2 نظرية المعادلات
Theory of Equations

توجد أنواع كثيرة ومتنوعة من العلاقات التي تربط الكائنات الرياضية بعضها مع بعض. من هذه العلاقات ما تسمى متباينات *(Inequalites)* ومنها ما يسمى بالمعادلات *(Equations)* وهي علاقات التساوي. فأية علاقة تساوي بين فئة من المتغيرات تسمى معادلة. هذه المعادلات تحتوي على كائنات رياضية نشطة مثل الدوال *(Functions)*، الفئات *(Sets)*، وغيرها من الكائنات الرياضية.

في هذا الباب ندرس المعادلات الجبرية أي المعادلات التي تخضع لعمليات الجبر العادية من جمع *(Addition)* وطرح وضرب *(Multiplication)* وقسمة *(Division)*. والمعادلة الجبرية عادة ما تعطى بحيث يكون طرفها الأيمن مساوياً للصفر، والأيسر يتكون من المعاملات *(Coefficients)* وقوى المتغير x المختلفة. وللمعادلة الجبرية توجد درجة *(Degree)* كما توجد لها جذور *(Roots)* على عكس دالة كثيرة الحدود الجبرية والتي يوجد لها درجة وأصفار *(Zeros)*.

2.1 المعادلة الجبرية من الدرجة النونية

لنعتبر دالة كثيرة الحدود الجبرية *(Polynomial Function)*

$y = P(x)$ من الدرجة n في المتغير x والتي تأخذ الشكل

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad ; \quad a_n \neq 0 \qquad (2.1)$$

والتي يمكن كتابتها ــ أيضاً ــ في الشكل

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x^{n-k}; \quad a_n \neq 0 \qquad (2.2)$$

حيث $n \geq 0$ عدد صحيح موجب. المعاملات $\{a_k\}_{k=0}^{n}$ وعددها $n+1$ هي كميات حقيقية أو مركبه وتسمى معاملات كثيرة الحدود. إذا كانت $P(x) = 0$ فإن (2.1) تصبح معادلة جبرية من الدرجة n وتأخذ الصورة

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (2.3)$$

هذا، وتعرف درجة كثيرة الحدود على أنها أكبر أس *(Exponent)* أو أعلى قوة *(Power)* للمتغير x. المعادلة (2.3) تمتلك عدد n من الجذور وهي عبارة عن قيم المتغير x والتي تحقق المعادلة (2.3) كما سنرى.

هذا، وتتساوى كثيرتي الحدود $P_1(x), P_2(x)$ ــ مثلاً ــ إذا كانت معاملات قوى x المناظرة في كل منهما متساوية.

تعريف 2.1 **قسمة كثيرات الحدود**

إذا كانت $P(x)$ كثيرة حدود من الدرجة n في المتغير x وكانت $Q(x)$ كثيرة حدود من الدرجة m، وكان $m<n$ فإنه يمكن قسمة $P(x)$ على $Q(x)$ بحيث يكون

$$P(x)=Q(x)H(x)+R(x) \tag{2.4}$$

حيث $H(x)$ كثيرة حدود من الدرجة $(n-m)$ و $R(x)$ كثيرة حدود من درجة أقل من $(n-m)$ تسمى "الباقي".

▲▲▲

مثال 2.1 أوجد باقي قسمة كثيرة الحدود $P(x)=x^3+4x+4$ على كثيرة الحدود $Q(x)=x+1$.

الحل بالقسمة العادية نحصل على

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-x+5 \\
\hline
x+1 & x^3+4x+4 \\
 & \underline{-x^3-x^2} \\
 & -x^2+4x+4 \\
 & \underline{+x^2+x} \\
 & 5x+4 \\
 & \underline{-5x-5} \\
 & -1=R(x)
\end{array}
$$

إذن $H(x)=x^2-x+5,\ R(x)=-1$

وبالتالي فإن $P(x)=(x+1)(x^2-x+5)-1$

نظرية 2.1 نظرية الباقي Remainder Theorem

الباقي الذي نحصل عليه بقسمة كثيرة الحدود $P(x)$ علـــى العامل *(Cofactor)* $(x-r)$ هو كثيرة الحدود $P(r)$.

البرهان

بما أن كثيرة الحدود $P(x)$ يمكن وضعها في الصورة:

$$P(x)=(x-r)H(x)+R \qquad (2.5)$$

إذن وبوضع $x=r$ في الطرفين نحصل على $P(r)=R$.

ملاحظة

إذا كان باقي القسمة صفراً ، أي إذا كان $R=0$ ، إذن فإن $P(r)=0$.

ويكون $x-r$ عندئذ أحد عوامل كثيرة الحدود $P(x)$ وبالتـــالي يكون r جذراً للمعادلة $P(x)=0$.

تعريف 2.2 أصفار كثيرات الحدود

فئة جميع قيم x التي تجعل كثيرة الحدود $P(x)$ مساوية للصفر

تسمى أصفار *(Zeros)* كثيرة الحدود $P(x)$ أو تسمى جذور *(Roots)* المعادلة $P(x)=0$.

▲▲▲

مثال 2.2 باستخدام نظرية الباقي أوجد باقي قسمة كثيرة الحدود $P(x)=x^3+5x-3$ على العامل $x+1$.

الحل في هذه الحالة فإن $r=-1$ وبالتالي فإن

$$P(r)=P(-1)=(-1)^3+5(-1)-3=-9$$

إذن الباقي هو $R=-9$.

نظرية 2.2 القسمة التركيبية Synthetic Division

عند قسمة كثيرة الحدود المعطاة في (2.1) على $(x-r)$ يكون ناتج القسمة هو كثيرة الحدود $H_{n-1}(x)$ والباقي هو $R(x)$، أي أن

$$P_n(x)=(x-r)H_{n-1}(x)+R(x) \qquad (2.6)$$

✪✪✪

والآن كيف !!

كيف يمكن لنا معرفة كل من الدالتين $H_{n-1}(x),R(x)$؟

بما أن $H_{n-1}(x)$ كثيرة حدود من الدرجة $n-1$ إذن نفرض أن

$$H_{n-1}(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_0 \qquad (2.7)$$

ويكون المطلوب هو إيجاد المعاملات b_j لكل $j=\overline{0,n-1}$ علاوة على حساب الباقي R والـــذي يمكـــن حـــسابه مـــن العلاقـــة $R=P(r)$. بالتعويض في (2.1) من العلاقات (2.7) ,(2.6) نحصل على

$$\begin{aligned}
&a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \\
&= (x-r)\left(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_0\right) + R \\
&\quad = b_{n-1}x^n + \left(b_{n-2} - rb_{n-1}\right)x^{n-1} + \\
&\quad + \left(b_{n-3} - rb_{n-2}\right)x^{n-2} + \cdots + \left(R - rb_0\right)
\end{aligned}$$

وبمساواة معاملات قوى x في الطرفين نجد أن

$$b_{n-1} = a_n,\ \left(b_{n-2} - rb_{n-1}\right) = a_{n-1}, \ldots,\ \left(R - rb_0\right) = a_0$$

أو

$$b_{n-1} = a_n\ ,\ b_{n-2} = a_{n-1} + rb_{n-1}, \ldots, R = a_0 + rb_0$$

وهكذا نرى من العلاقات السابقة أنه يمكن الحصول علـــى كـــل المعاملات b_j لكل $j=\overline{0,n-1}$. على أية حال نجـــد أنـــه مـــن الأسهل حساب هذه المعاملات لعملية القسمة التركيبية هذه عـــن طريق التركسية الآتية:

$$r\left(\begin{array}{llll} a_n & a_{n-1} & a_{n-2}\,, & \ldots + a_0 \\ & rb_{n-1} & + rb_{n-2}, \ldots & + rb_0 \\ \hline \multicolumn{4}{l}{b_{n-1} = a_n, b_{n-2} = a_{n-1} + rb_{n-1}, \ldots, (a_0 + rb_0) = R} \end{array}\right.$$

مثال 2.3 باستخدام القسمة التركيبية أوجد خارج وباقي قسمة $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x - 5$ على $x - 3$

الحل نكون الجدول الآتي

$$3\left(\begin{array}{rrrrr} 3 & -2 & 5 & 1 & -5 \\ & 9 & 21 & 78 & 237 \\ \hline 3 & 7 & 26 & 79 & 232 \end{array}\right.$$

إذن خارج القسمة هو $H(x) = 3x^3 + 7x^2 + 26x + 79$ أما الباقي فهو $R = 232$.

نظرية 2.3 **النظرية الأساسية لعلم الجبر**

إذا كانت $P(x)$ دالة كثيرة حدود من الدرجة n، حيث $n \geq 1$. وكانت معاملاتها حقيقية أو مركبة، إذن يوجد عـــدد n مقـــدار حقيقي أو مركب r بحيث يكون $P(r) = 0$.

✪✪✪

تفسير النظرية

يمكن تفسير النظرية في اتجاهين الأول بالنسبة إلي كثيرة الحدود، والثاني يختص بالمعادلة الجبرية.

[1] إذا كانت $P(x)$ كثيرة حدود من درجة $n > 0$، وكانت معاملاتها حقيقية أو مركبة، فإنه يمكن وضعها في صورة حاصل ضرب عدد n عامل من الدرجة الأولى في الصورة الرياضية

$$P(x) = \alpha(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n) \qquad (2.8)$$

حيث $\alpha \neq 0$ هو أي ثابت. ومعنى هذا أن عدد أصفار كثيرة الحدود من درجة n هو العدد n نفسه.

[2] المعادلة $P(x) = 0$ التي من الدرجة n والتي جذورها هي الأعداد $r_1, r_2, \cdots, r_n$ يمكن كتابتها على الصورة الرياضية

$$\alpha(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n) = 0 \qquad (2.9)$$

حيث $\alpha \neq 0$ أي ثابت.

ملاحظة

ليس من الضروري أن تكون أصفار كثيرة الحدود $P_n(x)$ مختلفة، فمثلاً كثيرة الحدود

$$P(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$$

لها ثلاثة أصفار هي $1, -1, 2$. أما كثيرة الحدود

$$P(x) = x^3 = (x - 0)(x - 0)(x - 0)$$

فلها أيضا ثلاثة أصفار كلها متساوية وكل منها يساوى الصفر.

وكثيرة الحدود

$$P(x)=(x-2)(x+1)^3$$

لها أربعة أصفار هي $-1,-1,-1,2$. ثلاثة منها متساوية هي -1 والرابع هو العدد 2.

مثال 2.4 أوجد المعادلة التي من الدرجة الرابعة والتي جذورها هي:

الجذر $\frac{1}{5}$، والجذران المركبان $1\pm i$ ، والجذر 3 (مكرر مرتين).

الحل باستخدام نتيجة (2.9)، نكون المعادلة المطلوبة على الصورة الرياضية

$$\alpha\left(x-\tfrac{1}{5}\right)(x-3)^2\left(x-(1+i)\right)\left(x-(1-i)\right)=0$$

نأخذ $\alpha=5$ فتحصل على

$$(5x-1)(x-3)^2\left(x^2-2x+2\right)=0$$

نظرية 2.4

النظريات الآتية كلها صحيحة ويمكن إثباتها بسهولة

[1] إذا كانت $P(x)$ كثيرة حدود ذات معاملات حقيقة وكان c عدداً مركباً، وكان مرافقه هو العدد $\overline{c}$ فإن

$$P(\overline{c})=\overline{P(c)} \tag{2.10}$$

[2] إذا كانت $P(x)=0$ معادلة كثيرة حدود ذات معاملات حقيقة وكان العدد المركب $c=a+ib$، حيث $b\neq 0$ جذراً لها فإن مرافقه $\bar{c}=a-ib$ هو أيضاً جذراً للمعادلة.

[3] إذا كانت $P(x)=0$ هي معادلة كثيرة حدود من الدرجة n ذات معاملات حقيقة، وكان n عدداً فردياً فإن $P(x)=0$ لها على الأقل جذر واحد حقيقي.

✪✪✪

مثال 2.5 إذا علمت أن $1+2i$ هو أحد جذور المعادلة

$$x^4-5x^3+13x^2-19x+10=0$$

أوجد بقية الجذور.

الحل بما أن المعادلة المعطاة ذات معاملات حقيقية وأحد جذورها هو العدد لمركب $1+2i$. إذن فإن مرافقه $1-2i$ هو أيضاً جذر للمعادلة. إذن يمكن الحصول على الجذرين الآخربن باستخدام القسمة التركيبية. بما أن

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -5 & 13 & -19 & 10 \\
1+2i & & 1+2i & -8-6i & 17+4i & -10 \\
\hline
 & 1 & -4+2i & 5-6i & -2+4i & 0 \\
1-2i & & 1-2i & -3+6i & 2-4i & \\
\hline
 & 1 & -3 & 2 & 0 &
\end{array}$$

إذن فإن المعادلة المطلوبة هي

$$\left(x-(1+2i)\right)\left(x-(1-2i)\right)\left(x^2-3x+2\right)=0$$

أو

$$\left(x-(1+2i)\right)\left(x-(1-2i)\right)(x-1)(x-2)=0$$

وتكون الجذور الأربعة للمعادلة المعطاة هي $1+2i,\ 1-2i,\ 1,\ 2$.

تعريف 2.3 **العدد الكسري والعدد غير الكسري**

يسمى العدد الحقيقي r عدداً كسرياً *(Rational)* إذا أمكن وضعه على الصورة $r=\frac{a}{b}$ حيث a,b أعداداً صحيحة بدون عوامل مشتركة. وفي حالة عدم إمكانية وضع العدد r في هذه الصورة فإنه يسمى عدداً غير كسري *(Irrational)*. فمثلاً $0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ 5$ هي أعداد كسرية أما $\sqrt{5},\ \sqrt{2}$ فهي أعداد غير كسرية.

▲▲▲

نظرية 2.5 **بخصوص الجذور الصماء**

إذا كان $a+\sqrt{b}$ حيث $\sqrt{b}$ عدد غير كسري جذراً لمعادلة كثيرة الحدود $P(x)=0$ ، فإن $a-\sqrt{b}$ يعتبر أيضاً جذراً للمعادلة.

✪✪✪

مثال 2.6 كون المعادلة ذات المعاملات الحقيقية الصحيحة والتي بعض

جذورها هي الأعداد $1+\sqrt{3}$ ، $1, \frac{1}{2}$، بشرط أن تكون درجتها أقل ما يمكن.

الحل باستخدام نظرية (2.5) فإن المعادلة المطلوبة يمكن وضعها على الصورة الرياضية

$$a_0(x-1)\left(x-\tfrac{1}{2}\right)\left(x-\left(1+\sqrt{3}\right)\right)\left(x-\left(1-\sqrt{3}\right)\right)=0$$

نأخذ $a_0 = 2$ ، فنحصل على

$$(x-1)(2x-1)\left(x^2-2x-2\right)=0$$

أو

$$2x^4-7x^3+11x^2-8x+2=0$$

نظرية 2.6 بخصوص مقلوب الجذر

الشرط الكافي والضروري لكي يكون مقلوب أي جذر للمعادلة

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$$

هو أيضاً جذر هو : $a=e\ ,\ b=d$

✪✪✪

مثال 2.7 أوجد جذور المعادلة $12x^4+4x^3+-41x^2+4x+12=0$

الحل يمكن وضع هذه المعادلة على الصورة

$$12\left(x^4+1\right)+4\left(x^3+x\right)-41x^2=0$$

بالقسمة على x^2 نحصل على

$$12\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-41=0$$

إذا وضعنا $y=x+\frac{1}{x}$ ، فإن $y^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$ وبالتالي فــإن

$y^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$ ونحصل على

$$12\left(y^2-2\right)+4y-41=0$$

و بالتحليل نجد أن

$$(6y-13)(2y+5)=0$$

وهكذا نجد أن

$$6y-13=0 \text{ or } (2y+5)=0$$

إذن

$$6y-13=0 \Rightarrow 6\left(x+\frac{1}{x}\right)-13=0$$

أو

$$6x+\frac{6}{x}-13=0 \Rightarrow 6x^2-13x+6=0$$

وباستخدام قانون حل معادلة الدرجة الثانية نجد أن

$$x=\frac{3}{2} \text{ or } x=\frac{2}{3}$$

أيضاً نجد أن

$$2y+5=0 \Rightarrow 2\left(x+\frac{1}{x}\right)+5=0$$

$$(2x+1)(x+2)=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \text{ or } x=-2$$

إذن الجذور الأربعة هي $\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, 2$.

✍.

2.2 العلاقة بين جذور ومعاملات المعادلة الجبرية

لقد اكتشف العلماء أن هناك علاقة وطيدة بين معاملات أية معادلة جبرية وجذورها. ويمكن القول أن الخواص النوعية لأية معادلة تكمن بالدرجة الأولى في معاملاتها. لنتأمل المعادلة الجبرية من الدرجة الثالثة ذات الأربعة معاملات $\{a_k\}_{k=0}^{3}$ والتي جذورها r_1, r_2, r_3. هذه المعادلة يمكن يمكن وضعها في الشكل

$$(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)=0$$

بالضرب والفك تتحول إلى الصورة

$$x^3-(r_1+r_2+r_3)x^2+(r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3)x-r_1r_2r_3=0$$

وبتأمل المعادلة الأخيرة نجد أن الجذور الثلاثة مختبأة في ثلاثة معاملات فنجد على سبيل المثال أن معامل x^2 هو سالب حاصل جمع الثلاثة جذور.

للنظر أيضاً إلى المعادلة من الدرجة الرابعة والتي جذورها r_1, r_2, r_3, r_4 والتي يمكن وضعها في الشكل

$$(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)(x-r_4)=0$$

أو في الشكل

$$\begin{aligned} &x^4-(r_1+r_2+r_3+r_4)x^3+\\ &+(r_1r_2+r_1r_4+r_1r_3+r_2r_3+r_2r_4+r_3r_4)x^2\\ &-(r_1r_2r_3+r_1r_2r_4+r_1r_3r_4+r_2r_3r_4)x+r_1r_2r_3r_4=0 \end{aligned}$$

لنرى العلاقة بين الجذور الأربعة والمعاملات. بصفة عامه يمكن الوصول إلى النظرية التالية

نظرية 2.7 **عن العلاقة بين الجذور والمعاملات**

إذا كانت الفئة $\{r_i\}_{i=1}^{n}$ تكون جذور المعادلة الجبرية من الدرجة n المعطاة في (2.3) فإن العلاقة بين فئة الجذور $\{r_i\}_{i=1}^{n}$ وفئة المعاملات $\{a_k\}_{k=0}^{n}$ نجدها في المعادلات

$$\sum_{i=1}^{n} r_i=-\frac{a_{n-1}}{a_n},\ \sum_{\substack{i=1\\j=1\\i\neq j}}^{n} r_ir_j=\frac{a_{n-2}}{a_n},\ \cdots\ ,\prod_{i=1}^{n} r_i=(-1)^n\frac{a_0}{a_n} \qquad (2.11)$$

✪✪✪

البرهان

المعادلة (2.3) يمكن وضعهافي الصورة

$$x^n-\left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right)x^{n-1}+\left(\sum_{\substack{i=1\\ j=1\\ i\neq j}}^{n} r_i r_j\right)x^{n-2}-\left(\sum_{i\neq j\neq k}^{n} r_i r_j r_k\right)x^{n-3}+\cdots+(-1)^n\prod_{i=1}^{n} r_i=0 \qquad (2.12)$$

بقسمة المعادلة رقم (2.3) على a_n نحصل على

$$x^n+\frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1}+\frac{a_{n-2}}{a_n}x^{n-2}+\cdots+\frac{a_0}{a_n}=0\ ;\ a_n\neq 0 \qquad (2.13)$$

وبمقارنة المعادلتين (2.13) ,(2.12)، نحصل على المعادلات (2.11).

✍.

مثال توضيحي

نفرض معادلة الدرجة الثالثة

$$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$$

والتي جذورها هي r_1, r_2, r_3. نجد أن مجموع الجذور هو

$$\sum_{i=1}^{3} r_i=r_1+r_2+r_3=-\frac{a_{n-1}}{a_n}=-\frac{a_2}{a_3}$$

أما حاصل ضرب الجذور هو

$$\prod_{i=1}^{3} r_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \Rightarrow r_1\ r_2\ r_3 = -\frac{a_0}{a_3}$$

أيضاً نجد أن

$$\sum_{i \neq j}^{3} r_i r_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

ملاحظة هامة

العلاقات بين الجذور و المعاملات لا تكفي بمفردها لإيجاد جذور المعادلة ولكنها تساعد في إيجاد الجذور متى توفرت بعض المعلومات الإضافية.

مثال 2.8 أوجد جذور المعادلة $x^3 - 3x^2 - 6x + 18 = 0$ إذا علمت أن مجموع جذرين من جذورها يساوى صفراً.

الحل نفرض أن جذور المعادلة هي r_1, r_2, r_3. بما أن

$$\sum_{i=1}^{3} r_i = r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{a_1}{a_0} = \frac{3}{1} = 3$$

وحيث أن $r_1 + r_2 = 0$، إذن $r_3 = 3$. وباستخدام القسمة التركيبية نجد أن

$$3\left(\begin{array}{cccc} 1 & -3 & -6 & 18 \\ & 3 & 0 & -18 \\ \hline 1 & 0 & -6 & (\ 0 \end{array}\right.$$

إذن المعادلة المعطاة يمكن وضعها في الصورة

$$(x-3)\left(x^2-6\right)=0$$

و بالتحليل نحصل على

$$(x-3)\left(x-\sqrt{6}\right)\left(x+\sqrt{6}\right)=0$$

إذن الجذور االثلاثة للمعادلة المعطاة هي $3, \sqrt{6}, -\sqrt{6}$.

2.3 الجذور المكررة

الجذور تكون عالم فسيح فتوجد الجذور الحقيقة وتوجد الجذور المركبة، توجد الجذور الصحيحة كما توجد الجذور الكسرية، توجد الجذور وتوجد مقلوباها، توجد الجذور غير المتشابهة، كما توجد الجذور المتشابهه أو المكررة. المهم أنه لا توجد معادلة جبرية بلا جذور مطلقاً فلكل معادلة جذورها الخاصة بها حتى ولو كانت الجذور تخيلية. بالنسبة للجذور المكررة لدينا النظرية التالية:

نظرية 2.8 **بخصوص الجذور المكررة**

إذا كان r هو جذراً مكرراً عدد k من المرات للمعادلة $P(x)=0$ والتي من الدرجة n، فإن

[1] كثيرة الحدود $P(x)$ تقبل القسمة بدون باقي على $(x-r)^k$، أي أن

$$P(x)=(x-r)^k Q(x) \tag{2.14}$$

حيث $Q(x)$ هي كثيرة حدود من درجة $(n-k)$.

[2] الجذر r المكرر k من المرات للمعادلة $P(x)=0$ يكون مكرراً عدد $(k-1)$ مرة للمعادلة $P'(x)=0$، حيث $P'(x)$ هي المشتقة الأولى للدالة $P(x)$.

✪✪✪

مثال 2.9 أوجد جذور المعادلة $x^4+3x^3-6x^2-28x-24=0$ إذا علمت أن لها جذراً مكرراً ثلاث مرات.

الحل نفرض أن الجذر المكرر ثلاث مرات هو r_1 وبذلك تكون الجذور الأربعة هي r_1, r_1, r_1, r_2.

وطبقاً للنظرية (2.8) إذا كان r_1 مكرر ثلاث مرات للمعادلة $P(x)=0$، فإنه يكون مكرر مرتين للمعادلة $P'(x)=0$، ويكون جذر بسيط (جذر واحد) للمعادلة $P''(x)=0$. بما أن

$$P'(x)=4x^3+9x^2-12x-28$$

إذن

$$P''(x)=12x^2+18x-12$$

وبالتالي فإن

$$P''(x)=0 \Rightarrow (2x-1)(x+2)=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \text{ or } x=-2$$

ولمعرفة أي من هذين الجذرين هو جذراً للمعادلة الأصلية نعــوض بالقيمتين $-2, \frac{1}{2}$ في المعادلة الأصلية فمن يحققها يكون جذراً لهــا ويستحقها. إذن $x=-2$ هو جذراً للمعادلة أما $x=\frac{1}{2}$ فهو ليس جذراً لأنه لا يحقق المعادلة الأصلية . إذن الجذر المكرر هو $x=-2$.

ولإيجاد r_2 نستخدم العلاقة

$$\sum_{i=1}^{4} r_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \Rightarrow (-2)+(-2)+(-2)+r_2 = -3$$

إذن $r_2 = 3$ وتكون الجذور الأربعة هي $-2,-2,-2, 3$.

✍.

2.4 الجذور الكسرية Rational Roots

أحياناً تكون الجذور على شكل كسر على شكل بسط ومقام. فهل في ذلك من الدلالات أو العلاقات التي تربط الجــذور الكــسرية بمعاملات المعادلو الجبرية. هذا ما سوف تجيب عنه النظرية التالية.

نظرية 2.9

إذا كانت معاملات المعادلة

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \; ; a_n \neq 0$$

أعداداً صحيحة وكان أحد جذورها هو العدد الكسري $\frac{p}{q}$، فــإن p هو أحد عوامل a_0 بينما q هو أحد عوامل a_n.

✪✪✪

البرهان

لنفرض أن $\frac{p}{q}$ هو أحد جذور المعادلة

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \; ; \; a_n \neq 0$$

إذن فهو يحققها. بوضع $x = \frac{p}{q}$ في المعادلة السابقة نحصل على

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$$

بنقل الحد الأخير إلي الطرف الأيمن نحصل على

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{p}{q} = -a_0$$

بضرب الطرفين في q^n وأخذ p عامل مشترك نجد أن

$$p\left(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \cdots + a_1 q^{n-1}\right) = -a_0 q^n$$

حيث أن كل الأعداد الموجودة داخل القوسين هي أعداد صحيحة، إذن p هو عامل للمقدار $a_0 q^n$ وبالتالي يكون عامل للمعامل a_0، حيث أنه ليس عاملاً للعدد q. بالمثل يمكن إثبات أن q هو عامل للمعامل a_n.

نتيجة

أي جذر كسري للمعادلة التي على الصورة

$$x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

والتي جميع معاملاتها أعداداً صحيحة حيث $a_n = 1$، يكون عاملاً للعدد a_0، وذلك لأنه إذا كان $\frac{p}{q}$ جذراً للمعادلة وكان $a_n = 1$،

فحسب النظرية (2.8)، فإن q يكون عاملاً للعدد a_n، وبالتالي فإن $q=\pm 1$ ويصبح الجذر على الصورة $\frac{p}{\pm 1}$ أو ببساطة $\pm p$.

مثال 2.10 أوجد الجذور الكسرية ثم جميع جذور المعادلة

$$3x^3+2x^2-3x-2=0$$

الحل الجذور الكسرية لهذه المعادلة تكون على الصورة $\frac{p}{q}$، حيث q عامل للعدد $a_n=3$ بينما p عامل للعدد $a_0=2$ وبالتالي فإن

$$q=\pm 1 \text{ or } q=\pm 3, \quad p=\pm 1 \text{ or } p=\pm 2$$

إذن الجذور المتوقعة على الشكل $\frac{p}{q}$ هي

$$\pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}$$

نستخدم الآن طريقة التجربة والخطأ *(Trial and error)* لمعرفة أي هذه الأعداد تعتبر جذوراً كسرية ولنبدأ بالعدد 1. باستخدام القسمة التركيبية نجد أن

$$1\left(\begin{array}{cccc} 3 & 2 & -3 & -2 \\ & 3 & 5 & 2 \\ \hline 3 & 5 & 2 & 0=p(1) \end{array}\right.$$

إذن العدد 1 هو أحد الجذور والجذران الباقيان هما جذرا المعادلة $3x^2+5x+2=0$ التي من الدرجة الثانية. بما أن

$$3x^2+5x+2=0 \Rightarrow (3x+2)(x+1)=0$$

إذن جذرا هذه المعادلة هما $x=-1,\ x=-\frac{2}{3}$ وبالتالي فالجذور الثلاثة للمعادلة المعطاة هي $1,-1,-\frac{2}{3}$.

2.5 الطرق التقريبية لإيجاد الجذور

الطرق السابقة لإيجاد الجذور تساعد في الحصول على الجذور المضبوطة *(Exact)* للمعادلة الجبرية. وعندما لا نستطيع الحصول على الجذور المضبوطة فإننا نحاول الحصول على الجذور التقريبية *(Approximate)* أي تلك التي تقترب *(Close to)* من الجذور المضبوطة. وهناك الكثير من الطرق التي تساعد في الحصول على الجذور التقريبية نقدم منها الطريقتين التاليتين.

الطريقة البيانية

وهذه الطريقة تعتمد على تقسيم المعادلة بطريقة تسمح بالحصول منها على دالتين، ثم نرسم منحني كل من التين فيكون الجذر هو الإحداثي السيني لنقطة تقاطعهما.

نظرية 2.10

الطريقية البيانية لإيجاد الجذور

إذا كانت $P(x)=0$ معادلة كثيرة حدود بحيث يمكن كتابتها على الصورة الرياضية $f(x)=g(x)$ ، فإن نقط تقاطع منحنى الدالة $y=f(x)$ مع منحنى الدالة $y=g(x)$ تكون جذور للمعادلة $P(x)=0$.

✪✪✪

البرهان

لنفرض أن إحدى نقط تقاطع المنحنيين $y=g(x), y=f(x)$ هي (x_0, y_0). إذن فالنقطة (x_0, y_0) تحقق كلاً من المعادلتين

$$y=g(x) \ \& \ y=f(x)$$

إذن فإن

$$y_0=g(x_0) \quad \& \quad y_0=f(x_0)$$

وعلى ذلك فإن $g(x_0)=f(x_0)$. ومنها نجد أن $p(x_0)=0$.

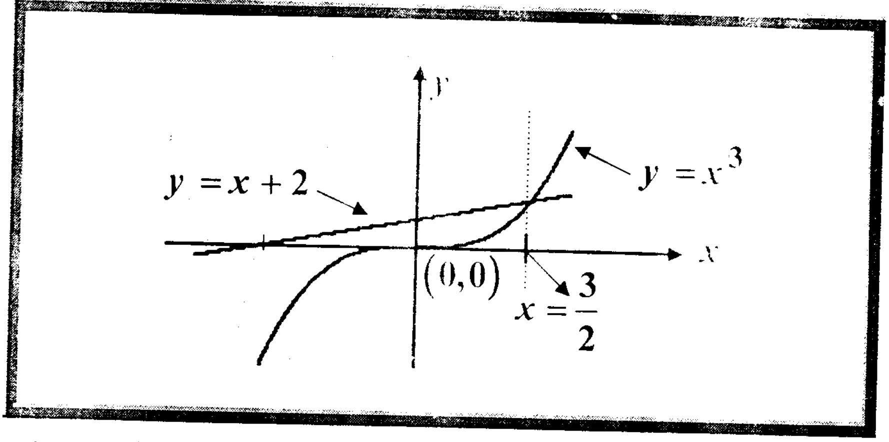
لاحظ أن $p(x)=f(x)-g(x)$. وتكون الجذور الحقيقية للمعادلة هي الإحداثيات السينية لنقط التقاطع.

مثال 2.11 أوجد الجذور الحقيقية للمعادلة $x^3-x-2=0$.

الحل هذه المعادلة يمكن أن تأخذ الصورة $x^3=x+2$. نرسم منحنى

كل من الدالتين $y = x + 2$ ، $y = x^3$ كما في شكل (2.1).

شكل 2.1



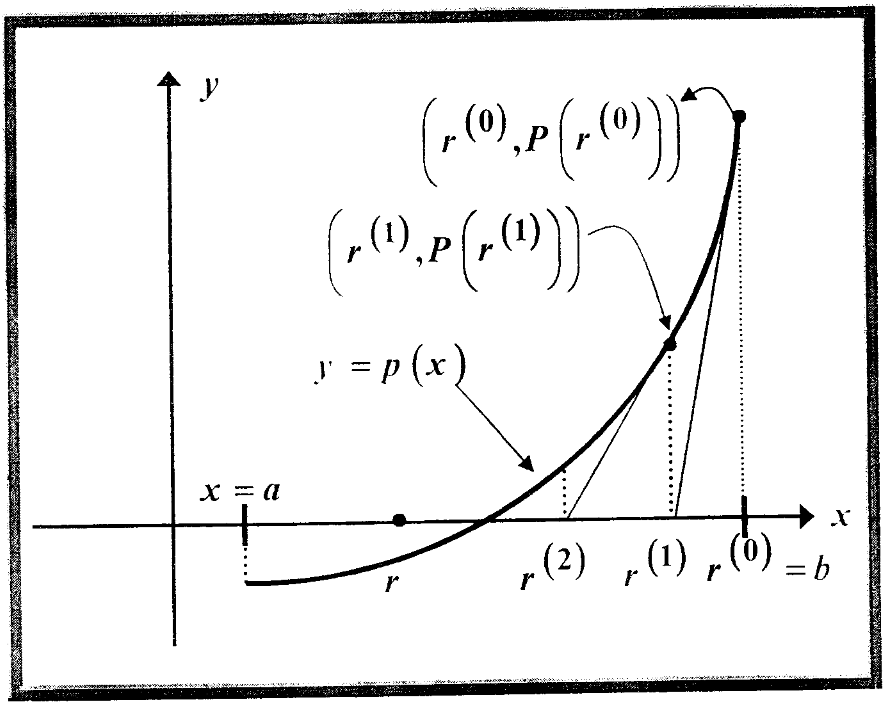
نرى من الرسم أن المنحنيين يتقاطعان في نقطة واحدة، الإحـــداثي السيني لها هو $x = \frac{3}{2}$ وعلى ذلك فللمعادلة المعطاة جذراً حقيقيـــاً واحداً هو $x = \frac{3}{2}$. و حيث أن دقة الرسم تؤدى إلي دقـــة قيمـــة الجذر، إذن فمن الأفضل أن نقول أن الجذر يقع بين العددين 2 ,1.

✍.

طريقة نيوتن

لتعتبر أن $P(x)$ هي دالة كثيرة حدود متصلة على الفترة المغلقـــة $[a,b]$، بحيث يكون $f(b) > 0, f(a) < 0$. ولنفرض أن r هـــو أحد جذور المعادلة $P(x) = 0$ بحيث يكون $a < r < b$. انظر شكل (2.2).

شكل 2.2



لقد افترضنا أن الجذر الذي نبحث عنه هو أي عدد محصور بين العددين a,b فإذا أخذ الجذر أياً من القيمتين a,b أمكن اعتبار هذه القيمة بمثابة قيمة تقديرية (تقريبية للجذر) يرمز لها بالرمز $r^{(0)}$ وتسمى التقريب الصفري للجذر. لنفرض ــ مثلاً ــ أن

$$r^{(0)}=b$$

ثم نرسم مماس لمنحنى الدالة $P(x)$ عند النقطة $\left(r^{(0)},P\left(r^{(0)}\right)\right)$ فيكون الإحداثي السيني ــ يرمز له في هذه الحالة بالرمز $r^{(1)}$ ويسمى التقريب الأول ــ لنقطة تقاطع المماس مع محور ــ x ــ أقرب إلي الجذر r أكثر من قرب $r^{(0)}$ ، ولذلك نأخذ $r^{(1)}$ بمثابة

التقريب الأول. وبما أن المشتقة الأولى للدالة $P(x)$ عند النقطة $r^{(0)}$ ما هي إلا ميل المماس عند النقطة $r^{(0)}$. انظر شكل (2.2). إذن فإن

$$P'\left(r^{(0)}\right)=\frac{P\left(r^{(0)}\right)}{r^{(0)}-r^{(1)}}$$

أو

$$r^{(1)}=r^{(0)}-\frac{P\left(r^{(0)}\right)}{P'\left(r^{(0)}\right)}$$

وبالاستمرار في محاولة تحسين الجذر ليقترب من القيمة الفعلية باستخدام نفس التكنيك يمكن الحصول على التقريب الثاني $r^{(2)}$ وذلك برسم مماس للدالة $P(x)$ عند النقطة $\left(r^{(1)},P\left(r^{(1)}\right)\right)$ فتكون نقطة التقاطع مع محور x هي $r^{(2)}$ وهي بالتأكيد أقرب إلي الجذر r من كل من $r^{(1)},r^{(0)}$. ونستمر في هذه الطريقة حتى نحصل على التقريب الثالث ثم الرابع ولا نتوقف حتى نحصل على التقريب المناسب لقيمة الجذر r إلي أي درجة مطلوبة من الدقة. وبصفة عامة، فإن

$$r^{(n)}=r^{(n-1)}-\frac{P\left(r^{(n-1)}\right)}{P'\left(r^{(n-1)}\right)}$$

ملاحظات

عند تطبيق طريقة نيوتن يجب مراعاة الآتي :

[1] عدم وجود نهايات عظمى أو صغرى أو نقط انقلاب في الفترة $[a,b]$ وذلك حتى لا تكون $r^{(1)}$ أكثر بعداً عن r من $r^{(0)}$ ولذلك يجب أن لا تتغير إشارة كل من $P'(x), P''(x)$ في الفترة $]a,b[$.

[2] من الأفضل اختيار التقريب الصفري عند النقطة التي تكون عندها إشارتا كل من $P(x), P''(x)$ متشابهتين.

مثال 2.12 استخدم طريقة نيوتن لإيجاد أصغر الجذور الموجبة للمعادلة

$$x^3-4x+2=0$$

حتى ثلاثة أرقام عشرية.

الحل بما أن $P(x)=x^3-4x+2$ ، إذن $P(1)=-1, P(0)=2$

إذن يوجد على الأقل جذراً واحداً r، حيث $r\in]0,1[$. أيضاً بما أن

$$P'(x)=3x^2-4 \Rightarrow P''(x)=6x$$

نكون الجدول:

المشتقة الثانية	المشتقة الأولى	الفترة
$P''(x)=6x>0$	$P'(x)=3x^2-4<0$	$]0,1[$

أي أن إشارة كل من $P''(x),P'(x)$ لا تتغير في الفترة $]0,1[$ وبالتالي لا توجد نقط قيم عظمى أو صغرى محلية ولا توجد نقط انقلاب داخل الفترة $]0,1[$. إذن يمكن تطبيق طريقة نيوتن. نختار العدد الذي يجعل إشارة $P(x)$ مثل إشارة $P''(x)$ وذلك لسرعة الاقتراب من الجذر الحقيقي. بما أن

$$P(0)=2,P''(0)=0$$

إذن نختار $r^{(0)}=0$ ويكون التقريب الأول هو

$$r^{(1)}=r^{(0)}-\frac{P\left(r^{(0)}\right)}{P'\left(r^{(0)}\right)}=0-\frac{P(0)}{P'(0)}=-\frac{2}{-4}=0.5$$

التقريب الثاني هو

$$r^{(2)}=0.5-\frac{P(0.5)}{P'(0.5)}\approx 0.54$$

التقريب الثالث هو

$$r^{(3)}=0.54-\frac{P(0.54)}{P'(0.54)}\approx 0.54082$$

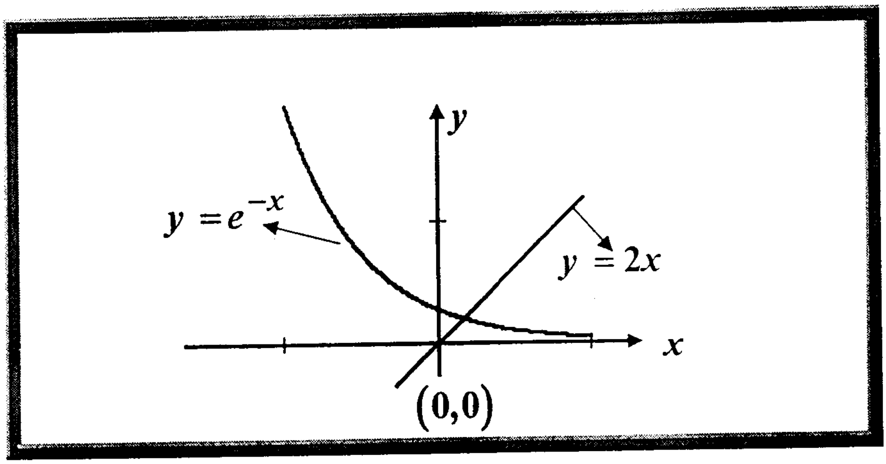
إذن أصغر الجذور لثلاثة أرقام عشرية هو 0.541.

مثال 2.13 استخدم طريقة نيوتن للحصول على جذور المعادلة

$$2x - e^{-x} = 0$$

الحل نرسم منحنى كل من الدالتين $y = e^{-x}$, $y = 2x$ فنجد من الرسم أنه يوجد جذر واحد حقيقي في الفترة $]0,1[$. انظر شكل (2.3).

شكل 2.3



نضع

$$P(x) = 2x - e^{-x}$$

إذن

$$P'(x) = 2 + e^{-x} \Rightarrow P''(x) = -e^{-x}$$

نكون الجدول:

المشتقة الثانية	المشتقة الأولى	الفترة

$]0,1[$	$P'(x)=2+e^{-x}>0$	$P''(x)=-e^{-x}<0$

إذن نجد أن إشارة كل من $P''(x), P'(x)$ لا تتغير في الفترة $]0,1[$. أيضاً، بما أن إشارة كل من $P(0.3),\ P''(0.3)$ سالبة في الفترة $]0,1[$ ، إذن نختار العدد **0.3** على أنه التقريب الصفري.

ويكون التقريب الأول هو

$$r^{(1)}=r^{(0)}-\frac{P\left(r^{(0)}\right)}{P'\left(r^{(0)}\right)}=0.3-\frac{P(0.3)}{P'(0.3)}\approx 0.351$$

التقريب الثاني هو

$$r^{(2)}=0.351-\frac{P(0.351)}{P'(0.351)}\approx 0.352$$

ونستمر في التقريب حتى يثبت ثالث رقم عشري.

2.6 مسائل

[1] بين أن $P(x)=x^4+4x^3+6x^2-8$ تقبل القسمة على $x+2$.

[2] حل المعادلة $x^3-3x^2-6x+8=0$ إذا علم أن جذورها تكون متوالية عددية.

[3] أوجد الكميات $\sum_{i=1}^{4} r_i^2, \sum_{i\neq j}^{4} r_i^2 r_j$ إذا كانت r_1, r_2, r_3, r_4 هي جذور المعادلة $x^4 - 6x^3 + 8x + 12 = 0$.

[4] إذا كانت r_1, r_2, r_3 هي جذور المعادلة $x^3 + px + q = 0$ أوجد بدلالة المعاملات كل من $\sum_{i=1}^{4} r_i^4, \sum_{i=1}^{4} r_i^3, \sum_{i=1}^{3} r_i^2$.

[5] أوجد الجذور الكسرية، ومن ثم أوجد بقية الجذور لكل من المعادلتين

$$x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 24x - 28 = 0$$

$$3x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 8x + 4 = 0$$

[6] أوجد بيانياً الجذور الحقيقية للمعادلات الآتية

$$x^2 - x - 2 = 0, \; x - 2\sin(x) = 0, \; x^3 - 4x + 4 = 0$$

[7] استخدم طريقة نيوتن لإيجاد جذر واحد لكل من المعادلات الآتية

$$x - 2\sin(x) = 0, \quad \ln(x) = 2 - x, \; x^3 - 2x - 1 = 0$$

****