

الباب الأول

التفاضل

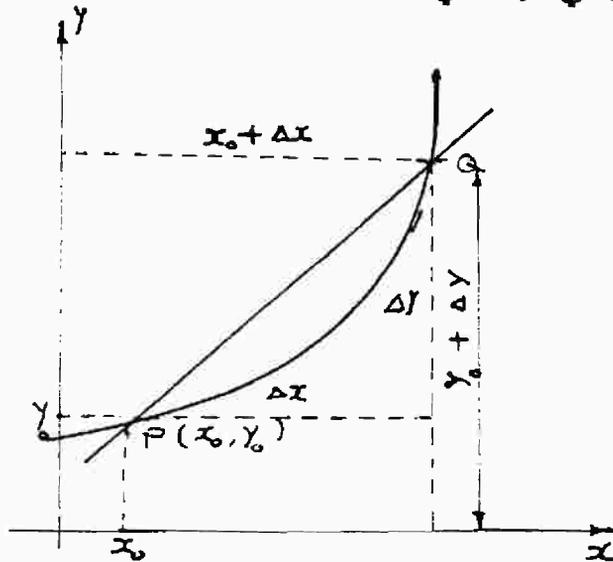
ميل المماس لمنحنى

إذا كان $y = f(x)$ يمثل منحنى الدالة، وكان النقطتين $P(x_0, y_0)$ و $Q(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ واقعين على المنحنى شكل (1) فإن PQ يكون قاطعاً للمنحنى وميله m_s :

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

y التغير في الإحداثي

x التغير في الإحداثي



شكل (1)

بفرض أن النقطة P ثابتة على المنحنى، النقطة Q تتحرك على المنحنى في اتجاه P إذا ميل القطع PQ يتغير على المنحنى. وعندما تقترب النقطة P قريباً كافياً من النقطة Q فإن القيمة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ تصل إلى قيمة محددة حيث Δx اقتربت من الصفر ويصبح PQ في هذه الحالة مماساً للمنحنى عند P أي أن ميل المماس m :

$$m = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_{\Delta x \rightarrow 0}$$

مثال 1: إذا كان :

$$y = x^3 - 3x + 3$$

فأوجد ميل المماس للمنحنى عند النقطة : $x=1, x=0$

الحل:

بفرض أن $P(x_0, y_0)$ ، $Q(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ نقطتين على

$$\therefore y_0 = x_0^3 - 3x_0 + 3$$

$$\Delta y + y_0 = (x_0 + \Delta x)^3 - 3(x_0 + \Delta x) + 3$$

$$= x_0^3 + 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 3$$

$$\therefore \Delta y = 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3(\Delta x)$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0 (\Delta x) + (\Delta x)^2 - 3$$

فيكون ميل القاطع m_s . حيث : m_s ميل القاطع للمنحنى

نجعل Q تقترب من P على طول المنحنى فيقترب كل من Δy و Δx من الصفر. فتكون القيمة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ غير محددة. ولكن نجد

كمية ثابتة $\rightarrow 3x^2 - 3$

صفر $\rightarrow x + x \cdot 3x^2$

الطرف الأيمن يساوي المقدارين التاليين:

أي أن نهاية m_s عندما Δx تقترب من الصفر تساوي $3x_0^2 - 3$ وفي هذه الحالة

يصبح $m = m_s$

$$\therefore m = 3x_0^2 - 3$$

حيث m هو ميل المماس للمنحنى عند $P(x_0, y_0)$ ، (x_0, y_0) هي أي نقطة على المنحنى فإنه يمكن أن نحذف الدليل وتكتب كالتالي :

$$m = 3x^2 - 3$$

بالتعويض عن $x=0$ يكون ميل المماس للمنحنى عندها يساوي:

$$m = 3(0) - 3 = -3$$

بالتعويض عن $x=1$ يكون ميل المماس للمنحنى عندها يساوي :

$$m = 3(1) - 3 = 0$$

مثال 2 :

أوجد ميل المنحنى (ميل المماس للمنحنى) للدالة $f(x)$

حيث :

$$f(x) = y = x^2 - 2x - 3$$

ثم أوجد النقط التي يكون فيها المماس أفقياً مع رسم الدالة بيانياً .

الحل : بفرض أن $P(x, y)$ نقطة على المنحنى

$$\therefore y = x^2 - 2x - 3$$

$$\begin{aligned} \Delta y + y &= (x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x) - 3 \\ &= x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 2x - 2\Delta x - 3 \end{aligned}$$

$$\therefore \Delta y = 2x \cdot \Delta x - 2\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x - 2 + \Delta x$$

وحيث أن ميل المماس للمنحنى هو $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ عندما تقترب Δx من الصفر

$$\begin{aligned} \therefore m &= \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_{\Delta x=0} \\ &= 2x - 2 \end{aligned}$$

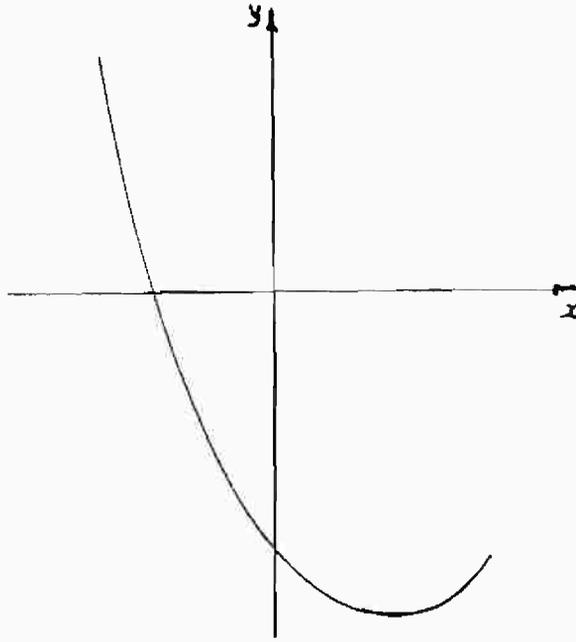
ويكون الميل أفقياً عندما $m = 0$

$$\therefore 2x - 2 = 0$$

$$\therefore x = 1$$

x	-2	-1	0	1	2
y	5	0	-3	-4	-3

ويوضح الجدول بيانياً الذي يوضحه شكل ٢



شكل 2

مثال 3 :

أثبت أن لمنحنى الدالة في المثال السابق مماساً عند $x = 2$. ثم أوجد معادلته .

الحل :

بالتعويض في معادلة المنحنى عن $x = 2$ لإيجاد قيمة y :

$$\therefore f(x) = y = (2)^2 - 2(2) - 3 = -3$$

ويكون المطلوب هو إثبات أن لمنحنى الدالة $f(x)$ مماس عند

النقطة $P(2, -3)$ ، وعلى فرض أن المماس هو m حيث
 $m = 2x - 2$
 بالتعويض عن $m = 2$
 $= 2(2) - 2 = 2$

وعلى هذا يكون لمنحنى الدالة مماس ميله $= 2$ ويمر بالنقطة
 $P(2, -3)$ ومعادلة هذا المماس هو :

$$\frac{y - (-3)}{x - 2} = 2$$

$$y + 3 = 2(x - 2)$$

$$y - 2x + 7 = 0$$

مثال 4 :

أثبت بالطريقة الأولية أن لمنحنى الدالة :

$$f(x) = x^3 + 1$$

مماساً عند $x = -1$. أوجد معادلته

الحل :

لإثبات، أنه يوجد مماس لمنحنى الدالة $f(x)$ عند $x = -1$ يكون

بإثبات أن قيمه $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ عندما $\Delta x \rightarrow 0$ معرفة محددة كالآتي :

$$f(x) = x^3 + 1$$

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3 + 1$$

$$= x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 1$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$= 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$

قيمة ميل المماس عند أي قيمة لـ x هي قيمة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ عندما $\Delta x \rightarrow 0$

$$m = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_{\Delta x=0} = 3x^2$$

وحيث أن x تنتمي لجميع الأعداد الحقيقية

∴ مماسات منحنى الدالة $f(x)$ موجودة ومحددة لجميع الأعداد

الحقيقية .

∴ عند $x = -1$. يكون الميل هو :

$$m = 3(-1)^2$$
$$= 3$$

$$\therefore f(-1) = (-1)^3 + 1 = 0$$

أي أن لمنحنى الدالة $f(x)$ مماساً ميله 3 ويمر بالنقطة $A(-1, 0)$

معادلة المماس هي :

$$\frac{y - 0}{x - (-1)} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3$$

$$\therefore y = 3x + 3$$

مثال 5 :

أوجد باستخدام المبادئ الأولية ميل المماس للمنحنى :

$$y = \sqrt{x}$$

الحل :

بفرض أن $P(x, y)$ أي نقطة على المنحنى :

$$y = \sqrt{x}$$

، $Q(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ واقعة على المنحنى وقريبة جداً من P

$$\therefore y + \Delta y = \sqrt{x_0 + x}$$

$$\Delta y = \sqrt{x_0 + x} - \sqrt{x_0}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x_0 + x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x}$$

وبالضرب في مرافق البسط :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} \\ y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \end{aligned}$$

وحيث أن $P(x, y)$ هي أي نقطة على المنحنى :

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

تمارين (1)

1- أثبت أن هناك مماس لمنحنى الدالة المعطاة عند النقاط المعطاة

في كل حالة . إذا كان المماس معرّفا اكتب معادلته لما يأتي :-

1- $f(x) = 1 - 5x$ ، $(0, 1)$

2- $f(x) = x$ ، $(2, 4)$

3- $f(x) = x^3$ ، $(0, 0)$

4- $f(x) = \sqrt{x} + 1$ ، $(4, 3)$

5- $f(x) = \sqrt{2x - 1}$ ، $(1, 1)$

6- $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \rightarrow x \leq 1 \\ x + 1 & \rightarrow x > 1 \end{cases}$ ، $(1, 1)$

2- أوجد ميل المماسات المنحني :

$$y = -x^2 + 5x - 6$$

عند النقطة تقاطعه مع المحور x .

3- إذا كان : $y = x^2 + 5x - 8$

فأوجد $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

عندما تتغير x كآلاتي :-

$x_0 = 1$ $x_1 = 1.2 \longrightarrow$

$x_0 = 1$ $x_1 = 0.8 \longrightarrow$

4- جسم يسقط من السكون سقوطا وفقا للعلاقة :

$S = 4.9 t^2$

حيث $S (m)$ المسافة ، $t (s)$ الزمن بالثانية فأوجد $\frac{\Delta s}{\Delta t}$

عندما تتغير t كآلاتي :-

$t_0 = 3$ $t_1 = 3.5 \longrightarrow$

$t_0 = 3$ $t_1 = 3.1 \longrightarrow$

5- أوجد بالطرق الأولية ميل المماس والنقاط التي يكون فيها

المماس أفقيا مع رسم المنحنى في كل حالة :

(a) $y = 2x^2 - x - 1$

(b) $y = x^2 + 4x + 4$

(c) $y = x^3 - 12x$

(d) $y = x^3 - 3x^2 + 4$

المشتقة

تعريف:

تعرف مشتقة الدالة $Y=f(X)$ بالنسبة ل X على انها:

بشرط ان تكون النهاية موجودة.

نلاحظ انه من تعريف المشتقة انها تساوي ميل المماس للمنحنى أي انه:

ميل المماس عند نقطة هو قيمة المشتقة عند نفس النقطة.

ويمكن الاشارة الى ان المشتقة للدالة $Y=f(X)$ بالنسبة ل X تسمى المشتقة الاولى

للدالة بالنسبة ل X وتاخذ الرموز:-

$$\frac{d}{dx} f (X), \frac{d}{dx} Y , D_x , Y ' , f '(x)$$

مثال:

اذا كانت:-

$$Y = f(x) = \sqrt{X} - 1$$

فاوجد قيمة المشتقة الاولى باستخدام التعريف:

الحل : بفرض ان $P(X,Y)$ على المنحنى

$$\therefore Y = \sqrt{X} - 1$$

$$Y + \Delta Y = \sqrt{X + \Delta X} - 1$$

$$\therefore \Delta Y = \sqrt{X + \Delta X} - \sqrt{X}$$

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{\sqrt{X + \Delta X} - \sqrt{X}}{\Delta X}$$

بالضرب في مرافق البسط

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\Delta Y}{\Delta X} &= \frac{\sqrt{X + \Delta X} - \sqrt{X}}{\Delta X} \cdot \frac{(\sqrt{X + \Delta X} + \sqrt{X})}{(\sqrt{X + \Delta X} + \sqrt{X})} \\ &= \frac{X + \Delta X - X}{\Delta X (\sqrt{X + \Delta X} + \sqrt{X})} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{X + \Delta X} + \sqrt{X})} \\ \left(\frac{\Delta Y}{\Delta X}\right)_{\Delta x \rightarrow 0} &= \frac{1}{\sqrt{X} + \sqrt{X}} = \frac{1}{2\sqrt{X}}\end{aligned}$$

وحيث أن $P(X, Y)$ هي أي نقطة على المنحنى:

$$\therefore \left(\frac{\Delta Y}{\Delta X}\right)_{\Delta x \rightarrow 0} = \frac{1}{2\sqrt{X}}$$

$$\therefore \frac{d}{dX} Y = \frac{1}{2\sqrt{X}}$$

مشتقات الدوال الجبرية

تعريف:

يقال لدالة ما أنها قابلة للاشتقاق عند $X = X_0$ اذا كان لها مشتقة عند نفس النقطة. وأيضا أنها قابلة للاشتقاق في فترة ما اذا كان لها مشتقة عند كل نقطة من نقاط هذه الفترة.

صيغ مشتقات الدوال الجبرية:

1- مشتق أي ثابت يساوي صفر

$$\frac{d}{dx}C = 0$$

حيث C مقدار ثابت

البرهان:

بفرض ان :

$$Y=C$$

وهذا يعني ان قيمة Y لاتتوقف على المتغير X

$$\therefore Y + \Delta Y = C$$

$$\therefore \Delta Y = 0$$

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = 0$$

من تعريف المشتقة

$$\frac{dY}{dX} = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

$$\therefore \frac{d}{dX}C = 0$$

2- مشتق X مرفوع للاس n:

$$\frac{d}{dX}X^n = nX^{n-1}$$

حيث n عدد صحيح موجب

البرهان:

بفرض ان:

$$Y = X^n \dots\dots\dots(1)$$

أي زيادة في Y مقدارها ΔY يقابلها زيادة في X مقدارها ΔX

$$\therefore Y + \Delta Y = (X + \Delta X)^n = \begin{cases} X + \Delta X & , n = 1 \\ X^2 + 2X \cdot \Delta X + (\Delta X)^2 & , n = 2 \\ X^3 + 3X^2 \cdot \Delta X + 3X \cdot (\Delta X)^2 + (\Delta X)^3 & , n = 3 \\ \dots\dots\dots \\ X^n + nX^{n-1} \Delta X + nX^{n-2} (\Delta X)^2 & , n \end{cases}$$

$$\dots\dots\dots(2)$$

بطرح (1) من (2)

$$\Delta Y = \begin{cases} \Delta X \dots\dots\dots, n = 1 \\ 2X \cdot \Delta X + (\Delta X)^2 \dots\dots\dots, n = 2 \\ 3X^2 \cdot \Delta X + (3X + \Delta X) \cdot (\Delta X)^2 \dots\dots\dots, n = 3 \\ \dots\dots\dots \\ nX^{n-1} \cdot \Delta X + (\Delta X, X) (\Delta X)^2 \dots\dots\dots n \end{cases}$$

$$\dots\dots\dots(3)$$

بقسمة (3) على ΔX

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \begin{cases} 1 \dots\dots\dots, n = 1 \\ 2X + \Delta X \dots\dots\dots, n = 2 \\ 3X^2 + (3X + \Delta X) + \Delta X \dots\dots\dots, n = 3 \\ \dots\dots\dots \\ nX^{n-1} + (\Delta X, X) (\Delta X)^2 \dots\dots\dots n \end{cases}$$

$$\dots\dots\dots(4)$$

واخيرا

$$\frac{dY}{dX} = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \begin{cases} 1 \dots\dots\dots, n = 1 \\ 2X \dots\dots\dots, n = 2 \\ 3X^2 \dots\dots\dots, n = 3 \\ \dots\dots\dots \\ nX^{n-1} \dots\dots\dots, n \end{cases}$$

$$\therefore \frac{d}{dX} Y = nX^{n-1}$$

حالات خاصة:

(أ) عند $n=1$

$$Y = X$$

$$\frac{d}{dX} Y = 1$$

(ب) عند $n=2$

$$Y = X^2$$

$$\frac{d}{dX} Y = 2X$$

وهكذا....

3- اذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة ل X فان:

$$\frac{d}{dx} -Cu = C \frac{d}{dX} u$$

يمكن بسهولة اثبات هذه الصيغة وذلك بوضع $Y=Cu$ مع استخدام تعريف المشتقة

وعلى الطالب اثباته.

4 مشتقة مجموع وطرح دالتين منتهيتين يساوي مجموع وطرح مشتقات الدالتين:

وليكن u, v دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة لـ X فان:

$$\frac{d}{dX}(u \pm v) = \frac{d}{dX}u \pm \frac{d}{dX}v$$

وعلى الطالب اثبات هذه الصيغة وذلك بفرض $Y = u + v$

5- مشتقة حاصل ضرب دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة لـ X :

$$\frac{d}{dX}uv = u \frac{d}{dX}v + v \frac{d}{dX}u$$

وعلى الطالب اثبات هذه الصيغة وذلك بفرض $Y = uv$

نتيجة 1:

إذا كان:

$$u = v = f$$

$$\therefore \frac{d}{dX}f^2 = 2f \frac{d}{dX}f$$

نتيجة 2:

من الممكن استخدام الصيغة السابقة لتشمل ثلاث دوال او اكثر.

نتيجة 3:

إذا كانت u قابلة للاشتقاق بالنسبة لـ X وان n عدد صحيح موجب فعندئذ u^n

قابلة للاشتقاق وان:

$$\frac{d}{dX}u^n = nu^{n-1} \frac{d}{dX}u$$

$$Y = \frac{u}{v}, v \neq 0 \text{ إذا كان}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{d}{dX} Y &= \frac{d}{dX} \frac{u}{v} \\ &= \frac{v \frac{du}{dX} - u \frac{dv}{dX}}{v^2} \end{aligned}$$

7- مشتقة الدالة المرفوعة لأس صحيح سالب :

$$\frac{d}{dX} u^n = nu^{n-1} \frac{d}{dX} u$$

حيث n عدد صحيح سالب

ارشاد: من الممكن اثبات هذه الصيغة وذلك بفرض ان: $n=-m$ حيث m عدداً صحيحاً موجباً.

امثلة محلولة

مثال 1:

اوجد المشتقة الاولى لكل من الدوال التالية:

- (a) $Y = 5$
(b) $Y = 7X^5$
(c) $3X^3 + 7X^2 - 5X + 4 = Y$

الإجابة :

- (a) $Y = 5$
 $Y' = 0$
(b) $Y = 7X^5$
 $Y' = 7(5)X^4 = 35X^4$
(c) $Y = 3X^3 + 7X^2 - 5X + 4$
 $Y' = 3(3)X^2 + 7(2)X - 5$
 $= 9X^2 + 14X - 5$

مثال 2: اوجد المشتقة الاولى للدالة:

$$Y = X^3 \sqrt{X}$$

الحل:

$$u = X^3, \quad v = \sqrt{X}$$

$$u' = 3X^2, \quad v' = \frac{1}{2}X^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{X}}$$

$$Y = uv$$

$$Y' = uv' + vu'$$

$$= X^3 \frac{1}{2\sqrt{X}} + \sqrt{X}(3X^2)$$

مثال 3 :

اوجد المشتقة الاولى للدالة :

$$Y = (3X - 1)^2$$

الحل:

$$u = (3X - 1)$$

$$\therefore Y = u^2$$

$$\begin{aligned} Y' &= 2u \frac{du}{dX} \\ &= 2(3x - 1)(3) \\ &= 6(3X - 1) \end{aligned}$$

مثال 4:

اوجد المشتقة الاولى للدالة:

$$Y = (3X - 1)^3$$

الحل:

الحل:

$$Y = (3X - 1)(3X - 1)^2$$

$$\begin{aligned} Y' &= (3X - 1) \frac{d}{dX} (3X - 1)^2 + (3X - 1)^2 \frac{d}{dX} (3X - 1) \\ &= (3X - 1)(6)(3X - 1) + (3X - 1)^2(3) \\ &= 6(3X - 1)^2 + 3(3X - 1)^2 \\ &= 9(3X - 1)^2 \end{aligned}$$

مثال 5: اوجد $\frac{dY}{dX}$ للدالة التالية :

$$Y = \frac{5X^2}{X^2 + 1}$$

الحل:

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dX} &= \frac{(X^2 + 1)10X - 5X^2(2X)}{(X^2 + 1)^2} \\ &= \frac{10X^3 + 10X - 10X^3}{(X^2 + 1)^2} \\ &= \frac{10X}{(X^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

مثال 6:

اوجد $\frac{dY}{dX}$ للدالة الآتية:

الحل :

$$\begin{aligned} Y &= \frac{X+1}{\sqrt{X-1}} \\ \frac{dY}{dX} &= \frac{\sqrt{X-1}(1) - (X+1)\frac{1}{2\sqrt{X-1}}}{(X-1)} \\ &= \frac{2(X-1) - (X+1)}{2\sqrt{X-1}(X-1)} \\ &= \frac{X-3}{2(X-1)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

تمارين (2)

1- باستخدام التعريف اوجد مشتقة الدوال الآتية:

- (a) $Y = X^2 + 5X$
- (b) $Y = X^3 - 3X^2 - 5X$
- (c) $Y = \sqrt{2X+1}$
- (d) $Y = \frac{1}{X-2}$
- (e) $Y = \sqrt{2+X}$
- (f) $Y = \sqrt{X}$
- (g) $Y = \frac{1}{X^2}$

2- اوجد المشتقة الأولى لكل من : -

$$(a) Y = 10X^2 + 9X - 4$$

$$(b) Y = (X^3 - 7)(2X^2 + 3)$$

$$(c) Y = 15 - s + 4s^2 - 5s^4$$

$$(d) Y = \frac{8X^2 - 6X + 11}{X - 1}$$

$$(e) Y = \sqrt{(3X + 4)(2X - 1)}$$

$$(f) Y = 1 + \frac{1}{X} + \frac{1}{X^2}$$

$$(g) Y = \sqrt{\sqrt{X} + \sqrt{X + 2}}$$

3- يتحرك جسم على خط مستقيم وفق قانون الحركة:

$$s = t^3 - 4t^2 - 3t$$

اوجد: السرعة-العجلة

الزمن الذي تنعدم فيه السرعة-الزمن الذي تنعدم فيه العجلة

4- قذف جسم رأسيا لاعلى بسرعة 160 م/ث إلى ارتفاع s :

$$s = 160t - 16t^2$$

أ- ما هو أقصى ارتفاع يمكن ان يبلغه و العجلة

ب- ماهي سرعته عندما يصل إلى ارتفاع 206 م وهو صاعد

5- اذا كانت $s(m)$ تمثل المسافة التقريبية التي يقطعها جسم يسقط من السكون

سقوطا حرا بلأمتار خلال زمن قدره t ثانية وكانت: $s = 4.9t^2$

فاوجد: $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ عندما تتغير t من : -

$$t_0 = 3 \rightarrow t_1 = 3.5$$

$$t_0 = 3 \rightarrow t_1 = 3.1$$

الدوال العكسية : -

لايجاد $\frac{dY}{dX}$ عندما تعطى $X=g(Y)$ باحدى الطريقتين:

(أ) حل المعادلة بالنسبة ل X اذا كان ذلك ممكنا ثم اشتق بالنسبة ل X

(ب) اشتق $X=g(X)$ بالنسبة ل Y ثم استخدم العلاقة :

$$dy / dx = 1 / (dx / dy)$$

مثال 1:

اوجد $\frac{dY}{dX}$ اذا كان $X = \sqrt{Y+5}$

الحل: الطريقة أ:

$$X^2 = Y + 5$$

$$Y = X^2 - 5$$

$$\frac{dY}{dX} = 2X$$

الطريقة ب:

$$\frac{dX}{dY} = \frac{1}{2\sqrt{Y+5}}$$

$$\frac{dY}{dX} = 2\sqrt{Y+5}$$

$$= 2X$$

اشتقاق دالة الدالة:

اذا كانت $Y=f(u)$, $u=g(X)$ يمكن الحصول على $\frac{dY}{dX}$ باحدى الطريقتين :

(أ) عبر Y صريحة في X

(ب) استخدام العلاقة (قاعدة السلسلة) الآتية :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dY}{du} \cdot \frac{du}{dX}$$

مثال 2 :

اوجد $\frac{dY}{dX}$ اذا كان :

$$Y = u^2 + 3$$

$$u = 2X + 1$$

الحل : الطريقة أ:

$$Y = u^2 + 3$$

$$= (2X + 1)^2 + 3$$

$$= 4X^2 + 4X + 4$$

$$\frac{dY}{dX} = 8X + 4$$

الطريقة ب:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dY}{du} \cdot \frac{du}{dX}$$

$$\frac{dY}{du} = 2u \quad , \quad \frac{du}{dX} = 2$$

$$\therefore \frac{dY}{dX} = 2u \cdot 2$$

$$= 4u$$

$$= 4(2X + 1)$$

$$= 8X + 4$$

المشتقات العليا:

اذا كانت $Y=f(X)$ دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة لـ X حينئذ تسمى مشتقتها بالمشتقة الاولى للدالة.

فإذا كانت مشتقتها الأولى هي الأخرى قابلة للاشتقاق بالنسبة لـ X فإن مشتقتها
حيث تسمى المشتقة الثانية للدالة (الأصلية) ويرمز لها بأحدى الرموز التالية:

$$f''(X) , Y'', \frac{d^2Y}{dX^2}$$

وأيضا إذا كانت المشتقة الثانية قابلة للاشتقاق بالنسبة لـ X فإن مشتقتها تسمى
المشتقة الثالثة ويرمز لها بأحدى الرموز التالية:

$$\frac{d^3Y}{dX^3} , Y''', f'''(X)$$

وهكذا.....

الاشتقاق الضمني:

نعلم ان الدوال الضمنية تظهر على الصورة $f(X,Y)=0$ ويتم الحصول على المشتق
 Y' باتباع الآتي:-

اعتبر Y دالة في X واشتق المعادلة المفروضة بالنسبة لـ X ثم العلاقة الناتجة
بالنسبة لـ Y' .

مثال 1:

اوجد Y' إذا كان:

$$X^2 + Y^2 + XY = 5$$

الحل:

بعمل الاشتقاق بالنسبة لـ X مع اعتبار Y دالة في X

$$\therefore 2X + 2YY' + XY' + Y = 0$$

$$Y'(2Y + X) = -Y - 2X$$

$$Y' = \frac{-Y - 2X}{2Y + X}$$

مثال 2:

إذا علمت أن :

$$4X^2 + 3Y^2 = 12$$

$$\text{فاوجد } \frac{dY}{dX} \text{ عند } X = \frac{3}{2}$$

الحل:

بتفاضل (اشتقاق) المعادلة بالنسبة لـ X مع اعتبار Y دالة في X

$$\therefore 4(2X) + 3(2Y)Y' = 0$$

$$\therefore Y' = \frac{dY}{dX} = \frac{-8X}{6Y}$$

لايجاد قيمة Y عند $X = \frac{3}{2}$ يتم التعويض في المعادلة الاصلية.

$$4\left(\frac{9}{4}\right) + 3Y^2 = 12$$

$$3Y^2 = 3$$

$$Y = \pm 1$$

$$\therefore Y' = \frac{dY}{dX} = \frac{-8\left(\frac{3}{2}\right)}{6(1)} = -2$$

$$Y' = \frac{dY}{dX} = \frac{-8\left(\frac{3}{2}\right)}{6(-1)} = 2$$

تمارين (3)

1 - اوجد معادلتى المماس والعمودي عليه للدالة $f(x)$ حيث:

$$f(x) = \frac{5X}{X^2 + 1}$$

عند النقطة $A(2,2)$

2- اوجد Y' بفرض ان:

$$Y = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}, \quad u = \sqrt[3]{X^3 + 2}$$

3- اذا كان: $Y = X^2 - 4$, $X = \sqrt{2t^2 + 1}$

فاوجد Y' عند $t = \sqrt{2}$

4 - تتحرك نقطة على مستوي وفقاً للمعادلات:

$$Y = 2t^3 - 6t$$

$$X = t^2 + 2t$$

اوجد Y' عند $t=0,2,5$

5 - استخدم قاعدة السلسلة لايجاد Y' في كل من :

(a) $Y = \frac{u-1}{u+1}, u = \sqrt{X}$

(b) $Y = u^3 + 4, u = X^2$

(c) $Y = \sqrt{1+u}, u = \sqrt{X}$

16- اوجد المشتقة الثانية في كل من:

$$Y = \sqrt{2-3X^2}, \quad Y = \frac{X}{\sqrt{X-1}}$$

7 - اوجد Y', Y'' في كل من:

(a) $X^2Y - XY^2 + X^2 + Y^2 = 0$

(b) $X^3 - 3XY + Y^3 = 1$

(c) $X + XY + Y = 2$

8- اوجد بطريقتين مختلفتين Y' في كل من:

$$X = \frac{1}{2+Y}, \quad X = (1+2Y)^3$$

9- اوجد Y' اذا كان: $X = \sqrt{1-Y^2}$

10 - اوجد ميل المنحنى $X = Y^2 - 4Y$ عند نقطة تقاطعه مع المحور Y .

الدوال المتزايدة و الدوال المتناقصة

أولاً: الدوال المتزايدة:-

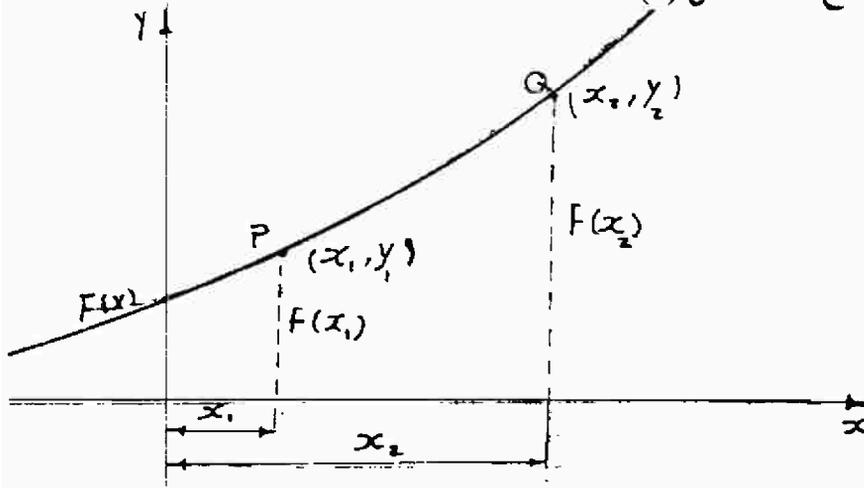
إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة ومتصلة في الفترة $[X_1 - X_2]$ وكان

$$X_2 > X_1, f(X_2) > f(X_1)$$

تكون الدالة تزايدية ويكون ميل المماس للدالة موجبا أي

$$f'(X) > 0, X_2 \geq X \geq X_1$$

ويوضح ذلك شكل (3)



شكل (3)

ثانياً: الدوال المتناقصة:-

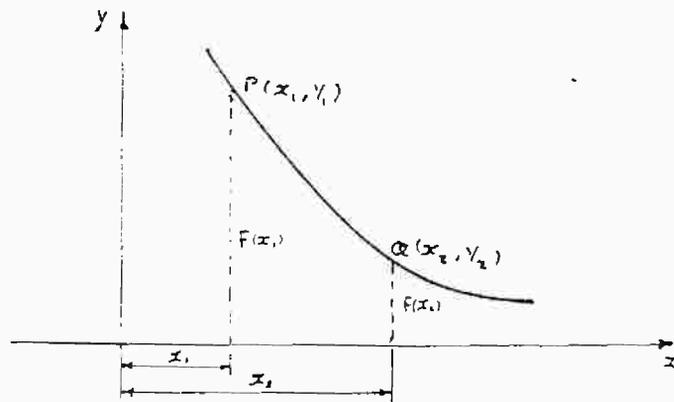
إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة ومتصلة في الفترة $[X_1 - X_2]$ وكان:

$$X_2 > X_1, f(X_2) < f(X_1)$$

تكون الدالة تناقصية ويكون ميل المماس للدالة سالبا أي أن:

$$f'(X) < 0, X_2 \geq X \geq X_1$$

ويوضح ذلك شكل (4)



شكل (4)

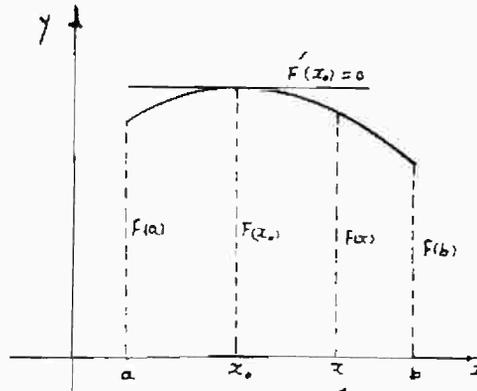
القيم العظمى والقيم الصغرى

إذا كانت $f(x)$ دالة معرفة خلال الفترة $I(a,b)$ فانه:

1 - عندما $-: F(x_0) > F(x), x \in I$

تكون للدالة نهاية عظمى نسبية عند $x = x_0$ ويكون عندها $F'(x) = 0$.

شكل (5)

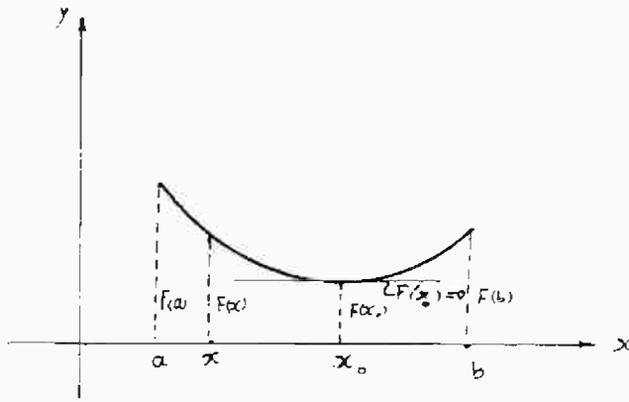


شكل (5)

2 - عندما $-: F(x_0) < F(x), x \in I$

تكون للدالة نهاية صغرى نسبية عند $x = x_0$ ويكون عندها $F'(x_0) = 0$

شكل (6)



شكل (6)

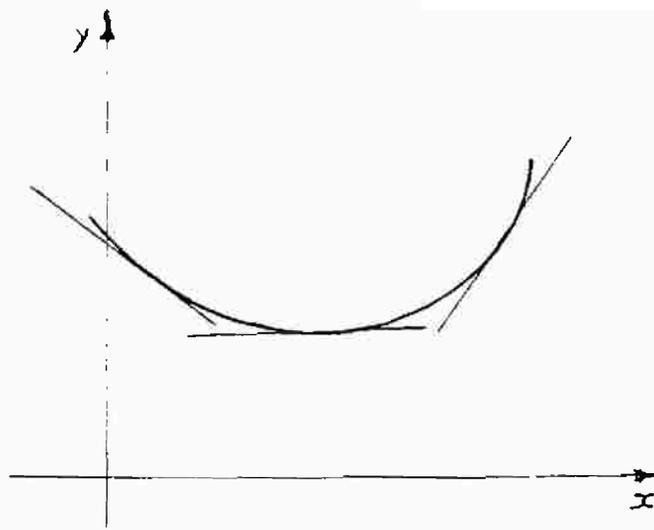
اختبار المشتقة الاولى:

- 1- حل المعادلة $F'(X) = 0$ للحصول على القيمة الحرجة
- 2- حدد مواضع القيم الحرجة على خط الاعداد مكونا بذلك عدد من الفترات
- 3- حدد اشارة $F'(X)$ في كل فترة
- 4- اجعل X تزايد خلال الفترة مارة بالقيم الحرجة عند $X = X_0$ فيكون :-
 - (أ) ل $F(X)$ قيمة عظمى $F(X_0)$ عندما تتغير $F'(X)$ من + إلى -
 - (ب) ل $F(X)$ قيمة صغرى $F(X_0)$ عندما تتغير $F'(X)$ من - إلى +
 - (ج) لا يكون ل $F(X)$ قيمة عظمى او صغرى عند $X = X_0$ اذا لم تغير $F'(X)$ اشارة

- (د) يمكن للدالة $Y=F(X)$ ان يكون لها قيمة عظمى او صغرى $F(X_0)$ مع ان $F'(X_0)$ ليست موجودة.

اتجاه المنحنى المنحني:

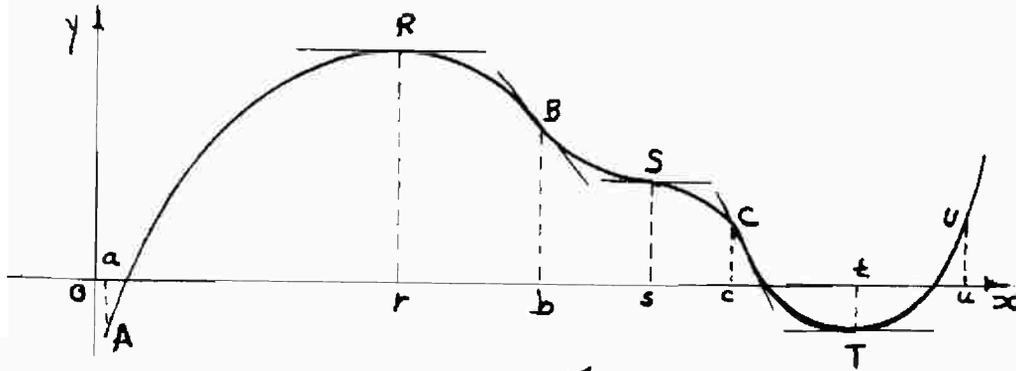
- يكون المنحنى مقعرا عند كل نقطة من نقاطه اذا وقع قوس المنحنى فوق مماسه عند كل نقاطه شكل (7)



شكل (7)

وبزيادة x فيما:

1- ان تحافظ $F'(X)$ على اشارةها وتكون تزايدية كما بالشكل (8) $b(X < s$



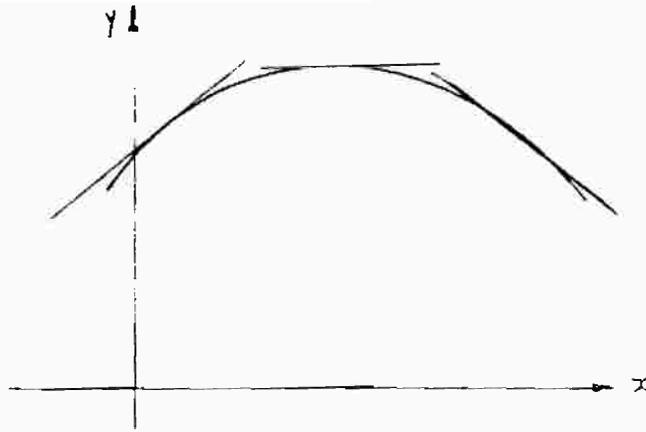
شكل (8)

2- ان تغير $F'(X)$ اشارةها من السالبة إلى الموجبة كما بالشكل (8) $c(X > u$

وفي كلا الحالتين يكون $F'(X)$ متزايدا ، $F''(X) > 0$

1- يكون المنحنى محدبا عند كل نقطة من نقاطه اذا وقع قوس المنحنى

تحت مماسه عند كل نقاطه. شكل (9)



شكل (9)

وبزيادة قيمة x فاما:

- 1 - أن تحافظ $F'(X)$ على اشارتها وتكون متناقصة في الفترة $s(X < c$ شكل (8)
 - 2- ان تغير $F'(X)$ اشارتها من الموجبة إلى السالبة . شكل (8)
- وفي كلا الحالتين يكون الميل $F'(X)$ متناقص وتكون $F'' < 0$

نقطة الانقلاب (نقطة الانعطاف):

عندما يتغير شكل المنحني من التقعر إلى التحدب او من التحدب إلى التقعر فان

نقاط التغير هذه تسمى نقط انقلاب كما بالشكل (8) . النقط C,S,B

ويكون للمنحني نقط انقلاب عند $X = X_0$ اذا:

1 - كانت $F''(X_0) = 0$ او انها غير معرفة.

2- غيرت $F''(X)$ اشارتها بزيادة x عبر X_0

الاختبار الثاني للقيم العظمى و الصغرى. (اختبار المشتقة الثانية:) :-

1 - حل المعادلة $F'(X) = 0$ لاييجاد القيم الحرجة

2 - عند القيم الحرجة $X = X_0$ يكون:

لـ $F(X)$ قيمة عظمى تساوي $F(X_0)$ اذا كانت $F''(X_0) < 0$

لـ $F(X)$ قيمة صغرى تساوي $F(X_0)$ اذا كانت $F''(X_0) > 0$

ويفشل الاختبار إذا كانت $F''(X_0) = 0$ أو تكون غير محددة وفي هذه الحالة يجب استخدام طريقة المشتقة الأولى.

الخطوات المتبعة في رسم المنحنيات:

1- يتم إيجاد المشتقة الأولى $F'(X)$ وذلك لتحديد النقاط الحرجة للدالة وكذلك فترات التزايد والتناقص.

2- يتم إيجاد المشتقة الثانية $F''(X)$ وذلك لتحديد النهايات العظمى والنهايات الصغرى النسبية ونقط الانقلاب.

3- يتم إيجاد نقط تقاطع المنحنى مع المحاور الرئيسية (وذلك بوضع $X=0$ لإيجاد التقاطع مع المحور Y ، $Y=0$ لإيجاد التقاطع مع المحور X) وذلك بقدر المستطاع.

4- نختار قيمة أخرى للمتغير x ونعين قيمة y المناظرة.

5- نرتب كل هذه النقاط في جدول ونرسم المنحنى المطلوب.

امثلة محلولة

مثال 1:

اوجد الفترات المتزايدة والمتناقصة والنقاط الحرجة للدالة:

$$f(X) = X^3 - 3X + 3$$

الحل:

$$f'(X) = 3X^2 - 3$$

لايجاد النقاط الحرجة :

$$\therefore f'(X) = 0$$

$$\therefore 3X^2 - 3 = 0$$

$$3(X^2 - 1) = 0$$

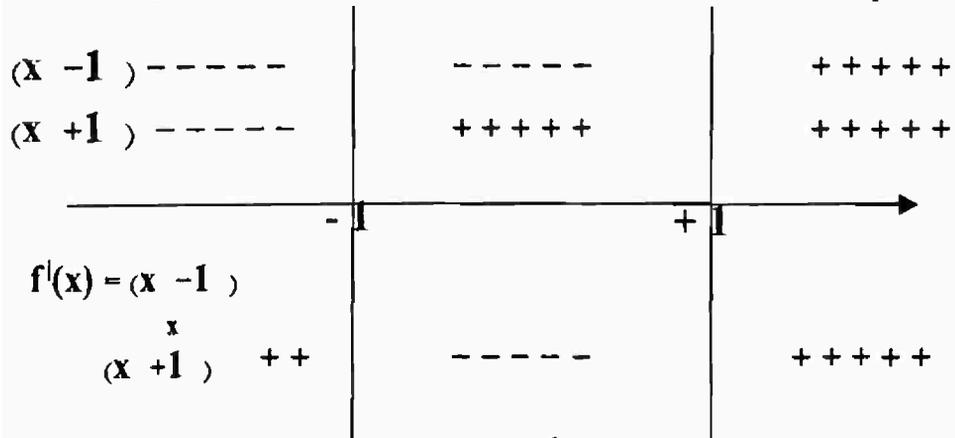
$$(X - 1)(X + 1) = 0$$

$$\therefore X = 1, X = -1$$

يتم تقسيم خط الأعداد الحقيقية إلى ثلاث فترات:

$$(-\infty, -1), (-1, 1), (1, \infty)$$

ثم نوجد إشارة $f'(X)$ في الفترات الثلاث وفي كل فترة تكون إشارة $f'(X)$ هي حاصل ضرب إشارتي القوسين $(X - 1), (X + 1)$ كما في الشكل (10).



شكل (10)

نلاحظ من الشكل الآتي:

تكون الدالة تزايدية لان $f'(X) > 0$	$X < -1$	الفترة الاولى
تكون الدالة تناقصية لان $f'(X) < 0$	$X > 1$	الفترة الثانية
تكون الدالة تزايدية لان $f'(X) > 0$	$X > 1$	الفترة الثالثة

احداثيات النقطة الحرجة :

$$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 3 = 1$$

النقطة الحرجة الأولى هي: $A(1,1)$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 3 = 5$$

النقطة الحرجة الثانية هي: $B(-1,5)$

مثال 2 :

اختر الدالة التالية من حيث القيم الصغرى والعظمى النسبية.

$$f(X) = \frac{1}{3}X^3 - 2X^2 + 3X + 1$$

الحل:

$$f'(X) = X^2 - 4X + 3$$

وعند القيم الحرجة (العظمى والصغرى) تكون $f'(X) = 0$

$$\therefore X^2 - 4X + 3 = 0$$

$$(X-1)(X-3) = 0$$

$$X = 1, \quad X = 3$$

وباستعمال المشتقة الأولى:

أولاً: عند $X=1$ يتم اخذ قيم $X < 1, X > 1$:

$$1 - X < 1 \rightarrow f'(X) = (-)(-) = +$$

$$2 - X > 1 \rightarrow f'(X) = (+)(-) = -$$

أي أن $f'(X)$ غيرت اشارتها من + إلى -

وهذا يعني ان الدالة لها قيمة عظمى نسبية عند $X=1$ وقيمتها:

$$f(1) = \frac{1}{3} - 2 + 3 + 1 = 2\frac{1}{3}$$

∴ احداثي القيمة العظمى النسبية هي:

$$(1, 2\frac{1}{3})$$

ثانيا: عند $X=3$ يتم اخذ قيم : $X < 3$, $X > 3$

$$1- \quad X < 3 \rightarrow f'(X) = (+)(-) = -$$

$$2- \quad X > 3 \rightarrow f'(X) = (+)(+) = +$$

أي ان $f'(X)$ غيرت اشارةها من - إلى +

وعلى ذلك يكون للدالة قيمة صغرى نسبية عند $X=3$ وقيمتها:

$$F(3) = \frac{1}{3}(27) - 2(9) + 3(3) = 1$$

∴ احداثي القيمة الصغرى النسبية هي: $(3, 1)$

مثال 3 :

أوجد الفترات التي يكون فيها المنحنى للدالة:

$$f(X) = X^3 - 2X^2 + X + 1$$

له تقعر إلى أعلى والفترات التي يكون فيها له تقعر إلى اسفل

الحل:

$$f'(X) = 3X^2 - 4X + 1$$

نستخدم المشتقة الثانية لإيجاد نقط الانقلاب وإيجاد المطلوب.

$$f''(X) = 6X - 4$$

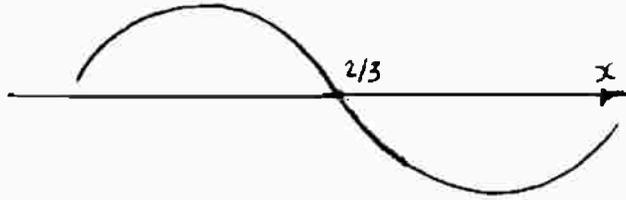
عند نقط الانقلاب: $f''(X) = 0$

$$\therefore 6X - 4 = 0$$

$$\therefore X = \frac{2}{3}$$

نوجد إشارة $f''(X)$ عند $X < \frac{2}{3}$, $X > \frac{2}{3}$ للكشف عن التقعر إلى أعلى أو التقعر

إلى أسفل (التحدب):
 $f''(x)$ ----- +++++



(شكل 11)

$$X < \frac{2}{3} \rightarrow f''(X) = -$$

$$X > \frac{2}{3} \rightarrow f''(X) = +$$

ويتضح من الشكل ان فترات التحدب هي: $I_1(-\infty, \frac{2}{3})$

فترات التقعر هي: $I_2(\frac{2}{3}, \infty)$

حيث تسمى النقطة التي يغير عندها المنحني تقعره من اسفل إلى اعلى أو العكس بنقطة الانقلاب.

مثال 4:

أوجد نقطة الانقلاب لمنحني الدالة:

$$f(X) = X^3 - 3X^2 + 5X + 1$$

الحل:

$$f'(X) = 3X^2 - 6X + 5$$

$$f''(X) = 6X - 6$$

عند نقطة الانقلاب يكون $f''(X) = 0$

$$\therefore 6X - 6 = 0$$

$$X = 1$$

$X < 1$ $\therefore f''(X)$ سالبة

$X > 1$ $\therefore f''(X)$ موجبة

\therefore تكون نقطة الانقلاب عند $X=1$ وقيمتها $f(1)$:

$$f(1) = 1 - 3 + 5 + 1 = 4$$

أي ان احدائي نقطة الانقلاب هو $(1,4)$

مثال 5 :

باستخدام المشتقة الثانية اوجد القيمة العظمى والصغرى للدالة:

$$f(X) = X^3 - 6X^2 + 1$$

الحل:

$$f'(X) = 3X^2 - 12X$$

عند القيم الحرجة تكون $f'(X) = 0$

$$\therefore 3X^2 - 12X = 0$$

$$3X(X - 4) = 0$$

\therefore القيم الحرجة تكون عند $X=4, X=0$

لاختيار القيم العظمى والصغرى يتم التعويض بالقيم الحرجة في $f''(X)$

$$f''(X) = 6X - 12$$

$$f''(0) = \text{كمية سالبة}$$

وحيث ان $f''(X)$ كمية سالبة فيوجد نهاية عظمى قيمتها $f(0)$

$$f(0) = 0 - 0 + 1 = 1$$

احداثي النهاية العظمى هو: $A(0,1)$

$$f''(X) = \text{كمية موجبة}$$

وحيث $f''(X)$ كمية موجبة فيوجد نهاية صغرى قيمتها $f(4)$

$$\therefore f(4) = 64 - 96 + 1 = -31$$

احداثي النهاية الصغرى هو: $B(4,-31)$

مثال 6:

اختر القيم العظمى والصغرى للدالة: $f(X) = (X - 1)^3$

الحل:

$$f'(X) = 3(X - 1)^2$$

عند القيم الحرجة $f'(X) = 0$

$$(X - 1)^2 = 0 \rightarrow X = 1$$

$$f''(X) = 6(X - 1)$$

وبالتعويض بالقيم الحرجة في $f''(X)$

$$\therefore f''(X) = 6(1 - 1) = 0$$

وعلى ذلك لاتعطي الدالة نهاية عظمى او صغرى عند استخدام المشتقة الثانية.

فيجب استخدام المشتقة الأولى:

$$X < 1 \rightarrow f'(X) > 0$$

$$X > 1 \rightarrow f'(X) > 0$$

وبالتالي فان المشتقة الاولى $f'(X)$ لاتغير اشارتها عند $X < 1, X > 1$

\therefore لا توجد نهاية عظمى او صغرى للدالة المذكورة.

مثال 7:

أوجد القيم العظمى و الصغرى النسبية للدالة:

$$Y = f(X) = X + \frac{1}{X}$$

$$Y_1 = \frac{1}{X} \quad \text{حيث :}$$

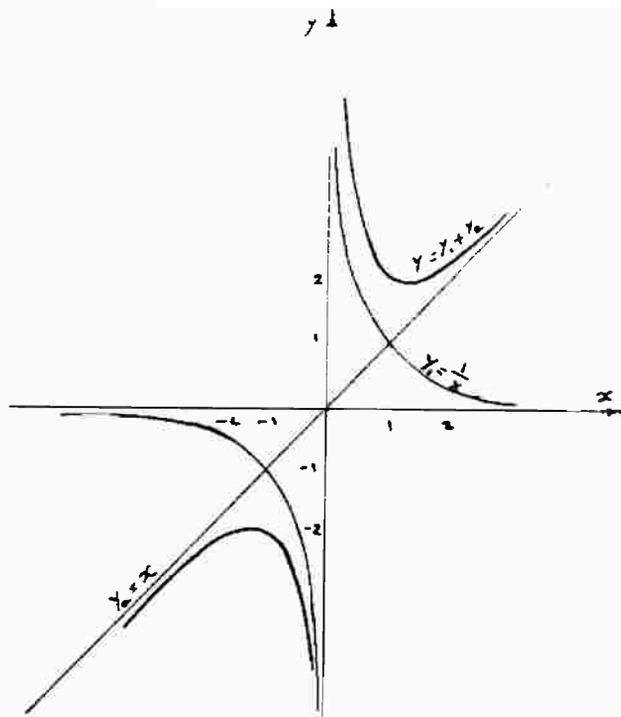
$$Y_2 = X$$

وبالتالي يمكن عمل الجدول الآتي (جدول 1)

ومن الجدول يتم رسم الدالة بيانيا (شكل 13)

x	Y ₁	Y ₂	Y	Y'	Y''	ملاحظات
-4	-1/4	-4	-17/4	+	-	التقعر إلى أسفل
-2	-1/2	-2	-5/2	+	-	التقعر إلى أسفل
-1	-1	-1	-2	0	-2	قيمة عظمى
-1/2	-2	-1/2	-5/2	-	-	التقعر إلى أسفل
-1/4	-4	-1/4	-17/4	-	-	التقعر إلى أسفل
1/4	4	1/4	17/4	-	+	التقعر إلى أعلى
1/2	2	1/2	5/2	-	+	التقعر إلى أعلى
1	1	1	2	0	2	قيمة صغرى
2	1/2	2	5/2	+	+	التقعر إلى أعلى
4	1/4	4	17/4	+	+	التقعر إلى أعلى

جدول (1)



شكل (13)

تمارين 4

1- إذا كانت : $f(X) = 3X^2 - X^3$

فاوجد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة والفترات التي تكون فيها الدالة متناقصة. ثم أوجد القيم العظمى والصغرى.

2- ارسم منحنى الدالة : $f(X) = \frac{1}{2}X^4 - 3X^2 + 4X + 10$

3- أوجد النقط الحرجة ونقط الانقلاب للدالة $f(X)$:

$f(X) = 3X^2 - 6X - 9$

4- أوجد النقط الحرجة ونقط الانقلاب للدالة $f(X)$:

$f(X) = X^3 - 12X$

5 - أوجد القيم العظمى والصغرى لمنحنى الدالة $f(X)$:

$$f(X) = \frac{8X}{(4+X^2)}$$

6- ارسم المنحنى $f(X)$ حيث:

$$f(X) = \frac{1}{6}(X^3 - 6X^2 + 9X + 6)$$

و اوجد القيم العظمى والصغرى ونقط الانقلاب.

7 - اوجد القيم العظمى والصغرى ونقط الانقلاب للدالة $f(x)$:

$$f(X) = X^3 + X^2 - 5X$$

8- اوجد النقاط الحرجة وفترات التزايد و التناقص والقيم العظمى والقيم الصغرى

ونقط الانقلاب للدالة $F(X)$:

$$f(X) = 4X^3 - 3X^2 + 2$$

9- اوجد القيم العظمى والصغرى وكذلك نقط الانقلاب للدالة $f(x)$:

$$(a) \quad f(X) = \frac{X^2}{(X+1)}$$

$$(b) \quad f(X) = \frac{3}{8}(X-9)(X-1)^{\frac{5}{3}}$$

تطبيقات على النهايات العظمى والصغرى

مثال 1:

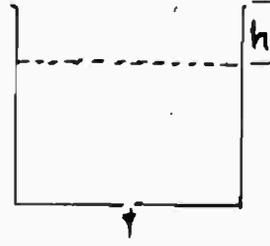
اناء في وضع رأسي يحتوي على سائل حجمه V يعطى بدلالة h بعد سطح السائل عن المستوي الأفقي المار بالحافة العليا بالمعادلة: $V = 5h^2 - 5h + 3$. فإذا كان بقاعدة الاناء (شكل 14) ثقب يتسرب منه السائل بمعدل 10 وحدات مكعبة/ثانية وكان معدل زيادة h يساوي 3 وحدات مكعبة/ثانية. اوجد h في هذه اللحظة.

الحل:

$$V = 5h^2 - 5h + 3$$

$$\frac{dV}{dh} = 10h - 5 \dots (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dh} &= \frac{dV}{dt} \cdot \frac{dt}{dh} \\ &= (-10) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \dots (2) \end{aligned}$$



بمساواة المعادلة (1) بالمعادلة (2)

$$\therefore 30h - 15 = -10$$

$$30h = 5$$

$$h = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

مثال 2:

ab سلم منتظم طوله 50 قدم يرتكز بطرفه a على حائط راسي وبطرفه b على ارض افقية. فإذا تحرك الطرف b مبتعدا عن الحائط بسرعة مقدارها 3 قدم/دقيقة فاوجد: (شكل 15)

1- سرعة a عندما يبتعد الطرف b عن الحائط بمقدار 14 قدم

2- بعد b عن الحائط عندما تتساوى مقدار سرعة كل من a, b

3- بعد b عن الحائط عندما يتحرك a إلى اسفل بسرعة 4 قدم/دقيقة

الحل:

$$l^2 = X^2 + Y^2$$

وباجراء التفاضل للطرفين بالنسبة للطرفين:

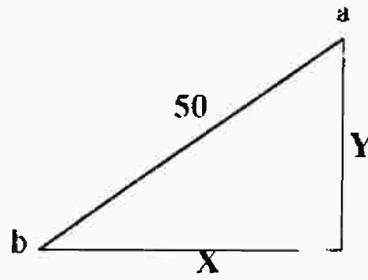
$$\therefore 2l \cdot \frac{dl}{dt} = 2X \frac{dX}{dt} + 2Y \frac{dY}{dt} \dots (1)$$

$$(0) = 2(14) \frac{dX}{dt} + 2\sqrt{50^2 - 14^2} \frac{dY}{dt}$$

$$\frac{dX}{dt} = 3$$

$$\therefore \frac{dY}{dt} = \frac{14(3)}{48} = \frac{14}{16}$$

$$2- \frac{dX}{dt} = \frac{dY}{dt}$$



شكل (15)

∴ بالتعويض في المعادلة رقم (1)

$$0 = 2(X) + 2\sqrt{50^2 - X^2}$$

$$\therefore X^2 = 50^2 - X^2$$

$$2X^2 = 50^2$$

$$\therefore X = \frac{50}{\sqrt{2}}$$

$$\text{iii- بالتعويض في (1) عن } \frac{dX}{dt} = 3, \frac{dY}{dt} = 4$$

$$\therefore 0 = X(3) + \sqrt{50^2 - Y^2}(-4)$$

$$\frac{9X^2}{16} = 50^2 - X^2$$

$$25X^2 = 50^2(16)$$

$$X^2 = 100(16)$$

$$X = 40$$

مثال 3:

كرة حديدية قطرها 8 سم مغطاة بطبقة من الجليد. فإذا كان الجليد ينصهر بمعدل $10 \text{ cm}^3 / \text{s}$ فاوجد:

- 1 - سرعة تناقص سمك الجليد عندما يكون هذا السمك 2 سم.
- 2 - سرعة تناقص مساحة سطح الجليد الخارجي عند نفس اللحظة.

الحل:

بفرض ان نصف قطر الكرة هو r ، سمك الجليد هو x فان الحجم الكلي V هو:

$$V = \frac{4}{3}\pi(r+x)^3$$
$$= \frac{4}{3}\pi(r^3 + 3rx^2 + 3r^2x + x^3)$$

فإذا كان حجم الكرة V_b

$$V_b = \frac{4}{3}\pi r^3$$

فان حجم الجليد $V_i = (V - V_b)$:

$$V_i = \frac{4}{3}\pi(3rx^2 + 3r^2x + x^3)$$

معدل انصهار الجليد

$$\frac{dV_i}{dt} = \frac{4}{3}\pi(3(2)(4)2 \frac{dx}{dt}) + 3(16) \frac{dx}{dt} + 3(2)^2 \frac{dx}{dt}$$

$$10 = \frac{4}{3}\pi(48 \frac{dx}{dt} + 48 \frac{dx}{dt} + 12 \frac{dx}{dt})$$

$$\frac{30}{4\pi} = 108 \frac{dx}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{30}{132\pi}$$

2 - بفرض ان المساحة السطحية هي A :

$$\therefore A = 4\pi(r+x)^2$$

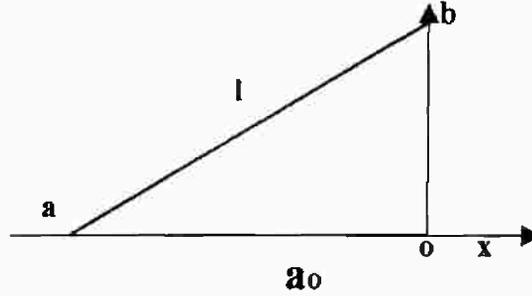
$$\therefore \frac{dA}{dt} = 4\pi(2)(r+x) \frac{dx}{dt}$$

$$= 4\pi(2)(6) \left(\frac{30}{132\pi} \right) = \frac{10}{3} \text{ cm}^2 / \text{s}$$

مثال 4:

في الساعة الثامنة صباحا شاهد شخص واقف في جزيرة سفينة تتحرك غربا بسرعة مقدارها 15 ميلا بحريا/ساعة وبعد ساعتين شاهد سفينة اخرى تتحرك بسرعة 60 ميل بحري/ساعة فاوجد سرعة تباعدهما عند الساعة الحادية عشر صباحا. شكل 16.

الحل:



شكل (16)

بفرض ان o هي نقطة الاصل وان a_0 موضع السفينة الاولى بعد ساعتين
 $\therefore 0a_0 = 2(15) = 30$

نفرض ان a موضع السفينة بعد t من الساعات من مرور السفينة الثانية
بالنقطة o ، وان b موضع السفينة الثانية في هذه اللحظة:

$$0a = 0a_0 + a_0a$$

$$= 30 + 15t$$

$$0b = 60t$$

فإذا كان البعد بين السفينتين عند اللحظة t $l = ab = t$

$$\therefore \overline{ab}^2 = \overline{0a}^2 + \overline{0b}^2$$

$$\begin{aligned}\therefore l^2 &= (30 + 15t)^2 + (60t)^2 \\ &= 3825t^2 + 900t + 900 \dots \dots \dots (1)\end{aligned}$$

وبإجراء التفاضل:

$$\begin{aligned}\therefore 2l \frac{dl}{dt} &= 7650t + 900 \\ \frac{dl}{dt} &= \frac{7650t + 900}{2l}\end{aligned}$$

وبالتعويض عن $t=1$ في المعادلة رقم (1)

$$\therefore l^2 = 3825 + 900 + 900 = 5625$$

$$\therefore l = 75$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{dl}{dt} &= \frac{7650 + 900}{2(75)} = \frac{8550}{150} \\ &= 57 \text{ mil/h}\end{aligned}$$

تمارين (5)

- 1 - اوجد عدداً مجموعها 20 وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن.
- 2 - نريد ان نصنع علبة مربعة القاعدة ومفتوحة من اعلى تتسع $0.032m^3$ اوجد ابعاد العلبة التي تتطلب اقل كمية من المادة اهمل سمك المادة وما يتلف أثناء التصنيع.
- 3 - قمع على هيئة مخروط دائري قائم ارتفاعه 9سم ونصف قطر قاعدته 6سم بحيث يكون محوريهما راسيين ورأس المخروط لاسفل يصب في القمع سائل بمعدل $25cm^3 / s$ اوجد معدل ارتفاع سطح السائل إلى نصف ارتفاع القمع ثم اوجد المعدل الذي يزداد به نصف قطر السائل في القمع تلك اللحظة.

- 4 - صفيحة من القصدير مربعة الشكل طول ضلعها a تستعمل هذه الصفيحة لصنع علبة مفتوحة من على وذلك بان يقطع منها مربع صغير من كل ركن من اركانها الاربعة. ثم تثنى الاطراف كم ينبغي ان يكون المربع المقطوع من كل ركن كي نحصل على اكبر حجم ممكن للعلبة.
- 5 - المطوب تصنع علبة على شكل اسطوانة دائرية قائمة تتسع 100cm^3 ما هي ابعاد العلبة كي تستهلك اقل كمية من المادة
- 6 - سلك طوله l نرغب ان نقطعه إلى قطعتين نثني الاولى على شكل دائرة ونثني الثانية على شكل مربع. كيف ينبغي ان نقطع السلك كي يكون مجموع المساحتين اللتين تحددهما القطعتان اكبر ما يمكن.
- 7 - نرغب ان نبني مخزناً مفتوحاً من اعلى، مربع القاعدة وجدرانه رأسية بكمية معينة من مواد البناء بين كم ينبغي ان تكون ابعاد هذا المخزن كي نحصل على اكبر حجم ممكن مع اهمال سمك المادة وما يتلف اثناء البناء.

اشتقاق الدوال المثلثية

عرفنا فيما سبق النسب المثلثية والتطبيقات المرتبطة بها والان سوف ندرس قواعد الاشتقاق لها.

قواعد الاشتقاق:

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x فان:

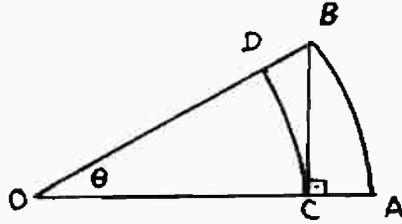
- (1) $\frac{d}{dX} \sin u = \cos u \frac{du}{dX}$
- (2) $\frac{d}{dX} \cos u = -\sin u \frac{du}{dX}$
- (3) $\frac{d}{dX} \tan u = \sec^2 u \frac{du}{dX}$
- (4) $\frac{d}{dX} \cot u = -\csc^2 u \frac{du}{dX}$
- (5) $\frac{d}{dX} \sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dX}$
- (6) $\frac{d}{dX} \csc u = -\csc u \cot u \frac{du}{dX}$

مثال 1:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \quad \text{اثبت ان :}$$

الحل :

نعتبر القطاع الدائري AOB ذو زاوية مركزية θ صغيرة وموجبة ونصف قطر دائرة القطاع $OA=1$ (شكل 17).



شكل (17)

من الشكل يتضح ان :

مساحة القطاع OAB اكبر من مساحة $\triangle OAB$ القائم في C اكبر من مساحة القطاع الدائري OCD. وحيث ان زاوية θ صغيرة يكون بمقارنة المساحات:

مساحة $AOB \geq COB \geq OCD$

$$\frac{1}{2}\theta \geq \frac{1}{2}\sin\theta \cos\theta \geq \frac{1}{2}\theta \cos\theta^2$$

وبالقسمة على $\frac{1}{2}\theta \cos\theta$ وخذ النهاية عندما $\theta \rightarrow 0$:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\cos\theta} \geq \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \geq \lim_{\theta \rightarrow 0} \cos\theta$$

$$1 \geq \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \geq 1$$

وبالتالي يجب ان تكون:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

(يمكن للدارس ان يصل إلى هذه النتيجة بطريقة الاقتراب من جهتي $\theta = 0$ أي من

جهة يمين $\theta = 0$ ومن جهة يسار $\theta = 0$)

مثال 2:

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة لـ x اثبت ان:

$$\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u \frac{du}{dx}$$

$$Y = \sin u$$

الحل : بفرض أن -

$$Y + \Delta Y = \sin(u + \Delta u)$$

$$\therefore \Delta Y = \sin(u + \Delta u) - \sin u$$

$$= 2 \cos\left(u + \frac{1}{2}\Delta u\right) \sin \frac{1}{2}\Delta u$$

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \cos\left(u + \frac{1}{2}\Delta u\right) \frac{\sin \frac{1}{2}\Delta u}{\frac{1}{2}\Delta u}$$

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dX} &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X} \\ &= \cos u \end{aligned}$$

وباستخدام قاعدة السلسلة :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dY}{du} \cdot \frac{du}{dX}$$
$$\frac{d}{dX} \sin u = \cos u \frac{du}{dX}$$

مثال 3:

أوجد المشتقة الأولى للدالة:

$$Y = 3 \sin X + 4 \cos X$$

الحل:

$$Y' = 3 \cos X + 4(-\sin X)$$
$$= 3 \cos X - 4 \sin X$$

أمثلة محلولة

أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية:

- 1- $Y = 4 \cos \frac{X}{3}$
- 2- $Y = \tan^2 3X$
- 3- $Y = \tan^2(\cos X)$
- 4- $Y = (\csc X + \cot X)^2$
- 5- $Y = \sqrt{\cot x}$
- 6- $Y = \frac{\cos 4x}{1 - \sin 4x}$
- 7- $Y = \sin(X + Y)$

الإجابة

$$1- Y = 4 \cos \frac{X}{3}$$

$$Y' = 4 \left(-\sin \frac{X}{3} \right) \cdot \frac{1}{3} = -\frac{4}{3} \sin \frac{X}{3}$$

$$2- Y = \tan^2(3X)$$

$$= (\tan 3X)^2$$

$$Y' = 2(\tan 3X) \cdot \sec^2 3X \cdot 3$$

$$= 6 \tan 3X \cdot \sec^2 3X$$

$$3- Y = \tan^2(\cos X)$$

$$= (\tan(\cos X))^2$$

$$Y' = 2(\tan(\cos X))(\sec^2(\cos X))(-\sin X)$$

$$= -2 \sin X \tan(\cos X) \cdot \sec^2(\cos X)$$

$$4- Y = (\csc X + \cot X)^2$$

$$Y' = -2(\csc X + \cot X)(\csc X \cot X + \csc^2 X)$$

$$5- \quad Y = \sqrt{\cot X}$$

$$Y' = \frac{-\csc^2 X}{2\sqrt{\cot X}}$$

$$6- \quad Y = \frac{\cos 4X}{1 - \sin 4X}$$

$$Y' = \frac{(1 - \sin 4X)(-4 \sin 4X) - \cos 4X(-4 \cos 4X)}{(1 - \sin 4X)^2}$$

$$= \frac{4(-\sin 4X + \sin^2 4X) + \cos^2 4X}{(1 - \sin 4X)^2}$$

$$= \frac{4(1 - \sin 4X)}{(1 - \sin 4X)^2}$$

$$= \frac{4}{1 - \sin 4X}$$

$$7- \quad Y = \sin(X + Y)$$

$$Y' = \cos(X + Y)(1 + Y')$$

$$Y'(1 - \cos(X + Y)) = \cos(X + Y)$$

$$\therefore Y' = \frac{\cos(X + Y)}{1 - \cos(X + Y)}$$

تمارين 6

I - اوجد المشتقة الاولى للدوال الاتية :-

- 1 - $Y = \sin^2 X$
- 2 - $Y = 3 \sin 2X$
- 3 - $Y = \cos \frac{3}{X}$
- 4 - $Y = 5 \cos \frac{1}{2} X$
- 5 - $Y = \frac{1}{3} \sec^3 X$
- 6 - $Y = \tan 3X$
- 7 - $Y = \tan^2(3X - 2)$
- 8 - $Y = \cot 8X$
- 9 - $Y = X - \tan X$
- 10 - $Y = \sec \frac{1}{3X}$
- 11 - $Y = \cos(1 - X^2)$
- 12 - $Y = \cos(1 - X)^2$
- 13 - $Y = \sec^2 X - \tan^2 X$
- 14 - $Y = \cot^3(3X - 1)$
- 15 - $Y = \csc(X^4 - 4)$
- 16 - $Y = \tan \sqrt[3]{5 - 6X}$
- 17 - $Y = \sin \sqrt{X} + \sqrt{\sin X}$
- 18 - $Y = (\tan 2X - \sec 2X)^3$
- 19 - $Y = X^2 \sec^3 4X$
- 20 - $Y = \tan^3 X \cdot (X)$
- 21 - $Y = \tan^2 X \sec^3 X$
- 22 - $Y = 4X^3 - X^2 \cot^3\left(\frac{1}{X}\right)$
- 23 - $Y = \frac{\csc 3X}{X^3 + 1}$
- 24 - $Y = \frac{\sec 2X}{\tan 2X + 1}$
- 25 - $\sin Y + \cos X = 1$
- 26 - $f(X) = \sin X \cos 3X$
- 27 - $\sin X = \cos 2X$
- 28 - $X \cos Y = \sin(X + Y)$

II - اوجد المشتقة الثانية للدوال التالية :-

- 1- $Y = \sec^2 3X$
- 2- $Y = \sin X - X \cos X$
- 3- $Y = \sqrt{\tan X}$
- 4- $Y = \cot^3 5X$
- 5- $Y = \frac{\cos X - 1}{\cos X + 1}$

الدوال المثلثية العكسية

إذا كانت $X = \sin Y$ فإن الدالة العكسية تكون: $Y = \sin^{-1} X$ (شكل 18).

فيكون المجال (الحيز): $-1 \leq X \leq 1$

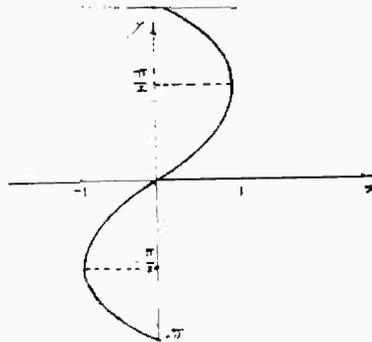
والمدى: مجموعة الأعداد الحقيقية .

ويبين الجدول التالي رقم (2) بعض الدوال المثلثية العكسية.

$F(Y)=X$

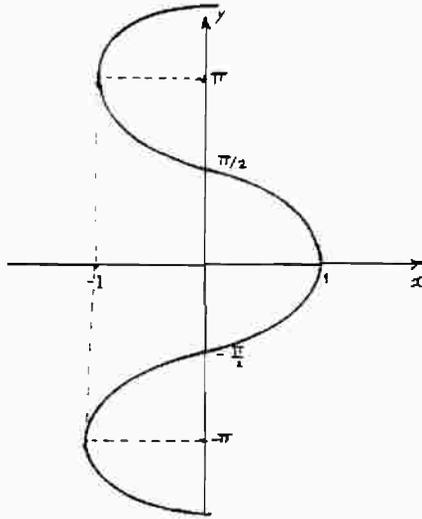
	$\sin^{-1} x$	$\cos^{-1} x$	$\tan^{-1} x$	$\cot^{-1} x$
التعريف	$X = \sin y$	$X = \cos y$	$X = \tan y$	$X = \cot y$
المجال	$-1 < x < 1$	$-1 < x < 1$	$-\infty < x < \infty$	$-\infty < x < \infty$
المدى	$-\pi/2 < y < \pi/2$	$\pi \geq y \geq 0$	$-\pi/2 < y < \pi/2$	$\pi > y > 0$

جدول (2)



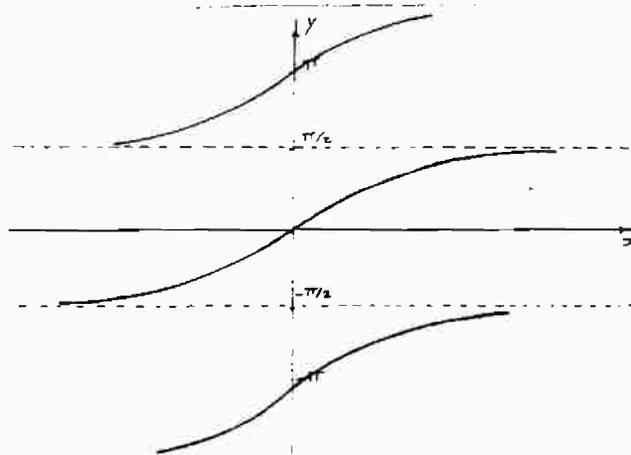
شكل (18)

الدالة : $y = \text{Cos}^{-1} x$. شكل (19)



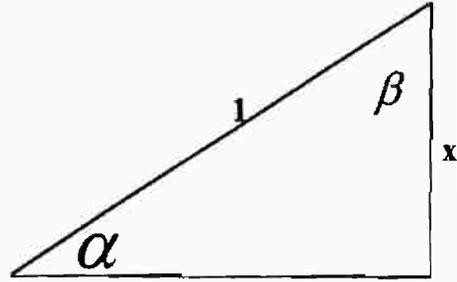
شكل (19)

الدالة : $y = \text{Tāh}^{-1} x$. شكل (20)



شكل (20)

العلاقة بين β, α (شكل 21):



شكل (21)

$$\sin \alpha = X = \cos \beta$$

$$\therefore \alpha = \sin^{-1} X$$

$$B = \cos^{-1} X$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$B = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\cos^{-1} X = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} X$$

وبنفس الطريقة يمكن اثبات ان:

$$\cot^{-1} X = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} X$$

$$\sec^{-1} X = \cos^{-1}\left(\frac{1}{X}\right)$$

$$\csc^{-1} X = \sin^{-1}\left(\frac{1}{X}\right)$$

والمدى الخاص بهم من الجدول السابق حيث:

$$0 \leq \sec^{-1} X \leq \pi, \quad \pi \geq \cot^{-1} X \geq 0$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \csc^{-1} X \leq \frac{\pi}{2}$$

مشتقات الدوال المثلثية العكسية:

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة لـ x فإن:

$$1 - \frac{d}{dX} \sin^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dX}$$

$$2 - \frac{d}{dX} \cos^{-1} u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dX}$$

$$3 - \frac{d}{dX} \tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dX}$$

$$4 - \frac{d}{dX} \cot^{-1} u = -\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dX}$$

$$5 - \frac{d}{dX} \sec^{-1} u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dX}$$

$$6 - \frac{d}{dX} \csc^{-1} u = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dX}$$

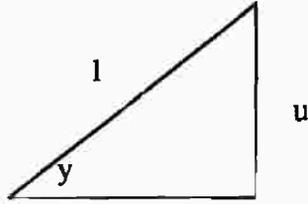
طريقة استنتاج المشتقة :

بفرض ان: $\sin Y = u$

$$\begin{aligned} \therefore \cos Y \cdot \frac{dY}{dX} &= \frac{du}{dX} \\ \frac{dY}{dX} &= \frac{1}{\cos Y} \frac{du}{dX} \end{aligned}$$

وحيث أن :

$$\begin{aligned} \sin^{-1} u &= Y \\ \therefore \frac{d}{dX} \sin^{-1} u &= \frac{dY}{dX} \\ &= \frac{1}{\cos Y} \frac{du}{dX} \end{aligned}$$



شكل (22)

ومن هندسة الشكل يمكن إيجاد

قيمة $\cos Y$. (الشكل 22)

وحيث ان: $-\frac{\pi}{2} \leq Y \leq \frac{\pi}{2}$

فتكون الزاوية Y في الربع الأول أو الربع

$\therefore \cos Y$ غير سالبة

$$\therefore \frac{d}{dX} \sin^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dX}$$

لائحات القاعدة 5 :

بفرض ان: $Y = \sec^{-1} u$

$$\therefore \sec Y = u$$

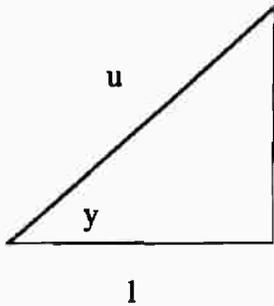
بتفاضل طرفي المعادلة

$$\therefore \sec Y \tan Y \frac{dY}{dX} = \frac{du}{dX}$$

$$\therefore \frac{dY}{dX} = \frac{1}{\sec Y \tan Y} \frac{du}{dX}$$

ومن هندسة الشكل يمكن إيجاد قيمة $\tan Y$

شكل 23.



شكل (23)

$$\therefore \tan Y = \pm \sqrt{u^2 - 1}$$

وحيث ان : $\pi \geq Y \geq 0$

$$\therefore \tan Y = +\sqrt{u^2 - 1} \quad , \quad \frac{\pi}{2} \geq Y \geq 0$$

$$\tan Y = -\sqrt{u^2 - 1} \quad , \quad \pi \geq Y \geq \frac{\pi}{2}$$

وبصفة عامة يكون :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{1}{u(\pm\sqrt{u^2 - 1})} \frac{du}{dX}$$

$$\frac{d}{dX} \sec^{-1} u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}$$

أمثلة محلولة

اوجد المشتقة الاولى للدوال الاتية:

1- $Y = \sin^{-1} 3X - \cos^{-1} 3X$

2- $Y = \tan^{-1} X^2$

3- $Y = \tan^{-1}(\sin X)$

4- $Y = \frac{1}{\sin^{-1} X}$

5- $Y = (\sec^{-1} \sqrt{X})(\sqrt{X})$

6- $Y^2 \sin X + Y = \tan^{-1} X$

$$1 - Y = \sin^{-1} 3X - \cos^{-1} 3X$$

$$Y' = \frac{3}{\sqrt{1-9X^2}} - \frac{-3}{\sqrt{1-9X^2}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{1-9X^2}}$$

$$2 - Y = \tan^{-1} X^2$$

$$Y' = \frac{2X}{1+X^4}$$

$$3 - Y = \tan^{-1}(\sin X)$$

$$Y' = \frac{1}{1+\sin^2 X}(\cos X)$$

$$4 - Y = \frac{1}{\sin^{-1} X}$$

$$Y' = -1(\sin^{-1} X)^{-2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-X^2}}$$

$$= -\frac{1}{(\sin^{-1} X)^2 \sqrt{1-X^2}}$$

$$5 - Y = (\sec^{-1} \sqrt{X})(\sqrt{X})$$

$$Y' = \sec^{-1} \sqrt{X} \cdot \frac{1}{2\sqrt{X}} + \sqrt{X} \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{X}}}{\sqrt{X}\sqrt{X-1}}$$

$$= \frac{\sec^{-1} \sqrt{X}}{2\sqrt{X}} + \frac{1}{2\sqrt{X}\sqrt{X-1}}$$

$$6 - Y^2 \sin X + Y = \tan^{-1} X$$

$$2YY' \sin X + Y^2 \cos X + Y' = \frac{1}{1+X^2}$$

$$Y'(2Y \sin X + 1) = \frac{1}{1+X^2} - Y^2 \cos X$$

$$= \frac{1 - (1+X^2)Y^2 \cos X}{1+X^2}$$

$$Y' = \frac{1 - (1+X^2)Y^2 \cos X}{(2Y \sin X + 1)(1+X^2)}$$

تمارين 7

I- اوجد قيمة المشتقة الاولى للدوال الاتية:

1- $Y = \sin^{-1}(8X + 3)$

2- $Y = (\cot^{-1}(3X + 1))^3$

3- $Y = X^2 \csc^{-1} 5X$

4- $Y = \tan^{-1}(\sin 2X)$

5- $Y = X^2 + X \sin^{-1} X$

6- $Y = (1 + \cos^{-1} 3X)^3$

7- $Y = \sec^{-1} X^2$

8- $Y = \cos^{-1} 5X$

9- $Y = \tan^{-1}(3X - 5)$

10- $Y = \sec^{-1} \sqrt{X^2 - 1}$

11- $Y = \cot^{-1} \frac{1+X}{1-X}$

12- $Y = X \csc^{-1} \frac{1}{X} + \sqrt{1 - X^2}$

13- $Y = \left(\frac{1}{X} - \sin^{-1} \frac{1}{X}\right)^4$

14- $Y = \tan^{-1} \frac{X+1}{X-1}$

15- $Y = \tan^{-1}(\ln X^2)$

16- $Y = X \sin^{-1}(3X)$

17- $Y = \tan^{-1} e^{3X}$

1- احسب قيمة كل من:

18 - $\sin^{-1} \frac{1}{2}$

19 - $\cot^{-1} 1$

20 - $\tan^{-1}(-1)$

21 - $\csc^{-1} 1$

22 - $\cos^{-1} \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} \right)$

23 - $\sin^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2}$

اشتقاق الدوال الأسية و اللوغاريتمية

نعلم ان:

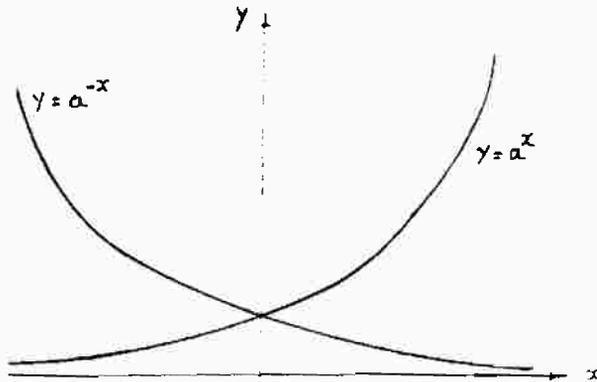
1 - اذا كان $a^r = X, a \neq 1, a > 0$ فان :

$Y = \log_a X$, $Y = \log_{10} X = \log X$

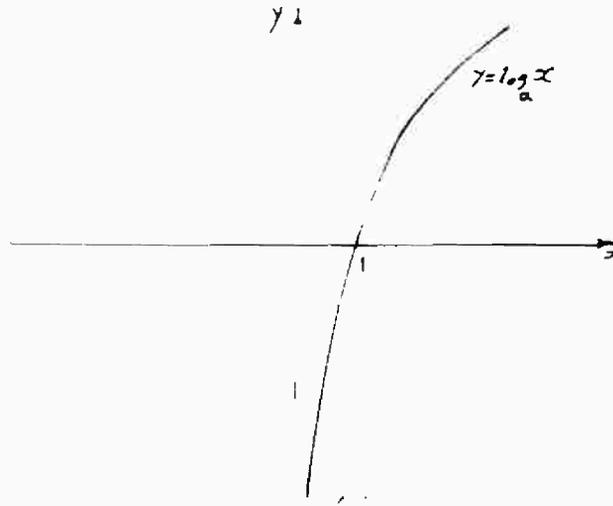
$Y = \log_e X = \ln X$

2 - الدوال اللوغاريتمية معكوس الدوال الأسية وهذا ما يوضحه شكل (24)

وشكل (25)



شكل (24)



شكل (25)

قواعد الاشتقاق :

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة ل x فإن:

$$I) \quad \frac{d}{dX} \log_a u = \frac{1}{u} \log_a e \frac{du}{dX}$$

$$II) \quad \frac{d}{dX} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dX}$$

$$III) \quad \frac{d}{dX} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dX}$$

$$IV) \quad \frac{d}{dX} e^u = e^u \frac{du}{dX}$$

امثلة محلولة

1 - اوجد المشتقة الاولى لكل مما يأتي:-

(a) $Y = \log_a(3X^2 - 5)$

(b) $Y = \ln(X + 5)^2$

(c) $Y = \ln(X^3 + 2)(X^2 + 3)$

(d) $Y = \ln(X = \sqrt{1 + X^2})$

الإجابة

(a)
$$\frac{dY}{dX} = \frac{1}{3X^2 - 5} \log_a e \frac{d}{dX}(3X^2 - 5)$$

$$= \frac{1}{3X^2 - 5} (\log_a e)(6X)$$

(b)
$$\frac{d}{dX} Y = \frac{2}{X + 5} \frac{d}{dX}(X + 5)$$

$$= \frac{2}{X + 5}$$

(c)
$$Y = \ln(X^3 + 2)(X^2 + 3)$$

$$= \ln(X^3 + 2) + \ln(X^2 + 3)$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{1}{X^3 + 2} \frac{d}{dX}(X^3 + 2) + \frac{1}{X^2 + 3} \frac{d}{dX}(X^2 + 3)$$

$$= \frac{3X^2}{X^3 + 2} + \frac{2X}{X^2 + 3}$$

(d)
$$\frac{dY}{dX} = \frac{1 + \frac{1}{2}(1 + X^2)^{-\frac{1}{2}}(2X)}{X + \sqrt{1 + X^2}} \cdot \frac{X - \sqrt{1 + X^2}}{X - \sqrt{1 + X^2}}$$

$$= \frac{X - \sqrt{1 + X^2} + X^2(1 + X^2)^{-\frac{1}{2}} - X}{X^2 - (1 + X^2)}$$

$$= +\sqrt{1 + X^2} - \frac{X^2}{\sqrt{1 + X^2}}$$

$$(a) \quad \frac{d}{dX} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dX}$$

$$(b) \quad \frac{d}{dX} e^u = e^u \frac{du}{dX}$$

الإجابة

بفرض ان $Y = a^u$ وباخذ لوغاريتم الطرفين

$$(a) \quad \ln Y = u \ln a$$

وباجراء التفاضل للطرفين بالنسبة ل X

$$\therefore \frac{1}{Y} \frac{dY}{dX} = \ln a \frac{du}{dX}$$

$$\frac{dY}{dX} = a^u \ln a \cdot \frac{du}{dX}$$

$$(b) \quad Y = e^u$$

بفرض ان

$$\ln Y = u$$

باجراء التفاضل للطرفين بالنسبة ل X :

$$\therefore \frac{1}{Y} \frac{dY}{dX} = \frac{du}{dX}$$

$$\frac{dY}{dX} = Y \frac{du}{dX}$$

$$= e^u \frac{du}{dX}$$

$$(a) \quad Y = e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$(b) \quad Y = e^{x^2}$$

$$(c) \quad Y = a^{nx}$$

$$(d) \quad Y = \ln X^n$$

$$(e) \quad Y = \ln \sqrt{X}$$

$$(f) \quad Y = X^x$$

3- أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :-

الإجابة

(a) $Y = e^{-\frac{1}{2}X}$

$$\frac{dY}{dX} = e^{-\frac{1}{2}X} \frac{d}{dX} \left(-\frac{1}{2}X\right) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}X}$$

(b) $Y = e^{X^3}$

$$\frac{dY}{dX} = e^{X^3} \frac{d}{dX} X^3 = 3X^2 e^{X^3}$$

(c) $Y = a^{nX}$

بأخذ لوغاريتم الطرفين

$$\therefore \ln Y = nX \ln a$$

$$\frac{1}{Y} \frac{dY}{dX} = n \ln a$$

$$\therefore \frac{dY}{dX} = Y n \ln a = n a^{nX} \ln a$$

(d) $Y = \ln X^n$
 $= n \ln X$

$$\therefore \frac{dY}{dX} = n \frac{1}{X}$$

(e) $Y = \ln \sqrt{X}$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{1}{\sqrt{X}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{X}} = \frac{1}{2X}$$

(f) $Y = X^X$

بأخذ لوغاريتم الطرفين

$$\ln Y = X \ln X$$

$$\therefore \frac{1}{Y} \frac{dY}{dX} = X \left(\frac{1}{X}\right) + \ln X$$

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dX} &= Y (1 + \ln X) \\ &= X^X (1 + \ln X) \end{aligned}$$

بتفاضل الطرفين بالنسبة X :

تمارين 8

أجد المشتقة الأولى للدوال الآتية :-

$$1) Y = \ln(X^2 + 2X)$$

$$2) Y = (\ln X)^3$$

$$3) Y = \ln(\cos X)$$

$$4) Y = X \ln X - X$$

$$5) Y = \ln(X \sqrt{X^2 + 1})$$

$$6) Y = \ln \frac{1 + X}{1 - X}$$

$$7) Y = \ln(\ln X)$$

$$8) Y = \log_e (\sqrt{(2X + 5)^2})$$

$$9) Y = e^{x^2} / (2X - 5)$$

$$10) Y = a^{x^2}$$

$$11) Y = e^{x^3}$$

$$12) Y = e^{\sqrt{x}}$$

$$13) Y = 6Xe^{x^2 - 1}$$

$$14) Y = e^{\sin x}$$

$$15) Y = e^{\sqrt{3x - 2}}$$

$$16) Y = e^{x^3 + 3x}$$

$$17) Y = e^x - e^{-x}$$

$$18) Y = e^x / X$$

$$19) Y = 3e^{\sin x^2}$$

$$20) Y = \ln(\cos e^{3x})$$

$$21) Y = (\cos X) e^{3x^2}$$

$$22) Y = \ln(x \sin X)$$

$$23) Y = \ln(\tan 3X)$$

$$24) Y = \ln \frac{5X}{1 - X^2}$$

$$25) Y = \ln(\sec^2 X)$$

$$26) Y = \log(4X - 3)$$

$$27) Y = (\ln X)(\sin X)$$

$$28) Y = \ln(X^3 - 1)^{1/3}$$

$$29) Y = \ln(X^3 \cos 2X)$$

$$30) Y = \ln(\ln X)$$

قانون القيمة المتوسطة

نظرية رول:

إذا كانت $F(x)$ دالة متصلة في الفترة $b \geq x \geq a$ وقابلة للاشتقاق وكان

$$f(a) = f(b) = 0$$

يوجد على الأقل عدد واحد x_0 بين a, b تكون فيه $f'(x_0) = 0$

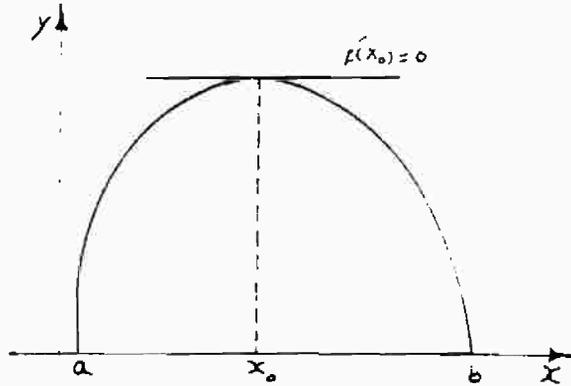
البرهان:

أما إن تكون $f(x)$ مطابقة للصفر لجميع قيم x ($b > x > a$) أو إن تكون مختلفة عن الصفر لبعض قيم x في هذا المجال.

ففي الحالة الأولى يكون $f'(x)$ مطابقاً للصفر والنظرية صحيحة في هذه الحالة. أما في حالة إن تكون $f(x)$ مختلفة عن الصفر لبعض قيم x في هذا المجال. فهي إما موجبة وتكون في المواضع الأخرى سالبة أو العكس.

أي إن للدالة قيمة عظمى موجبة أو قيمة صغرى سالبة أو كلا الأمرين بين a, b إذا يوجد على الأقل قيمة ل x بين $x = x_0, a, b$ عندها يكون $f'(x_0) = 0$

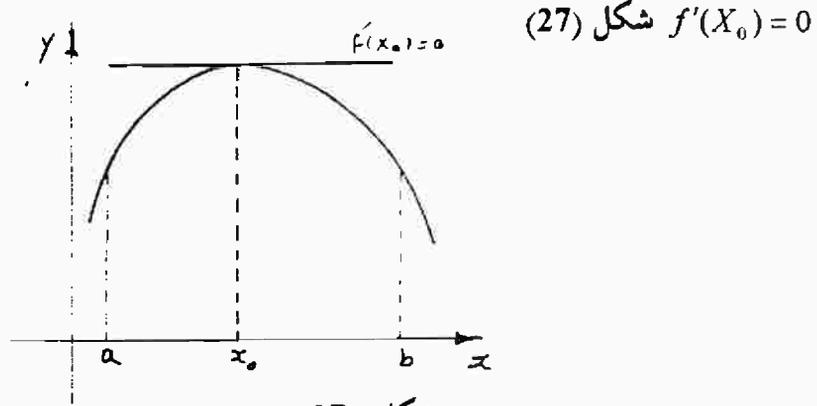
شكل (26)



شكل (26)

نتيجة :

إذا حققت الدالة $f(x)$ شروط نظرية رول ولكن $f(a) = f(b) \neq 0$ تكون أيضا

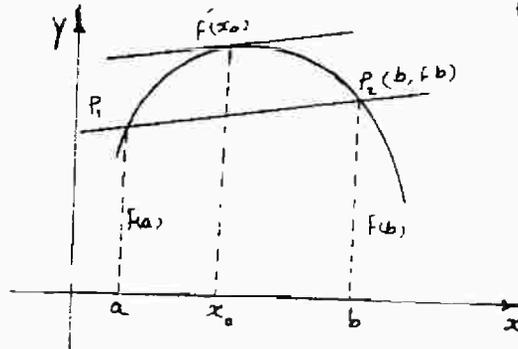


قانون القيمة المتوسطة:

إذا كانت $f(x)$ متصلة في الفترة $a \leq x \leq b$ وكانت $f(x)$ موجودة عند كل موضع في هذه الفترة باستثناء نهايتي الفترة على الأكثر. فعندئذ يوجد على الأقل قيمة واحدة $X = X_0$ يكون عندها:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(X_0)$$

وهذا ما يوضحه شكل (28)



ففي الشكل (28):

$f(x)$ منحنى متصل له مماس عند جميع نقاطه

P_1, P_2 نقطتين على المنحنى.

يكون ميل P_1P_2 مساويا للميل عند X_0

صيغ القانون:

$$I- f(b) = f(a) + (b-a)f'(X_0) \quad , \quad b > X_0 > a$$

$$II- f(X) = f(a) + (X-a)f'(X_0) \quad , \quad X > X_0 > a$$

$$III- f(b) = f(a) + (b-a)f'(a+\theta(b-a)) \quad , \quad 0 < \theta < 1$$

$$IV- f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h) \quad , \quad b-a=h$$

$$V- f(X+\Delta X) = f(X) + \Delta X f'(X+\theta \Delta X)$$

مثال 1 :

أوجد قيمة X_0 الواردة في نظرية رول لكل مما يأتي:-

$$(a) f(x) = x^3 - 12x, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{4}$$

$$(b) f(x) = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

الإجابة

$$(a) f'(x) = 3x^2 - 12$$

$$f'(x) = 0$$

$$\therefore 3x^2 - 12 = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x = \pm 2$$

$$\therefore x = x_0 = 2$$

$$(b) f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f'(x) = 0$$

$$\therefore x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = x_0 = \frac{\pi}{2}$$

مثال 2:

أوجد قيمة X_0 الواردة في قانون القيمة المتوسطة لكل من :-

(a) $f(X) = X^3, 0 \leq X \leq 6$

(b) $f(X) = \ln X, 1 \leq X \leq 2e$

الإجابة

(a) $a = 0, b = 6$

$$f'(X) = 3X^2$$

$$f'(X_0) = 3X_0^2$$

$$f(a) = f(0) = 0$$

$$f(b) = f(6) = 6^3$$

$$b - a = 6$$

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(X_0)$$

$$\therefore 6^3 = 0 + 6(3X_0^2)$$

$$X_0 = 2\sqrt{3}$$

(b) $a = 1, b = 2e$

$$\therefore f(a) = f(1) = 0$$

$$f(b) = f(2e) = 1 - \ln 2$$

$$b - a = 2e - 1$$

$$f'(X) = \frac{1}{X}$$

$$f'(X_0) = \frac{1}{X_0}$$

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(X_0)$$

$$1 + \ln 2 = 0 + (2e - 1) \frac{1}{X_0}$$

$$X_0 = \frac{2e - 1}{1 + 2\ln 2}$$

مثال 3:

استخدم قانون القيمة المتوسطة لحساب القيمة التقريبية $\sqrt{15}$

الحل :-

$$b = 15 \quad , \quad a = 16$$

$$f(X) = \sqrt{X}$$

$$f'(X) = \frac{1}{2\sqrt{X}}$$

$$f'(X_0) = \frac{1}{2\sqrt{X_0}}$$

$$f'(X_0) = \frac{1}{2\sqrt{16}} = 0.125$$

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(X_0)$$

$$\sqrt{15} = 4 - 1(0.125)$$

$$= 3.875$$

تمارين 9

1- اوجد قيمة X_0 الواردة في نظرية رول بفرض ان:

(a) $f(X) = X^2 - 4X + 2$, $1 \leq X \leq 3$

(b) $f(X) = \sin X$, $0 \leq X \leq \pi$

(c) $f(X) = \cos X$, $\frac{\pi}{2} \leq X \leq \frac{3\pi}{2}$

2- هل يمكن تطبيق نظرية رول على الدالتين الاتيتين:-

(a) $f(X) = \frac{X^2 - 4X}{X - 2}$

(b) $f(X) = \frac{X^2 - 4X}{X + 2}$

3- اوجد قيمة X_0 الواردة في قانون القيمة المتوسطة اذا كانت:

$$a=1 \quad , \quad b=3$$

$$f(X) = 3X^2 + 4X - 3$$

4- استخدم قانون القيمة المتوسطة لحساب القيمة التقريبية لكل من :

$$\sqrt{15}, (3,001)^3, \frac{1}{999}, \sqrt[6]{65}$$

5 - المطلوب توسيع ثقب دائري في قطعة معدنية قطرها 10 سم وعمقها

30 سم ليصبح قطرها 10.3 احسب كمية المعدن الذي تزيله من القطعة.

6 - استخدم قانون القيمة المتوسطة لاثبات ان:

$$\frac{X}{1+X} < \ln(1+X) < X$$

وذلك عند $0 < X < 1$ وعند $X > 0$

7 - استخدم قانون القيمة المتوسطة لاثبات ان:

$$\sqrt{1+X} < 1 + \frac{1}{2}X$$

وذلك عند $-1 < X < 0$ وعند $0 < X$

8- اوجد قيمة X_0 الواردة في قانون القيمة المتوسطة لكل من:

$$(a) \quad Y = X^2 \quad , \quad 0 \leq X \leq 6$$

$$(b) \quad Y = aX^2 + bX + c \quad , \quad X_1 \leq X \leq X_2$$

$$(c) \quad Y = \ln X \quad , \quad 1 \leq X \leq 2e$$

9 - استخدم قانون القيمة المتوسطة لاثبات ان:

$$\frac{X}{1+X^2} < \tan^{-1} X < X$$

وذلك عند $0 < X$

التفاضلات

تعريف:

1 - اذا ما ضربنا المشتقة في dX يسمى حاصل الضرب بالتفاضل فمثلا:

التفاضل

$$dc = 0$$

$$dcu = cdu$$

المشتقة

$$\frac{dc}{dX} = 0$$

$$\frac{dcu}{dX} = c \frac{du}{dX}$$

2- وجود تفاضل dY مثلا على الطرف الايسر من المعادلة يستدعي وجود

تفاضل dx في الطرف الايمن من المعادلة

3 - تعطى dx المسماة تفاضل x بالعلاقة: $dX = \Delta X$

تعطى dY المسماة تفاضل Y بالعلاقة: $dY = f'(X)dX$

مثال 1:

اذا كان $Y = X^2$ اوجد dY والاختلاف فيها عن ΔX

الحل:

$$dY = 2XdX \dots\dots\dots(1)$$

$$\Delta Y = (X + \Delta X)^2 - X^2 = 2X\Delta X + (\Delta X)^2$$

$$= 2XdX + (dX)^2 \dots\dots\dots(2)$$

من (1) و(2) نلاحظ ان ΔX تزيد عن dY بمقدار $(dX)^2$

التقريب بالتفاضل :-

إذا كان $dX = \Delta X$ صغير نسبيا بالنسبة لـ X فإن dY تقريب جيد و مناسب لـ ΔY

مثال 2:

$$Y = X^2 + X + 1 \text{ إذا كان:}$$

X تتغير من 1 إلى 1.01

أوجد $dY, \Delta Y$ والفرق بينهما

الحل :

$$Y + \Delta Y = (X + \Delta X)^2 + (X + \Delta X) + 1$$

$$\Delta Y = (X + \Delta X)^2 + (X + \Delta X) + 1 - (X^2 + X + 1)$$

$$= 2X\Delta X + (\Delta X)^2 + \Delta X$$

$$= 2(1)(1.01) + (0.01)^2 + (0.01)$$

$$= 0.0301 \dots \dots \dots (1)$$

$$dY = Y'dX$$

$$= (2X + 1)dX$$

$$= (2(1) + 1)(0.01)$$

$$= 0.03 \dots \dots \dots (2)$$

بمقارنة (1), (2) نجد ان $dY \equiv \Delta Y$ ويمكن اعتبارهما متساويتان لان الفرق بينهما

ضئيل جدا (0.0001) .

مثال 3:

استخدم التفاضل لحساب القيمة التقريبية لكل من:

(a) $\sqrt[3]{124}$

(b) $\sin 60^\circ 1'$

الحل:

$$(a) \quad Y = X^{\frac{1}{3}}$$

$$dY = \frac{1}{3} X^{-\frac{2}{3}} dX$$

$$X = 125$$

$$dX = -1$$

$$\therefore dY = \frac{1}{3(125)^{\frac{2}{3}}}(-1) = -0.0133$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{124} &= Y + \Delta Y \\ &= 5 - 0.013 = 4.9867 \end{aligned}$$

$$(b) \quad X = 60^\circ$$

$$dX = 1'$$

$$Y = \sin X$$

$$= \sin 60 = 0.86603$$

$$dY = \cos X dX = (\cos 60)(0.0003) = 0.00015$$

$$\sin 60^\circ 1' = Y + \Delta Y$$

$$= 0.866031 + 0.00015 = 0.86618$$

تمارين 10

$$(a) \quad Y = X^3 - 3X^2 + 5X$$

$$(b) \quad Y = (3X^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$$

$$(c) \quad X^2Y = 4 - XY^2$$

$$(d) \quad Y = \frac{2X}{1+X^2}$$

$$(e) \quad Y = X\sqrt{1-X^2}$$

$$(f) \quad Y = \frac{1-X-X^2}{1-X}$$

1 - اوجد dY في كل مما يأتي :-

2- استعمال التفاضلات لتحصل على قيم معقولة لما يأتي:-

(a) $\sqrt{145}$, $(2.1)^3$, $\sqrt[4]{17}$, $\sqrt[3]{0.126}$

(b) $(8.01)^{\frac{4}{3}} + (8.01)^2 - \frac{1}{\sqrt[3]{8.01}}$

3 - اوجد التغير التقريبي في حجم مكعب طول ضلعه Xcm الناتج عن زيادة أطوال اضلاعه ب 1%

4 - استخدم التفاضل لحساب القيمة التقريبية للتغير في:

(a) X^3 , $X = 5 \rightarrow X = 5.01$

(b) $\frac{1}{X}$, $X = 1 \rightarrow X = 0.98$

5 - تتمدد صفيحة دائرية تحت تأثير الحرارة بحيث يزداد نصف القطر من $12.5cm$ إلي $12.65cm$ اوجد الزيادة التقريبية في المساحة.

6 - اذا كانت $pV = 20$ وقيست P فوجدت:

$p = 5 \pm 0.02$

فاوجد V .

نماذج اختبارات وحلولها

نموذج اختبار 1

س1 باستخدام التعريف اوجد المشتقة الاولى للاتي:-

1- $F(X) = 3X^2 - 5X + 4$

2- $F(X) = \sqrt{X}$

س2 اوجد $\frac{dY}{dX}$ للدوال الآتية:-

1- $Y = (X^2 - \frac{1}{X^2})^6$

2- $Y = \sin^{-1} 3X \cos^{-1} 3X$

3- $Y = (2X^2 - 1)\tan^3 5X$

4- $Y = \ln^3 \sqrt{\frac{X^2 - 1}{X^2 + 1}}$

5- $Y = (X^2 + 1)^{10} + 10^{X^2 + 1}$

6- $Y = \tan^{-1} e^{2X}$

س3 اوجد المشتقة الثانية للدالة:

$$Y^4 + 3Y - 4X^2 = 5X +$$

س4 اوجد معادلة العمودي للمنحنى: $Y = X^2 - 2X +$

عند كل نقطة من نقطتي تقاطعه مع المستقيم: $Y = X +$

إجابة نموذج اختبار رقم 1

$$1- f(X) = 3X^2 - 5X + 4$$

$$f(X + \Delta X) = 3(X + \Delta X)^2 - 5(X + \Delta X) + 4$$

$$\begin{aligned} f(X + \Delta X) - f(X) &= 3(X^2 + 2X\Delta X + (\Delta X)^2) - 5X - 5\Delta X + 4 - 3X^2 + 5X - \\ &= 6X\Delta X + 3(\Delta X)^2 - 5\Delta X \\ &= \Delta X(6X - 5 + 3\Delta X) \end{aligned}$$

$$\frac{f(X + \Delta X) - f(X)}{\Delta X} = \frac{\Delta X(6X - 5 + 3\Delta X)}{\Delta X}$$

$$\begin{aligned} f'(X) &= \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{f(X + \Delta X) - f(X)}{\Delta X} \\ &= 6X - 5 \end{aligned}$$

$$2- f(X) = \sqrt{X}$$

$$f(X + \Delta X) = \sqrt{X + \Delta X}$$

$$\therefore f(X + \Delta X) - f(X) = \sqrt{X + \Delta X} - \sqrt{X}$$

$$\frac{f(X + \Delta X) - f(X)}{\Delta X} = \frac{\sqrt{X + \Delta X} - \sqrt{X}}{\Delta X} \cdot \frac{\sqrt{X + \Delta X} + \sqrt{X}}{\sqrt{X + \Delta X} + \sqrt{X}}$$

$$f'(X) = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{f(X + \Delta X) - f(X)}{\Delta X} = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{X + \Delta X - X}{\Delta X(\sqrt{X + \Delta X} + \sqrt{X})}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{X}}$$

- 1- $\frac{dY}{dX} = 6\left(X^2 - \frac{1}{X^2}\right)^5 \left(2X + \frac{2}{X^2}\right)$
- 2- $\frac{dY}{dX} = \frac{3}{\sqrt{1-9X^2}} + \frac{3}{\sqrt{1-9X^2}} = \frac{6}{\sqrt{1-9X^2}}$
- 3- $\frac{dY}{dX} = (2X^2 - 1)3(\tan^2 5X)(5)\sec^2 5X + 4X \tan^3 5X$
 $= 15(2X^2 - 1)\tan^2 5X \sec^2 5X + 4X \tan^3 5X$
- 4- $Y = \frac{1}{3}[\ln(X^2 - 1) - \ln(X^2 + 1)]$
 $\frac{dY}{dX} = \frac{1}{3}\left[\frac{2X}{X^2 - 1} - \frac{2X}{X^2 + 1}\right]$
 $= \frac{1}{3}\left[\frac{2X(X^2 + 1) - 2X(X^2 - 1)}{X^4 - 1}\right]$
 $= \frac{4}{3} \frac{X}{X^4 - 1}$
- 5- $\frac{dY}{dX} = 10(X^2 + 1)^9 2X + 10^{X^2+1} \cdot 2X \cdot \ln 10$
 $= 20X(X^2 + 1)^9 + 2X(\ln 10)10^{X^2+1}$

6- $\frac{dY}{dX} = \frac{2e^{2X}}{1 + e^{4X}}$

$$4Y^3 Y' + 3Y^2 - 12X^2 = 5$$

$$Y'(4Y^3 + 3) = 5 + 12X^2$$

$$\therefore Y' = \frac{5 + 12X^2}{4Y^3 + 3}$$

$$Y'' = \frac{(4Y^3 + 3)(24X) - (5 + 12X^2) \frac{5 + 12X^2}{4Y^3 + 3}}{(4Y^3 + 3)^2}$$

$$= \frac{(4Y^3 + 3)^2 (24X) - 12X^2 (5 + 12X^2)^2}{(4Y^3 + 3)^2}$$

$$\begin{aligned}
 X + 1 &= X^2 - 2X + 3 \\
 0 &= X^2 - 3X + 2 \\
 0 &= (X - 2)(X - 1)
 \end{aligned}$$

∴ نقطتي التقاطع هما : $X_2 = 2, X_1 = 1$

$$m_1 = \frac{dY}{dX} = 2X - 2 = \frac{-1}{0}$$

$$Y_1 = X_1 + 1 = 1 + 1 = 2$$

∴ معادلة المماس هي:

$$Y - 2 = \frac{-1}{0}(X - 1)$$

∴ $X = 1$ ← المماس رأسي

$$m_2 = 1$$

$$m_2 = \frac{1}{\frac{dY}{dX}} = \frac{-1}{(2X - 2)} = \frac{-1}{(2(2) - 2)} = \frac{-1}{2}$$

$$Y_2 = X_2 + 1 = 2 + 1 = 3$$

معادلة العمودي هي:

$$Y - 3 = \frac{1}{2}(X - 2)$$

$$2Y + X - 8 = 0$$

نموذج اختبار رقم 2

س1 أ- أوجد المشتقة الأولى للدالة $f(X)$ باستخدام المبادئ الأولية:

$$f(X) = \sqrt{3X^2 - 1}$$

ب- أوجد $\frac{d^2Y}{dX^2}$ إذا كان:-

$$Y = Z^2 + 3Z$$

$$X = Z^3 + 2Z$$

س2 أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:-

$$1- Y = \ln\left[\sec\left(\frac{\pi}{4} + \frac{X}{2}\right)\right]$$

$$2- Y = \tan^{-1} \frac{X}{Y}$$

$$3- Y = e^{-X} \csc \sqrt{X}$$

$$4- X^2 Y^3 + \sin^{-1}(\cos X) = \sqrt[3]{X^2 + 1}$$

س3 أوجد معادلتى المماس والعمودي للدالة: $Y = \frac{5X}{X^2 + 1}$ عند النقطة A(2.2)

س4 إذا كانت الدالة $f(X) = X^3 - 12X$ أوجد:-

1- النهايات العظمى والصغرى واحداثياتها.

2- فترات التزايد والتناقص

3- اختبر النهايات العظمى والصغرى باستخدام المشتقة الثانية

حل اختبار رقم (2)

جـ (1) (أ)

$$Y = \sqrt{3X^2 - 1} \quad \text{i.e. } F(X) = \sqrt{3X^2 - 1}$$

$$Y + \Delta Y = \sqrt{3(X + \Delta X)^2 - 1} \quad \text{i.e. } F(X + \Delta X) = \sqrt{3(X + \Delta X)^2 - 1}$$

$$\Delta Y = \sqrt{3(X + \Delta X)^2 - 1} - \sqrt{3X^2 - 1}$$

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{\sqrt{3(X + \Delta X)^2 - 1} - \sqrt{3X^2 - 1}}{\Delta X}$$

بضرب المعادلة في مرافق البسط :

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{\sqrt{3(X + \Delta X)^2 - 1} - \sqrt{3X^2 - 1}}{\Delta X} \cdot \frac{\sqrt{3(X + \Delta X)^2 - 1} + \sqrt{3X^2 - 1}}{\sqrt{3(X + \Delta X)^2 - 1} + \sqrt{3X^2 - 1}}$$

$$= \frac{3(X + \Delta X)^2 - 1 - (3X^2 - 1)}{\Delta X (\sqrt{3(X + \Delta X)^2 - 1} + \sqrt{3X^2 - 1})}$$

$$= \frac{\Delta X (6X + 3\Delta X)}{\Delta X (\sqrt{3(X + \Delta X)^2 - 1} + \sqrt{3X^2 - 1})}$$

بتطبيق النظرية :

$$\frac{dY}{dX} = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

$$= \frac{6X}{2(\sqrt{3X^2 - 1})} = \frac{3X}{\sqrt{3X^2 - 1}}$$

: (ب)

$$\frac{dY}{dZ} = 2Z + 3$$

$$\frac{dX}{dZ} = 3Z^2 + 2$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dY}{dZ} / \frac{dX}{dZ}$$

$$= \frac{2Z + 3}{3Z^2 + 2} \quad \therefore \frac{dY^2}{dX^2} = \frac{d}{dZ} \left(\frac{2Z + 3}{3Z^2 + 2} \right) \cdot \frac{dZ}{dX}$$

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{2(3Z^2 + 2) - 12Z^2 - 18Z}{(3Z^2 + 2)^2} \cdot \frac{1}{3Z^2 + 2}$$

$$= \frac{4 - 18Z - 6Z^2}{((3Z^2 + 2)^3)}$$

: 2 →

$$1 - Y' = \frac{1}{\sec\left(\frac{\pi}{4} + \frac{X}{2}\right)} \cdot \sec\left(\frac{\pi}{4} + \frac{X}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{X}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{X}{2}\right)$$

$$2 - Y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{X}{Y}\right)^2} \cdot \frac{d}{dX} \left(\frac{X}{Y}\right)$$

$$= \frac{Y^2}{Y^2 + X^2} \cdot \frac{Y - XY'}{Y^2}$$

$$Y' = \frac{Y - XY'}{Y^2 + X^2}$$

$$\therefore Y'(Y^2 + X^2) + XY' = Y$$

$$Y' = \frac{Y}{Y^2 + X^2 + 1}$$

$$3 - Y' = e^{-X} \left[-\csc \sqrt{X} \cdot \cot \sqrt{X} \cdot \frac{1}{2\sqrt{X}} \right] - e^{-X} \csc \sqrt{X}$$

$$= -\csc \sqrt{X} e^{-X} \left[\frac{\cot \sqrt{X}}{2\sqrt{X}} + 1 \right]$$

$$4 - X^2(3Y^2)' + 2XY' + \frac{1}{\sqrt{1 - (\cos X)^2}} \cdot (-\sin X) = \frac{1}{3}(X^2 + 1)^{\frac{2}{3}}(2X)$$

$$3X^2Y^2Y' = \frac{2X}{3(X^2 + 1)^{\frac{2}{3}}} + 1 - 2XY'$$

$$= \frac{2X + 3(X^2 + 1)^{\frac{2}{3}} - 6XY'(X^2 + 1)^{\frac{2}{3}}}{3(X^2 + 1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\therefore Y' = \frac{2X + 3(X^2 + 1)^{\frac{2}{3}} - 6XY'(X^2 + 1)^{\frac{2}{3}}}{9X^2Y^2(X^2 + 1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{(X^2 + 1)5 - 5X(2X)}{(X^2 + 1)^2}$$

جـ 3 :

$$= \frac{-5X^2 + 5}{(X^2 + 1)^2}$$

بالتعويض عن $X = 2$ لإيجاد الميل :

$$\therefore \frac{dY}{dX} = \frac{-20 + 5}{(5)^2} = \frac{-15}{25} = \frac{-3}{5}$$

∴ معادلة المماس هي :

$$Y - 2 = -\frac{3}{5}(X - 2)$$

$$5Y - 10 = -3X + 6$$

$$\therefore 3X + 5Y - 16 = 0$$

ولإيجاد معادلة العمودي (حيث ميل العمودي m_{\perp})

$$m_{\perp} = \frac{5}{3}$$

$$\therefore Y - 2 = \frac{5}{3}(X - 2)$$

$$3Y - 6 = 5X - 10$$

$$5X - 3Y - 4 = 0$$

ج 4 - عند القيم الحرجة تكون $F'(X) = 0$

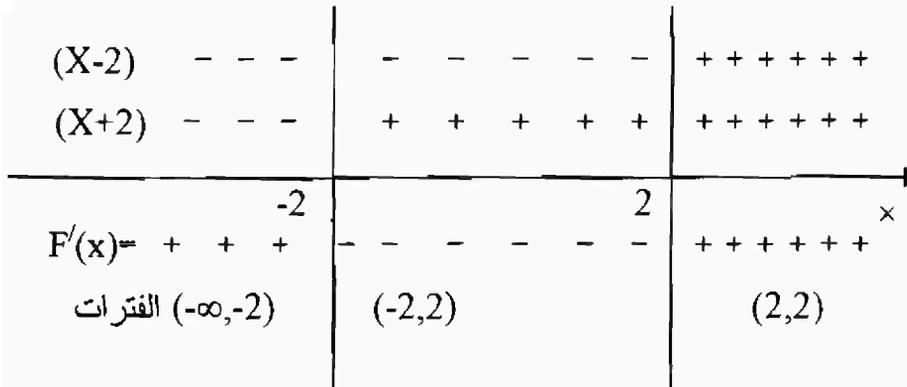
$$F'(X) = 3X^2 - 12$$

$$3X^2 - 12 = 0$$

$$X^2 - 4 = 0$$

∴ القيم الحرجة عند : $X = \pm 2$

توقع القيم الحرجة على خط الأعداد :



عند $X = -2$

$f'(x)$ تغير اشارةها من (+) الى (-) وبالتالي تكون نهاية عظمى عند $X = -2$

2 قيمتها :

$$f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) = 16$$

أحداثى النهاية العظمى : $A(-2, 16)$

عند $X = 2$

$f'(x)$ تغير اشارةها من (-) الى (+) وبالتالي تكون نهاية صغرى عند $X = 2$

2 قيمتها :

$$f(2) = (2)^3 - 12(2) = -16$$

إحداثى النهاية الصغرى : $B(2, -16)$

2 - فترات التزايد : $(-\infty, -2)$, $(2, 2)$

فترة التناقص : $(-2, 2)$

3- إختبار النهايات بالمشتقة الثانية :

$$f''(x) = 6X$$

عند $X = -2$

$$f''(-2) = -$$

∴ توجد نهاية عظمى عند $X = -2$ لأن $f''(X_0)$ سالبة

عند $X = 2$

$$f''(2) = +$$

∴ توجد نهاية صغرى عند $X = 2$ لأن $f''(X_0)$ موجبة

تمرينات عامة في

التفاضل

تمرين رقم (1)

أوجد قيمة المشتق الأولى للدوال الآتية :

1 - $Y = (2X^2 - 1) \tan^3 (5X)$

2 - $Y^2 = 3X^2 + \frac{X}{Y}$

3 - $Y = (\tan X^2 + \csc^{-1} X^2)^{\frac{1}{2}}$

4 - $Y = 3^{\sin^{-1} X} - 3$

5- $y = \frac{\sec 2X}{\tan(2X + 1)}$

6 - $y = \frac{X \ln x}{1 - X} + \ln(1 - X)$

7- $y = \left(\frac{X}{1+x}\right)^5$

8- $e^y = X^{\sin x^2}$

9 - استخدام قاعدة السلسلة لإيجاد $\frac{dY}{dX}$ حيث :

$u = X^2 + 2X$ $Y = u^3 + 4$

10 - أوجد المشتقة الثانية للدالة :

$Y = X / \sqrt{X - 1}$

11 - حوض على شكل متوازي مستطيلات طولاه 2m وعرضه 0.5m وعمقه 1m فإذا كان الماء ينساب فيه بمعدل $900\text{cm}^3\text{s}^{-1}$ فبأية سرعة يرتفع سطح الماء عندما يكون عمق الماء 25cm . (0.09 cms^{-1})

12 - إختبر الدالة : $Y = X^2 + \frac{250}{X}$

لمعرفة إتجاه الاتحناء وتحديد نقط الانقلاب والقيم العظمى والصغرى .

13 - استخدم قانون القيمة المتوسطة لتحسب قيمة :

$$\frac{1}{999} \quad \text{و} \quad (3.00)^3$$

14 - من التعريف أوجد قيمة المشتقى الأولى للدالة :

$$Y = \sqrt{X^2 - 3}$$

15 - أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى :

$$Y = X^3 - 2X^2 + 4$$

عند النقطة A (2,4)

تمرين رقم (2)

أوجد قيمة المشتقى الأولى للدوال الآتية :

1 - $Y = (X + 1)(X - 1)(X + 2)$

2 - $Y^2 = X^3 + \frac{X}{Y}$

3 - $Y = (\sin)^{\cos x}$

4 - $Y = (X^3 + X^2 + X)^{X^3}$

5 - $Y = \sin^{-1}(\sin 5x)$

6 - $10 = \frac{X^4 + Y^3}{\cos x Y + X}$

7 - $Y = \sqrt{1 + \sqrt{X}}$

8 - استخدم قاعدة السلسلة لإيجاد $\frac{dY}{dX}$ حيث :

$u = x(3 - 2x)$

$Y = \sqrt{x}$

9 - أوجد المشتقة الثانية للدالة :

$Y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

10 - يمشى رجل طوله 1.5m بمعدل 1.2ms^{-1} مبتعداً بشكل مباشر عن ضوء الشارع الذي يعلو 6m عن ارض الشارع .

أ - بأى معدل يتغير رأس ظل الرجل ؟ (1.6ms^{-1})

ب - بأى معدل يتغير طول الظل ؟ (0.4ms^{-1})

11 - إختبر الدالة : $Y = 3x + (x + 2)^3$

لمعرفة إتجاه الانحناء وتحديد نقط الانقلاب .

12 - أوجد قيمة X_0 الواردة فى قانون القيمة المتوسطة بفرض أن

$$Y = aX^2 + bX + c \quad X_1 \leq X \leq X_2$$

13 - من التعريف أوجد قيمة المشتقة الأولى للدالة :

$$Y = \sqrt{3X^2 - X}$$

14 - أوجد معادلة المماس عند النقطة $A(2, -2)$ للمنحنى :

$$X^2 - Y^2 = 16$$

تمرين رقم (3)

أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية :

$$1 - y = \sqrt{\sqrt{\sqrt{e^{x^2} + 5x}}}$$

$$2 - 5 = \frac{X^2 + Y^2}{XY}$$

$$3 - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$4 - Y = (\csc x)^{\csc x}$$

$$5 - Y = \log_3(x^2 + 2)^3 + 5^{\sin x}$$

$$6 - Y = X^2 \tan^3 4x$$

$$7 - e^r = \tan^{-1} x^2$$

8 - يستند سلم أب طوله 5m على جدار منزل أوجد :

معدل حركة رأس السلم لأسفل إذا كان اسفل السلم على بعد 3m من

الجدار ويبعد عنه بمعدل 0.5ms^{-1} .

$$\left(\frac{3}{8} \text{ m s}^{-1} \right)$$

9 - اختبر الدالة : $Y = x(12 - 2x)^2$

للحصول على القيم العظمى والصغرى مستخدماً طريقة المشتقة الثانية .

10 - استخدم قانون القيمة المتوسطة لتبين أن :

$$x > 0, -1 < x < 0 \text{ عند } \sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$$

(إرشاد : $f(x) = \sqrt{x}$ استخدم الصيغة IV $a=1, h=x$)

11 - استخدم قاعدة السلسلة لإيجاد $\frac{dY}{dX}$:

$$y = t^3 - 3t + 5$$

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{t} + 3$$

12 - أوجد المشتقة الثانية للدالة :

$$r = \sqrt{2 - 3x^2}$$

13 - باستخدام التعريف أوجد قيمة المشتقة الأولى للدالة :

$$Y = \sqrt{1 - X^2}$$

14 - أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى :

$$X^2 + 3XY + Y^2 = 5$$

عند النقطة $A(1,1)$