$$

بما أن $n > 30$ فإنه يمكننا استخدام s بدلا من σ في صيغة z.

الحل .

$z_{0.05} = 1.645$ والمستخرجة من جدول التوزيع الطبيعي القياسي في ملحق (٣) .

منطقة الرفض $Z > 1.645$

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{67 - 65}{\frac{1.6}{\sqrt{100}}} = 12.5.$$

نرفض H_0 لأن z تقع في منطقة الرفض. أي أن المورد سوف يقبل استلام البيض .

الحالة الثانية : في بعض اختبارات الفروض التي تخص متوسط مجتمع طبيعي عندما يكون تباين المجتمع σ^2 مجهول وحجم العينة صغير $n < 30$. استنتاجنا، في هذه الحالة، سوف يعتمد على توزيع t . بفرض اختبار من جانب واحد على الشكل :

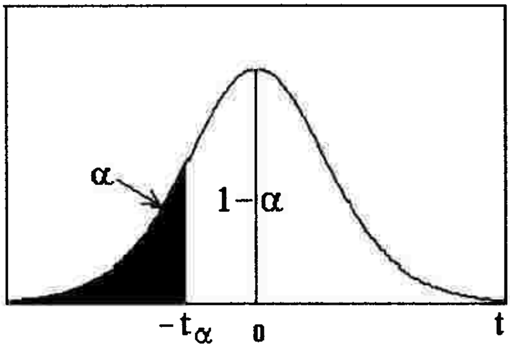
$$H_0 : \mu = \mu_0,$$
$$H_1 : \mu < \mu_0$$

نختار عينة عشوائية من الحجم $n < 30$ من المجتمع ونحسب المتوسط $\bar{x}$ والانحراف المعياري s وعلى ذلك :

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

هى قيمة لمتغير عشوائي T له توزيع t بدرجات حرية $\nu = n - 1$ عندما H_0 صحيحاً. منطقة الرفض سوف تكون في الذيل الأيسر من توزيع t . لمستوى معنوية α يمكن الحصول على قيمة واحدة $t_{1-\alpha} = -t_\alpha$ بحيث أن $T < -t_\alpha$ تمثل منطقة الرفض و $T > -t_\alpha$ تمثل منطقة القبول.

حجم منطقة الرفض يساوى المساحة المظللة في شكل (٩-٤) .



شكل (٩–٤)

منطقة الرفض للفرض البديل $H_0 : \mu > \mu_0$ بمستوى معنوية α ، هى $T > t_\alpha$ للفـــرض البديل $H_0 : \mu \neq \mu_0$ فإن منطقة الرفض المقابلة لمستوى معنوية α ، هى $T > t_{\alpha/2}$ أو $T < -t_{\alpha/2}$. وعلى ذلك نحسب قيمة الإحصاء ، أي قيمة t ، وإذا وقعت قيمة t في منطقة القبول نقبل فرض العدم وغير ذلك نرفض H_0 .

مثال (٩–٦) لمعرفة اثر غذاء معين على زيادة الوزن اختيرت عينة عشوائية من ستة فئران وتم تغذيتها بهذا الغذاء وكانت الزيادة في أوزانهم بعد التغذية هى :

$$2.3 \;,\; 2.5 \;,\; 1.4 \;,\; 1.4 \;,\; 1.7 \;,\; 2.5$$

فهل يمكن الحكم على أن هذه العينة من مجتمع متوسط الزيادة في الوزن فيه 1.2 أم لا ؟ وذلـــك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$. وذلك تحت فرض أن العينة تم اختيارها من مجتمع طبيعي .

الحل .

$$H_0 : \mu = 1.2 \,,$$
$$H_0 : \mu \neq 1.2 \,.$$
$$\alpha = 0.05 \,.$$

$t_{.025} = 2.571$ والمستخرجة من توزيع t في ملحق (٤) عند درجات حرية $\nu = 5$.

منطقة الرفض $T > 2.571$ أو $T < -2.571$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{11.8}{6} = 1.967,$$

$$s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2}{n}\right]}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{5}\left[24.6-\frac{(11.8)^2}{6}\right]}=0.528.$$

$$t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}=\frac{1.967-1.2}{\frac{0.528}{\sqrt{6}}}=3.5582.$$

نرفض H_0 لأن t تقع في منطقة الرفض .

(٩–٥) اختبارات حول تباين المجتمع σ^2

Tests about the Population Variance σ^2

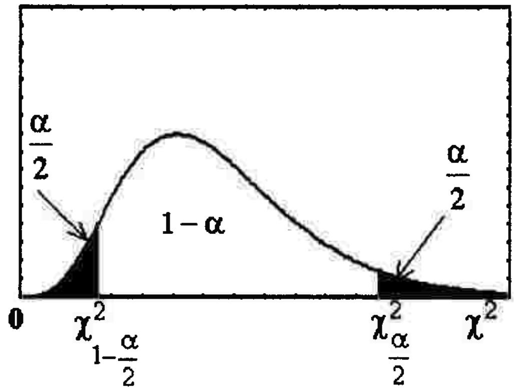
عند الرغبة في اختبار الفرض أن التباين لمجتمع طبيعي يساوى قيمة معينة σ_0^2 ضد الفرض البديل ذي جانبيين أن التباين لا يساوى σ_0^2 . أي أننا نختبر الفرض أن :

$$H_0:\ \sigma^2=\sigma_0^2\ ,$$
$$H_1:\ \sigma^2\neq\sigma_0^2$$

نختار عينة عشوائية من الحجم n من المجتمع موضع الدراسة ونحسب تباين العينة s^2. وعلى ذلك:

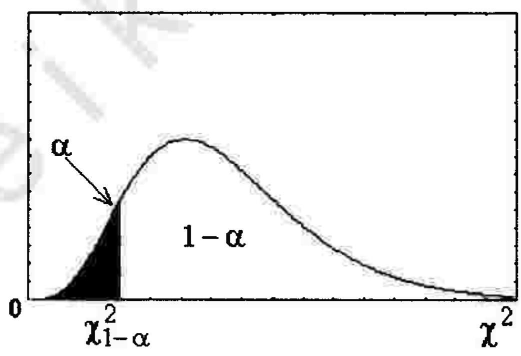
$$\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

قيمة للمتغير X^2 ، تبعا لنظرية (٧ – ١٢)، والذي له توزيع χ^2 بدرجات حرية $v=n-1$ عندما يكون H_0 صحيحاً. لمستوى معنوية α نوجد القيمتين الحرجتين $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}},\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$ بحيث أن $X^2<\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}},X^2>\chi_{\frac{\alpha}{2}}$ يمثلان منطقة الرفض. حجم المنطقة الحرجة يساوى المساحة المظللة في شكل (٩–٥). نرفض H_0 إذا وقعت χ^2 في منطقة الرفض .



شكل (٩-٥)

عادة يكون الاهتمام باختبار الفرض $\sigma^2 = \sigma_0^2$ ضد الفرض البديل من جانب واحد من التوزيع . للبديل $\sigma_0^2 > \sigma^2$ ولمستوى معنوية α نحصل على قيمة حرجة $\chi^2_{1-\alpha}$ بحيث أن $X^2 < \chi^2_{1-\alpha}$ تمثل منطقة الرفض و $\chi^2_{1-\alpha} < X^2$ تمثل منطقة القبول. بنفس الشكل لبديل من جانب واحد $\sigma_0^2 < \sigma^2$، فإن χ^2_α تمثل القيمة الحرجة بحيث $X^2 > \chi^2_\alpha$ تمثل منطقة الرفض و $X^2 < \chi^2_\alpha$ تمثل منطقة القبول. حجم المنطقة الحرجة لبديل من جانب واحد $\sigma_0^2 < \sigma^2$ يساوى المساحة المظللة في شكل (٩-٦) .



شكل (٩-٦)

مثال (٩-٧) يعتقد مسئول في مصنع لبطاريات السيارات أن الانحراف المعياري لعمر البطارية المنتجة هو 0.8 . لاختبار ذلك الفرض اختيرت عينة عشوائية من الحجم $n = 20$ وتمت تجربتها فكان $s = 1.1$ سنة فهل يمكن القول أن $\sigma > 0.8$ ؟(استخدم مستوى معنوية $\alpha = 0.05$).

الحل .

$$H_0 : \sigma^2 = 0.64 ,$$
$$H_1 : \sigma^2 > 0.64$$
$$\alpha = 0.05.$$

$\chi^2_{.05} = 30.143$ والمستخرجة من جدول توزيع χ^2 بدرجات حرية $v = 19$. منطقة الرفض $X^2 > 30.143$.

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(19)(1.1)^2}{0.8^2}$$
$$= 35.922.$$

بما أن χ^2 تقع في منطقة الرفض نرفض H_0.

(٩-٦) اختبارات تخص تبايني مجتمعين

Tests Concerning Two Populations Variances

بفرض أن لدينا مجتمعين : الأول يتبع توزيعاً طبيعياً متوسطة μ_1 وتباينـــه σ_1^2 والثـــاني : يتبع توزيعاً طبيعياً متوسطة μ_2 وتباينه σ_2^2 والمطلوب اختبار هل المجتمعين لهما نفس التباين ؟ أى هل $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ أم لا ؟ فإذا كانت $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ فإننا نقول أن هناك تجانس بين المجتمعين . إن التأكد من صحة الفرض $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ضروري لاختبار الفرق بين متوسطي مجتمعين (اختبار t) والذي سوف نتناوله في البند التالي . أيضا هناك العديد من الأبحاث التي يكون هدفها الرئيســي هو مقارنة σ_1^2 مع σ_2^2 مثل دراسات جودة البضائع المستهلكة حيث يعتـــبر التبـــاين أهـــم مقاييس الجودة.

لاختبار فرض العدم :

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

ضد الفرض البديل :

$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

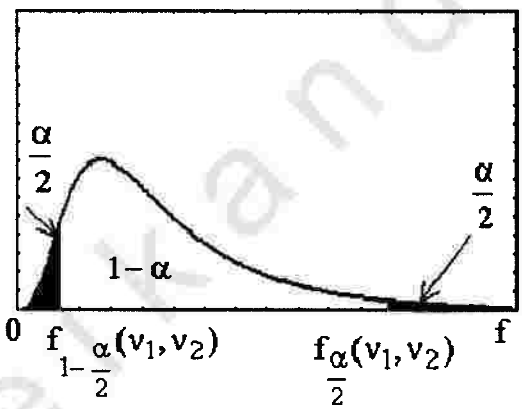
نختار عينة عشوائية حجمها n_1 من المجتمع الأول وليكن متوسطها الحسابي $\bar{x}_1$ وتباينها s_1^2 ونختار عينة عشوائية أخرى حجمها n_2 من المجتمع الثاني وليكن متوسطها $\bar{x}_2$ وتباينها s_2^2 •

(العينة الثانية مستقلة عن العينة الأولى) . بافتراض صحة فرض العدم فإن :

$$f = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

تمثل قيمة للمتغير العشوائي F والذي تبعا لنظرية (٧-١٣) له توزيع F بدرجات حرية $v_1 = n_1 - 1, v_2 = n_2 - 1$ ، لمستوى معنوية α، سوف نحصل على قيمتين حرجتين $f_{\frac{\alpha}{2}}(v_1, v_2)$ و $f_{1-\frac{\alpha}{2}}(v_1, v_2)$. وعلى ذلك فإن $F > f_{\frac{\alpha}{2}}(v_1, v_2)$ أو $F < f_{1-\frac{\alpha}{2}}(v_1, v_2)$ تمثلان منطقة الرفض. حجم منطقة الرفض يساوى المساحة المظللة في شكل (٩-٧). باستخدام نظرية (٧-١٤) فإن القيمة الحرجة للمتغير F في الطرف الأيسر يمكن الحصول عليها من العلاقة التالية :

$$f_{1-\frac{\alpha}{2}}(v_1, v_2) = \frac{1}{f_{\frac{\alpha}{2}}(v_2, v_1)} .$$



شكل (٩-٧)

إذا وقعت f المحسوبة في منطقة الرفض فإننا نرفض H_0 .

لاختبار فرض العدم :

$$H_0 :\ \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

ضد الفرض البديل :

$$H_1 :\ \sigma_1^2 < \sigma_2^2$$

فإن منطقة الرفض ، بمستوى معنوية α ، سوف تكون في الجانب الأيسر من التوزيع (الذيل الأيسر) . منطقة الرفض في هذه الحالة تمثل كل قيم F بحيث $F < f_{1-\alpha}(v_1, v_2)$. وأخيرا لاختبار فرض العدم :

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

ضد الفرض البديل :

$$H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

فإن منطقة الرفض ، بمستوى معنوية α ، سوف تكون في الجانب الأيمن من التوزيع (الذيل الأيمن) . منطقة الرفض في هذه الحالة تمثل كل قيم F بحيث $F > f_{\alpha}(v_1, v_2)$.

مثال (٩-٨) من البيانات التالية اختبر التجانس بين المجتمعين وذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.1$

	العينة الثانية	العينة الأولي
s_i^2	**50.7**	**40.5**
n_i	**41**	**31**

الحل .

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 ,$$
$$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 .$$
$$\alpha = 0.1 .$$

$f_{.05}(40, 30) = 1.79$ والمستخرجة من جدول توزيع F في ملحق (٦) عند درجات حرية $v_1 = 40, v_2 = 30$. أما **$f_{0.95}(40, 30)$** فتحسب من العلاقة التالية :

$$f_{0.95}(40,30) = \frac{1}{f_{0.05}(30,40)} = \frac{1}{1.74} = 0.575.$$

منطقة الرفض **$F > 1.79$ أو $F < 0.575$**

$$f = \frac{s_2^2}{s_1^2} = \frac{\text{التباين الأكبر}}{\text{التباين الأصغر}} = \frac{50.7}{40.5} = 1.252.$$

نقبل H_0 لأن f تقع في منطقة القبول .

(٩-٧) اختبارات تخص المتوسطات Tests Concerning Means

في بعض الأحيان يكون الاهتمام باختبارات الفروض التي تخص مجتمعين مختلفين. أي أننا نرغب في اختبار فرض العدم أن الفرق بين متوسطي مجتمعين ، $\mu_1 - \mu_2$ ، يساوى صفر أي $\mu_1 = \mu_2$ ضد الفرض البديل $\mu_1 - \mu_2 > 0$ أي $\mu_1 > \mu_2$ أو الفرض البديل $\mu_1 - \mu_2 < 0$ أي $\mu_1 < \mu_2$ أو الفرض البديل $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ أي $\mu_1 \neq \mu_2$. تعتمد الطريقة المستخدمة في اختيار الفرق بين متوسطي مجتمعين على توزيع كل مجتمع وحجم العينة المختارة من كل مجتمع. في الجزء التالي سوف نتناول ثلاثة حالات.

<u>الحالة الأولي :</u> عند اختبار فرض العدم H_0 أن الفرق بين متوسطي مجتمعين ، $\mu_1 - \mu_2$ ، يساوى صفر وذلك عندما كل من σ_2^2 , σ_1^2 معلومتان وتحت فرض أن كل مجتمع له توزيعاً طبيعياً أو تقريبا طبيعياً. أما في حالة العينات الكبيرة وإذا كانت σ_1^2 , σ_2^2 مجهولتان فإنه يمكن تقديرهما من العينات بحساب s_2^2 , s_1^2. يعتمد قرارنا في هذه الحالة على المتغير العشوائي (الإحصاء) $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$. أولا نختار عينة عشوائية من الحجم n_1 من المجتمع الأول ونحسب منها $\bar{x}_1$ ونختار عينة عشوائية أخرى من الحجم n_2 من المجتمع الثاني (مستقلة عن العينة الأولى) ونحسب منها $\bar{x}_2$ ثم نحسب الفرق ، $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ ، لمتوسطي العينتين ٠ من نظرية (٧-٦) نعلم أن :

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - 0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}.$$

قيمة للمتغير العشوائي Z عندما يكون H_0 صحيحا. وعلى ذلك في اختبار من جانبين وعند مستوى معنوية α فإن منطقة الرفض تحدد على الشكل $Z > z_{\frac{\alpha}{2}}$ أو $Z < -z_{\frac{\alpha}{2}}$. أما في اختبار من جانب واحد حيث الفرض البديل $\mu_1 < \mu_2$ فإن منطقة الرفض ، لمستوى معنوية α ، سوف تكون $Z < -z_\alpha$. وأخيرا في حالة الفرض البديل من جانب واحد $\mu_1 > \mu_2$ فإن منطقة الرفض لمستوى معنوية α ، سوف تكون $Z > z_\alpha$.

مثال (٩-٩) أجرى اختبار على المقاومة للشد **tensile strength** لنوعين من السلك . النتائج معطاة في الجدول التالي :

النوع	حجم العينة	متوسط العينة	الانحراف المعياري للعينة
A	$n_1 = 129$	$\bar{x}_1 = 107.6$	$s_1 = 1.3$
B	$n_2 = 129$	$\bar{x}_2 = 123.6$	$s_2 = 2.0$

المطلوب اختبار هل هناك فرقا معنويا بين متوسطي المجتمعين المسحوبتين منهما العينتين ؟ (عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$).

الحل . حيث أن $n_1 > 30$ و $n_2 > 30$ نتبع الآتي :

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 ,$$
$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 .$$
$$\alpha = 0.05 .$$

$z_{0.025} = 1.96$ والمستخرجة من جدول التوزيع الطبيعي القياسي في ملحق (٣) .

منطقة الرفض $Z > 1.96$ أو $Z < -1.96$

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - 0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} .$$

$$= \frac{107.6 - 123.6}{\sqrt{\frac{1.3^2}{129} + \frac{2^2}{129}}} = -76.183.$$

وبما أن z تقع في منطقة الرفض فإننا نرفض H_0 .

الحالة الثانية : بفرض أن σ_2^2 , σ_1^2 مجهولتان وحجم كلا من العينتين صغير. يعتمد القرار الذي نتخذه في هذه الحالة في اختبار فرض العدم على توزيع t وذلك تحت فرض $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ (هناك تجانس) وأن كل مجتمع له توزيعاً طبيعياً. أولا نختار عينة عشوائية من الحجم n_1 من المجتمع الأول ونحسب منها $s_1^2, \bar{x}_1$ ونختار عينة عشوائية أخرى من الحجم n_2 من المجتمع الثاني (مستقلة عن العينة الأولي) ونحسب منها $\bar{x}_2$, s_1^2 .

التباين التجميعي **pooled variance** نحصل عليه من الصيغة التالية :

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

من نظرية (٧-١٠) وتحت فرض أن H_0 صحيحاً فإننا نعلم أن :

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - 0}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}.$$

قيمة لمتغير عشوائي T يتبع توزيع t بدرجات حرية $\nu = n_1 + n_2 - 2$ ، في حالة اختبار ذي جانبين وعند مستوي معنوية α فإن منطقة الرفض سوف تكون $T > t_{\frac{\alpha}{2}}$ أو $T < -t_{\frac{\alpha}{2}}$. للبديل من جانب واحد $\mu_1 < \mu_2$ فإن منطقة الرفض سوف تكون $T < -t_\alpha$.

وأخيرا للبديل $\mu_1 > \mu_2$ فإن منطقة الرفض سوف تكون $T > t_\alpha$.

مثال (٩-١٠) اختيرت مجموعتان من الطلبة وأعطيت المجموعة الأولي الوجبة A يوميا أعطيت المجموعة الثانية الوجبة B يوميا . وقد استمرت التجربة لمدة شهر وكانت الزيادة في وزن مفردات كل مجموعة (بالرطل) هي :

المجموعة الأولي	2.6, 2.7, 3.9, 3.4, 1.0, 1.6, 4.0, 3.6, 2.4, 3.0
المجموعة الثانية	2.9, 1.4, 2.6, 1.9, 1.9, 2.4, 2.9, 3.6, 1.6

فهل تعتقد أن هناك فرقا معنوية بين تأثير الوجبة A والوجبة B على زيادة الوزن ؟ (عند مستوى معنوية $\alpha = 0.1$)، وذلك تحت فرض أن العينتين تم اختبارهما من مجتمعين طبيعيين .

الحل .

$$n_1 = 10, \quad \bar{x}_1 = 2.820, \quad s_1 = 0.976$$

$$n_2 = 9, \quad \bar{x}_2 = 2.356, \quad s_2 = 0.716$$

أولا يجب التأكد من أن $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ أى اختبار فرض العدم :

$$H_0 : \ \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

ضد الفرض البديل :

$$H_1 : \ \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$$

$$\alpha = 0.1 \ .$$

$$f = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{\text{التباين الأكبر}}{\text{التباين الأصغر}} = \frac{(0.976)^2}{(0.716)^2} = 1.858.$$

$f_{.05}(9, 8) = 3.39$ والمستخرجة من جدول توزيع F في ملحق (٦) عنـــد درجـات حرية $\nu_1 = 9, \nu_2 = 8$ أما $f_{.95}(9, 8)$ فتحسب من العلاقة التالية :

$$f_{0.95}(9,8) = \frac{1}{f_{0.05}(8,9)} = \frac{1}{3.23} = 0.3096.$$

منطقة الرفض $F > 3.39$ أو $F < 0.3096$

وبما أن f تقع في منطقة القبول فإننا نقبل فرض العدم أن $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

الآن نختبـــر :

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2,$$
$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$
$$\alpha = 0.1.$$

$$s_p = \sqrt{\frac{s_1^2(n_1 - 1) + s_2^2(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(.976)^2(9) + (0.716)^2(8)}{10 + 9 - 2}}$$
$$= \sqrt{0.7455548} = 0.86346.$$

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - 0}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$
$$= \frac{2.820 - 2.356}{0.86346\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{9}}} = 1.16955.$$

$t_{0.05} = 1.74$ والمستخرجة من جدول توزيع t في ملحق (٤) عند درجات حرية $\nu = 17$.

منطقة الرفض $T > 1.74$ أو $T < -1.74$. وبما أن t تقع في منطقة القبول فإننا نقبـــل H_0 وهذا يدل على عدم وجود فرق معنوي بين تأثير الوجبة A والوجبة B على زيادة الوزن .

الحالة الثالثة : عند اختبار فرض العدم $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ضد الفرض البديـــل $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ تحت الشروط التالية :

(أ) كل مجتمع (من المجتمعين تحت الدراسة) يتبع توزيعاً طبيعياً .

(ب) تباين المجتمعين ، $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ، مختلفين كثيرا.

(ج) العينتان صغيرتان وإحجامهما مختلفان .

القرار الذي نتخذه يعتمد على الإحصاء T' والذي تقريباً يتبع توزيع t بدرجات حرية تحسب من الصيغة التالية :

$$v = \frac{\left[\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right]^2}{\left[\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)}{n_2 - 1}\right]}$$

لإجراء الاختبار نختار عينة عشوائية حجمها n_1 من المجتمع الأول كما نختار عينة عشوائية أخرى حجمها n_2 من المجتمع الثاني (العينة الثانية مستقلة عن العينة الأولي). نحسب $\bar{x}_1, \bar{x}_2$, s_1^2, s_2^2 وعلى ذلك يكون :

$$t' = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - 0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}.$$

قيمة للمتغير T' عندما يكون H_0 صحيحاً. لاختبار ذي جانبين ، بمستوى معنوية α ، منطقة الرفض تقريباً تعطى حيث $t_{\frac{\alpha}{2}}$ أو $-t_{\frac{\alpha}{2}}$ هما القيمتين الحرجتين لتوزيع t بدرجات حرية v و منطقة الرفض سوف تكون $T' > t_{\frac{\alpha}{2}}$ أو $T' < -t_{\frac{\alpha}{2}}$. لبديل من جانب واحد $\mu_1 < \mu_2$ ، فإن منطقة الرفض سوف تكون $T' < -t_{\alpha}$ وللبديل $\mu_1 > \mu_2$ فإن منطقة الرفض سوف تكون $T' > t_{\alpha}$.

مثال (٩-١١) أوضحت الدراسة أن زيادة النترات **nitrate** في الاستهلاك الآدمي له تأثيرات ضارة منها قلة إنتاج الثيروكسين وقلة إدرار اللبن عند البقر. البيانات التالية نتيجة تجربة لقياس النسبة المئوية للزيادة في وزن فئران تجارب صغيرة العمر تناولت وجبة قياسية وفئران تناولت 2000 ppm نترات من مياه الشرب.

النترات	12.7	19.3	20.5	10.5	14.0	10.8	16.6	14.0	17.2
المراقبة (القياسية)	18.2	32.9	10.0	14.3	16.2	27.6	15.7		

تحقق من صحة الفرض القائل : لا يوجد فرق معنوي بين مجموعة النترات ومجموعة المراقبة وذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.1$. (تحت فرض أن العينتين تم اختيارهما من مجتمعين طبيعيين).

الحل . يجب علينا أولا التحقق من $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

$s_2 = 8.053$, $s_1 = 3.558$ وعلى ذلك فإن قيمة f هي :

$$f = \frac{s_2^2}{s_1^2} = \frac{\text{التباين الأكبر}}{\text{التباين الأصغر}} = \frac{(8.053)^2}{(3.558)^2} = 5.1228.$$

$f_{.05}(6,8) = 3.58$ والمستخرجة من جدول توزيع F في ملحق (٦) عند درجات حرية $v_1 = 6, v_2 = 8$. أما $f_{.95}(6,8)$ فيمكن الحصول عليها من العلاقة التالية :

$$f_{.95}(6,8) = \frac{1}{f_{.05}(8,6)} = \frac{1}{4.15} = 0.241.$$

منطقة الرفض $F > 3.58$ أو $F < 0.241$

وحيث أن f تقع في منطقة الرفض فإننا نرفض H_0 ونستنتج أن $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

الآن نختبر :

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2,$$
$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$
$$\alpha = 0.1 .$$
$$\bar{x}_2 = 19.271 \quad , \quad \bar{x}_1 = 15.067$$

$$t' = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - 0}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}.$$

$$= \frac{15.067 - 19.271}{\sqrt{\dfrac{3.558^2}{9} + \dfrac{8.053^2}{7}}} = -1.2869.$$

وعلينا أن نقارن قيمة t' المحسوبة بقيمة t الجدولية عند درجات حرية :

$$\nu = \frac{\left[\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}\right]^2}{\left[\dfrac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{\left(\dfrac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}\right]}$$

$$= \frac{\left[\dfrac{3.558^2}{9} + \dfrac{8.053^2}{7}\right]^2}{\left[\dfrac{\left(\dfrac{3.558^2}{9}\right)^2}{8} + \dfrac{\left(\dfrac{8.053^2}{7}\right)^2}{6}\right]}$$

$$= \frac{113.87}{14.55} = 7.8 \approx 8.$$

$t_{0.05} = 1.86$ والمستخرجة من جدول توزيع t في ملحق (٤) عند درجات حرية $\nu = 8$ وعلى ذلك فإن منطقة الرفض $T' > 1.86$ أو $T' < -1.86$. بما أن t تقع في منطقة القبول نقبل H_0 وهذا يعنى عدم وجود فرق معنوي بين مجموعة النترات ومجموعة المراقبة عند مستوى معنوية $\alpha = 0.1$.

(٩–٨) اختبارات t للأزواج The Paired t Tests

في البند (٩ –٧) كان اهتمامنا بالعينات المستقلة . الآن سوف يكون اهتمامنا بالعينات المزدوجة paired samples ، حيث $d_1, d_2, \ldots, d_n$ تمثل الفروق لأزواج المشاهدات المرتبطة التي عددها n . مثل هذه المشاهدات تحدث عندما نأخذ المشاهدات (القراءات) على المفردات قبل وبعد معالجة. بالنظر إلى الفروق لكل أزواج المشاهدات فإننا نأمل في الوصول إلى استنتاج يخص تأثير المعالجة. متوسط فروق المجتمع ، μ_D ، سوف يساوى الفرق بين متوسطي المجتمعين ، $\mu_1 - \mu_2$ ، وعلى ذلك فإن مشكلة اختبار فرض العدم H_0 أن $\mu_1 - \mu_2 = 0$ تكافئ اختبار $\mu_D = 0$. بفرض أن كل مجتمع من المجتمعين يتبع توزيعاً طبيعياً. أولاً نختار n

من أزواج المشاهدات عشوائيا ونحسب الفروق ونقدر $\bar{d}$ و s_d. وعلى ذلك تبعا لنظرية (٧-١١) ، فإننا نعلم أنه عندما يكون H_0 صحيحا فإن :

$$t = \frac{\bar{d} - 0}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}}$$

هي قيمة للمتغير العشوائي T الذي يتبع توزيع t بدرجات حرية $\nu = n - 1$. قرارنا في هذه الحالة يعتمد على توزيع t ومناطق الرفض المقابلة للفروض البديلة المختلفة وسوف نتبع الخطوات التي أتبعت من قبل .

مثال (٩-١٢) إذا كانت أوزان 10 أشخاص قبل التوقف عن التدخين وبعد 8 أسابيع من التوقف عن التدخين كما يلي :

الأشخاص	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
قبل	148	176	152	115	166	147	150	175	151	146
بعد	155	170	169	117	170	150	154	180	160	151

فهل تدل هذه البيانات على أن الامتناع عن التدخين يؤدى إلى زيادة وزن الأشخاص الذين يمتنعون عن التدخين ؟ وذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

الحل .

$$H_0 : \mu_D = 0,$$
$$H_1 : \mu_D \neq 0.$$
$$\alpha = 0.05.$$

$t_{0.025} = 2.262$ والمستخرجة من جدول توزيع t في ملحق (٤) عند درجات حرية $\nu = 9$.

منطقة الرفض $T > 2.262$ أو $T < -2.262$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{-50}{10} = -5 \quad ,$$

$$s_d = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} d_i)^2}{n}\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{9}\left[550 - \frac{(-50)^2}{10}\right]} = 5.7735,$$

$$t = \frac{\bar{d} - 0}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{-5}{5.7735/\sqrt{10}} = -2.7386.$$

وبما أن t تقع في منطقة الرفض نرفض H_0

(٩–٩) اختبارات تخص نسبة مجتمع

Tests Concerning a Population Proportion

سوف نهتم في هذا البند بمشكلة اختبارات الفروض التي فيها نسبة صفة ما تساوى قيمة معنية . أى أننا نهتم باختبار فرض العدم $H_0 : p = p_0$ ضد الفرض البديل $p < p_0$ أو $p > p_0$ أو $p \neq p_0$. سوف تقتصر دراستنا في هذا البند على حالة العينات الكبيرة ، وعلى ذلك فإن الإحصاء المناسب الذي يعتمد عليه قرارنا هو $\hat{P}$ الذي تقريباً يتبع توزيعاً طبيعياً. أى أن قرارنا سوف يعتمد على :

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \; q_0}{n}}}$$

والذي يمثل قيمة للمتغير Z الذي يتبع التوزيع الطبيعي القياسي. وعلى ذلك للاختبار من جانبين فإن منطقة الرفض ، بمستوى معنوية α، سوف تكون $Z > z_{\frac{\alpha}{2}}$ أو $Z < -z_{\frac{\alpha}{2}}$. للبديل من جانب واحد $p < p_0$ فإن منطقة الرفض سوف تكون $Z < -z_\alpha$. وأخيرا للبديل $p > p_0$ فإن منطقة الرفض سوف تكون $Z > z_\alpha$.

مثال (٩ – ١٣) يدعى منتج أن 90% من قطع الغيار التي يعد بها مصنعاً مطابقاً للمواصفات . فإذا تم اختيار عينة عشوائية من 200 قطعة ووجد أن 40 قطعة تالفة. أختبر أدعاء المنتج عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

$$H_0 : \quad p = 0.9,$$
$$H_1 : \quad p \neq 0.9.$$
$$\alpha = 0.05.$$

$z_{.025} = 1.96$ والمستخرجة من جدول التوزيع الطبيعي القياسي في ملحق (٣). منطقة الرفض $Z > 1.96$ أو $Z < -1.96$

$$x = 160 \quad , \quad n = 200.$$

$$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{160}{200} = 0.8 \ , \ q_0 = 1 - q_0 = 1 - 0.9 = 0.1 .$$

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \ q_0}{n}}} = \frac{0.8 - 0.9}{\sqrt{\frac{(0.9)(0.1)}{200}}} = -4.714.$$

وبما أن z تقع في منطقة الرفض نرفض H_0 .

<u>(٩-١٠) اختبارات تخص الفرق بين نسبتي مجتمعين</u>

<u>Tests Concerning a Difference Between Two Population Proportions</u>

بفرض أن p_1 هي نسبة توفر صفة ما في إحدى المجتمعات وكانت p_2 هي نسبة توفر الصفة نفسها في مجتمع آخر وإذا كان اهتمامنا باختبار فرض العدم $H_0 : p_1 = p_2$ فإن الإحصاء المناسب والذي يعتمد عليه قرارنا سوف يكون المتغير العشوائي $\hat{P}_1 - \hat{P}_2$. نختار عينة عشوائية كبيرة من الحجم n_1 من المجتمع الأول ونحسب نسبة توفر الصفة محل الدراسة فيها ولتكن $\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1}$ حيث أن x_1 هي عدد الذين يمثلون الصفة في المجتمع الأول. نختار عينة عشوائية أخرى كبيرة من الحجم n_2 من المجتمع الثاني ونحسب نسبة توفر الصفة المطلوبة منها ولتكن $\hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2}$ حيث x_2 هي عدد الذين يمتلكون الصفة في المجتمع الثاني ، ويجب أن تكون العينتين مستقلين تحت فرض العدم ومن نظرية (٧-٨) فإن :

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{p_1 \ q_1}{n_1} + \frac{p_2 \ q_2}{n_2}}}$$

$$= \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{pq[\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}]}}.$$

هو قيمة لمتغير عشوائي Z يتبع التوزيع الطبيعي القياسي عندما H_0 يكون صحيحا و n_2 , n_1 كبيرتان . وبما أن p مجهولة في صيغة z فإننا نحسبها من الصيغة التالية :

$$\tilde{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}.$$

وعلى ذلك تصبح z كالتالي :

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\tilde{p}\ \tilde{q}[\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}]}}.$$

حيث أن $\tilde{q} = 1 - \tilde{p}$

منطقة الرفض للفروض البديلة المختلفة يمكن الحصول عليها ، كما سبق أن ذكرنا ، باستخدام القيم الحرجة لمنحنى التوزيع الطبيعي القياسي .

مثال (٩ - ١٤) اختبرت عينة عشوائية من 300 مدخنا في مدينة ما ووجد أن من بينهم 60 يفضلون تدخين النوع A من السجائر ثم اختبرت عينة عشوائية من 200 مدخنا في مدينة أخرى ووجد أن من بينهم 30 يفضلون تدخين النوع A من السجائر . اختبر فرض العدم $H_0 : p_1 = p_2$ ضد الفرض البديل $H_1 : p_1 \neq p_2$ وذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

الحل٠

$$H_0 : p_1 = p_2,$$
$$H_1 : p_1 \neq p_2.$$
$$\alpha = 0.05.$$

$$\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1} = \frac{60}{300} = 0.2 \quad , \quad \hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2} = \frac{30}{200} = 0.15,$$

$$\tilde{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{60+30}{300+200} = \frac{90}{500} = 0.18, \tilde{q} = 1 - \tilde{p} = 1 - 0.18 = 0.82.$$

$z_{.025} = 1.96$ والمستخرجة من جدول التوزيع الطبيعي القياسي في ملحق (٣).

منطقة الرفض $Z > 1.96$ أو $Z < -1.96$

$$z = \frac{(0.2 - 0.15) - 0}{\sqrt{(0.18)(0.82)[(\frac{1}{300}) + (\frac{1}{200})]}} = 1.4257.$$

بما أن z تقع في منطقة القبول فإننا نقبل H_0 .

تمـــارين :

-١- بين أي الجمل التالية صواب وأيهم خطأ .

أ- $H_0 : S \leq 0.2$ ب- $H_0 : \bar{x} = 45$

ج- $H_0 : \mu = 100 \ , \ H_1 : \mu > 100$

د- $H_0 : \overline{X}_1 - \overline{X}_2 = 5$

هـ $H_0 : p = 0.25 \;,\; H_1 : p \neq 0.25$

و- $H_0 : S_1^2 = S_2^2 \;,\; H_1 : S_1^2 \neq S_2^2$

-٢- إذا كانت μ تمثل المتوسط الحقيقي لمستوى الإشعاع (مقاسه Picocuries per liter). القيمة 5 pci/L تمثل القيمة الحرجة (الحد الفاصل بين الأمان وعدم الأمان للماء) هل تقترح فرض العدم $H_0 : \mu = 5$ ضد الفرض البديل $H_1 : \mu > 5$ أو اختبار فرض العدم $H_0 : \mu = 5$ ضد الفرض البديل $H_1 : \mu < 5$ ولماذا ؟

-٣- إذا كان الإحصاء Z يتبع توزيع طبيعي قياسي عندما تكون H_0 صحيح أوجد مستوى المعنوية لكل من الحالات التالية :

أ- $H_1 : \mu > \mu_0$ ومنطقة الرفض $Z > 1.88$.

ب- $H_1 : \mu < \mu_0$ ومنطقة الرفض $Z < -2.75$.

ج- $H_1 : \mu \neq \mu_0$ ومنطقة الرفض $Z > 2.88$ أو $Z < -2.88$.

-٤- مجتمع طبيعي له متوسط μ وانحراف معياري $\sigma = 0.5$ ، لاختبار فرض العدم $H_0 : \mu = 15$ اختيرت عينة عشوائية من الحجم $n = 25$ وكانت منطقة الرفض $\overline{X} < 14.9$ أوجد :

أ- احتمال الوقوع في خطأ من النوع الأول ؟

ب- احتمال الوقوع في خطأ من النوع الثاني إذا كان الفرض البديل $\mu = 14.8$ و $\mu = 14.9$.

-٥- تنص المواصفات القياسية على أن قوة الضغط Compression Strength لخليط من الأسمنت البورتلاندى ومركبات أخرى لابد أن تزيد عن 1300 k N/m . بفرض أن قوة الضغط لهذا الخليط يتبع توزيعاً طبيعياً بمتوسط μ وانحراف معياري $\sigma = 60$.

(ا) ما هو فرض العدم والفرض البديل المناسب لاختبار μ في هذه الحالة ؟

(ب) إذا كانت $\overline{X}$ تمثل الإحصاء المناسب واختيرت عينة عشوائية من الحجم $n = 25$ وإذا كانت منطقة الرفض $\overline{X} \geq 1331.26$. ما هو احتمال الوقوع في خطأ من النوع الأول ؟

-٦- إذا كانت النسبة المئوية المرغوبة لمركب S_iO_2 في نوع معين من الأسمنت (في المتوسط) هى 5.5، لاختبار فرض العدم $H_0 : \mu = 5.5$ اختيرت 16 عينة مستقلة للتحليل . بفرض أن النسبة المئوية للمركب S_iO_2 في العينة تتبع توزيعاً طبيعياً بانحراف معياري $\sigma = 0.3$

وإذا كانت $\bar{x} = 5.25$. اختبر فرض العدم $H_0 : \mu = 5.5$ ضد الفرض البديل $H_1 : \mu \neq 5.5$ عند مستوى معنوي $\alpha = 0.01$.

-٧- يتطلب العمليات الجراحية التي تجري للخيول في ظروف الحقل مخدر يؤدى إلى تخدير الحيوان لزمن محدد. اختيرت عينة عشوائية من 73 حيوانا كانوا تحت المخدر وتم حساب أزمنة التخدير لهم وكان $\bar{x} = 18.86$ دقيقة بانحراف معياري $s = 8.6$ دقيقة هل هذه البيانات تدل على أن متوسط زمن الغياب عن الوعي تحت ظروف الحقل أقل من 20 دقيقة ؟ وذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

-٨- يوصي معهد التغذية على أن كمية الزنك التي يحتاج إليها الفرد الذكر في العمر أكبر من 50 سنة هو 15 mg\ day أجريت تجربة وتم الحصول على النتائج التالية :

$$\bar{x} = 11.3, \qquad n = 115, \qquad s = 6.45$$

فهل تدل هذه البيانات على أن متوسط الاحتياج اليومي من الزنك في مجتمع الذكور من العمر أكبر من 50 تقل عن المسموح به ؟

-٩- تقوم شركة لصناعة الإطارات بإنتاج نوع من إطارات السيارات التي يتحمل ضغط $30\ lb / in^2$. فإذا كانت μ هو المتوسط الحقيقي للضغط . أوجد مستوى المعنوية α لقيم z التالية :

أ- 2.10 ب - 1.75 ج- 1.41 د-5.3

-١٠- إذا كانت μ تمثل متوسط سير الدم لكل النساء الحوامل . لاختبار فرض العدم $H_0 : \mu = 5.63$ ضد الفرض البديل $H_1 : \mu \neq 5.63$ وذلك بالاعتماد على عينة عشوائية من النساء الحوامل من الحجم $n = 176$. فهل تعتقد أنه يمكن رفض H_0 عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$ إذا كانت $\bar{x} = 6.1$, $s = 0.7$ ؟

-١١- تقوم شركة لتصنيع الأدوية بإنتاج نوع معين من الأسبرين في عبوات سعة العبوة 100 حبة. تهتم الشركة بوزن الحبة أكثر من اهتمامها بالعدد ، فإذا كان من الضروري أن يكون متوسط وزن الحبة 5 grains . اختيرت عينة عشوائية من الحجم $n = 100$ حبة من إنتاج كبير وكان متوسط وزن الحبة $\bar{x} = 4.87$ بانحراف معياري $s = 0.35$. هل المعلومات التي تم الحصول عليها كافية لاستنتاج أن الشركة تنتج طبقاً للمواصفات القياسية ؟ اختبر الفرض المناسب عند مستوى معنوية 0.01 .

-١٢- أوضحت الخبرة الماضية أن درجات الطلبة في مادة الإحصاء تتبع توزيعاً طبيعياً بمتوسط 75 وتباين 16 . يرغب الأعضاء في قسم الرياضيات في معرفة هل متوسط درجات الطلبة في

السنة الحالية لها نفس مستوى السنوات الماضيـــة ؟ لذلــك قــرروا اختبــار فــرض العــدم $H_0 : \mu = 75$ ضد الفرض البديل $\mu \neq 75$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$. اختـــيرت عينــة عشوائية من الحجم $n = 15$ وكان متوسط درجات الطلبة في العينة $\bar{x} = 80$. ما الاســـتنتاج الذي يمكن وضعه ؟

-١٣- تسلم أحد التجار كمية كبيرة من بطاريات السيارات المنتجة بواسطة مصنـــع جديــد. يعتقد مدير المصنع أن متوسط عمر البطارية المنتجة 30 شهرا . لاختبار ذلك اختـــيرت عينة عشوائية من البطاريات تسلمها التاجر وتمت تجربتها فكانت أعمارها بالشهر كالآتي:

29.9, 30.0, 30.2, 35.4, 37.6, 37.6, 92.6, 29.8, 34.7, 39.8, 35.4.

فإذا كانت أعمار البطاريات المنتجة في المصنع تتبع توزيعاً طبيعياً فهل تدل بيانات العينــة على أن متوسط أعمار البطاريات أقل من 30 شهر إذا علـــم أن الانحـراف المعيــاري للبطاريات المنتجة في هذا المصنع $\sigma = 3$ شهرا .

-١٤- إذا كان متوسط الذكاء لعينة عشوائية ، من الحجــم $n = 20$ ، هــو $\bar{x} = 1053$. وبفرض أن درجات الذكاء في المجتمع الذي اختيرت فيه العينة يتبع توزيعاً طبيعياً بانحراف معياري 3.7 .تحقق من صحة الفرض القائل أن متوسط ذكاء المجتمع الذي اختيرت منـــه العينة لا يختلف عن 106.2 عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

-١٥- اختيرت عينة عشوائية من 25 عاملا بإحدى الشركات وكان متوسط إنتاج العـــامل في العينة 28 وحدة في اليوم، علما بأن إنتاجية العامل في هذه الشركة تتبع توزيعاً طبيعيـــاً بتبــاين $\sigma^2 = 5$ اختبر الفرض القائل أن متوسط إنتاجية العامل اليومية في هذه الشركة 25 وحدة وذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$.

-١٦- إذا كان من المعروف أن كمية المحصول بالمنتج من إحدى المحاصيل يتبع توزيعـــاً طبيعيـــاً بانحراف معياري 30 إردب للفدان ، اختيرت عينة عشوائية مساحتها 15 فدانـــا وتم حســـاب متوسط المحصول في العينة فكانت 490 إردب للفدان أختبر الفرض القائل أن الكميـــة المتوقعـــة للمحصول تساوى 500 إردب للفدان وذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

-١٧- يدعى مسئول في مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية أن متوسط عمر المصابيح هو 1000 ساعة، مع العلم أن أعمار المصابيح من إنتاج هذا المصنع يتبع توزيعاً طبيعياً بانحراف معياري 30 ساعة . اختيرت عينة عشوائية من الحجم $n = 25$ من إنتاج هذا المصنع فكان $\bar{x} = 900$ فـــهل تدل هذه البيانات أن متوسط عمر المصابيح 1000 ســـاعة وذلـــك عنـــد مســـتوى معنويـــة $\alpha = 0.01$.

-١٨- تستخدم آلة لملء أكياس بسلعة ما بطريقة أتوماتيكية بمتوسط 55 جرام للكيس. اختيرت عينة عشوائية من 35 كيس من هذه الآلة وتم حساب متوسط وزن الكيس فكان $\bar{x} = 57$ والانحراف المعياري $s = 3$ جرام أختبر فرض العدم $H_0 : \mu = 55$ ضد الفرض البديل $H_1 : \mu \neq 55$ وذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

-١٩- للمعلومات التالية إذا علم أن العينة تم اختيارها من مجتمع له توزيعاً طبيعياً ، أوجد منطقة الرفض وأحسب قيمة z وقرر هل تقبل فرض العدم أم لا ؟

$$H_0 : \mu = 30, \quad H_1, \mu < 30, \quad \sigma = 6, \quad , n = 20, \quad \alpha = 0.05, \quad \bar{x} = 25.$$

-٢٠- يعتقد مسئول في دار للنشر أنه في المتوسط تطبع الآلة 45 نسخة في الدقيقة من مجلد ما علما بأن المجتمع الذي اختيرت منه العينة يتبع توزيعاً طبيعياً بانحراف معياري $\sigma = 2.1$ دقيقة . في محاولة لزيادة عدد النسخ التي تطبع تم إدخال تعديلات على آلة الطبع ثم أخذت عينة عشوائية من الحجم $n = 25$ فكان متوسط عدد النسخ في الدقيقة $\bar{x} = 55$. اختبر فرض العدم $H_0 : \mu = 45$ ضد الفرض البديل $\mu > 45$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ ،

-٢١- إذا كان متوسط القامة في مجتمع ما هو 172 سم . اختيرت عينة عشوائية من هذا المجتمع فكان متوسط الطول فيها 173 سم بانحراف معياري 3.5 . فإذا كان حجم العينة 30 شخصا ، اختبر فرض العدم $\mu = 172$ ضد الفرض البديل $\mu \neq 172$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$.

-٢٢- اختيرت عينة عشوائية من 35 أسرة وحسب متوسط الدخل الشهري للأسرة فوجد أنه \$500 بانحراف معياري 40 \$. اختبر فرض العدم أن متوسط دخل الأسرة في هذا المجتمع يساوى 450 \$ ضد الفرض البديل $\mu \neq 450$ وذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$.

-٢٣- في دراسة لمعرفة تأثير نوع معين من معجون الأسنان على مقاومة تسوس الأسنان اختيرت عينة عشوائية من 25 طالبا وأشرف عليهم أحد المدرسين حتى يستعملوا هذا المعجون يوميا ثم قيست المقاومة بعد ثلاثة أشهر من هذه المحاولة بمقياس معين لعدد الميكروبات من نوع معروف موجود في اللعاب فكانت $\bar{x} = 5$.فإذا كان معروف للباحث أن هذا المقياس يتبع التوزيع الطبيعي بانحراف معياري $\sigma = 0.49$. فهل هناك ما يدعو إلى الاعتقاد بأن لهذا المعجون فائدة على زيادة المقاومة ضد التسوس وذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$ ؟علما بان $\mu_0 = 3$.

-٢٤- قررت شركة ما لا تزيد مدة المكالمة التليفونية التي يطلبها الموظف عن 25 دقيقة . اختيرت عينة عشوائية من 35 مكالمة فأعطيت متوسط 26.25 دقيقة بانحراف معياري 2.1

دقيقة ما الاستنتاج الذي يمكن اتخاذه بناء على هذه العينة وذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

-٢٥- اختيرت عينة من 35 عاملا في مصنع وكان متوسط العمر 38 سنة بانحراف معياري 8 سنة. أختبر فرض العدم $\mu = 40$ ضد الفرض البديل $\mu \neq 40$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

-٢٦- في تقرير خاص وجد أن كمية مركب **tar** لكل سيجارة من نوع ما هو 13 ملليجرام. اختيرت عينة عشوائية من 100 سيجارة فأعطيت متوسط 12.85 من **tar** بانحراف معياري 0.75 اختبر فرض العدم $H_0 : \mu = 13$ ضد الفرض البديل $H_1 : \mu \neq 13$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$.

-٢٧- قام مسئول من مصنع للعب الأطفال يعمل تعديل في سيارات الأطفال وكان من نتيجة هذا التعديل زيادة زمن عمل البطارية المشغلة للسيارة اختبرت عينة عشوائية من 100 سيارة وتم حساب متوسط عمر البطارية فكان 31 ساعة بانحراف معياري 0.75 اختبر فرض العدم $H_0 : \mu = 25$ وذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$.

-٢٨- إذا كانت نقطة الذوبان المحسوبة من 16 عينة من نوع ما من زيت الطعام المهدرج هي $\bar{x} = 94.32$ بفرض أن توزيع نقطة الذوبان طبيعي بانحراف معياري $\sigma = 1.2$. المطلوب اختبار فرض العدم $H_0 : \mu = 95$ ضد الفرض البديل $H_1 : \mu \neq 95$ وذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

-٢٩- يعتقد مسئول في مصنع للتليفزيونات أن التيار اللازم للحصول على صورة واضحة لشاشة التليفزيون على الأكثر **250 (μ A) microamperes** اختيرت عينة عشوائية من 20 وحدة (تليفزيون) وكان متوسط التيار من العينة $\bar{x} = 257.3$ فإذا كان μ تمثل متوسط التيار الحقيقي الضروري للحصول على الصورة الواضحة للتليفزيون من هذا النوع وتحت فرض أن μ هي متوسط توزيع طبيعي بانحراف معياري $\sigma = 15$ ، اختبر فرض العدم $H_0 : \mu = 250$ ضد الفرض المناسب وذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$.

-٣٠- إذا كان **T** متغيرا عشوائياً يتبع توزيع **t** عندما يكون H_0 صحيح أوجد مستوى المعنوية α لكل من الحالات الآتية : (درجات الحرية = ν) .

أ- $H_1 : \mu > \mu_0 \quad , \quad \nu = 15$

ومنطقة الرفض $T \geq 3.733$

ب- $H_1 : \mu < \mu_0 \quad , \quad n = 24$

ومنطقة الرفض $T \leq -2.069$

ج- $H_1 : \mu \neq \mu_0 \quad , \quad n = 31$

ومنطقة الرفض $T > 1.697 \quad T \leq -1.697$

-٣١- يقوم باحث بجمع البيانات لاختبار فرض العدم $H_0 : \mu = 17$ ضد الفـــرض البديـــل $H_1 : \mu > 17$ أوجد مستوى المعنوية α المرتبط بقيم t ودرجات الحرية التالية :

أ- $\nu = 14 \; , \; t = 1.761$

ب- $\nu = 25 \; , \; t = 3.450$

ج- $\nu = 13 \; , \; t = 1.771$

د- $\nu = 8 \; , \; t = 1.860$

هـ $\nu = 40 \; , \; t = 1.684$

-٣٢- أوجد مستوى المعنوية α لاختبار من جانبين في الحالات التالية :

أ- $\nu = 6 \; , \; t = 2.447$

ب- $\nu = 14 \; , \; t = 2.145$

ج- $\nu = 24 \; , \; t = 2.064$

د- $\nu = 17 \; , \; t = 2.110$

-٣٣- اختيرت عينة عشوائية مكونة من درجات 10 طـــــلاب في مـــادة الإحصـــاء وكـــان $s = 3 \; , \; \bar{x} = 7$. أختبر الفرض القائل أن متوسط درجـــــة الطـــالب في المجتمـــع الطبيعـــي المسحوب منه العينة يساوى 7.5 وذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

-٣٤- اختيرت عينة عشوائية من 10 فكانت أطوالهم بالبوصة هى

81, 70, 68, 68, 64, 72, 71, 80, 61, 70

اختبر الفرض القائل أن $\mu = 75$ ضد الفرض البديل $\mu \neq 75$ عند مستوى معنويـــــة $\alpha = 0.01$. مع العلم بأن المجتمع الذي اختيرت منه العينة يتبع توزيعاً طبيعياً .

-٣٥- يعتقد مدير شركة لصناعة الصابون أن أوزان صناديق الصابون يتبع التوزيع الطبيعـــــي بمتوسط 500 جرام . اختيرت عينة عشوائية من 15 صندوقا ووجد أن $\bar{x} = 530$ و $s = 5.5$ جراما . اختبر فرض العدم أن $\mu = 500$ ضد الفرض البديل $\mu \neq 500$ عند مستوى معنويـــــة $\alpha = 0.05$.

-٣٦- اختيرت عينة عشوائية من 20 عبوة من مشروب بارد استخدمت آلة لتعبئته. فإذا كان متوسط العبوة $\bar{x} = 7.5$ أوقية بانحراف معياري 0.47 أوقية. اختبر فرض العدم أن $\mu = 7.8$

ضد الفرض البديل $\mu < 7.8$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$ تحت فرض أن المجتمع الذي اختيرت منه العينة يتبع توزيعاً طبيعياً .

-٣٧- لاختبار فرض العدم أن متوسط وزن الصندوق من القمح المعبأ في شركة ما هو 10 كيلو . اختيرت عينة عشوائية من 10 صناديق فكانت النتائج كالتالي :

$$10.1,\ 9.5,\ 10.1,\ 11.2,\ 9.9,\ 8.7,\ 6.7,\ 8.1,\ 9.9,\ 6.1$$

استخدم مستوى معنوية $\alpha = 0.01$ لاختبار فرض العدم وذلك تحت فرض أن توزيع الأوزان لصناديق القمح طبيعي .

-٣٨- يرغب باحث في أن تكون حموضة التربة التي سوف يستخدمها في أبحاثه ذات حموضة $PH = 8.75$. لهذا الغرض قام الباحث بمعالجة التربة بمحلول من 25% من الماء و 75% من effluent وبعد ذلك تم اختيار 5 عينات مشتقة من التربة المعالجة فكان المتوسط الحسابي والانحراف المعياري هما $\bar{x} = 8$, $s = 0.05$ فهل تدل هذه البيانات على أن حموضة التربة تساوى 8.75 عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ مع العلم أن العينة تم اختيارها من مجتمع طبيعي .

-٣٩- لمثال (٣٨) اختبر فرض العدم $H_0 : \sigma = .55$ ضد الفرض البديل $H_1 : \sigma \neq .55$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

-٤٠- للمثال (٢٧) اختبر فرض العدم $H_0 : \sigma = 0.81$ ضد الفرض البديل $H_1 : \sigma < 0.81$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$.

-٤١- قام المسئولون في شركة لإنتاج ملابس الأطفال بإنتاج نوعية من الملابس المقاومة للحريق . للمقارنة بين النوعين تم الحصول على البيانات التالية :

$$n_1 = 15,\quad n_2 = 15,\ \alpha = 0.05,\quad s_1 = 1.5,\quad s_2 = .2$$

اختبر فرض العدم $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ضد الفرض البديل $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$ مع العلم أن أزمنة الحريق للملابس في المصنع تتبع توزيعاً طبيعياً .

-٤٢- أجريت دراسة في إحدى مراكز العلاج الطبيعي على عينة عشوائية من 10 أشخاص ممن يتبعون نظام إنقاص الوزن وقد تم تسجيل مقدار النقص في الوزن لكل شخص في العينة خلال فترة إتباع النظام المتبع لإنقاص الوزن وتم الحصول على البيانات التالية :

$$14,\ 5,\ 5,\ 11,\ 12,\ 17,\ 7,\ 3,\ 4,\ 9$$

اختبر فرض الدم $H_0 : \sigma^2 = 10$ ضد الفرض البديل $H_1 : \sigma^2 > 10$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$ وذلك تحت فرض أن المجتمع الذي اختبرت منه العينة يتبع توزيعاً طبيعياً .

٤٣- اختيرت عينة عشوائية من الحجم $n = 10$ من مجتمع طبيعي وكان تباين العينة $s^2 = 24$ اختبر فرض العدم $H_0 : \sigma^2 = 23$ حيث الفرض البديل $H_1 : \sigma^2 \neq 23$ وذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$.

٤٤- في إحدى مراكز تعليم غير المصريين يوجد نظامين A , B لتعليم القراءة فإذا كان تباين العينة لمستوى القراءة بالنسبة للدارسين عن طريق النظام A هو $s_1^2 = 1.2$ وذلك من عينة عشوائية حجمها $n_1 = 30$. اختيرت عينة عشوائية أخرى مكونة من 35 فردا ممن يدرسون باستخدام النظام B فكان تباين العينة $s_2^2 = 1.04$. اختبر الفرض القائل بأن التدريس باستخدام النظام A متساوي في التشتت مع النظام B عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$.

٤٥- في عينة عشوائية حجمها $n_1 = 20$ وجد أن الانحراف المعياري لتركيز الصوديوم في الدم (m E q / L) هو $s_1 = 40.5$ بينما في عينة أخرى من الحجم $n_2 = 20$ وجد أن $s_2 = 32.1$. بفرض أن توزيع كمية الصوديوم طبيعي اختبر فرض العدم $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ضد الفرض البديل $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$.

٤٦- يعتبر التوكسافين من المبيدات التي تلوث البيئة ويعتبر خطرا على النبات والحيوان والإنسان. قام باحث باختيار عينة عشوائية من الفئران (الإناث) من الحجم $n_1 = 30$ وتم إعطائهم خلطة غذائية بها جرعة مخفضة من التوكسافين (4 ppm) وأخذت عينة أخرى من الحجم $n_2 = 23$ (اعتبرت عينة المراقبة لم تأخذ أي مبيد في الخلطة الغذائية). وفي نهاية التجربة تم تسجيل الزيادة في الوزن لكل فأر، فإذا كان الانحراف المعياري لعينة المراقبة $s_2 = 32$ جراما بينما الانحراف المعياري للعينة المعالجة $s_1 = 54$ جراما أختبر فرض العدم $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ضد الفرض البديل $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$، مع العلم أن العينتين تم اختيارهما من مجتمعين طبيعيين .

٤٧- اختيرت 10 عينات من الموقع A و 8 عينات من الموقع B وتم قياس الحموضة لكل عينة PH . والبيانات في الجدول التالي :

الموقع A	8.53	8.52	8.01	8.01	7.88	7.93
	9.98	7.85	7.92	7.80		
الموقع B	7.85	7.73	7.58	7.4	3.35	
	7.3	7.27	7.27			

أ- أختبر فرض العدم $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ضد الفرض البديل $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.02$.

ب- هل هناك فرق معنوي بين متوسطي الحموضة للموقعين عند مستوى معنوية $\alpha = 0.02$ مع العلم أن العينتين تم اختيارهما من مجتمعين طبيعيين .

-٤٨- زرع صنفان من القمح ، الأول من 10 قطع فكان تباين المحصول هو $s_1^2 = 25$ وزرع الصنف الثاني في 15 قطعة وكان تباين المحصول هو $s_2^2 = 15$ أختبر فرض العدم $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ضد الفرض البديل $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.02$ مع العلم أن العينتين تم اختيارهما من مجتمعين طبيعيين .

-٤٩- إذا كانت μ_1 تمثل العمر الحقيقي لإطارات السيارات من النوع A مقاسة بالأميال (عدد الأميال التي تقطعها السيارة حتى يستهلك الإطار) و μ_2 تمثل العمر الحقيقي لإطارات السيارات من النوع B . اختبر فرض العدم $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ضد الفرض البديل $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.1$ إذا كانت :

$$n_1 = 40, \quad \bar{x}_1 = 36500, \quad s_1 = 220,$$
$$n_2 = 40, \quad \bar{x}_2 = 33400, \quad s_2 = 190$$

مع العلم بأن العينتين تم اختيارهما من مجتمعين طبيعيين .

-٥٠- طبق اختبار للعصابيه على مجموعتين ، الأولى من الذكور وحجمها 35 والثانية من الإناث وحجمها 40 فإذا كان متوسط العصابية لدي الذكور 21.3 بانحراف معياري 4.6 ومتوسط العصابية لدى الإناث 24.2 بانحراف معياري 3.9 تحقق من صحة الفرض القائل أن $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ضد الفرض البديل $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

-٥١- في دراسة لتقدير ما إذا كان هناك فرق معنوي بين أجور أعضاء هيئة التدريس في جامعتين B , A اختيرت عينة عشوائية من 100 عضو هيئة تدريس من الجامعة A ووجد أن $\bar{x}_1 = 11000$ \$ خلال ٩ أشهر بانحراف معياري $s_1 = 1300$. كما اختيرت عينة عشوائية أخرى من 200 عضو هيئة تدريس من الجامعة B ووجد أن $\bar{x}_2 = 11900$ \$ بانحراف معياري $s_2 = 1400$. اختبر الفرض القائل أن متوسط الأجور لأعضاء هيئة التدريس خلال 9 اشهر في الجامعة A لا يختلف عن متوسط الأجور في الجامعة B عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

-٥٢- طبق اختبار لطلاقة الكلمات على مجموعتين الأول من الانبساطين والثانية من العصابيين حجمهما 45 , 50 شخصا على التوالي ، وحصلت مجموعة الانبساطين على متوسط قدرة 70.2 بانحراف معياري 11.6 وحصلت العصابيين على متوسط قدرة 65 بانحراف معياري 10.2 . تحقق من صحة الفرض القائل أن طلاقة الكلمات واحدة في المجموعتين؟

-٥٣- يعتقد المسئول في مصنع عن وجود اختلاف في جودة نوعين من قطع الغيار تم استلامهم من موردين A , B وقد تم الحصول على البيانات التالية بناء على عينتين عشوائيين من الموردين :

المورد A $\quad s_1 = 10, \quad \bar{x}_1 = 153, \quad n_1 = 50$

المورد B $\quad s_2 = 5, \quad \bar{x}_2 = 150, \quad n_2 = 100$

اختبر القول القائل بعدم وجود فرق معنوي بين العينتين عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

-٥٤- في إحدى مراكز رعاية الطفل سجلت الأوزان (بالرطل) لعينتين عشوائيتين من الأطفال حديثي الولادة كل منهما يتكون من خمسة أطفال فكانت البيانات كالتالي :

المجموعة الأولي 8, 6, 6, 5, 7

المجموعة الثانية 8, 7, 8, 5, 6

أ- اختبر الفرض القائل أن $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ضد الفرض البديل $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.1$. مع العلم أن العينتين تم اختيارهما من مجتمعين طبيعيين .

ب- أختبر فرض العدم $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ضد الفرض البديل $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.02$.

-٥٥- يرغب مسئول في مصنع لانتاج معجون للأسنان في دراسة تأثير إضافة مادة كيمائية معينة إلى معجون لتحسين مفعوله. اختبرت عينتين مستقلتين كل عينة من 10 أشخاص استخدمت أفراد العينة الأولي المعجون مضاف إليه المادة الكيمائية بينما استخدمت أفراد العينة الثانية المعجون بدون إضافة المادة الكيمائية باستخدام مقياس خاص تم الحصول على البيانات التالية :

العينة الأولى (أضيفت المادة الكيمائية) $s_1 = 3 \quad \bar{x}_1 = 8,$

العينة الثانية (بدون إضافة) $s_2 = 4 \quad \bar{x}_2 = 9,$

اختير فرض العدم $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ضد الفرض البديل $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$. مع العلم أن العينتين تم اختيارهما من مجتمعين طبيعيين .

-٥٦- مجموعتان من الطلبة تتكون إحداهما من 10 أفراد والأخرى من 8 أفراد أعطيت امتحانا واحدا ودونت النتائج كما يلي :

المجموعة الأولى 7, 7, 7, 6, 7, 8, 8, 9, 9, 10

المجموعة الثانية 10, 10, 8, 7, 7, 10, 9, 7

المطلوب اختبار الفرض $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ضد الفرض البديل $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.1$. مع العلم أن العينتين تم اختيارهما من مجتمعين طبيعيين .

-٥٧- في اختبار للقلق لمجموعة من الذكور والإناث تم الحصول على البيانات التالي :

	حجم العينة	متوسط العينة	الانحراف المعياري
ذكور	20	10.4	4.83
إناث	25	9.26	4.68

اختبر فرض العدم $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ضد الفرض البديل $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.1$ مع العلم بأن العينتين تم اختيارهما من مجتمعين طبيعيين .

-٥٨- البيانات التالية تمثل أوزان الأدوات الخاصة بأعضاء ناديين A , B (الوزن بالكيلو):

النادي A	32	28	41	39	34	
النادي B	36	39	30	34	39	35

اختبر فرض العدم $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ضد الفرض البديل $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.1$ مع العلم بأن العينتين تم اختيارهما من مجتمعين طبيعيين .

-٥٩- تعتقد الدراسة الحديثة أن خريجي المعاهد المتوسطة يتزوجون في عمر أقل من خريجي الجامعات. لتدعيم هذا الاعتقاد ، اختيرت عينة عشوائية من 100 فرد من كل مجموعة وتم تسجيل العمر عند الزواج وكانت النتائج كما يلي :

$\bar{x}_1 = 22.5, \quad s_1 = 1.4$ خريجي المعاهد المتوسطة

$\bar{x}_2 = 28, \quad s_2 = 1.5$ خريجي الجامعات

اختبر فرض العدم بعدم وجود فرق معنوي بين المجموعتين وذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$.

-٦٠- تم تقسيم مجموعة من الأطفال حديثي الولادة في مستشفى إلى مجموعتين ، كل مجموعة استخدمت نوع من لبن الأطفال وقد تم تسجيل وزن الأطفال في كل مجموعة وذلك بعد 6 أسابيع من الولادة ، كانت النتائج كما يلي بالكيلو :

المجموعة A	5.6	6.1	4.6	5.2	5.0	4.5	4.2	3.0
المجموعة B	8.6	8.7	5.8	5.5	4.4	4.5	4.2	

المطلوب معرفة هل هناك فرق معنوي بين النوعين عند مستوى معنوية $\alpha = 0.1$ علما بأن العينتين تم اختيارهما من مجتمعين طبيعيين .

-٦١- لمقارنة إحدى العناصر المعدنية لنوعين من العصائر B , A أخذت عينة عشوائية من العلب المعروضة في الأسواق لكل منهما وكانت النتائج كما يلي (وحدة القياس mg/100 gm)

النوع A	4.6	4.2	4.5	4.3	4.9	5.2	5.7
النوع B	5.1	4.3	4.2	5.7	5.8	5.1	5.3

أ- أختبر فرض العدم $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ضد الفرض البديل $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.02$.

ب- أختبر فرض العدم $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ضد الفرض البديل $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.02$ وذلك تحت فرض أن العينتين تم اختيارهما من مجتمعين طبيعيين .

-٦٢- أعطي اختبار في القراءة لعينة من 12 طفل من أصل أمريكي وعينة أخرى من 10 أطفال من أصل مكسيكي . نتائج هذا الاختبار كانت :

أمريكي الأصل $\bar{x}_1 = 74 \quad , \quad s_1 = 8$

مكسيكي $\bar{x}_2 = 70 \quad , \quad s_2 = 10$

أ- أختبر فرض العدم $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ضد الفرض البديل $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.02$.

ب- أختبر فرض العدم $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ضد الفرض البديل $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ وذلك تحت فرض أن العينتين تم اختيارهما من مجتمعين طبيعيين .

-٦٣- لدراسة تأثير نوع من السماد على مساحة الورقة لنبات ما. اختير 16 قطعةً للزراعة وتم اختيار 8 منهم عشوائيا للمعالجة بالسماد والباقي تركت لمعالجة المراقبة وتم زراعة النبات في القطع التي عددها 16. البيانات التالية تعطى مساحة الورقة لكل نبات .

المعالجة بالسماد	1024	1216	1312	1780	
	1216	1312	992	1120	
معالجة المراقبة	1104	1072	1088	1328	1376
	1280	1120	1200		

أختبر فرض العدم $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ضد الفرض البديل $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.1$ علما بأن العينتين تم اختيارهما من مجتمعين طبيعيين .

-٦٤- تعطى النتائج التالية الزيادة في الوزن (gm) لعينتين الأولي عينة مراقبة والأخرى تم معالجة أفرادها بمركب Soft steroid (الجرعة 1 mg / pellet dose)

	n_i	$\bar{x}_i$	s_i
المراقبة	10	40.5	2.5
Soft Steroid	8	32.8	2.6

اختبر فرض العدم $H_0: \mu_1 = \mu_2$ ضد الفرض البديل $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.1$ علما بأن العينتين تم اختيارهما من مجتمعين طبيعيين .

-٦٥- في دراسة لأهمية دخول الطالب المعمل في مادة الفيزياء اختيرت عينة عشوائية من 11 طالبا تم دخولهم المعمل. وكان متوسط الدرجة النهائية $\bar{x}_1 = 85$ بانحراف معياري $s_1=4.6$ كما اختيرت عينة أخرى من 17 طالبا من الذين لم يدخلوا المعمل فكان $\bar{x}_2 = 79$ بانحراف معياري $s_2 = 6.2$. اختبر الفرض القائل أن دخول المعمل يؤثر على درجات الطلبة عند مستوى معنوية $\alpha = 0.1$ وذلك تحت فرض أن العينتين تم اختيارهما من توزعين طبيعيين .

-٦٦- إذا كانت نسبة الألياف في عينتين عشوائيين من شجيرات الكتان هي :

العينة الأولي	11.9	11.8	12.4	12.6	11.9	11.2
العينة الثانية	12.9	12.6	12.7	12.8	12.7	

المطلوب اختبار ما إذا كانت العينتين مأخوذتان من مجتمعين لهما نفس المتوسط والانحراف المعياري عند مستوى معنوية $\alpha = 0.1$ وذلك تحت فرض أن العينتين تم اختيارهما من مجتمعين طبيعيين .

-٦٧- البيانات التالية تمثل أزمنة العرض بالدقيقة لأفلام منتجة من شركتين A , B.

الشركة A	102	88	98	109	92	
الشركة B	81	166	98	93	88	110

اختبر الفرض القائل أن متوسط زمن العرض للفيلم المنتج من الشركة A يزيد عن متوسط زمن العرض للفيلم المنتج من الشركة B وذلك تحت فرض أن توزيع الزمن للشركتين طبيعي (مستوى المعنوية $\alpha = 0.1$) .

-٦٨- يعتقد مدير شركة ما أن الأجر في الساعة بالدولار للعمال النصف ماهرة متساوية في قسمين من الشركة كالأتي :

القسم الأول : $\bar{x}_1 = 5.3$, $n_1 = 50$ $s_1 = 2.1$

القسم الثاني : $\bar{x}_2 = 5.9$, $n_2 = 40$ $s_2 = 1.7$

اختبر فرض العدم $H_0: \mu_1 = \mu_2$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.1$.

-٦٩- في مقارنة لمتوسط درجات الذكاء IQ لفرقتين في كلية ما اختيرت عينة عشوائية من أربعة طلبة من إحدى الفرق وكانت درجات الذكاء لهم 117 ,116 ,113 ,110 . كما اختيرت عينة عشوائية من الفرقة الأخرى وكانت درجات الذكاء لهم 109 ,111 ,112 ,112 اختبر فرض العدم $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ضد الفرض البديل $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.1$ تحت فرض أن العينتين تم اختيارها من توزيعين طبيعيين .

-٧٠- اختيرت عينة عشوائية من البحارة حجمها n = 10 وقيست أوزانهم بالبوصة فكانت

80, 70, 68, 66, 72, 73, 70, 61, 60, 72

كما اختيرت عينة عشوائية أخرى من الجنود فكانت أوزانهم كايلي :

61, 61, 72, 70, 73, 62, 63, 71, 70

أ- أختبر فرض العدم $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ضد الفرض البديل $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.02$.

ب- أختبر فرض العدم $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ضد الفرض البديل $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$ تحت فرض أن العينتين تم اختيارهما من توزيعين طبيعيين .

-٧١- تم قياس كمية الأنسولين لعينة من الفئران المصابة بمرض السكر والتي تعالج بجرعات منخفضة من الأنسولين (المجموعة A) وأخرى تعالج بجرعات عالية من الأنسولين (المجموعة B) وتم الحصول على البيانات التالية :

المجموعة A $\quad n_1 = 8, \quad \bar{x}_1 = 1.98 \; , \; s_1 = 0.5,$

المجموعة B $\quad n_2 = 12, \quad \bar{x}_2 = 1.3 \; , \; s_2 = 0.35$

اختبر فرض العدم $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ضد الفرض البديل $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$. تحت فرض أن العينتين تم اختيارهما من توزيعين طبيعيين .

-٧٢- البيانات التالية تمثل عدد البكتريا الهوائية (عدد المستعمرات/ قدم 3) والمأخوذة من 8 عينات مأخوذة من حجرات مفروشة بالسجاد و 8 عينات غير مفروشة بالسجاد في مستشفى ما

14	14.6	10.1	10.8	13	7.1	8.2	11.2	حجرات مفروشة
13.7	10.1	11.1	12	7.2	3.8	8.2	12.1	حجرات غير مفروشة

أختبر فرض العدم $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ضد الفرض البديل $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ عند مستوى معنوية فرض أن $\alpha = 0.02$ تحت العينتين تم اختيارهما من توزيعين طبيعيين .

-٧٣- إذا كانت عدد البكتريا بالملايين على نبات محفوظ على درجتي 10^o , 20^o بعد 10 أيام هو :

$^o10$ 8 9 6 7 7 8 9 10

°20 6 5 3 2 1 1 3 4

أ- أختبر فرض العدم $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ ضد الفرض البديل $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$ عند مستوى معنوية $\alpha=0.02$.

ب- أختبر فرض العدم $H_0:\mu_1=\mu_2$ ضد الفرض البديل $H_1:\mu_1\neq\mu_2$ عند مستوى معنوية $\alpha=0.05$ تحت فرض أن العينتين تم اختيارهما من توزيعين طبيعيين.

٧٤- طبق اختبار للقدرة على التفكير الناقد على مجموعة من المراهقين قبل حضورهم برنامج أعد لهذا الغرض مدته 40 أسبوعا وبعد حضورهم للبرنامج فإذا كان حجم العينة 10 أفراد تحقق من صحة الفرض القائل أن للبرنامج فاعلية على تنمية الفكر الناقد لدى المراهقين إذا كانت البيانات كايلي :

الشخص	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
قبل البرنامج	15	15	11	10	10	15	17	16	11	12
بعد البرنامج	20	25	14	16	22	23	24	25	24	26

وذلك عند مستوى معنوية $\alpha=0.05$.

٧٥- لمقارنة عليقتين من ناحية تأثيرهما على نمو العجول خلال شهرين من التغذية اختيرت عينة عشوائية من 10 أزواج (توائم) من العجول . اختبر صحة الفرض القائل $H_0:\mu_D=0$ ضد الفرض البديل $H_1:\mu_D=0$ عند مستوى معنوية $\alpha=0.01$. إذا توافرت لك البيانات التالية :

التوأم	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
العليقة أ	20.1	30.6	31.7	27.2	22.7	22.4	29.3	28.8	26.3	27.1
العليقة ب	25.5	32.2	30.1	29.3	25.1	30.1	30.6	28.1	30.2	30.1

٧٦- لدراسة الآثار الجانبية لدواء معين على ضغط الدم أخذت قياسات ضغط الدم لعينة عشوائية من المرض حجمها 8 قبل وبعد تناول الدواء فكانت البيانات كالتالي :

الشخص	1	2	3	4	5	6	7	8
قبل الدواء	70	72	80	65	66	77	70	72
بعد الدواء	66	70	75	62	64	73	74	77

اختبر الفرض القائل $H_0:\mu_D=0$ ضد الفرض البديل $H_1:\mu_D\neq0$ عند مستوى معنوية $\alpha=0.05$.

-٧٧- طبق مقياس للاتجاهات نحو الأطفال في عينة من السـيدات الآتي تم قبولهـم بقسـم دراسات الطفولة فور التحاقهن بالقسم ، ثم طبق نفس المقياس مرة أخرى فور حصولهن علـى البكالوريوس وكانت النتائج كالتالي :

السيدة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
عند الالتحاق	9	6	6	14	14	8	8	12	8	14
عند التخرج	11	20	15	15	15	18	18	17	16	16

اختبر الفرض العدم $H_0 : \mu_D = 0$ ضد الفرض البديل $H_1 : \mu_D \neq 0$ عند مستوى معنويـة $\alpha = 0.05$.

-٧٨- قام شخص بإجراء 6 عمليات حسابية على آلتين حاسبتين وتسجيل الزمن اللازم لكـل عملية على كل آلة في الجدول التالي :

العملية الحسابية	1	2	3	4	5	6
الآلة الأولـي	22	17	28	21	32	19
الآلة الثانيـة	18	19	23	22	30	22

اختبر الفرض العدم $H_0 : \mu_D = 0$ ضد الفرض البديل $H_1 : \mu_D \neq 0$ عند مستوى معنويـة $\alpha = 0.05$.

-٧٩- للمقارنة بين طريقتين لتقدير كمية اللبن المهضوم في الأطفال الرضع ، اختـيرت عينـة عشوائية من الحجم $n = 14$ ، البيانات التالية تعطى كمية اللبن المهضوم لكل طفل في العينة :

الطفل	1	2	3	4	5	6	7
Isotopic	1509	1418	1561	1556	2169	1760	1098
Test-weighing	1448	1254	1336	1565	2000	1318	1410
الطفل	8	9	10	11	12	13	14
Isotopic	1198	1479	1781	1414	1954	2174	2058
Test-weighing	1179	1342	1124	1468	1604	1722	1518

اختبر الفرض العدم $H_0 : \mu_D = 0$ ضد الفرض البديل $H_1 : \mu_D \neq 0$ عند مستوى معنويـة $\alpha = 0.05$.

-٨٠- للمقارنة من نوعين من مصايد الأسماك الخاصة بسمك الهامور ، استخدم النوعين خلال 16 فترة زمنية خلال 4 سنوات وذلك في بحيرة ما و البيانات التالية تعطى كمية الأسماك لكل يوم

الفترة	1	2	3	4	5	6	7	8
Pipe	6.64	7.89	1.83	0.42	0.85	0.29	0.57	0.63
Brush	9.73	8.1	2.17	0.75	1.61	0.75	0.83	0.56
الفترة	9	10	11	12	13	14	15	16
Pipe	0.32	0.37	0.0	0.11	4.86	1.8	0.32	0.88
Bursh	0.67	0.32	0.98	0.52	5.38	2.33	0.91	0.70

اختبر الفرض العدم $H_0 : \mu_D = 0$ ضد الفرض البديل $H_1 : \mu_D \neq 0$.

-٨١- من المعروف أن العناصر النادرة لها تأثير غير مرغوب فيه على طعم مياه الشرب وأيضا آثار ضارة على الصحة إذا وجدت بكميات كبيرة . قام باحث بإختبار الزنك (مقاس mg/L) لكل من سطح وقاع النهر في كل موقع . الأزواج الستة من المشاهدات معطاة في الجدول التالي . هل تدل هذه البيانات على أن المتوسط الحقيقي لتركيز الزنك في قاع الماء يزيد عن سطح الماء ؟ وذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

الموقع	1	2	3	4	5	6
قاع النهر	0.430	0.266	0.567	0.531	0.707	0.716
سطح النهر	0.415	0.238	0.390	0.410	0.605	0.609

-٨٢- لاختبار تأثير إضافة مواد الجفاف على الدهان أجريت تجربة على 6 عينات من المعدن حيث قسمت كل عينة إلى نصفين لكل عينة ثم دهان نصف العينة بالدهان المضاف له مواد الجفاف بينما تم دهان النصف الآخر من العينة بالدهان بدون إضافة مواد الجفاف . وتترك العينات التي عددها 12 حتى الجفاف وتم تسجيل زمن الجفاف في الجدول التالي :

العينة	1	2	3	4	5	6
الدهان مضاف له مواد الجفاف	3.4	3.8	4.2	4.1	35	4.7
الدهان بدون إضافة	3.6	3.8	4.3	4.3	3.6	4.6

اختبر الفرض العدم $H_0 : \mu_D = 0$ ضد الفرض البديل $H_1 : \mu_D \neq 0$ وذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

-٨٣- البيانات التالية تمثل أوزان 10 قوائم عند لحظة الميلاد (مقاس بالكيلو) وذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

التوائم	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
الأول في الولادة	3.95	3.41	3.73	3.48	4.28	3.98	4.18	4.04	3.73	4.13
الثاني في الولادة	3.93	3.35	3.72	4.18	3.44	4.15	3.89	4.20	4.00	3.72

اختبر فرض العدم أن الطفل الأول في النزول لأي توائم أثقل في الوزن من الطفل الثاني .

-٨٤- إذا كان من المعلوم أن واحد من كل سبعة يدخنون في إحدى الدول . فإذا أجريت حملة للتوعية عن مضار التدخين . للحكم على مدي نجاح تلك الحملة أخذت عينة عشوائية من 600 شخص ووجد من بينهم 180 لا يزالون يدخنون هل البيانات تعطى دليلا كافيا على نجاح الحملة وذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

-٨٥- أصيبت إحدى المناطق الزراعية التي مساحتها 6000 فدان بإحدى الآفات الزراعية . اختيرت عينة عشوائية حجمها 300 فدان فوجد أن نسبة الإصابة بها 20% اختبر الفرض القائل أن نسبة الإصابة 15% عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$.

-٨٦-أجريت دراسة على المركز المالي لعينة عشوائية حجمها 200 من شركات الغزل والنسيج فوجد أن 25% منها سوف تتجه إلى الإفلاس بعد عام . اختبر الفرض القائل أن 40% من شركات الغزل والنسيج في المجتمع المسحوب منه العينة سوف تتجه إلى الإفلاس بعد عام وذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$.

-٨٧- اختيرت عينة عشوائية من 200 شخص من مجتمع ما ووجد أن 40 شخص من العينة مصابون بمرض ما . المطلوب اختبار الفرض أن نسبة الإصابة بالمرض في هذا المجتمع أقل من 0.5 وذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$.

-٨٨- يعتقد مدير الإنتاج في مصنع لإنتاج التلفزيونات في بلد ما أن 80% من الأسر تمتلك تلفزيون ملون ، للتحقق من هذا الفرض اختيرت عينة عشوائية من 1000 أسرة ووجد أن 318 منهم يمتلكون تليفزيونا ملونا اختبر صحة هذا الفرض $(p = 0.8)$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

-٨٩- يعتقد المسئولين في كلية ما أن 25% من الطلبة يمتلكون سيارة . اختبر صحة هذا الفرض إذا اختيرت عينة عشوائية من 90 طالبا ووجد أن 28 منهم يمتلك سيارة وذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

-٩٠- في دراسة لتقدير نسبة ربات البيوت اللاتي يمتلكن غسالة بمجفف في بلدنا ما ، اختيرت عينة عشوائية من 1000 ربة منزل ووجد أن 630 منهم يمتلكن غسالة بمجفف . اختبر صحة الفرض القائل أن $p = 0.4$ ضد الفرض البديل $p \neq .4$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

-٩١- في تقرير خاص وجد أن 30% فقط من خريجي الجامعات يجدون عملا في مجال تخصصهم الرئيسي اختيرت عينة عشوائية من 500 خريج فوجد أن بينهم 250 يعملون في مجال تخصصهم اختبر فرض العدم $H_0: p = .3$ ضد الفرض البديل $H_1: p \neq .3$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$.

-٩٢- يعتقد أن نسبة الأسر التي تشترى اللبن من المصنع A في مدينة ما هو $p = 0.6$ فإذا اختيرت عينة عشوائية من 200 أسرة ووجد أن نسبة الأسر التي تشترى اللبن 80. اختبر فرض العدم $p = 0.6$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

-٩٣- في عينة عشوائية من 400 ناخب في مدينة ما وجد أن 200 منهم يوافقون على فرض 3% ضريبة مبيعات . اختبر فرض العدم أن $p = 0.45$ ضد الفرض البديل $p \neq 0.45$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$.

-٩٤- يعتقد أن 40% من الطلبة في كلية ما يستخدمون نظارة طبية اختيرت عينة عشوائية من 64 طالبا ووجد أن 40 منهم يستخدم نظارة طبية اختبر فرض العدم أن $p = 0.4$ ضد الفرض البديل $p \neq 0.4$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$.

-٩٥- تريد شركة للتليفونات أن تقرر فيما إذا كان بعض الخطوط الجديدة يمكن تجهيزها تحت الأرض. ولأن الرسوم المضافة إلى فاتورة التليفون قليلة بالنسبة إلى التكاليف الباهظة التي تتحملها الشركة لذلك قررت الشركة عمل استفتاء للعملاء وإذا كان 60% من العملاء يفضلون تركيب تحت الأرض فإنها سوف توافق على تجهيز الخطوط الجديدة تحت الأرض وغير ذلك ترفض فإذا كان 118 من العملاء وافق على التركيب من بين 160 عميل اختبر فرض العدم $H_0: p = 0.6$ ضد الفرض البديل $H_1: p \neq 0.6$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

-٩٦- في دراسة عن نسبة الكوابيس الليلية اختيرت عينة عشوائية من 160 رجلا وعينة عشوائية أخرى من 192 سيدة وتم سؤالهم على عدد الكوابيس التي تعرضوا لها (على الأقل

خلال شهر) فوجد أن 55 من الرجال و 60 سيدة تعرضوا للكوابيس اختبر فرض العدم $H_0: p_1 = p_2$ ضد الفرض البديل $H_1: p \neq p_2$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

-٩٧- في عينة عشوائية من 300 شاب من المدينة A وجد أن 63 منهم يفضلون قيادة سيارتهم في الطريق الصحراوي على سرعة من 55 , 65 mph بينما وجد أن 75 من 180 في المدينة B يفضلون السرعة من 55 إلى 65 mph . اختبر فرض العدم $H_0: p_1 = p_2$ ضد الفرض البديل $H_1: p \neq p_2$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

-٩٨- في عينة عشوائية من 5726 رقم تليفون في منطقة ما في مارس سنة 1992 وجد أن 1105 غير مقيدين في الدليل وبعد سنة ومن عينة عشوائية من 5384 وجد أن 1001 غير مقيدين في الدليل . اختبر فرض العدم $H_0: p_1 = p_2$ ضد الفرض البديل $H_1: p \neq p_2$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

-٩٩- في دراسة عن نسبة الذين يفضلون استخدام حزام الأمان أخذت عينة عشوائية من 200 سائق يعمل على سيارة الغير ووجد أن 115 منهم يفضل استخدام حزام الأمان بينما في عينة أخرى من 300 شخص (يقود سيارته الخاصة) وجد أن 154 يفضل استخدام حزام الأمان . اختبر فرض العدم $H_0: p_1 = p_2$ ضد الفرض البديل $H_1: p \neq p_2$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

-١٠٠- ترغب شركة في اختبار ما إذا كانت نسبة المقبول من المكونات الإلكترونية لمورد أجنبي p_1 تزيد عنها لمورد محلي p_2 . اختيرت عينة عشوائية من شحنه كل مورد وتم الحصول على البيانات التالية :

$$n_1 = 200 \quad , \quad n_2 = 200 \quad , \quad \hat{p}_1 = 0.77 \quad , \quad \hat{p}_2 = 0.8$$

اختبر فرض العدم $H_0: p_1 = p_2$ ضد الفرض البديل $H_1: p \neq p_2$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$.

-١٠١- قام أحد العاملين في مكتبة بعمل إحصائية عن مدى تفضيل المترددين للكتب الثقافية . اختيرت عينة عشوائية من السيدات المترددين على المكتبة فوجد أن 400 من 600 يفضلون قراءة الكتب الثقافية ، كما اختيرت عينة عشوائية من الرجال المترددين على المكتبة فوجد أن 500 من 700 يفضلون قراءة الكتب الثقافية، اختبر فرض العدم $H_0: p_1 = p_2$ ضد الفرض البديل $H_1: p \neq p_2$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$.

-١٠٢- في دراسة ميدانية لمجموعتان من الأشخاص عن رأيهم في برنامج تليفزيوني المجموعة الأولي مكونة من 600 شخص من الريف بينهم 300 يفضلون البرنامج المجموعة الثانية والمكونة

من 1000 شخص من المدن بينهم 600 شخص يفضلون البرنامج . هل البرنامج شائع في الريف والمدينة بنفس النسبة وذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

-١٠٣- من مجموعتين متشابهتين ومصابتين بمرض ما ، اختيرت من المجموعة الأولي 50 شخصا ومن المجموعة الثانية 80 شخصا وقد استخدم مع كل عينة نوع مختلف من الدواء فإذا كان عدد الذين تم شفائهم من العينة الأولى 30 وعدد من شفى من المجموعة الثانية 40 فهل هناك دلائل تشير إلى اختلاف نسبة الشفاء باستخدام كل دواء عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

-١٠٤- في دراسة عن نسبة ربات البيوت اللاتي يمتلكن غسالة بمجفف في منطقة بين B , A اختيرت عينة عشوائية من الحجم 1000 من المنطقة A فكان عدد اللاتي يمتلكن غسالة 630 . كما اختيرت عينة عشوائية أخرى من المنطقة B حجمها 1200 ووجد أن 710 منهن يمتلكن غسالة بمجفف. اختبر فرض العدم $H_0: p_1 = p_2$ ضد الفرض البديل $H_1: p \neq p_2$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$.