5 نظـــــم المعادلات الجبرية الخطية
Linear Systems of Algebraic Equations

في هذا الباب نلقي الضوء على موضوع هام جداً، ألا وهو نظـــم المعادلات الجبرية الخطية. وأهمية هذا الموضوع تكمن في حقيقة أن الحلول العلمية لأية مشكلة هندسية أو رياضية تؤول في النهاية ــ في معظم الأحيان ــ إلى حلول أنظمة من المعادلات الجبرية.

هذه الأنظمة يوجد منها نوعان. النوع الأول هو الـــنظم الخطيـــة *(Linear System)*، وهو موضوع هذا الباب، أما النوع الثـــاني فهي النظم غير الخطية *(Non-Linear System)*.

في هذا الباب نتعرف على نوعيات مختلفة من النظم الخطية مثـــل نظم المعادلات المتجانـــسة *(Homogeneous)*، والـــنظم غـــير المتجانسة *(Non Homogeneous)*، النظم المربعة (عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل)، والنظم المستطيلة (عدد المعادلات لايساوي عدد المجاهيل)، كما نتعرف ــ أيضاً ــ على طرق الحل المختلفة، التي تناسب كل نظام.

وتجدر الإشارة إلى أنه يوجد مدخلان لإيجـــاد الحلـــول لأنظمـــة المعادلات الجبرية الخطية. المدخل الأول يعـــرف باســـم الطـــرق المباشرة *(Direct Methods)*، وهو ما سوف نتطرق إليه بالدراسة في هذا الباب. المدخل الثانى يعرف باســـم الطـــرق التكراريـــة

(iterative methods) وسوف نتعرض له في الباب السادس. هذا، ومن الجدير بالملاحظة ــ أيضاً ــ أن معظـــم الطـــرق المقدمـــة للحصول على حلول نظم المعـــادلات تعتمـــد علـــى مفـــاهيم المصفوفات التي يمكن اعتبارها حجر الزاوية الذي تعتمد عيه معظم طرق الحلول.

5.1 نظم المعادلات الجبرية الخطية

نظام المعادلات الجبرية الخطية هو عبارة عن عدد مـــن المعـــادلات الجبرية الخطية في عدد من المجاهيل، ويكون حل النظام هو معرفـــة قيم هذه المجاهيل. والنظم الخطيـــة هنـــا تعـــني أن كـــل مجهـــول *(Unknown)*، x_j، يظهر مرفوعاً للقوى الأولى ــ فقط ــ كمـــا أنه لايظهر في النظام أي من الحدود، التي علـــى الـــشكل $x_i x_j$، حيثما يكون $i \neq j$. هذا، ويمكن التعرف على الشكل العام لنظـــام المعادلات الجبرية الخطية، الذي يتكون من عدد n معادلة خطية، في عدد m مجهول كما في الصورة الرياضية

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \cdots & + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots & & \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + & \cdots & + a_{nm}x_m = b_n \end{matrix} \tag{5.1}$$

بالطبع فإن المعاملات *(Coefficients)* ، a_{ij} ، حيث $i=\overline{1,n}$ ، $j=\overline{1,m}$ ، وكذلك الحدود الثابتة أو المطلقة *(Free Terms)* ، b_i ، حيث $i=\overline{1,n}$ تكون معطاة، أما x_j حيث $j=\overline{1,m}$ فهي المجاهيل المطلوب الحصول على قيمها. ويكون الحل المطلوب لهذا النظام هو إيجاد قيم هذه المجاهيل $x_1, x_2, \dots, x_m$، التي تحقق كل معادلات النظام.

في الحقيقة توجد عدة طرق للحصول على حل أنظمة المعادلات الجبرية الخطية. وتستخدم المصفوفات بشكل أساسي في معظم الطرق، التي تبحث عن حلول النظم الخطية. لكن ــ وقبل البدء في التعامل مع هذه الطرق ــ نضع ــ أولاً ــ النظام (5.1) في الشكل المصفوفي *(Matrix Form)*

$$\mathrm{AX}=\mathrm{B} \tag{5.1}$$

حيث

$$\mathrm{B}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix};\ \mathrm{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix};\mathrm{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

المصفوفة A والتي من الرتبة $n \times m$ تسمى "مصفوفة المعاملات" *(Coefficient Matrix)*، حيث يعبر n عن عدد الصفوف، بينما

يعبر m عن عدد الأعمدة. أما المصفوفة X من الرتبة $n \times 1$ فتسمى "**مصفوفة المجاهيل**"، والمصفوفة B من الرتبـــة $n \times 1$ تـــسمى "**مصفوفة الثوابت**" أو مصفوفة الحدود المطلقة، وأحياناً تـــسمى مصفوفة الهدف *(Target Matrix)*.

هذا، وتنقسم نظم المعادلات الجبرية الخطية طبقاً لشكل مـــصفوفة الهدف إلى نوعين من النظم، النوع الأول هو النظم المتجانـــسة إذا كانت مصفوفة الهدف صفرية، والنوع الثاني هـــي الـــنظم غـــير المتجانسة إذا كانت مصفوفة الهدف غير صفرية.

وُتعرَّف النظم غير المتجانسة بأنها تلك النظم التي على الشكل (5.1) أو الشكل المصفوفي (5.2) بشرط أن يوجد على الأقل عنصر واحد من مصفوفة الهدف B لايساوي الصفر. هذا، ونظـــم المعـــادلات المتجانسة وغير المتجانسة ـــ هي نفسها ـــ تنقسم إلى حالتين، الحالة الأولى إذا كان عدد المعادلات لايساوي عدد المجاهيل، والثانية إذا كان عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل.

انتبه !! إلى الفروق بين النظم المتجانسة، والنظم غير المتجانسة. من جهة وجود الحل وشكله.

<u>بالنسبة للنظم المتجانسة نجد أنه :</u>

(1) إذا تساوى عدد المعادلات مع عدد المجاهيل، وكانت مــصفوفة المعاملات غير شاذة بمعنى أن $|A| \neq 0$ ففي هذه الحالـــة لايوجـــد للنظام إلا الحلول الصفرية فقط *(Trivial Solutions)*.

(2) وإذا تساوى عدد المعادلات مع عدد المجاهيل وكانت مصفوفة المعاملات شاذة *(Singular)* $|A| = 0$ أو إذا كان $rank\,(A) < n$ حيث يرمز n لعدد معادلات النظام، $rank\,(A)$ هي رتبة المصفوفة A فإن النظام في هذه الحالة له عدد لانهائي من الحلول، بالإضـــافة إلى الحلول الصفرية.

بالنسبة للنظم غير المتجانسة فنجد أنه :

(1) إذا كان عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل، وكانت مصفوفة المعاملات غير شاذة، بمعنى أن يكون $|A| \neq 0$، فإنه يوجد حل وحيد *(Unique Solution)*. فإذا كان عدد المعادلات يــساوي عـــدد المجاهيل وكانت مصفوفة المعاملات شاذة $|A| = 0$ فلايوجـــد حـــل على الإطلاق.

(2) وإذا كان عدد المعادلات أقل أو أكبر من عدد المجاهيل ففـــي هذه الحالة فإنه يوجد عدد لانهائي من الحلول، بـــشرط أن رتبـــة *(rank)* المصفوفة A تساوي رتبـــة *(rank)* المـــصفوفة الموســـعة

(augmented matrix) $\left[A|B\right]$ أي يـــــــــشرط أن $rank\left[A|B\right]=rank\,(A)$ كما سنرى.

إذن يمكن القول

أن للنظم المتجانسة ــ دائماً ــ يوجد حل (على الأقـــل الحل الصفري). على عكس النظم غير المتجانسة، والـــتي ليس من الضروري أن يكون لها حل دائماً.

هذا

وسوف نقدم الآن طريقة الحصول على الحـــل العـــام للنظم الخطية باستخدام طريقة تعتبر من أهم وأفضل الطرق المباشرة لحل أنظمة المعادلات الخطية المتجانسة وغير المتجانسة علـــى حـــد سواء. وهذه الطريقة الرائعة صالحة للاستخدام في حالة تساوي عدد المعادلات مع عدد المجاهيل وفي حالة عدم التساوي، وهي تـــسمى "طريقـــة جـــاوس – جـــوردان الاختزاليـــة" *(Gauss - Gordan Reduction Method)*، نـــسبة إلى العـــالمين الجلـــيلين جـــاوس *(Gauss, C.F., 1777-1855)* وجـــوردان *(Jordan, C. M., 1838-1922)*. وقد سميت الطريقة بالاختزاليـــة لأنها تعتمد ــ بالأساس ــ على المـــصفوفة الاختزاليـــة. إذ يـــتم استبدال نظـــام المعـــادلات $A_RX=B_R$ ــ مـــثلاً ــ بالنظـــام $AX=B$، حيث المصفوفة A_R هي المصفوفة الاختزالية لمـــصفوفة

المعاملات A ، والمصفوفة B_R هي المصفوفة المختزلـــة لمـــصفوفة الثوابت B .

5.2 طريقة جاوس - جوردان Gauss - Jordan

يمكن استخدام طريقة جاوس ـــــ جوردان لحل النظم المتجانـــسة والنظم غير المتجانسة على حد سواء، وهي تتكون من عدة خطوات على النحو التالي:

بالنسبة للنظام المتجانس
$AX = O$

(1) يتم اختزال مصفوفة المعاملات A إلى المصفوفة المختزلة A_R وعندئذٍ فإن حل النظام $AX = O$ يكافيء حل النظام $A_RX = O$.

(2) إذا كان العنصر الدليل، أي الواحد الصحيح والموجـــود في أي صف في المصفوفة المختزلة A_R ، يقع في العمود رقم j في المصفوفة A_R ، فإن المتغير x_j يعتبر متغير تـــابع ***(dependent variable)***، وإلا فإن x_j يسمى بالمتغير المستقل ***(independent variable)***.

(3) يُعَبرعن كل متغير تابع بدلالة المـــتغيرات المـــستقلة، وتوضـــع مصفوفة (عمود) الحلول على شكل مصفوفي.

(4) المتغيرات (المجاهيل) المستقلة تُعطَى أية قيم أختياريـــة، ومـــن ثم نوجد حل النظام باستخدام الخطوة رقم (3).

بالنسبة للنظام غير المتجانس	
$AX = B$	

(1) يتم اختزال المصفوفة الموسعة $[A|B]$ حيث A هي مصفوفة المعاملات بينما B هي مصفوفة الثوابت إلى المـــصفوفة المختزلـــة $[A|B]_R$ وعندئذٍ فإن حل النظام $AX = B$ يكافيء حل النظـــام $A_R X = B_R$.

(2) إذا كانت رتبة *(rank)* المصفوفة A تـــساوي رتبـــة *(rank)* المصفوفة الموسعة $[A|B]$ فإن للنظام يوجد حل فإذا لم يتساويا فإنه لايوجد للنظام حل *(no solution)*.

(3) إذا كان العنصر الدليل، أي الواحد الصحيح والموجـــود في أي صف في المصفوفة المختزلة A_R، يقع في العمود رقم j في المصفوفة A_R، فإن المتغير x_j يعتبر متغير تـــابع *(dependent variable)*، وإلا فإن x_j يسمى بالمتغير المستقل *(independent variable)*.

(4) يُعَبر عن كل متغير تابع بدلالة المـــتغيرات المـــستقلة، وتوضـــع مصفوفة (عمود) الحلول على شكل مصفوفي.

(5) المتغيرات (المجاهيل) المستقلة تُعطى أية قيم أختياريـــة، ومـــن ثم نوجد حل النظام باستخدام الخطوة رقم (3).

5.3 النظم المتجانسة - Homogeneous Systems

نظام المعادلات الجبرية الخطية المتجانس هو عبارة عن عـــدد مـــن المعادلات الجبرية الخطية في عدد من المجاهيل بحيث أن الحدود الثابتة في جميع المعادلات أصفار. بكلمات أخرى المصفوفة B في النظـــام المتجانس هي مصفوفة صفرية. لنعتبر النظام المتجانس

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & + a_{1m}x_m & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \cdots & + a_{2m}x_m & = 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + & \cdots & + a_{nm}x_m & = 0 \end{array} \tag{5.3}$$

وإذا وضعنا هذا النظام في شكل مصفوفي، فإنـــه يأخـــذ الـــشكل المختصر والجميل

$$\mathrm{AX} = \mathrm{O} \tag{5.4}$$

حيث

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathrm{O} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

بالطبع فإن A هي مصفوفة المعـــاملات، المـــصفوفة X مـــصفوفة المجاهيل، والمصفوفة O هي مصفوفة الثوابت. كما أن عدد صفوف المصفوفة A يعبر عن عدد معادلات النظام، بينما يعبر عدد الأعمدة عن عدد المجاهيل. ويكون الحل العام للنظام ما هو إلا قـــيم هـــذه المجاهيل x_m، ... x_2، x_1، والتي تحقق كل معادلات النظام.

وللحصول على حل النظام (5.4) نتعرض هنا لحالتين، الحالة الأولى عندما يكون عدد المعادلات n أقل من عدد المجاهيل m، أي عندما $m > n$، والحالة الثانية عندما يتساوى عدد المعادلات مـــع عـــدد المجاهيل أو عندما $m = n$.

الحالة الأولى	عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل في النظام المتجانس

لإيجاد الحل العام لنظام المعادلات الخطية المتجانس في الحالـــة الـــتي يكون فيها عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل، أي عندما يكـــون $m > n$، حيث n هو عدد المعادلات بينما m هو عدد المجاهيـــل، فإننا نستخدم طريقة جاوس ـــــ جوردان الاختزالية، والتي تضمن وجود عدد لانهائي من الحلول، بالإضافة إلى الحلول الصفرية. لكن على أية حال ـــ وقبل البدء في تطبيق هذه الطريقة عملياً ـــ يجـــب التعرف على النظرية الآتية.

نظرية 5.1

عن حل النظم المتجانسة

(1)إذا كانت A مصفوفة من الرتبة $n \times m$، وكانت A_R مصفوفتها المختزلة، إذن فإن حل نظام المعادلات $AX = O$ يكافيء حل النظام $A_R X = O$.

(2) إذا كانت المصفوفة A من الرتبة $n \times m$، إذن فإن عدد الحلول الأساسية *(Fundamental Solutions)*، المستقلة أو غير المرتبطة خطياً *(Linearly Independent)* أو ـــ بمعنى آخر ـــ عدد الكميات القياسية الاختيارية *(Arbitrary Scalars)*، والتي تكوّن فضاء الحلول اللانهائي في حل النظام المتجانس $AX = O$ يساوي العدد r حيث $r = m - rank(A)$، m هو عدد مجاهيل النظام.

✪✪✪

مثال 5.1 أوجد الحل العام للنظام المتجانس

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 - 7x_4 + 4x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 \quad\quad\quad\quad &= 0 \\ x_2 - 4x_3 + x_5 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(i)}$$

الحل من الواضح أنه يوجد في النظام (i) عدد 5 مجهول $m = 5$ وعدد 3 معادلة $n = 3$، أي أن عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل. نضع النظام (i) على شكل المعادلة المصفوفية $AX = O$ فنحصل على

(ii)
$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حيث
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

فنجد أن
$$A_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{35}{16} & \frac{13}{16} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{28}{16} & -\frac{20}{16} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{16} & -\frac{9}{16} \end{bmatrix}$$

وحيث أن عدد الصفوف غير الصفرية في المصفوفة المختزلة، A_R يساو ي العدد 3، إذن فإن مرتبة المصفوفة A هو العـــدد 3، أو ــ بالأحرى ــ فإن $rank(A) = 3$. وحسب الجـــزء الثـــانى مـــن النظرية (5.1) فإن عدد الحلـــول الأساســـية هـــو $r = 3$ حيـــث $r = m - rank(A) = 5 - 3 = 2$.

الآن، وحسب الجزء الأول من النظرية (5.1) ــ نجد أن حل النظام المعطى يكافيء حل النظام $A_R X = O$، أي حل النظام

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{35}{16} & \frac{13}{16} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{28}{16} & -\frac{20}{16} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{16} & -\frac{9}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

من الخطـــوة (2) مـــن طريقـــة جـــاوس ـــ جـــوردان نجـــد أن (x_1, x_2, x_3) مجاهيل تابعة، (x_4, x_5) مجاهيل مـــستقلة. ومـــن الخطوة (3) يعُبر عن (x_1, x_2, x_3) بدلالة (x_4, x_5)، إذن

$$\left.\begin{aligned} x_1 - \frac{35}{16}x_4 + \frac{13}{16}x_5 &= 0 \\ x_2 + \frac{28}{16}x_4 - \frac{20}{16}x_5 &= 0 \\ x_3 + \frac{7}{16}x_4 - \frac{9}{16}x_5 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \frac{35}{16}x_4 - \frac{13}{16}x_5 \\ x_2 &= -\frac{28}{16}x_4 + \frac{20}{16}x_5 \\ x_3 &= -\frac{7}{16}x_4 + \frac{9}{16}x_5 \end{aligned} \qquad \text{(iii)}$$

إذا اعتبرنا ـــ الآن ـــ أن $x_4 = x_4 + 0,\ x_5 = x_5 + 0$، وقمنـــا بالتعويض عن المجاهيل (x_1, x_2, x_3) من المعادلات (iii) فإنه يمكننا تكوين مصفوفة لكل المجاهيل $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ في الشكل

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{35}{16}x_4 - \frac{13}{16}x_5 \\ -\frac{28}{16}x_4 + \frac{20}{16}x_5 \\ -\frac{7}{16}x_4 + \frac{9}{16}x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} \frac{35}{16} \\ -\frac{28}{16} \\ -\frac{7}{16} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -\frac{13}{16} \\ \frac{20}{16} \\ \frac{9}{16} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

الخطوة رقم (4) من طريقة جاوس ـــــ جوردان الاختزالية تُعطـــي قيماً اختيارية للمجاهيل المستقلة (x_4, x_5)، فإذا فرضنا ـــ مثلاً ـــ أن $x_4 = \alpha, x_5 = \beta$ ، فإن المصفوفة X تصبح على الشكل

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \frac{35}{16} \\ -\frac{28}{16} \\ -\frac{7}{16} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -\frac{13}{16} \\ \frac{20}{16} \\ \frac{9}{16} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 35 \\ -28 \\ -7 \\ 16 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -13 \\ 20 \\ 9 \\ 0 \\ 16 \end{bmatrix} \qquad \text{(iv)}$$

حيث

$$a = \frac{1}{16}\alpha, \quad b = \frac{1}{16}\beta$$

من الواضح أنه توجد هنا كميتان اختياريتان قياســـيتين همـــا a,b وعلى هذا فإن هذا الحل ليس حلاً وحيداً، بل هو فضاء لانهائي من الحلول. إذ أنه كلما تغيرت قيم a,b لتأخذ قيماً اختيارية، يـــتغير الحل تبعاً لذلك، لنحصل في النهاية على عدد لانهائي من الحلـــول، مكوناً ما يسمى "فضاء الحلول" *(space of solutions)*.

هذا الفضاء من الحلول بُعده *(dimension)* هو في الواقـــع عـــدد الثوابت القياسية الاختيارية a,b. ففي هذا المثـــــــال مثلاً، بُعد فضاء الحلول هو العدد 2.

انتبه

في حالة ما إذا كان $a = b = 1$ فإن الحل يصبح على الشكل

$$X = \begin{bmatrix} 35 \\ -28 \\ -7 \\ 16 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -13 \\ 20 \\ 9 \\ 0 \\ 16 \end{bmatrix}$$

العمودان (المصفوفتان)

$$\begin{bmatrix} -13 \\ 20 \\ 9 \\ 0 \\ 16 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 35 \\ -28 \\ -7 \\ 16 \\ 0 \end{bmatrix}$$

المكونان لمصفوفة الحل X يسميان "الحلين الأساسيين" لنظام المعادلات الخطية الجبرية المعطى، وهما بالتأكيد مصفوفتان غير مرتبطتين خطياً.

مثال 5.2 أوجد الحل العام للنظام المتجانس

$$\begin{aligned} -x_1 + x_3 + x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_2 + 3x_3 + 4x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ -3x_1 + x_2 + 4x_5 &= 0 \end{aligned}$$

الحل من الواضح في هذا النظام المتجانس أنه يوجد عدد 5 مجهول، وعدد 4 معادلة. أي أن عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل. نـــضع — أولاً — النظام على شكل المعادلة المصفوفية $AX = O$ ، إذن

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حيث نجد أن

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \to A_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{9}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{8} \end{bmatrix}$$

وحيث أن عدد الصفوف غير الصفرية في المصفوفة المختزلـــة A_R يساوي العدد 4، إذن فإن $rank\,(A) = 4$، وحسب الجزء الثـــاني من النظرية (5.1) فإن عدد الكميات القياسية الاختيارية في فـــضاء الحلول المتوقع يساوي $m - rank\,(A) = 5 - 4 = 1$.

الآن، وحسب الجزء الأول من النظرية (5.1) — نجد أن حل النظام المعطَى $AX = O$ يكافيء حل النظام $A_R X = O$ ، أي النظام

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{9}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

من الخطوة الثانية من طريقة جـاوس ـــــ جـوردان نجـد أن x_1, x_2, x_3, x_4 هي مجاهيل تابعة، بينما x_5 هو المجهول الوحيد المستقل. وبواسطة الخطوة رقم 3، يمكن أن نحصل علـى المجاهيل x_1, x_2, x_3, x_4 بدلالة المجهول x_5 .

إذا وضعنا $x_5 = \alpha$، حيث α كمية قياسية أختيارية فإن مصفوفة كل المجاهيل أو مصفوفة الحلول تأخذ عندئذٍ الشكل

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \frac{9}{8} \\ -\frac{5}{8} \\ -\frac{9}{8} \\ \frac{2}{8} \\ 1 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 9 \\ -5 \\ -9 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} \quad ; \beta = \frac{1}{8}\alpha$$

مثال 5.3 أوجد الحل العام للنظام $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$

الحل من الواضح في هذا النظام المتجانس أنه يوجد عـــدد 3 مجهـــول، ومعادلة واحدة. أي أن عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل. نضع — أولاً — النظام على شكل المعادلة المصفوفية $AX = O$، إذن

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

حيث $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة المعاملات. يمكن الآن إيجـــاد المصفوفة المختزلة A_R للمـــصفوفة A لنجـــد أنهـــا المـــصفوفة $A_R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$، وبالتالي فإن $rank\,(A) = 1$. وحسب النظرية (5.1) فإن عدد الكميات القياسية الاختيارية في فـــضاء الحلـــول يساوي $m - rank(A) = 3 - 1 = 2$. من الخطوة رقـــم (2) مـــن طريقة جاوس ـــــ جوردان نجد أن المتغير x_1 هو المجهول الوحيد التابع، بينما x_2, x_3 هما مجاهولان مستقلان. ومن الخطوة رقـــم 3 نحصل على المجهول x_1 بدلالة المجاهيل x_2, x_3، وبما أنـــه يمكـــن اعتبار أن $x_2 = \alpha, x_3 = \beta$، حيث α, β كميات قياسية أختيارية إذن فإن مصفوفة المجاهيل أو مصفوفة الحلول هي

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha - \beta \\ \alpha + 0\beta \\ 0\alpha + \beta \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

أو
$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

الحالة الثانية	عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل في النظام المتجانس

لإيجاد حل النظام الخطي المتجانس في هذه الحالة، والتي فيها يكون عدد المعادلات مساوياً عدد المجاهيل، بمعنى أن $m=n$، حيث n هو عدد المعادلات، m هو عدد المجاهيل. فإننا ـــ أيـــضاً ـــ نـــستخدم طريقة جاوس ـــــ جوردان.

ولكن قبل البدء في تطبيق هذه الطريقة على بعض الأمثلـــة، نقـــدم النظريتين الآتيتين لما لهما من أهمية كبيرة في تحديد ماهيـــة وطبيعـــة الحلول في هذه الحالة كما سيتبين ذلك في حل بعض الأمثلة.

نظرية 5.2	عن حل النظم المربعة المتجانسة

إذا كانـــت A مـــصفوفة مربعـــة مـــن الرتبـــة $n\times n$، وكـــان $rank\,(A)=n$، إذن فإن حل النظام المتجانس $AX=O$ هو الحل الصفري $X=O$ حيث O هي المصفوفة الصفرية من الرتبة n.

✪✪✪

بكلمات اخرى

إذا كانت المصفوفة المربعة A غير شـاذة ($|A| \neq 0$) أو إذا كـان $A_R = I_n$. فإن حل النظام المتجانس $AX = O$ هو الحل $X = O$ والذي يسمى بالحل البديهي أو الحل الصفري .

البرهان

لنفرض أن $rank(A) = n$، إذن فـإن $A_R = I_n$، ويكون حل النظام $AX = O$ هو نفسه حل النظـام $A_R X = O$.

بما أن $A_R = I_n$ إذن فإن حل النظام $AX = O$ هو نفـسه حـل النظام $I_n X = O$، وهذا يعني أن $AX = O$.

وبالعكس؛ إذا كان حل النظام $AX = O$ هـو الحـل الـصفري $X = O$، فهذا يعني أن عدد الكميات القياسية يساوي صفراً. ومن النظرية (5.1)، نجـد أن $r = m\text{-}rank(A) = 0$، ومنـها فـإن $rank(A) = n$، وذلك لأن $m = n$.

نظرية 5.3 **عن حل النظم المربعة المتجانسة**

إذا كانت A مصفوفة مربعة من الرتبة $n \times n$، بالإضافة إلى كونها مصفوفة شاذة، بمعنى أن $|A| = 0$، أو إذا كـان $rank(A) < n$،

إذن فإنه يوجد للنظام الخطي المتجـــانس $AX = O$ حلـــول غـــير صفرية *(Non-trivial Solutions)*.

✪✪✪

مثال 5.4 أوجد الحل العام للنظام

$$
\begin{aligned}
-x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 0 \\
-x_3 + 3x_4 &= 0 \\
2x_1 + x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= 0 \\
6x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 28x_4 &= 0
\end{aligned}
$$

الحل من الواضح في هذا النظام المتجانس أنه يوجد عدد 4 مجهول، وأربع معادلات. أي أن عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيـــل $(m = n)$.

نضع ــ أولاً ــ النظام على شكل المعادلة المـــصفوفية $AX = O$، إذن

$$
\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \\ 6 & 2 & 10 & 28 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

وبما أن

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \\ 6 & 2 & 10 & 28 \end{bmatrix}
\Rightarrow A_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

إذن فإن عدد الصفوف غير الصفرية في المصفوفة المختزلة A_R هو العدد 3، أي أن $rank(A)=3$. وبالتالي فــإن $rank(A)<4$، وذلك لأن $n=4$. أيضاً يمكن التأكد من أن $|A|=0$، وحــسب النظرية (5.3) فإنه يوجد عدد لانهائي من الحلول، يمكن الحــصول عليهم بحل النظام $A_R X = O$، أو النظام

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ومن الجزء الثاني من النظرية (5.1) فإن عدد الكميـــات القياســية الاختياريـــة في فـــضاء الحلـــول هـــو $r=1$ حيـــث $r=m-rank(A)=4-3=1$. من الخطوة الثانية من طريقــة جاوس ــ جوردان نجد أن x_1, x_2, x_3 هي مجاهيل تابعـــة، وأن x_4 هو مجهول مستقل. إذن نحصل من الخطوة رقم 3 علــى المجاهيــل x_1, x_2, x_3 بدلالة المجهول x_4. وهكذا نجد أن

$$\left.\begin{aligned} x_1+13x_4&=0 \\ x_2+10x_4&=0 \\ x_3-3x_4&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1&=-13x_4 \\ x_2&=-10x_4 \\ x_3&=3x_4 \end{aligned}$$

وبما أنه يمكن أن نعتبر $x_4=\alpha$، حيث α كمية قياسية اختياريــة إذن

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} -13 \\ 10 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -13 \\ 10 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

من الواضح أنه يوجد كمية قياسية اختيارية واحدة هي α. وعلى هذا فإن الحل ليس حلاً وحيداً، بل هو فضاء لانهائي من الحلول. إذ أنه كلما تغيرت قيمة α لتأخذ قيماً اختيارية، يتغير الحل لنحصل في النهاية على عدد لانهائي من الحلول مكوناً بذلك فضاءً من الحلول. بُعد *(Dimension)* هذا النظام يساوي عدد الثوابت الاختيارية. في هذا المثـــــــال مثلاً، نجد أن بُعد فضاء الحلول هو العدد 1.

مثال 5.5 أوجد الحل العام للنظام

$$\begin{aligned} 3x_1 - 11x_2 + 15x_3 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 - 10x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 9x_2 - 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

الحل من الواضح في هذا النظام المتجانس أنه يوجد عدد 3 مجهول، وعدد ثلاث معادلات. أي أن عدد المعادلات يـــساوي عـــدد المجاهيـــل $(m = n)$.

نضع ــ أولاً ــ النظام على شكل المعادلة المــصفوفية $AX = O$، فنجد مصفوفة المعاملات A، والمصفوفة المختزلة لها A_R ــ علــى الترتيب ــ في الأشكال

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -11 & 15 \\ 4 & 1 & -10 \\ 4 & 9 & -6 \end{bmatrix} \to A_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبما أن رتبة المصفوفة هي $n = 3$، ومرتبتها هــي $rank\,(A) = 3$ إذن فإن $rank\,(A) = n$. وبالتالي فحسب النظريـــة (5.2) فـــإن حلول النظام المعطى هي الحلول الصفرية فقط. نلاحظ ــ أيضاً ــ من الخطوة الثانية من طريقة جاوس ــ جـــوردان أن x_1, x_2, x_3 هي مجاهيل تابعة، ولا توجد أية مجاهيل مستقلة على الإطلاق.

وحسب الجزء الأول من النظرية (5.1) نجد أن حل النظام المعطــى يكافيء حل النظام

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

إذن

$$x_1 = 0 \,, x_2 = 0 \,, x_3 = 0$$

✍.

5.4 الـــــــنظم غـــير المتـــجانسة Non-Homogeneous Systems

يُعرَّف نظام المعادلات الجبرية الخطية غيرالمتجانس على أنه عدد من المعادلات الجبرية الخطية في عدد من المجاهيل بحيث أن حداً واحـــداً ـــ على الأقل ـــ من الحدود الثابتة (الحدود المطلقة) في جميـــع المعادلات يكون غير صفرى. بكلمات أخرى إذا كان هناك عنصر واحد ـــ على الأقل ـــ من عناصر المصفوفة B في النظـــام غـــير المتجانس (5.2) غير مساوٍ للصفر فإن النظام يكون غير متجـــانس. لنفرض النظام غير المتجانس

$$AX = B \tag{5.5}$$

حيث يوجد ـــ على الأقل ـــ عنصر واحد غير صفري في عناصر المصفوفة B في النظام (8.5). الحل المطلوب لهذا النظام (5.5) هـــو قيم هذه المجاهيل $x_1, x_2, \ldots, x_m$، والتي تحقق كـــل معـــادلات النظام. ومن المعروف أنه إذا وُجد حل لهذا النظام فإنه يسمى نظاماً متوافقاً *(Consistent)*، وإذا لم يوجد حل فإنه يسمى نظامـــاً غـــير متوافق *(Inconsistent)*.

والنظام المتوافق ربما يوجد له حل وحيد أو ربما يوجـــد لـــه عـــدد لانهائي من الحلول، وللحصول على حل النظم الخطية غير المتجانسة

توجد أكثر من طريقة من الطرق المسماة "طرق مباشرة". ويعتمـــد نوع الطريقة المستخدمة في الحل على نوعية النظم غير المتجانسة من حيث كونها نظماً مربعة (عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيـــل) أم غير مربعة.

فإذا كانت مصفوفة المعاملات مربعة، وغير شاذة ($|A| \neq 0$) فيمكن عندئذٍ حل النظام بثلاث طرق. الطريقة الأولى هي "طريقة كرامر" *(Cramer's Rule)*، والـــتي تُـــستخدم فيهـــا المحـــددات *(Determinats)*، الطريقة الثانية باستخدام المـــصفوفة العكـــسية *(Inverse Matrix)*، أما الطريقة الثالثة فهي باســـتخدام طريقـــة جاوس ـــــ جوردان والتي تعتمد على ما يسمى "المصفوفة الموسعة" *(Augmented Matrix)*.

أما إذا كانت مصفوفة المعاملات غير مربعة فلا يوجد لنا من طـــرق الحل إلا طريقة المصفوفة الموسعة، والتي تعتمد على طريقة جاوس ـــ جوردان، وسوف نتعرض ـــ الآن ـــ للحالتين: الحالة الأولى عندما تكون مصفوفة المعاملات غير مربعة (عدد المعادلات n أقل أو أكثر من عدد المجاهيل m)، والحالة الثانية عندما يتساوى عدد المعادلات مع عدد المجاهيل، أي عندما $m = n$ (مصفوفة المعاملات مربعة).

الحالة الأولى ⟵ حلول النظم غير المتجانسة وغير المربعة

قبل البدء في تطبيق طرق الحلول — يجب التعرف على نظرية هامة تبين الشروط الواجب توافرها لكي يوجد للنظام غير المتجانس حل، وما إذا كان هذا الحل وحيداً أم أنه عدد لانهائي من الحلول.

حيث تثبت هذه النظرية أنه في حالة الأنظمة غير المتجانسة، والتي تكون فيها مصفوفة المعاملات غير مربعة فإن الحل العام للنظام يتكون من حلين، الأول هو الحل العام لنفس النظام بعد أن نجعله متجانساً وذلك بمساواة كل عناصر المصفوفة B بالصفر، والحل الثاني هو أي حل خاص *(Particular Solution)* للنظام غير المتجانس يمكن أن يحقق كل معادلات النظام غير المتجانس $AX = B$.

نظرية 5.4 عن حل النظم غير المتجانسة

(1) إذا كانت A هي مصفوفة غير مربعة من الرتبة $n \times m$، وكانت $[A|B]$ هي المصفوفة الموسعة، فإنه يوجد لنظام المعادلات غير المتجانس $AX = B$ حل إذا وفقط إذا كان

$$rank\,(A) = rank\,[A|B]$$

(2) الحل العام للنظام غير المتجانس $AX = B$ هو $G + P$. حيث المصفوفة P هي مصفوفة أي حل خاص للنظـــام غـــير المتجـــانس $AX = B$. أما المصفوفة G فهي مصفوفة الحـــل العـــام للنظـــام المتجانس $AX = O$.

✪✪✪

مثال 5.6 أوجد الحل العام للنظام غير المتجانس

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 3x_3 &= -2 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

الحل من الواضح أنه يوجد في هذا النظام غيرالمتجانس عدد 3 مجهـــول $m = 3$ وعدد 2 معادلة $n = 2$، أي أن عدد المعادلات أقـــل مـــن عدد المجاهيل، وبالتالي فمن المحتمل وجود عدد لانهائي من الحلول.
نضع أولاً: النظام على شكل المعادلة المصفوفية $AX = B$ فنحصل على

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

يمكن تكوين المصفوفة الموسعة $[A|B]$، والحصول على المـــصفوفة المختزلة لها $[A|B]_R$ حيث نجد أن

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 3 & -2\\ 0 & 1 & 2 & 4\end{array}\right]\Rightarrow [A|B]_R=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 6\\ 0 & 1 & 2 & 4\end{array}\right]$$

وبما أن $rank\,(A)=rank\,[A|B]=2$ إذن فللنظام يوجد عدد لانهائي من الحلول نحصل عليها بحل النظام

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 4\end{bmatrix}$$

وهكذا نجد من مفاهيم طريقة جـــاوس ـــ جـــوردان أن المـــتغيرين x_1, x_2 هما متغيران تابعان، بينما x_3 هو متغير مستقل، وبالتـــالي نعبر عن المتغيرات التابعة بدلالة المتغير المستقل لنحصل على

$$\begin{aligned}x_1-x_3&=6\\ x_2+2x_3&=4\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}x_1&=6+x_3\\ x_2&=4-2x_3\end{aligned}$$

وبفرض أن $x_3=\alpha$، حيث α كمية قياسية إختيارية نحصل علـــى الحل العام للنظام المعطى في الشكل

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6+x_3\\ 4-2x_3\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 4\\ 0\end{bmatrix}+\alpha\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 1\end{bmatrix}$$

حيث تعبر المصفوفة $[6\quad 4\quad 0]^t$ عن مصفوفة الحل الخاص للنظام غير المتجانس المعطى، أما المصفوفة $\alpha[1\quad -2\quad 1]^t$ فهي تعبر عن مصفوفة الحل العام للنظام المتجانس $\begin{aligned}-x_1+x_2+3x_3&=0\\ x_2+2x_3&=0\end{aligned}$.

يجــب ملاحظــة أن الرمــز t في المــصفوفات يرمــز إلى مــدور المصفوفة *(Transpose Matrix)*، وهي المصفوفة التي يمكن الحصول عليها بتحويل صفوفها إلى أعمدة أوالعكس.

مثال 5.7 أوجد الحل العام للنظام

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + 6x_6 &= -3 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 4x_6 &= 1 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_6 &= 0 \end{aligned}$$

الحل من الواضح أنه يوجد في هذا النظام غيرالمتجانس عدد 6 مجهــول $m = 6$ وعدد 3 معادلة $n = 3$، أي أن عدد المعادلات أقــل مــن عدد المجاهيل، وبالتالي فمن المحتمل وجود عدد لانهائي من الحلول، أو عدم وجود حل. نضع أولاً: النظام على شكل المعادلة المصفوفية $AX = B$ فنحصل على

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & -4 & 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حيث

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 6\\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4\\ 1 & -4 & 3 & 1 & 0 & 2\end{bmatrix},X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}-3\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

فيكون المطلوب هو الحصول على قيم المجاهيل $\{x_i\}_{i=1}^{6}$، أو بمعنى آخر الحصول على المصفوفه X. نكون ــ أولاً ــ المصفوفة الموسعة

$$\left[A|B\right]=\left[\begin{array}{cccccc|c}1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 6 & -3\\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 & 1\\ 1 & -4 & 3 & 1 & 0 & 2 & 0\end{array}\right]$$

فنجد أن

$$\left[A|B\right]_R=\left[\begin{array}{cccccc|c}1 & 0 & 0 & \frac{27}{8} & \frac{15}{8} & \frac{60}{8} & -\frac{17}{8}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{8} & \frac{9}{8} & \frac{20}{8} & \frac{1}{8}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} & \frac{7}{8} & \frac{12}{8} & \frac{7}{8}\end{array}\right]$$

وبما أن

$$rank\left(A\right)=rank\left[A|B\right]=3$$

إذن يوجد عدد لانهائي من الحلول للنظام المعطى نحصل عليها مـــن حل النظام

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{27}{8} & \frac{15}{8} & \frac{60}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{8} & \frac{9}{8} & \frac{20}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} & \frac{7}{8} & \frac{12}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{17}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{7}{8} \end{bmatrix}$$

حيث المتغيرات x_1, x_2, x_3 هي متغيرات تابعة، بينما x_4, x_5, x_6 هي متغيرات مستقلة، بالتالي فإن النظام السابق يتحول مرة أخـــرى إلى المعادلات

$$x_1 + \frac{27}{8}x_4 + \frac{15}{8}x_5 + \frac{60}{8}x_6 = -\frac{17}{8};$$
$$x_2 + \frac{13}{8}x_4 + \frac{9}{8}x_5 + \frac{20}{8}x_6 = \frac{1}{8};$$
$$x_3 + \frac{11}{8}x_4 + \frac{7}{8}x_5 + \frac{12}{8}x_6 = \frac{7}{8}$$

الآن، بـــالتعبير عـــن المجاهيـــل (x_1, x_2, x_3) بدلالـــة المجاهيـــل (x_4, x_5, x_6) نحصل على

$$x_1 = -\frac{27}{8}x_4 - \frac{15}{8}x_5 - \frac{60}{8}x_6 - \frac{17}{8}$$
$$x_2 = -\frac{13}{8}x_4 - \frac{9}{8}x_5 - \frac{20}{8}x_6 + \frac{1}{8};$$
$$x_3 = -\frac{11}{8}x_4 - \frac{7}{8}x_5 - \frac{12}{8}x_6 + \frac{7}{8}$$

وبما أنه يمكن اعتبار أن

$$x_4=\alpha;\ \ x_5=\beta;\ \ x_6=\delta$$

حيث α,β,δ كميات أختيارية إذن فإن الحل العام للنظام المعطى وهو عبارة عن عدد لانهائي من الحلول يأخذ الشكل

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}-27/8\\-13/8\\-11/8\\1\\0\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}-15/8\\-9/8\\-7/8\\0\\1\\0\end{bmatrix}+\delta\begin{bmatrix}-60/8\\-20/8\\-12/8\\0\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-17/8\\1/8\\7/8\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

بالتأكيد فإن

$$\begin{bmatrix}-17/8 & 1/8 & 7/8 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^t$$

هو الحل الخاص للنظام المعطى. أيضاً فإن الحل العام للنظام المتجانس المقابل لغير المتجانس هو

$$\alpha\begin{bmatrix}-27/8\\-13/8\\-11/8\\1\\0\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}-15/8\\-9/8\\-7/8\\0\\1\\0\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}-60/8\\-20/8\\-12/8\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

مثال 5.8 أوجد الحل العام للنظام

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 + 2x_3 &= -1 \\
x_3 &= 0 \\
3x_1 - 3x_2 + 7x_3 &= 1 \\
10x_1 - 10x_2 + 24x_3 &= -2
\end{aligned}
$$

الحل من الواضح أنه يوجد في هذا النظام غيرالمتجانس عدد 3 مجهـــول $m = 3$ وعدد 4 معادلة $n = 4$، أي أن عدد المعادلات أكبر مـــن عدد المجاهيل، وبالتالي فمن المحتمل وجود عدد لانهائي من الحلول أو عدم وجود حل. نضع أولاً: النظام على شكل المعادلة المـــصفوفية $AX = B$ فنحصل على

$$
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 7 \\ 10 & -10 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}
$$

حيث

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 7 \\ 10 & -10 & 24 \end{bmatrix}; \ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; \ B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}
$$

بما أن

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 3 & -3 & 7 & 1\\ 10 & -10 & 24 & 2\end{array}\right]\Rightarrow [A|B]_R=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

إذن نجـــد أن $rank\,(A)=2\neq rank\,[A|B]=3$. وبالتـــالي لا يوجد حل للنظام المعطى، أي أن النظام غير متوافق.

الحالة الثانية

حلول النظم غير المتجانسة المربعة

لإيجاد الحل العام لنظم المعادلات الخطية غير المتجانسة في الحالة التي يكون فيها عدد المعادلات مساوياً عدد المجاهيـــل، أي في حالـــة أن $m=n$، حيث n هو عدد المعادلات، بينما m هو عدد المجاهيـــل يمكن أن نستخدم ثلاث طرق: الطريقة الأولى هي طريقة المصفوفة الموسعة كما في حالة النظم غير المربعة. الطريقة الثانية هي طريقـــة كرامر (باستخدام المحددات)، والطريقة الثالثة باســـتخدام مفهـــوم المصفوفة العكسية. النظرية التالية تبين إمكانية وجود الحـــل لـــنظم المعادلات الخطية غير المتجانسة في الحالة التي يكـــون فيهـــا عـــدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل؛ كما تبين الشروط الواجب توافرها لكي يوجد حل، ومتى يكون هذا الحل وحيداً.

نظرية 5.5 عن حل النظم غير المتجانسة المربعة

إذا كانت A مصفوفة مربعة من الرتبة $n \times n$، فإنه يوجد للنظـــام غير المتجانس $AX = B$ حل إذا كان

$$rank\left(A\right) = rank\left[A|B\right]$$

ويكون هذا الحل وحيداً إذا وفقط إذا كان: $rank\left(A\right) = n$، أو إذا وفقط إذا كان $A_R = I_n$، أو بشرط أن تكون المـــصفوفة A مصفوفة غير شاذة ($|A| \neq 0$).

✪✪✪

النظرية بكلمات أخرى

لنفرض أن A هي مصفوفة مربعة من الرتبـــة $n \times n$. وإذا كـــان $rank\left(A\right) \neq n$ أو $A_R \neq I_n$ أو $|A| = 0$؛ فـــإن للنظـــام غـــير المتجانس $AX = B$ لايوجد أي حل على الإطلاق.

5.5 طريقة كرامر - Cramer's Method

تُستخدم طريقة كرامر لحل نظم المعادلات الخطيـــة المربعـــة غـــير المتجانسة فقط إذا توافرت الشروط الثلاثة التالية:

(1) النظام خطي وغير متجانس. (2) عدد المعادلات يساوي عـــدد المجاهيل. (3) مصفوفة المعاملات غير شاذة، أي أن $|A| \neq 0$.

لنعتبر النظام غير المتجانس $AX = B$، والذي فيــه مـــصفوفة المعاملات A مربعة، وغير شاذة أي أن $|A| \neq 0$، حيث

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

نحسب عدد $n+1$ من المحددات $\Delta, \Delta(x_1), \Delta(x_2), ..., \Delta(x_n)$ حيث Δ هــو محــدد مــصفوفة المعــاملات A بينمــا المحــدد $\Delta(x_j);\ j = \overline{1,n}$ هو المحدد الناتج من تبــديل العمــود رقــم j (العمود الذي يحتوي على معــاملات x_j) في محــدد المعــاملات، $|A| = \Delta$، بعمود الثوابت B، أي أن

$$\Delta(x_j) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

هذا، وتقول طريقة كرامر إن حل النظام غير المتجــانس $AX = B$ هو المصفوفة

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} \Delta(x_1) \\ \Delta(x_2) \\ \vdots \\ \Delta(x_n) \end{bmatrix}$$

مثال 5.9 أوجد الحل العام للنظام

$$-x_2 + 2x_3 = 4$$
$$3x_1 - 3x_2 = 3$$
$$-x_1 + x_3 = 1$$

الحل من الواضح أن النظام غير متجانس ومربع يحتوي علـــى عـــدد 3 مجهول $m = 3$ وعدد 3 معادلة $n = 3$، أي أن عـــدد المعـــادلات تساوي عدد المجاهيل، وبالتالي فمن المحتمل وجود حل وحيد أو عدم وجود حل على الإطلاق. نضع أولاً: النظام على شـــكل المعادلـــة المصفوفية $AX = B$ فنحصل على

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

حيث

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

باســتخدام طريقــة كرامــر نحـــسب الأربعـــة محـــددات $\Delta, \Delta(x_1), \Delta(x_2), \Delta(x_3)$ على النحو التالي

$$\Delta=\begin{vmatrix}0 & -1 & 2\\ 3 & -3 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-3,\quad \Delta(x_1)=\begin{vmatrix}4 & -1 & 2\\ 3 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-3$$

$$\Delta(x_2)=\begin{vmatrix}0 & 4 & 2\\ 3 & 3 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0,\quad \Delta(x_3)=\begin{vmatrix}0 & -1 & 4\\ 3 & -3 & 3\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-6$$

إذن الحل المطلوب هو

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\frac{1}{|\mathrm{A}|}\begin{bmatrix}\Delta(x_1)\\ \Delta(x_2)\\ \Delta(x_3)\end{bmatrix}=\frac{1}{-3}\begin{bmatrix}-3\\ 0\\ -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 2\end{bmatrix}$$

أي أن $x_1=1, x_2=0. x_3=2$

باستخدام طريقة جاوس – جوردان

نجد أن المصفوفة الموسعة ومصفوفتها المختزلة للنظام المغطى هما على الترتيب

$$\left[\mathrm{A}|\mathrm{B}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}0 & -1 & 2 & 4\\ 3 & -3 & 0 & 3\\ -1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right],\left[\mathrm{A}|\mathrm{B}\right]_R=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right]$$

ومن هنا نجد أن

$$x_1=1, x_2=0. x_3=2$$

✍.

5.6 طريقة المصفوفة العـــكسية Inverse Matrix Method

وهذه الطريقة يمكن استخدامها إذا توافرت الشروط الثلاثة التالية: (1) النظام خطي وغير متجانس. (2) عدد المعادلات يساوي عـــدد المجاهيل (النظام مربع). (3) المصفوفة العكسية لمصفوفة المعاملات لها وجود، وهذا لن يحدث إلا إذا كانت مصفوفة المعاملات غير شاذة بمعنى أن $|A| \neq 0$.

لنعتبر النظام غير المتجـــانس $AX = B$، والـــذي فيـــه مـــصفوفة المعاملات A مربعة وغير شاذة أي أن $|A| \neq 0$ حيث

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

لنفرض ــ أيضاً ــ أن المصفوفة A^{-1} هي المـــصفوفة العكـــسية لمصفوفة المعاملات A .

الآن، يتم ضرب النظام $AX = B$ من جهة اليـــسار في المـــصفوفة العكسية A^{-1}، فنحصل على $A^{-1}AX = A^{-1}B$.

وبما أن $A^{-1}A = I_n$، حيث I_n هي مصفوفة الوحدة من الرتبـــة $n \times n$، إذن فـــإن $I_n X = A^{-1}B$، أو $X = A^{-1}B$، وحيـــث أن

معكوس المصفوفة إن وجد فهو وحيد، إذن فإنــه يوجــد للنظـــام $AX = B$ حل وحيد هو $X = A^{-1}B$.

نظرية - 5.6

إذا كان محدد المصفوفة A في النظام $AX = B$ غـــير صفري فإن للنظام $AX = B$ حل وحيد هو

$$X = A^{-1}B$$

✪✪✪

البرهان

بضرب المعادلة المصفوفية $AX = B$ من جهة اليـــسار في A^{-1} نحصل على $A^{-1}AX = A^{-1}B$.

وبما أن $A^{-1}A=I$ ، إذن فإن $I X=A^{-1}B$ ويكون هذا الحل الوحيد هو $X=A^{-1}B$.

مثال 5.10 أوجد حل النظام المعطى في المثال السابق

الحل لإستخدام مفهوم المصفوفة العكسية في الحصول على الحل نـــضع أولاً النظام على شكل المعادلة المصفوفية $AX = B$ فنحصل على

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

حيث

$$A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ 3 & -3 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}4\\ 3\\ 1\end{bmatrix}$$

بما أن $|A|=-3$، إذن نوجد الأن المصفوفة العكسية A^{-1} فنجـــد أنها

$$A^{-1}=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix}-3 & 1 & 6\\ -3 & 2 & 6\\ -3 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

إذن حل النظام هو

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix}-3 & 1 & 6\\ -3 & 2 & 6\\ -3 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 3\\ 1\end{bmatrix}=\frac{1}{-3}\begin{bmatrix}-3\\ 0\\ -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 2\end{bmatrix}$$

ومن هنا نجد أن

$$x_1=1, x_2=0, x_3=2$$

✍.

مثال 5.11 أوجد حل النظام

$$\begin{aligned} x_1 + \quad\quad + 2x_3 &= 6\\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 30\\ -\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 8 \end{aligned}$$

الحل أولاً نضع هذا النظام في الصورة المصفوفية $AX=B$ ، أو

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{bmatrix}$$

حيث

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{bmatrix}$$

بما أن $|A| = 44 \neq 0$، إذن حل هذا النظام هو $X = A^{-1}B$. لإيجاد المصفوفة العكسية A^{-1} نوجد مصفوفة العوامل و المصفوفة المرتبطة فنجدهما في الأشكال

$$cofactor\,(A)=\begin{bmatrix} 24 & 3 & 10 \\ -4 & 5 & 2 \\ -8 & -12 & 4 \end{bmatrix}, \mathrm{Adj}(A)=\begin{bmatrix} 24 & -4 & -8 \\ 3 & 5 & -12 \\ 10 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times Adj\ (A)=\frac{1}{44}\times\begin{bmatrix} 24 & -4 & -8 \\ 3 & 5 & -12 \\ 10 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

و يكون الحل هو

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{44}\times\begin{bmatrix} 24 & -4 & -8 \\ 3 & 5 & -12 \\ 10 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{44}\begin{bmatrix}(24\times 6)+(-4\times 30)+(-8\times 8)\\(3\times 6)+(5\times 30)+(-12\times 8)\\(10\times 6)+(2\times 30)+(4\times 8)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{10}{11}\\\frac{18}{11}\\\frac{38}{11}\end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن $x_1=-\frac{10}{11}\ ;\ x_2=\frac{18}{11}\ ;\ x_3=\frac{38}{11}$

مثال 5.12 أوجد حل النظام بطرق مختلفة

$$\begin{aligned}4x_1-3x_2+x_3&=-1\\-3x_1+x_2-5x_3&=0\\-5x_1-14x_3&=-10\end{aligned}$$

الحل لإستخدام مفهوم المصفوفة العكسية في الحصول على الحل نـضع أولاً النظام على شكل المعادلة المصفوفية $AX=B$ فنحصل على

$$\begin{bmatrix}4&-3&1\\-3&1&-5\\-5&0&-14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\-10\end{bmatrix}$$

حيث

$$A=\begin{bmatrix}4&-3&1\\-3&1&-5\\-5&0&-14\end{bmatrix},X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}-1\\0\\-10\end{bmatrix}$$

بما أن $|A| = 0$، إذن لا توجد المصفوفة العكسية A^{-1} وبالتـــالي لا يمكن إيجاد حل للنظام بطريقة المصفوفة العكسية.

الحل بطريقة المصفوفة الموسعة

نكون المصفوفة الموسعة $[A|B]$، ثم نختزلها فنحصل على المصفوفة المختزلة $[A|B]_R$ فنجد أن

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -5 & 0 \\ -5 & 0 & -14 & -10 \end{array}\right], \quad [A|B]_R = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{14}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{17}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

وبما أن

$$rank\,(A) = 2 \neq rank\,[A|B] = 3$$

إذن لايوجد للنظام المعطى حل.

الحل بطريقة كرامر

بما أن

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -5 \\ -5 & 0 & -14 \end{vmatrix} = 0$$

إذن المـــصفوفة A مـــصفوفة شـــاذة ـــ لاحــظ أيـــضاً أن $rank\,(A) = 2 < n = 3$ وبالتالي لايوجد للنظام المعطى أي حلول.

✍.

نلاحظ

أن هناك أربعة دلائل على عدم وجود حل لهذا النظام غير المتجانس، وبالتالي لا يمكن استخدام أي من الطرق الثلاث السابقة، وهذه الدلائل الأربعة هي

① $rank\left(\mathrm{A}\right) \neq rank\left[\mathrm{A}|\mathrm{B}\right]$

② $rank\left(\mathrm{A}\right) = 2 \neq n = 3$

③ $\mathrm{A_R} \neq \mathrm{I}_n$

④ $|\mathrm{A}| = 0$

▲▲▲

مثال 5.13 أوجد حل النظام بطرق مختلفة

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 + 7x_3 &= 4 \end{aligned}$$

الحل نضع أولاً النظام على شكل المعادلة المصفوفية $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -5 \\ -2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

حيث

$$A=\begin{bmatrix}4 & -1 & 4\\ 1 & 1 & -5\\ -2 & 1 & 7\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 4\end{bmatrix}$$

الحل بطريقة المصفوفة الموسعة

لدينا

$$\left[A|B\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}4 & -1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & -5 & 0\\ -2 & 1 & 7 & 4\end{array}\right], \left[A|B\right]_R=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & \frac{16}{57}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{99}{57}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{23}{57}\end{array}\right]$$

وبما أن $rank\,(A)=rank\left[A|B\right]=3=n$

إذن يوجد للنظام حل وحيد، يكافيء حل النظام

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{16}{57}\\ \frac{99}{57}\\ \frac{23}{57}\end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن الحل هو

$$x_1=\frac{16}{57},\ x_2=\frac{99}{57},\ x_3=\frac{23}{57}$$

الحل بطريقة كرامر

لدينا

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -5 \\ -2 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 57, \Delta(x_1) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 16$$

$$\Delta(x_2) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -5 \\ -2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 99, \Delta(x_3) = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 23$$

وبالتالي فإن الحل الوحيد هو

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} \Delta(x_1) \\ \Delta(x_2) \\ \Delta(x_3) \end{bmatrix} = \frac{1}{57} \begin{bmatrix} 16 \\ 99 \\ 23 \end{bmatrix}$$

أو

$$x_1 = \frac{16}{57}, \quad x_2 = \frac{99}{57}, \quad x_3 = \frac{23}{57}$$

الحل بطريقة المصفوفة العكسية

بما أن $|A| = 57 \neq 0$ إذن، يمكن إيجاد المصفوفة العكسية A^{-1}، وبالتالي يمكن الحصول على الحل الوحيد $X = A^{-1}B$. بدون الدخول في التفاصيل يمكن أن نجد المصفوفة العكسية في الشكل

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{12}{57} & \frac{11}{57} & \frac{1}{57} \\ \frac{3}{57} & \frac{36}{57} & \frac{24}{57} \\ \frac{3}{57} & -\frac{2}{57} & \frac{5}{57} \end{bmatrix}$$

إذن الحل الوحيد هو

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{12}{57} & \frac{11}{57} & \frac{1}{57} \\ \frac{3}{57} & \frac{36}{57} & \frac{24}{57} \\ \frac{3}{57} & -\frac{2}{57} & \frac{5}{57} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{57} \\ \frac{99}{57} \\ \frac{23}{57} \end{bmatrix}$$

أو

$$x_1 = \frac{16}{57}, \quad x_2 = \frac{99}{57}, \quad x_3 = \frac{23}{57}$$

في الباب القادم نقدم المدخل الثاني لحل نظم المعادلات وهى الطرق التي تسمى بالطرق التكرارية، والتي تعتمد ــ أيضاً ــ على نظرية المصفوفات، وهي تعطي حلولاً تقاربية كما سنرى.

5.7 مسائل

أوجد الحل العام في حالة وجوده، وذلك لأنظمة المعادلات الجبريـــة الخطية الآتية مستخدماً ثلاث طرق إن أمكن

1. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= 6 \\ 4x_1 - 6x_2 &= 18 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= -1 \\ 3x_2 &= 4 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} x_1 + + 2x_3 &= 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 8 \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

10. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

11. $$\begin{aligned} x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + 6x_6 &= -3 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 4x_6 &= 1 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_6 &= 0 \end{aligned}$$

12. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

13. $$\begin{aligned} x_1 - 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 16 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -8 \end{aligned}$$

14. $x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + 6x_6 = 2$

****