الباب الثالث

المعادلات التفاضلية

المعادلات التفاضلية

تصنف المعادلات التفاضلية وفقا للآتي:-

(أ) النوع : عادية او جزئية

(ب) المرتبة: مرتبة المشتق الاعلى الذي ياتي في المعادلة

(ت) الدرجة : اس اعلى قوة لاعلى رتبة للمشتق وذلك بعد تصفية الكسور و الجذور في المتغير غير المستقل ومشتقاته.

فمثلا........

$$(\frac{d^3Y}{dX^3})^2+(\frac{d^2Y}{dX^2})^5+\frac{Y}{X^2+1}=e^X$$

معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الثالثة والدرجة الثانية. توجد المشتقات "العادية" فقط عندما يكون المتغير غير المستقل دالة لمتغير مستقل واحد X.

حل المعادلة التفاضلية:

يقال ان Y=f(X) حل للمعادلة التفاضلية اذا كانت مشتقاها منها تحقق المعادلة التفاضلية.

فمثلا...

$$Y=c_1\cos X+c_2\sin X.........(1)$$

(c_1,c_2 **ثوابت)**

تعتبر حلا للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{d^2Y}{dX^2}+Y=0.......................(2)$$

لان المعادلة رقم (1) ومشتقاها تحقق المعادلة رقم (2):

$$\frac{dY}{dX} = -c_1 \sin X + c_2 \cos X \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = -c_1 \cos X - c_2 \sin X \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

وبالتعويض من المعادلتين (1) و (4) في المعادلة (2):

$$\therefore \frac{d^2Y}{dX^2} + Y = -c_1 \cos X - c_2 \sin X + c_1 \cos X + c_2 \sin X$$

$$= 0$$

∴ المعادلة رقم (1) تحقق المعادلة رقم (2).

ومن المالوف ان يكون للمعادلة او المعادلات التفاضلية حلولا تحتوي على ثوابت اختيارية. وسيكون من الضروري ان تخصص قيما لهذه الثوابت الاختيارية وفقا للشروط المعطاة.

ويكون للمعادلة التفاضلية من المرتبة n بصفة عامة حلا يحتوي على n من الثوابت الاختيارية يسمى هذا بالحل العام. وياتي بعد ذلك تحديد قيم الثوابت (مسالة جبرية) اذا اعطيت شروط ابتدائية.

وسوف نتناول هنا معادلات المرتبة الاولى بطريقة:

(أ) فصل المتغيرات

(ب) المعادلات المتجانسة

(ت) المعادلات الخطية

أ- فصل المتغيرات:

وذلك بتجميع المتغيرات Y مع dY ، X مع dX

مثال 1:

أوجد حل المعادلة الاتية:

$$(X+1)dY = X(Y^2+1)dX$$

الحل:

$$\frac{dY}{Y^2+1}=\frac{X\ dX}{X+1}$$

وبإجراء التكامل للطرفين

$$\tan^{-1}Y=\int\frac{X}{X+1}dX$$

$$=\int(1-\frac{1}{X+1})dX$$

$$=X-\ln(X+1)+c$$

مثال 2:

أوجد حل المعادلة الآتية:

$$\frac{dY}{dX}=e^{X-Y}$$

الحل

$$\frac{dY}{dX}=\frac{e^X}{e^Y}$$

$$\int e^Y dY=\int e^X dX$$

$$e^Y=e^X+C$$

مثال 3:

أوجد حل المعادلة الآتية:

الحل:

$$\int\frac{\ln X}{X}dX=\int\frac{1}{Y}d$$

بفرض ان:

$$\ln X = u$$

$$\frac{dX}{X} = du$$

$$\therefore \int \frac{\ln X}{X} dX = \int \frac{dY}{Y}$$

$$\int u.du = \ln Y + c$$

$$\frac{1}{2}u^2 = \ln Y + c$$

$$\frac{1}{2}(\ln X)^2 = \ln Y + c$$

ومن المعتاد في بعض المسائل استعمال التعويضات التفاضلية الآتية:–

1– $d(\frac{X}{Y}) = \frac{Y.dX - X.dY}{Y^2}$

2– $d(\frac{Y}{X}) = \frac{X.dY - Y.dX}{X^2} = -(\frac{Y.dX - X.dY}{X^2})$

3– $d\tan^{-1}(\frac{Y}{X}) = \frac{X.dY - Y.dX}{X^2 + Y^2}$

4– $d\tan^{-1}(\frac{X}{Y}) = \frac{Y.dX - X.dY}{X^2 + Y^2}$

5– $d(XY) = X.dY + Y.dX$

6– $d(\ln\sqrt{X^2 + Y^2}) = \frac{X.dX + Y.dY}{X^2 + Y^2}$

7– $d(X^2 + Y^2) = 2(X.dX + Y.dY)$

مثال: حل المعادلة التفاضلية :

$$X.dY - Y.dX = (X^2 + Y^2)dY$$

الحل:

$$\frac{X.dY - Y.dX}{X^2 + Y^2} = dY$$

$$d\tan^{-1}(\frac{Y}{X}) = \frac{X.dY - Y.dX}{X^2 + Y^2}$$

$$\therefore d\tan^{-1}(\frac{Y}{X}) = dY$$

$$\tan^{-1}(\frac{Y}{X}) = Y + c$$

تمـــــاريــــــن 1

I - أوجد حل المعادلات التفاضلية الآتية:

1- $X(2Y-3)dX + (X^2+1)dY = 0$

2- $X^2(Y^2+1)dX + Y\sqrt{X^3+1}dY = 0$

3- $\sqrt{2XY}\frac{dY}{dX} = 1$

4- $\sin X\frac{dX}{dY} + 5\sec^2 Y\tan Y = 0$

5- $Xe^Y dY + \frac{X^2+1}{Y}dX = 0$

6- $Y\sqrt{2X^2+3}\,dY + X\sqrt{4-Y^2}\,dX = 0$

7- $\frac{dY}{dt} - 4t^3 = 0$

عند t=5 , t=0

II – تحقق بان الدالة: $Y = \ln t$ **هي حل للمعادلة:** $t^2(\frac{d^2Y}{dt^2}) - t(\frac{dY}{dt}) + 2 = 0$

III – أوجد حل المعادلات الآتية عند النقطة المقابلة :

(a) $X.dY + Y.dX = 3XY.dX$

عند Y=1 , X=1

(b) $Y.dX - X.dY + dX = 4X^4.dX - dX$

عند $X = 1$, $Y = \frac{1}{3}$

$$(c) \quad \frac{dY}{dX} = e^{X+Y}$$

عند Y=1 , X=0

$$(d) \quad \frac{dY}{dX} = X^2 Y^4$$

عند Y=1 , X=1

$$(e) \quad Ye^{-X} \frac{dY}{dX} + 2 = 0$$

عند Y=2 , X=0

$$(f) \quad \frac{dY}{dX} = \frac{2X}{Y + X^2 Y}$$

عند Y=4 , X=0

ب- المعادلات التفاضلية المتجانسة:

تكون المعادلة على الصورة :-

$$\frac{dY}{dX} = f(\frac{Y}{X}) \text{..........................} (1)$$

يمكن حلها بادخال متغير غير مستقل جديد v :

$$v = \frac{Y}{X} \text{..................................} (2)$$

$$Y = vX$$

$$\frac{dY}{dX} = v + X\frac{dv}{dX} \text{.......................} (3)$$

وتصبح المعادلة رقم (1):

$$\therefore v + X\frac{dv}{dX} = f(v) \text{.................} (4)$$

ويمكن حل المعادلة (4) بفصل المتغيرات:

$$v - f(v) = -X\frac{dv}{dX}$$

$$\frac{dX}{X} = -\frac{dv}{v - f(v)}$$

$$\frac{dX}{X} + \frac{dv}{v - f(v)} = 0$$

مثال 1:

بين أن المعادلة الآتية متجانسة ثم أوجد حلها .

$$(X^2 + Y^2)dX + 2XY.dY = 0$$

الحل :

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{X^2 + Y^2}{2XY}$$

بالقسمة على X^2

$$\therefore \frac{dY}{dX} = -\frac{1 + (\frac{Y}{X})^2}{2(\frac{Y}{X})} = -\frac{1 + v^2}{2v} \qquad ....(1)$$

$\therefore$ المعادلة المعطاة متجانسة وبالتالى يمكن التعويض: $v = \frac{Y}{X}$ وايجاد $\frac{dY}{dX}$ بدلالة v وحلها بعد ذلك بفصل المتغيرات كالاتي:-

$$\therefore \frac{dY}{dX} = v + X\frac{dv}{dX}$$

بالتعويض في المعادلة (1)

$$\therefore v + \frac{1 + v^2}{2v} = -X\frac{dv}{dX}$$

$$\frac{2v^2 + 1 + v^2}{2v} = -X\frac{dv}{dX}$$

$$\frac{1 + 3v^2}{2v} = -X\frac{dv}{dX}$$

$$-\frac{dX}{X}=\frac{2v.dv}{1+3v^2}$$

$$\ln|X|+\frac{1}{3}\ln|1+3v^2|=\frac{1}{3}\ln c$$

$$X^3(1+3v^2)=c$$

$$X^3(1+3(\frac{Y}{X})^2)=c$$

مثال 2:

اثبت أن المعادلة التالية متجانسة ثم أوجد حلها.

$$(X+Y)dY+(X-Y)dX=0$$

الحل:

$$\frac{dY}{dX}+\frac{X-Y}{X+Y}=0$$

$$\frac{dY}{dX}+\frac{1-v}{1+v}=0$$

$\therefore$ المعادلة المعطاة متجانسة حيث $\frac{dY}{dX}$ دالة في v . بالتعويض عن $\frac{dY}{dX}$ من (3)

$$\therefore \quad v+X\frac{dv}{dX}+\frac{1-v}{1+v}=0$$

$$X\frac{dv}{dX}+\frac{v+v^2+1-v}{1+v}=0$$

$$X\frac{dv}{dX}+\frac{v^2+1}{1+v}=0$$

$$\frac{v+1}{v^2+1}dv+\frac{dX}{X}=0$$

$$\frac{v}{v^2+1}dv+\frac{1}{v^2+1}dv+\frac{dX}{X}=0$$

$$\frac{1}{2}\ln|v^2+1|+\tan^{-1}v+\ln|X|=\ln c$$

$$\ln\frac{X\sqrt{v^2+1}}{c}+\tan^{-1}v=0$$

وبالتعويض من المعادلة (2) عن v حيث $v=\frac{Y}{X}$

$$\therefore \ln\frac{X\sqrt{(\frac{Y}{X})^2+1}}{c}+\tan^{-1}(\frac{Y}{X})=0$$

تمـــــاريـــــــن 2

أوجد حل المعادلات التفاضلية الآتية بعد إثبات إنها متجانسة:-

1- $X^2dY+(Y^2-XY)dX=0$

2- $(Xe^{\frac{Y}{X}}+Y)dX-X.dY=0$

3- $X^2.dY+(Y^2-XY)dX=0$

4- $(X^2+Y^2)dY-Y^2.dX=0$

5- $\frac{dY}{dX}=\frac{-X+\sqrt{X^2+Y^2}}{Y}$

جـ ـالمعادلات الخطية من المرتبة الاولى:

من المعروف ان الحد $\frac{d^2Y}{dX^2}$ من الدرجة الاولى ولكن من المرتبة الثانية بينما الحد $Y(\frac{dY}{dX})$ من الدرجة الثانية لان مجموع الاسس في Y ، $\frac{dY}{dX}$ يساوي 2.

فعندئذ تكون المعادلة التفاضلية خطية اذا كان كل حد في المعادلة من الدرجة صفر او الدرجة الأولي وتكون علي الصورة:

$$\frac{dY}{dX}+P(X)Y=Q(X)$$

او:

$$dY+P(X)Y.dX=Q(X).dX\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

حيث أن $Q(X), P(X)$ دالتان في X

بضرب المعادلة (1) في $e^{\int P(X)dX}$

$$\therefore e^{\int P(X)dX}dY + e^{\int P(X)dX}P(X)Y.dX = Q(X)e^{\int P(X)dX}dX \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$d(Ye^{\int P(X)dX}) = Yd(e^{\int P(X)dX}) + e^{\int P(X)dX}dY$$

$$= Ye^{\int P(X)dX}P(X)dX + e^{\int P(X)dX}dY \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

بمقارنة المعادلتين (2) و (3)

$$\therefore d(Ye^{\int P(X)dX}) = Q(X)e^{\int P(X)dX}dX$$

بتكامل الطرفين:

$$Ye^{\int P(X)dX} = \int Q(X)e^{\int P(X)dX}dX$$

يسمى المقدار $e^{\int P(X)dX}$ بالعامل المكمل ويرمز له بالرمز ρ

مثال 1: حل المعادلة الآتية:

$$\frac{dY}{dX} + 2XY = 5X$$

الحل:

$$P = 2X \qquad , \qquad Q = 5X$$

$$\therefore \quad \rho = e^{\int P(X)dX} = e^{X^2}$$

$$\therefore Ye^{X^2} = \int 5Xe^{X^2}dX$$

$$= \frac{5}{2}e^{X^2} + c$$

مثال 2: حل المعادلة الآتية

$$\frac{dY}{dX} + Y = e^X$$

الحل:

$$P = 1 \qquad , \qquad Q = e^X$$

$$\therefore \quad \rho = e^{\int P(X)dX} = e^{\int dX} = e^X$$

$$\therefore \; Ye^X = \int e^X e^X dX$$

$$= \frac{1}{2}e^{2X} + c$$

$$Y = \frac{1}{2}e^X + ce^{-X}$$

مثال 3:

أوجد حل المعادلة التفاضلية :

$$X\frac{dY}{dX} - 3Y = X^2$$

الحل:

$$\frac{dY}{dX} - \frac{3}{X} = X$$

$$P = -\frac{3}{X} \qquad , \qquad Q = X$$

$$\therefore \quad \rho = e^{\int -\frac{3}{X}dX} = e^{-3\ln X} = \frac{1}{e^{3\ln X}} = \frac{1}{X^3}$$

$$\rho Y = \int \rho Q.dX + c$$

$$= \int \frac{1}{X^3}.X\,dX + c = -\frac{1}{X} + c$$

$$Y = -X^2 + cX^3$$

ملاحظات:

$$e^{\ln X} = X$$

1- $$e^{m\ln X} = X^m$$

$$e^{n+m\ln X} = X^m.e^n$$

II– قد تكون المعادلة التفاضلية الخطية في Y ، $\frac{dY}{dX}$ منفصلة او متجانسة وبالتالي يكون عندنا حرية الاختيار في الحل.

III – المعادلة الخطية في X ، $\frac{dX}{dY}$ يمكن أن تحل بنفس الطريقة السابقة باستبدال Y محل X.

تمـــــاريـــــــن 3

أوجد حل المعادلات التفاضلية الآتية:–

1– $\frac{dY}{dX}+2Y=e^{-X}$

2– $2\frac{dY}{dX}-Y=e^{\frac{X}{2}}$

3– $X\frac{dY}{dX}+3Y=\frac{\sin X}{X^2}$

4– $X.dY+Y.dX=\sin X.dX$

5– $X.dY+Y.dX=Y.dY$

6– $(X-1)^3\frac{dY}{dX}+4(X-1)^2Y=X+1$

7– $e^{2Y}dX+2(Xe^{2Y}-Y)dY=0$

8– $(X-2Y)dY+Y.dX=0$

9– $(Y^2+1)dX+(2XY+1)dY=0$

اختبارات عـــامـــة

فـــي

التكـــامـــل

اختبار رقم (1)

أوجد قيمة التكاملات الآتية:

$1-\int(\csc X-1)^2 dX$

$2-\int(X+1)^{10}(X+2)dX$

$3-\int\frac{\sin\sqrt{X}}{\sqrt{X}}dX$

4-احسب قيمة: $\int\frac{X+2}{X(X-2)^2}dX$

5-أوجد الحجم الناتج بدوران قطعة السطح المستوية التالية حول المستقيم المفروض :

$Y=X^2-5X+6 \quad , \quad Y=0$

حول المحور Y

6-حل المعادلات التفاضلية الآتية:

$(a)\ Y.dY-4X.dX=0$

$(b)\ (X-2Y)dY+(Y+4X)dX=0$

اختبار رقم (2)

احسب قيمة التكاملات الآتية:

$1-\int X\ln X.dX$

$2-\int\frac{1}{\sqrt{X}}\csc^2\sqrt{X}.dX$

$3-\int\frac{\sqrt{X^2-9}}{X}dX$

4-احسب قيمة : $\int_0^{\sqrt{2}}X^3e^{X^2}dX$

5-اوجد الحجم الناتج بدوران قطعة السطح المستوية التالية حول المستقيم المفروض:

$$Y = X^2 \quad , \quad Y = 4X - X^2$$

حول المحور X .

6-حل المعادلات التفاضلية الاتية:

$$(a)\ X.dY - Y.dX = 2X^2 dX$$

$$(b)\ \frac{dY}{dX} + \frac{2}{X}Y = 6X^3$$

اختبار رقم (3)

أوجد قيمة التكاملات الآتية:

$$1 - \int \cos^{-1} X.dX$$

$$2 - \int \frac{3X+5}{X+2} dX$$

$$3 - \int Xe^X dX$$

$$4 - \int \frac{dX}{1+\cos X}$$

5-أوجد قيمة $\int_2^{10} \sqrt{2X+3}.dX$

6-أوجد الحجم الناتج بدوران قطعة السطح المستوية التالية حول المستقيم المفروض:

$$Y = X^2 \quad , \quad Y = 4X - X^2$$

حول X=5

7-أوجد حل المعادلات التفاضلية الآتية:

$$(a) \frac{dY}{dX} + \frac{1+Y^2}{XY^3(1+X^2)} = 0$$

$$(b) \frac{dY}{dX} - XY = X$$

اختبارات عـــامـــة

اختبار 1

س1(a) باستخدام التعريف أوجد المشتقة الأولي لكل من:

$$i-\ f(X)=\sqrt{X}$$

$$ii-\ f(X)=\frac{1}{2X}$$

(b) أوجد $\frac{dY}{dX}$ لكل من الدوال الآتية:

$$i-\ f(X)=\frac{1}{\ln X}+\ln\frac{1}{X}$$

$$ii-\ f(X)=\frac{\cos 4X}{1-\sin 4X}$$

س2 (a) احسب القيمة الوسيطة للدالة الآتية:

$$f(X)=X+\frac{4}{X} \quad , \quad 4\geq X\geq 1$$

(b) اوجد معادلة المماس والعمودي للمنحنى: $Y=X^2-2X+3$ عند كل نقطة من نقطتي تقاطعه مع المستقيم: $Y=X+1$

(c) اوجد نقط الانقلاب للمنحنى: $Y=\frac{1}{2}X^4-3X^2+4X+10$

س3 اوجد $\frac{dY}{dX}$ لكل من الدوال:

$$1-\ Y=(2X^2-1)\tan^3 5X \qquad 2-\ Y=\tan^{-1}e^{2X}$$

$$3-\ Y=3^{\sin X^2} \qquad 4-\ X^3+\frac{X}{Y}=Y$$

$$5-\ Y=\log\left|\frac{64+4}{2X-3}\right|$$

س4 أوجد التكاملات الآتية:

$1-\quad \int \frac{dX}{\sqrt{X}(\sqrt{X}+1)^2}$

$2-\quad \int (\cos 3X)\sqrt[3]{\sin 3X}\,.dX$

$3-\quad \int X(2)^{-X^2}.dX$

$4-\quad \int \frac{X^4+2X^2+3}{X^3-4X}dX$

س5 (a) اوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين:

$Y=\sqrt{X} \qquad , \qquad Y=X^2$

(b) اوجد الحجم الناتج عن دوران المساحة المحصورة بين المنحنيين:

$Y=\frac{1}{8}X^3 \qquad , \qquad Y=2X$

حول المحور Y.

اختبار 2

س1 باستخدام التعريف أوجد المشتقة الأولي للدالة:

$f(X)=(X^2+X)^{\frac{1}{2}}$

س2 أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية:

$1-\quad f(X)=\frac{1}{(1+Z+Z^2)}$

$2-\quad Y=\tan^{-1}e^{2X}$

$3-\quad Y=\log\ln X$

$4-\quad Y=\sin X^2\cos X^2$

$5-\quad Y=\frac{\sin X}{1-\cos X}$

$6-\quad Y^2+2XY-X^2=\csc X$

س3 أوجد النهاية العظمى و الصغرى و نقط الانقلاب للدالة:

$f(X)=X^4+\frac{4}{3}X^3-4X^2$

س4 أوجد التكاملات الآتية:

$1-\int X^2 e^{2X}\,dX$

$2-\int \frac{X^2 dX}{\sqrt{X^2-16}}$

$3-\int \frac{2e^X}{\cos e^X}\,dX$

$4-\int \sqrt{1+\cos X}\;dX$

س5 (a) أوجد المساحة المحصورة بين : $Y=5$, $Y=4X-X^2$

(b) حل المعادلات التفاضلية الآتية:-

$1-\ Xe^Y dY + X\sqrt{1-Y^2}\;dY = 0$

$2-(X-Y)dY+(X-Y)dX=0$

اختبار 3

س1 باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة :

$Y=\sqrt{3X^2+1}$

س2 أوجد المشتقة الأولي للدوال الآتية:

$1-\quad Y=(X+1)(X-1)(X+2)$

$2-\quad Y=X^2\tan^3 4X$

$3-\quad Y=(\csc^2 2X-\cot 2X)^4$

$4-\quad Y=\frac{\sin 2X+X^2}{\tan 2X+1}$

$5-\quad Y=\sin^{-1}(\sin 5X)$

$6-\quad Y=\ln(X^3+1)(\sin X^2)$

س3 أ–أوجد قيمة X_0 الواردة في قانون القيمة المتوسطة للدالة:

$f(X)=\ln X^2$, $1\le X\le e$

ب–احسب القيمة التقريبية للمقدار $\sqrt{48.85}$

س4 أوجد قيمة التكاملات الآتية :

$1-\int\frac{dX}{\sqrt{2-5X^{2}}}$ $\qquad$ $2-\int\frac{X-1}{X+1}dX$

$3-\int e^{X}(2+\cos e^{X})dX$ $\qquad$ $4-\int\frac{\cot X+1}{\sin^{2}X}$

س5 أوجد الحجم الناتج من دوران قطعة السطح المحدد بالقطع المكافئ $Y^{2}=4X$ والمستقيم X=4 حول المحور Y.

س6 حل المعادلات التفاضلية الآتية:-

$$1-X\frac{dY}{dX}(2Y-1)=Y(1-X)$$

$$2-(X^{2}+Y^{2})dX=2XY.dY$$

المراجع

1 – حساب التفاضل والتكـــامل والـهندســـة التحليليـــة ـ تـــاليف ج.ب.توماس ترجمة الدكتور موفق دعبول واخرين ـ منشـــورات جامعة الفاتح الطبعة الثانية ١٩٧٩

2 – حساب التفاضل والتكامل والـهندسة التحليلية: تـــأليف وليـــم هـــ.دورفي الدار الدولية للنشر والتوزيع . ترجمة الدكتور محمـــد علي محمد السمري جامعة حلوان جمهورية مصر العربية. الطبعة الثانية ١٩٩٢

3- أساسيات الرياضيات. حسين رجب مجمد. دار الفجـــر للنشـــر وانتوزيع القاهرة. الطبعة الأولي ١٩٩٨

4- Engineering formulas –Kurt Gieck. Third edition 1973 McGraw – Hill comp.