

القيم المميزة والمتجهات المميزة للمصفوفة EIGENVALUES AND EIGENVECTORS OF A MATRIX

كل شيء مادي قي هذا الكون له قيمة جبرية فأى جسم مادي له أبعاد مثل الطول والعرض والارتفاع، الكتلة، الحجم، .. ولكل هذه الأبعاد توجد قيم جبرية. فماذا عن القيم المميزة التي نحن بصددھا في هذا الباب.

نعلم من دراستنا السابقة أن المصفوفة تُعرف على أنها ترتيب معين من العناصر على شكل صفوف و أعمدة، وعلى هذا، فإنه لا يوجد لأية مصفوفة كانت أية قيمة جبرية (*Algebraic value*).

على العكس من هذا، فإن محدد (*Determinant*) أية مصفوفة مربعة له قيمة جبرية واحدة. فمثلاً إذا كانت A هي المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{فإن محدد المصفوفة } A \text{ ويرمز له بالرمز } |A| \text{ له}$$

$$\text{القيمة الجبرية } -10، \text{ أي أن } |A| = \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -10 \text{ أما المصفوفة}$$

A نفسها فليس لها أية قيم جبرية.

ولكن يبقى السؤال التقليدي .. هل يمكن لنا معرفة قيمة المصفوفة نفسها وهي التي تعرف على أنها مجرد ترتيب معين من الأشياء ليس إلا ؟ بمعنى آخر هل يمكن أن نعين قيمة للترتيب (لمصفوفة)؟ كيف نستطيع تميز المصفوفة عن غيرها من المصفوفات الأخرى التي تتشابه

معها في الرتبة (order) المرتبة (rank) وفي صفات أخرى؟ وهناك الكثير والكثير من التساؤلات سنحاول الإجابة عنها في هذا الباب.

4.1 القيم المميزة والمتجهات المميزة للمصفوفة

دعنا نبدأ المحاولة لتحديد القيمة المميزة للمصفوفة المربعة A من الرتبة $n \times n$. لنفرض مثلاً أننا ضربنا المصفوفة A من جهة اليمين في مصفوفة العمود B من الرتبة $n \times 1$ فكان حاصل الضرب هو λB حيث λ هو أي عدد حقيقي أو مركب.

وبلغة الرياضيات إذا فرضنا أن $AB = \lambda B$ فهل هذا يعني أن λ يمكن اعتبارها قيمة مساوية للمصفوفة A ؟ في الواقع أن الإجابة عن هذا السؤال هي بكل تأكيد نعم وفي هذه الحالة فإن القيمة λ تسمى قيمة مميزة (Eigenvalue) للمصفوفة إذ أنها ليست قيمة جبرية. أما مصفوفة العمود B فتسمى المتجه المميز (Eigenvector) المقابل للقيمة المميزة λ . لتوضيح هذه الفكرة لنحاول تعيين هذه

القيمة λ ، للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ مثلاً. بضرب المصفوفة A

من جهة اليمين في المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$ حيث $\alpha \neq 0$ ، نجد أن

$$AB = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\alpha \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = 2B \quad (4.1)$$

أيضا بضرب المصفوفة A من جهة اليمين في المصفوفة

$$C = \begin{bmatrix} -7\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \text{ حيث } \alpha \neq 0, \text{ نجد أن}$$

$$AC = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35\alpha \\ -7\alpha + 2\alpha \end{bmatrix} = -5 \begin{bmatrix} -7\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = -5C \quad (4.2)$$

من المعادلة رقم (4.1) نجد أن قيمة المصفوفة A هي 2 ومن المعادلة

(4.2) نجد أن قيمة المصفوفة A هي -5، الأمر الذي يعني أن

للمصفوفة A والتي من الرتبة 2×2 توجد قيمتين هما -5، 2.

أيضا نجد أنه يوجد متجهين مميزين الأول هو $\begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$ ويقابل القيمة

المميزة $\lambda = 2$ والثاني $\begin{bmatrix} -7\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$ في مقابل القيمة المميزة $\lambda = -5$.

نلاحظ أيضا أن هذه المتجهات المميزة تعتمد على البارامتر

الاختياري (Arbitrary) α ، وعلى هذا فإن كل متجه مميز هو في

الواقع فضاء لانهائي من المتجهات المميزة.

القيمة المميزة - eigenvalue

تعريف 4.1

تُعرف القيمة المميزة للمصفوفة المربعة A من الرتبة $n \times n$ على أنها

تلك القيمة الحقيقية أو المركبة λ والتي تحقق المعادلة $AX = \lambda X$

حيث X هي مصفوفة العمود من الرتبة $n \times 1$ المقابلة للقيمة المميزة λ .

المتجه المميز - eigenvector

تعريف 4.2

يُعرف المتجه المميز X للمصفوفة المربعة A من الرتبة $n \times n$ على أنه مصفوفة العمود من الرتبة $n \times 1$ المقابلة للقيمة الحقيقية أو المركبة λ والتي تحقق المعادلة $AX = \lambda X$.

هل من طريقة لحساب القيم المميزة للمصفوفة وكذلك المتجهات المميزة المقابلة لهذه القيم المميزة؟ وما الذي يجب حسابه أولاً القيم المميزة أم المتجهات المميزة؟

والآن

وهل كل مصفوفة لها قيم مميزة؟ وما هو عدد القيم المميزة في حالة وجودها وكم هو العدد المقابل من المتجهات المميزة؟ وهل المتجه المميز المقابل لقيمة مميزة واحدة هو أيضاً وحيد أم أن هناك فضاء لانهائي من المتجهات المميزة في مقابل كل قيمة مميزة واحدة؟
للإجابة عن هذه التساؤلات دعنا نبدأ باستخدام التعريف السابق في إثبات النظرية الآتية.

نظرية - 4.1

شرط وجود القيم المميزة

إذا كانت A هي المصفوفة $A = [a_{ij}] ; i, j = \overline{1, n}$ فإن λ هي قيمة مميزة للمصفوفة A إذا كان وفقط إذا كان $|\lambda I_n - A| = 0$.
والعكس صحيح، فإذا كانت λ هي قيمة مميزة للمصفوفة A فإن أي حل غير صفري ($nontrivial$ solution)، X ، للنظام المتجانس $(\lambda I_n - A)X = O$ هو متجه مميز مقابل للقيمة المميزة λ .



لنفرض أن λ هي قيمة مميزة للمصفوفة $A = [a_{ij}]$ حيث $i, j = \overline{1, n}$ ، وأن X هو المتجه المميز المقابل لهذه القيمة المميزة.

البرهان

هذا يعني أن $AX = \lambda X$ ، إذن $(\lambda I_n - A)X = O$ حيث I_n هي مصفوفة الوحدة من الرتبة $n \times n$ ، بينما O هي مصفوفة صفرية. ومن المعروف أن هذا النظام المتجانس من المعادلات الجبرية له حل غير صفري ($Nontrivial$ Solution)، X ، فقط إذا كانت المصفوفة $(\lambda I_n - A)$ شاذة، أي إذا كان

$$|\lambda I_n - A| = 0$$

وهذه معادلة كثيرة حدود من الدرجة n في λ وهي تسمى المعادلة المميزة ($Eigen$ Equation) للمصفوفة A . حل أو جذور هذه

المعادلة وعدددهم n هي القيم المميزة $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$. وبما أن جذور هذه المعادلة يمكن أن تكون حقيقية أو تخيلية، لذا فإن القيم المميزة للمصفوفة يمكن اعتبارها كميات قياسية (*scalars*).

والآن نحاول إثبات عكس النظرية. نفرض أن $|\lambda I_n - A| = 0$ ، هذا يعني أن المصفوفة $(\lambda I_n - A)$ شاذة (*singular*) وعلى هذا فإنه يوجد حل غير صفري X ، لنظام المعادلات المتجانس $AX = \lambda X$ أو $(\lambda I_n - A)X = 0$. إذن فإن λ هي قيمة مميزة للمصفوفة A كما أن X هو المتجه المميز المقابل لهذه القيمة المميزة λ .

كـ

4.2 طريقة حساب القيم المميزة والمتجهات المميزة

للحصول على القيم المميزة $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ للمصفوفة $A = [a_{ij}]$ حيث $i, j = \overline{1, n}$ يتم فك المحدد $|\lambda I_n - A| = 0$ أو

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

فنحصل على معادلة كثيرة حدود من الدرجة n في λ . بحل هذه المعادلة نحصل على عدد n من القيم المميزة $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$.

وبما أنه في مقابل كل قيمة مميزة λ_i يوجد متجه مميز، X_i ، بحيث يكون $AX_i = \lambda_i X_i$ لكل $i = \overline{1, n}$. إذن للحصول على المتجه المميز X_i المقابل للقيمة المميزة λ_i علينا بحل نظام المعادلات الجبرية الخطية المتجانس

$$(\lambda_i I_n - A)X_i = O \quad \forall \quad i = \overline{1, n}$$

وبما أن المصفوفة $(\lambda_i I_n - A)$ شاذة (Singular) حسب التعريف فمن المعروف إذن أن حل هذا النظام ليس متجهاً مميزاً واحداً X_i بل هو فضاء من المتجهات المميزة، الأمر الذي يعني أنه في مقابل كل قيمة مميزة λ_i يوجد عدد لا نهائي من المتجهات المميزة X_i .

مثال 4.1 أوجد القيم والمتجهات المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل المصفوفة A مربعة من الرتبة الثانية، أي أن $n = 2$ إذن توجد قيمتين مميزتين. المعادلة المميزة هي

$$|\lambda I_2 - A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -4 \\ 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0$$

إذن القيم المميزة هي

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 3$$

للحصول على المتجهات المميزة في مقابل $\lambda_1 = -1$ نوجد حل

$$\text{النظام } (\lambda_1 I_n - A)X_1 = 0 \text{ أو}$$

$$\left(-1 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أي النظام

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وباستخدام طريقة جاوس جوردان نجد أن حل النظام السابق يكافئ

حل النظام

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حيث $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ هي المصفوفة المختزلة للمصفوفة $\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ من

هذا النظام نرى أن x_2 هو متغير تابع (*dependent variable*)

بينما x_1 هو متغير مستقل (*independent variable*)، نفرض أن

$x_1 = \alpha$ ، حيث $\alpha \neq 0$ تأخذ قيمة اختيارية ما عدا الصفر. إذن وبما

أن

$$0x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

إذن فإن

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \alpha \neq 0$$

واضح أن المتجه المميز X_1 ما هو إلا فضاء لانهائي من المتجهات المميزة، وذلك لأن α تأخذ قيماً إختيارية ما عدا الصفر. يسمى المتجه المميز الاساسي (Fundamental Eigenvector) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

لفضاء المتجهات المميزة X_1 .

للحصول على المتجهات المميزة المقابلة للقيمة المميزة $\lambda_2 = 3$

$$(\lambda_2 I_n - A) X_2 = O \text{ نوجد حل النظام}$$

أو

$$\left(3 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

إذن المطلوب هو حل النظام

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أو حل النظام

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حيث $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ هي المصفوفة المختزلة للمصفوفة $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. من

هذا النظام نرى أن x_1 هو متغير تابع (dependent variable)

بينما x_2 هو متغير مستقل (independent variable)، لنفرض أن

حيث $x_2 = \beta$ ، $\beta \neq 0$ تأخذ قيمةً اختيارية ما عدا الصفر. إذن

$$x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \beta$$

وبما أن

$$X_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} ; \beta \neq 0$$

واضح أن المتجه المميز X_2 ما هو الا فضاء لانهائي من المتجهات المميزة، وذلك لأن β تأخذ قيمةً اختيارية ما عدا الصفر. يسمى

المتجه المميز الاساسي (Fundamental Eigenvector) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

لفراغ المتجهات المميزة X_2 .

كـ.

مثال 4.2 أوجد القيم والمتجهات المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

الحل المصفوفة المعطاه مربعة من الرتبة الثالثة، أي أن $n = 3$ ، إذن توجد

ثلاث قيم مميزة. المعادلة المميزة هي

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 = 0$$

إذن القيم المميزة هي $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1$. للحصول على

المتجهات المميزة $X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ في مقابل $\lambda_1 = -1$ نوجد حل

النظام $(\lambda_1 I_3 - A)X_1 = 0$ أي النظام

$$\left(-1 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أو

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وباستخدام طريقة جاوس - جوردان فإن حل هذا النظام يكافئ حل

النظام

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حيث نجد هنا أن x_1, x_2 هما متغيران تابعاان بينما x_3 هو متغير

مستقل، لنفرض أن $x_3 = \alpha$ ، حيث $\alpha \neq 0$ تأخذ قيماً اختيارية ما

عدا الصفر. إذن وبما أن

$$x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$0x_1 + x_2 + 0x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

إذن فإن

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \alpha \neq 0$$

واضح أن المتجه المميز X_1 ما هو إلا فضاء لانهائي من المتجهات المميزة، وذلك لأن α تأخذ قيمة اختيارية ما عدا الصفر. المتجهة

المميز $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ يسمى المتجه الأساسي لفضاء المتجهات المميزة X_1 .

للحصول على المتجهات المميزة المقابلة للقيمة المميزة $\lambda_2 = 1$

نوجد حل النظام $(\lambda_2 I_3 - A)X_2 = 0$ أي النظام

$$\left(1 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أو النظام

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وباستخدام طريقة جاوس - جوردان لحل هذا النظام المتجانس من المعادلات الخطية الجبرية، يكون المطلوب هو حل النظام

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

والذي نحصل منه على

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 &= 0 \Rightarrow x_2 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 &= 0 \Rightarrow x_3 = 0 \end{aligned}$$

وبالتالي فإن

$$X_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \beta \neq 0$$

واضح أن المتجه المميز X_2 ما هو إلا فضاء لانهائي من المتجهات المميزة، وذلك لأن β تأخذ قيمة اختيارية ما عدا الصفر. يسمى

المتجه $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ المتجه المميز الاساسي لفراغ المتجهات المميزة X_2 .

المتجهات المميزة المقابلة للقيمة المميزة $\lambda_3 = 1$ هي نفسها المتجهات المميزة المقابلة للقيمة المميزة $\lambda_2 = 1$ ، حيث أن هذه القيمة المميزة مكررة مرتين، إذن

$$X_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \beta \neq 0$$

ويكون أن المتجه المميز X_3 ما هو الا فضاء لانهائي من المتجهات المميزة، وذلك لأن β تأخذ قيمة اختيارية ما عدا الصفر.

كـهـ.

4.3 تحويل المصفوفة المربعة إلى مصفوفة قطرية DIAGONALIZATION

في البداية سوف نقدم تعريف لنوع هام جداً من المصفوفات يسمى المصفوفة القطرية (*diagonal matrix*)، فنتعرف على بعض خصائصها ثم ندرس كيفية تحويل أية مصفوفة مربعة إلى مصفوفة قطرية.

المصفوفة القطرية - eigenvalue

تعريف 4.2

يقال للمصفوفة المربعة $D = [d_{ij}]$ من الرتبة $n \times n$ انها مصفوفة قطرية إذا كانت كل عناصرها (*entries*) أصفار ما عدا عناصر القطر الرئيسي (*Main Diagonal*)، حيث يوجد على الأقل عنصر واحد غير صفري ضمن عناصر القطر الرئيسي.



وبلغة الرياضيات فإن المصفوفة $D = [d_{ij}]$ هي مصفوفة قطرية إذا
كان $d_{ij} = 0$ لكل $i \neq j$. على ذلك فإذا كانت $D = [d_{ij}]$
مصفوفة قطرية فإنها تأخذ الشكل

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_{nn} \end{bmatrix}$$

خصائص المصفوفة
القطرية

[1] حاصل ضرب أي مصفوفتين قطريتين هو أيضا مصفوفة قطرية.
فإذا كانت $D = [d_{ij}]$, $H = [h_{ij}]$ مصفوفتان قطريتين، إذن فإن

$$\begin{aligned} DH &= \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & h_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d_{11}h_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22}h_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_{nn}h_{nn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

[2] قيمة محدد المصفوفة القطرية يساوي حاصل ضرب عناصر قطرها الرئيسي (Main Diagonal). فمثلاً

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 10 = 20$$

[3] إذا كانت عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة القطرية كلها أصفار، ففي هذه الحالة تسمى بالمصفوفة الصفيرية. أما إذا كان يوجد عنصر صفري واحد على الأقل ضمن عناصر القطر الرئيسي فإن المصفوفة القطرية في هذه الحالة تصبح مصفوفة شاذة (singular matrix)، وذلك لأنه في هذه الحالة محددتها (حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي) تكون مساوية للصفر.

[4] إذا كانت $D = [d_{ij}]$ مصفوفة قطرية فإن معكوسها هو $D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_{ij}} \end{bmatrix}$ أي أن

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_{22}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{d_{nn}} \end{bmatrix}$$

[5] القيم المميزة لأية مصفوفة قطرية هي في الواقع عبارة عن عناصر القطر الرئيسي. على سبيل المثال فإن القيم المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \text{ هي}$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 10$$

السؤال المطروح الآن هو هل يمكن لأي مصفوفة أن تتحول إلى مصفوفة قطرية؟ هل توجد شروط لذلك؟ وكيف يتم تحويل المصفوفة إلى الشكل القطري؟ الإجابة عن هذه التساؤلات تقدمها النظريات الآتية.

تحويل المصفوفة إلى قطرية

نظرية - 4.2

لتكن A أية مصفوفة مربعة من الرتبة $n \times n$. لنفرض أن $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ هي القيم المميزة لهذه المصفوفة. لنفرض أن المتجهات المميزة المقابلة لهذه القيم المميزة هي $\{X_i\}_{i=1}^n$ وهي جميعها من الرتبة $n \times 1$. ولنفرض أيضا أن P هي المصفوفة التي تتكون من عدد n من الأعمدة، كل عمود فيها هو أحد المتجهات المميزة. إذا فإن المصفوفة A تكون قابلة لأن تكون قطرية ($diagonalizable$)،

إذا كانت فقط إذا كانت المتجهات المميزة $\{X_i\}_{i=1}^n$ مستقلة خطياً (Linearly Independent) بحيث يكون

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

☆☆☆

شرط أن تكون المتجهات المميزة
مستقلة خطياً

نظرية - 4.3

لتكن A أية مصفوفة مربعة من الرتبة $n \times n$. إذا كانت القيم المميزة $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ لهذه المصفوفة كلها مختلفة (Distinct) وغير مكررة، فإن المتجهات المميزة $\{X_i\}_{i=1}^n$ المقابلة لهذه القيم المميزة وهي جميعها من الرتبة $n \times 1$ تكون مستقلة خطياً.

☆☆☆

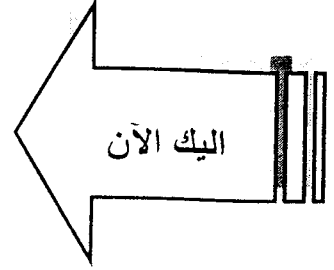
شرط أن تكون المصفوفة
قابلة لأن تكون قطرية

نظرية - 4.4

إذا كانت القيم المميزة $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ لأية مصفوفة مربعة A من الرتبة $n \times n$ كلها مختلفة (Distinct) وغير مكررة، فإن المصفوفة A تكون قابلة لأن تكون مصفوفة قطرية.

☆☆☆

ثلاثة أمثلة، حيث تجد في المثال الأول القيم المميزة كلها مختلفة وغير مكررة، وطبقاً لنظرية (4.4) فإن المصفوفة تكون قابلة لأن تكون مصفوفة قطرية.



أيضاً فإن المصفوفة P هي مصفوفة غير شاذة حيث أن المتجهات المميزة التي تكونها تكون كلها مستقلة خطياً.

في المثال الثاني توجد قيم مميزة مكررة، وطبقاً لنظرية (4.2) فإن المصفوفة تكون قابلة لأن تكون مصفوفة قطرية إذا أمكن الحصول على المتجهات المميزة التي تكون المصفوفة P بحيث تكون هذه المتجهات كلها مستقلة خطياً وبذلك تكون P مصفوفة غير شاذة.

في المثال الثالث المصفوفة المعطاه غير قابلة لأن تكون مصفوفة قطرية.

مثال 4.3 بين ما إذا كانت المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 12 & -11 & 12 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

قابلة لأن تكون قطرية، فإذا كانت قابلة للقطرية فاوجد المصفوفة غير الشاذة P والتي تحولها إلى مصفوفة قطرية.

الحل [1] بالنسبة للمصفوفة A ، نوجد أولاً القيم المميزة، فإذا كانت كلها مختلفة فحسب نظرية (4.4) فإن المصفوفة A تكون قابلة للقطرية. فإذا وجدت بعض القيم المميزة المكررة فنحاول أن نوجد المتجهات المميزة المقابلة لهذه القيم المميزة بحيث تكون مستقلة خطياً وعلى ذلك وباستخدام نظرية (4.2) نوجد المصفوفة P التي تحول المصفوفة A إلى مصفوفة قطرية. المعادلة المميزة هي

$$\begin{vmatrix} \lambda - 5 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -3 \\ 0 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda + 2)(\lambda - 5) = 0$$

إذن القيم المميزة هي $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 5$ وهى جميعها مختلفة، إذن المصفوفة A يمكن تحويلها إلى مصفوفة قطرية. نوجد أولاً المصفوفة P . المتجهات المميزة في مقابل $\lambda_1 = 0$ هي X_1 ،

حيث $(\lambda_1 I_3 - A)X_1 = 0$ أو

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

باستخدام طريقة جاوس جوردان نجد أن

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \alpha \neq 0$$

بنفس الطريقة فانه في مقابل $\lambda_2 = -2$ المتجهات المميزة هي X_2 حيث

$$X_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} ; \delta = 2\beta \neq 0$$

وفي مقابل $\lambda_3 = 5$ نجد أن المتجهات المميزة هي X_3 ، حيث

$$(\lambda_3 I_3 - A) X_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بإعادة ترتيب معادلات النظام نحصل على

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بحل هذا النظام نحصل على

$$X_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \gamma \neq 0$$

هكذا يمكن تكوين المصفوفة P ، بحيث يكون العمود الأول هو X_1 والعمود الثاني هو X_2 والعمود الثالث هو X_3 . إذن

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

المصفوفة العكسية للمصفوفة P هي

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -0.2 & 1.0 & 1.5 \\ 0.0 & 0.0 & 0.5 \\ 0.2 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

وهكذا نجد أن المصفوفة P تحول المصفوفة A إلى مصفوفة قطرية
عناصر قطرها الرئيسي هي نفسها القيم المميزة لها، حيث يمكنك
التأكد من أن

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{bmatrix} -0.2 & 1.0 & 1.5 \\ 0.0 & 0.0 & 0.5 \\ 0.2 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

إذا رتبنا المصفوفة P بحيث يكون العمود الثاني

X_3 وليس X_2 ، بمعنى أنه إذا كانت

ملاحظة

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

فإننا نحصل على المصفوفة القطرية في الشكل

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

أي أن كل قيمة مميزة من عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة القطرية $P^{-1}AP$ تكون مقابلة للعمود الذي يمثل المتجه المميز المقابل لها في المصفوفة P على الترتيب.

[2] بالنسبة للمصفوفة B ، فإن المعادلة المميزة هي

$$\begin{vmatrix} \lambda - 5 & 4 & -4 \\ -12 & \lambda + 11 & -12 \\ -4 & 4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 3 = 0$$

إذن القيم المميزة هي

$$\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 1; \lambda_3 = -3$$

حيث نجد أن القيم المميزة ليست كلها مختلفة إذ أنه توجد قيمة مكررة مرتين. المتجهات المميزة في مقابل $\lambda_1 = 1$ هي X_1 والتي

تحقق المعادلة المصفوفية $(\lambda_1 I_3 - B)X_1 = 0$ أو

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 & -4 \\ -12 & 12 & -12 \\ -4 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

باستخدام طريقة جاوس جوردان ، حيث تستبدل مصفوفة
المعاملات بالمصفوفة المختزلة، نجد أن النظام يتحول إلى

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

من هذا النظام نجد أن

$$x_2 = \alpha, x_3 = \beta; \alpha, \beta - \text{scalars}$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

بينما

$$x_1 = x_2 - x_3 = \alpha - \beta$$

إذن

وعندئذ فإن

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} ; \alpha, \beta \neq 0$$

بالتأكيد فإنه في مقابل $\lambda_2 = 1$ فإن المتجهات المميزة هي نفسها
 X_1 ، حيث نجد أن

$$X_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} ; \alpha, \beta \neq 0$$

وفي مقابل $\lambda_3 = 3$ نجد أن المتجهات المميزة هي X_3 ، حيث تحقق

$$X_3 \text{ المعادلة المصفوفية } (\lambda_3 I_3 - B)X_3 = 0 \text{ أو}$$

$$\begin{bmatrix} -8 & 4 & -4 \\ -12 & 8 & -12 \\ -4 & 4 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وباستخدام طريقة جاوس جوردان، حيث تستبدل مصفوفة المعاملات بالمصفوفة المختزلة، نجد أن النظام يتحول إلى

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

من هذا النظام نجد أن $x_3 = \gamma$ بينما

$$x_1 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_3 = \gamma$$

أيضا فإن

$$x_2 - 3x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 3x_3 = 3\gamma$$

إذن

$$\mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} ; \gamma \neq 0$$

الآن لكي نكون المصفوفة P بحيث تكون مصفوفة غير شاذة (Nonsingular) أو بكلمات أخرى لكي تكون المتجهات المميزة X_1, X_2, X_3 مستقلة خطياً، و بما أن α, β هي كميات اختيارية

(Arbitrary). إذن نختار $\alpha = 1$, $\beta = 3$ فنحصل على المتجه X_1

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{في الشكل}$$

وإذا وضعنا $\alpha = 1$, $\beta = 0$ فنحصل على X_2 في الشكل

$$X_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{وبما أن المتجه المميز الاساسي } X_3 \text{ هو}$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{إذن نستطيع الآن أن نكون المصفوفة } P \text{ غير}$$

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{الشاذة في الشكل حيث يمكنك التأكد أن}$$

$$\begin{aligned} P^{-1}BP &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{8}{3} & \frac{-5}{3} & \frac{7}{3} \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 12 & -11 & 12 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

[3] المعادلة المميزة للمصفوفة C هي

$$|\lambda I_3 - C| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = 0$$

أو $(\lambda + 2)^2(\lambda - 1) = 0$ وبالتالي فإن القيم المميزة هي $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -2$ إذن المتجهات المميزة في

مقابل $\lambda_1 = 1$ هي X_1 ، حيث $(\lambda_1 I_3 - C)X_1 = 0$ أو

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

إذن

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \alpha \neq 0$$

في مقابل $\lambda_2 = -2$ فإن المتجهات المميزة هي X_2 التي تحقق المعادلة $(\lambda_2 I_3 - C)X_2 = 0$ وباستخدام طريقة جاكوس —

جوردان يكون المطلوب حل النظام

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حيث نحصل على

$$X_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \beta \neq 0$$

أيضاً في مقابل القيمة المميزة $\lambda_3 = 5$ نجد أن المتجهات المميزة هي X_3 ، حيث $(\lambda_3 I_3 - C)X_3 = O$ إذن وبدون تفصيلات نجد أن

$$X_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \beta \neq 0$$

هكذا نجد أنه مهما أعطيت β قيمة اختيارية ماعدا الصفر لتكوين فضاء لانهائي من المتجهات المميزة تظل المتجهات المميزة X_2, X_3 مرتبطة ببعضها خطأً أو ليست مستقلة خطياً، الأمر الذي يعني عدم امكانية تكوين المصفوفة P ، وذلك لأنها ستكون في هذه الحالة مصفوفة شاذة، وإذا كانت المصفوفة P شاذة فإنها لا تستطيع تحويل المصفوفة C إلى مصفوفة قطرية. إذن المصفوفة C غير قابلة لأن تكون مصفوفة قطرية أو أنها (Non-Diagonalizable).

4.4 حل نظم المعادلات التفاضلية العادية

سنحاول الآن استخدام المفاهيم السابقة مثل القيم المميزة، المتجهات المميزة، وذلك في حل نظم المعادلات التفاضلية العادية في حالة

قابلية مصفوفة المعاملات في نظام المعادلات التفاضلية لأن تكون مصفوفة قطرية. المثال الآتي يوضح هذه الفكرة.

مثال 4.4 أوجد حل نظام المعادلات التفاضلية

$$y_1' = -y_1 + 4y_2$$

$$y_2' = 3y_2$$

الحل نضع النظام في الشكل المصفوفي $Y' = AY$ ، حيث

$$Y' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ويكون المطلوب الآن هو إيجاد مصفوفة العمود. المعادلة المميزة

للمصفوفة A ، هي $|\lambda I_2 - A| = 0$ ، أو

$$\begin{vmatrix} \lambda + 1 & -4 \\ 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0$$

إذن القيم المميزة للمصفوفة A هي $\lambda_1 = -1$ ، $\lambda_2 = 3$. المتجهات المميزة المقابلة هي

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وبما أن المتجهات المميزة كلها مختلفة، إذن فهي مستقلة خطياً والمصفوفة A يمكن أن تتحول إلى مصفوفة قطرية بواسطة المصفوفة

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{، حيث نجد أنها}$$

الآن نفرض أن

$$Y = P Z \Rightarrow Y' = P Z'; \quad Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}; \quad Z' = \begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{bmatrix}$$

إذن بالتعويض في النظام الأصلي $Y' = AY$ نحصل على المعادلات المصفوفية

$$P Z' = A P Z \Rightarrow Z' = P^{-1} A P Z$$

وبما أن

$$P^{-1} A P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

إذن فإن

$$\begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z_1 \\ 3z_2 \end{bmatrix}$$

$$z'_1 = -z_1, \quad z'_2 = 3z_2 \quad \text{هذا يعني أن}$$

وهذه معادلات تفاضلية عادية من الرتبة الاولى يمكن حلها بفصل

المتغيرات وإجراء عملية التكامل لنحصل على

$$z'_1 = -z_1 \Rightarrow \frac{dz_1}{z_1} = -dt \Rightarrow \ln(z_1) = -t + C \Rightarrow z_1 = C_1 e^{-t}$$

$$z'_2 = 3z_2 \Rightarrow \frac{dz_2}{z_2} = 3dt \Rightarrow \ln(z_2) = 3t + C \Rightarrow z_2 = C_2 e^{3t}$$

حيث C_1, C_2 ثوابت اختيارية. في شكل مصفوفي، يمكن الحصول

على المصفوفة Z في الشكل

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{-t} \\ C_2 e^{3t} \end{bmatrix}$$

وبما أن المطلوب هو إيجاد المصفوفة Y ، حيث $Y = PZ$ ، إذن

$$Y = PZ = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 e^{-t} \\ C_2 e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} \\ C_2 e^{3t} \end{bmatrix}$$

إذن الحل العام للنظام المعطى هو

$$y_1 = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}, y_2 = C_2 e^{3t}$$

✍

مثال 4.5 اوجد حل نظام المعادلات التفاضلية

$$y_1' = y_1 - y_2 + 2y_3$$

$$y_2' = 3y_1 + 4y_3$$

$$y_3' = 2y_1 + y_2$$

الحل نضع النظام في الشكل المصفوفي $Y' = AY$ ، حيث

$$Y' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ويكون المطلوب الآن هو إيجاد مصفوفة العمود. المعادلة المميزة

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -2 \\ -3 & \lambda & -4 \\ -2 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ أو } |\lambda I_3 - A| = 0 \text{ هي للمصفوفة } A$$

أي أن

$$(\lambda-1)[\lambda^2 - 4] - [-3\lambda - 8] - 2[3 + 2\lambda] = 0$$

إذن القيم المميزة للمصفوفة A هي

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \frac{(-1 - \sqrt{13})}{2}, \lambda_3 = \frac{(-1 + \sqrt{13})}{2}$$

المتجهات المميزة المقابلة هي

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; X_2 = \begin{bmatrix} -5 - \sqrt{13} \\ -2\sqrt{13} \\ 7 + \sqrt{13} \end{bmatrix}, X_3 = \begin{bmatrix} -5 + \sqrt{13} \\ 2\sqrt{13} \\ 7 - \sqrt{13} \end{bmatrix}$$

وبما أن المتجهات المميزة كلها مختلفة، إذن فهي مستقلة خطياً
والمصفوفة A يمكن أن تتحول إلى مصفوفة قطرية بواسطة المصفوفة
P، حيث نجد أنها

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -5 - \sqrt{13} & -5 + \sqrt{13} \\ 2 & -2\sqrt{13} & 2\sqrt{13} \\ 1 & 7 + \sqrt{13} & 7 - \sqrt{13} \end{bmatrix}$$

الآن نفرض أن

$$Y = PZ \Rightarrow Y' = PZ'; Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}; Z' = \begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ z'_3 \end{bmatrix}$$

إذن بالتعويض في النظام الأصلي $Y' = AY$ نحصل على الأنظمة

$$P Z' = A P Z \Rightarrow Z' = P^{-1} A P Z$$

وبما أن

$$P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(-1 - \sqrt{13})}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(-1 + \sqrt{13})}{2} \end{bmatrix}$$

إذن فإن

$$\begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ z'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(-1 - \sqrt{13})}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(-1 + \sqrt{13})}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2z_1 \\ \frac{(-1 - \sqrt{13})}{2} z_2 \\ \frac{(-1 + \sqrt{13})}{2} z_3 \end{bmatrix}$$

هذا يعني أن

$$z'_1 = 2z_1, z'_2 = \frac{(-1 - \sqrt{13})}{2} z_2, z'_3 = \frac{(-1 + \sqrt{13})}{2} z_3$$

وهذه معادلات تفاضلية عادية من الرتبة الاولى يمكن حلها بفصل

المتغيرات وإجراء عملية التكامل لنحصل على

$$z'_1 = 2z_1 \Rightarrow z_1 = a e^{2t}$$

$$z_2' = \frac{(-1 - \sqrt{13})}{2} z_2 \Rightarrow z_2 = b e^{\frac{(-1 - \sqrt{13})}{2} t}$$

$$z_3' = \frac{(-1 + \sqrt{13})}{2} z_3 \Rightarrow z_3 = c e^{\frac{(-1 + \sqrt{13})}{2} t}$$

حيث a, b, c ثوابت اختيارية. في شكل مصفوفي، يمكن الحصول على المصفوفة Z في الشكل

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a e^{2t} \\ b e^{\frac{(-1 - \sqrt{13})}{2} t} \\ c e^{\frac{(-1 + \sqrt{13})}{2} t} \end{bmatrix}$$

وبما أن المطلوب هو إيجاد المصفوفة Y ، حيث $Y = PZ$ ، إذن

$$Y = PZ = \begin{bmatrix} 0 & -5 - \sqrt{13} & -5 + \sqrt{13} \\ 2 & -2\sqrt{13} & 2\sqrt{13} \\ 1 & 7 + \sqrt{13} & 7 - \sqrt{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a e^{2t} \\ b e^{\frac{(-1 - \sqrt{13})}{2} t} \\ c e^{\frac{(-1 + \sqrt{13})}{2} t} \end{bmatrix}$$

إذن الحل العام للنظام المعطى هو

$$\begin{aligned}
 y_1 &= (-5 - \sqrt{13})be \frac{(-1 - \sqrt{13})}{2}t + (-5 + \sqrt{13})ce \frac{(-1 + \sqrt{13})}{2}t \\
 y_2 &= 2ae^{2t} - 2\sqrt{13}be \frac{(-1 - \sqrt{13})}{2}t + 2\sqrt{13}ce \frac{(-1 + \sqrt{13})}{2}t ; \\
 y_3 &= ae^{2t} + (7 + \sqrt{13})be \frac{(-1 - \sqrt{13})}{2}t + (7 - \sqrt{13})ce \frac{(-1 + \sqrt{13})}{2}t
 \end{aligned}$$

✍

4.5 مسائل

(1) أوجد القيم المميزة والمتجهات المميزة للمصفوفات الآتية

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$
---	---	--	--

$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 9 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
---	--	---

(2) بين ما إذا كانت المصفوفات الآتية قابلة لأن تكون مصفوفات قطرية (Diagonalizable)، فإذا كانت كذلك فأوجد المصفوفة غير الشاذة P والتي تحولها إلى مصفوفة قطرية.

$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
---	---	---	--

$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(2) أوجد حلول نظم المعادلات التفاضلية الخطية باستخدام مفاهيم

القيم المميزة والمتجهات المميزة

$y_1' = -4y_1 + 3y_2$ $y_2' = 2y_1 - 3y_2$	$y_1' = 5y_1 - 4y_2 + 4y_3$ $y_2' = 12y_1 - 11y_2 + 12y_3$ $y_3' = 4y_1 - 4y_2 + 5y_3$
$y_1' = 5y_1 - y_2$ $y_2' = -2y_2$ $y_3' = 8y_1 + 7y_2$	$y_1' = y_2 + y_3$ $y_2' = 2y_1 - 3y_3$ $y_3' = y_1 + y_2$
$y_1' = 5y_2 - y_3$ $y_2' = -2y_3$ $y_3' = 8y_1 + 7y_2$	$y_1' = 2y_2 + y_3$ $y_2' = 4y_1 - 3y_3$ $y_3' = y_1 - y_2$
$y_1' = y_1 - y_2$ $y_2' = y_1$ $y_3' = 8y_1 + 7y_2$	$y_1' = -2y_2 + y_3$ $y_2' = 2y_1 - y_3$ $y_3' = y_1 + 6y_2$
