الباب الأول

دوال المتغير المركب – النهايات – الاستمرار
Functions of Complex variables, limits, continuity

١–١ مقدمة Introduction:

إن تعريف العدد التخيلي imaginary number i والذي قيمته $\sqrt{-1}$ فـ ـتح ا ـال لتوسيع مجال الأعداد الحقيقية $\Re$ إلي الأعداد المركبة Z (ملحـ ـق أ) حيـ ـث $z=\alpha+i\beta$, $\alpha,\beta\in\Re$ وصنع هذا ما يسمى بالمتغير المركب.

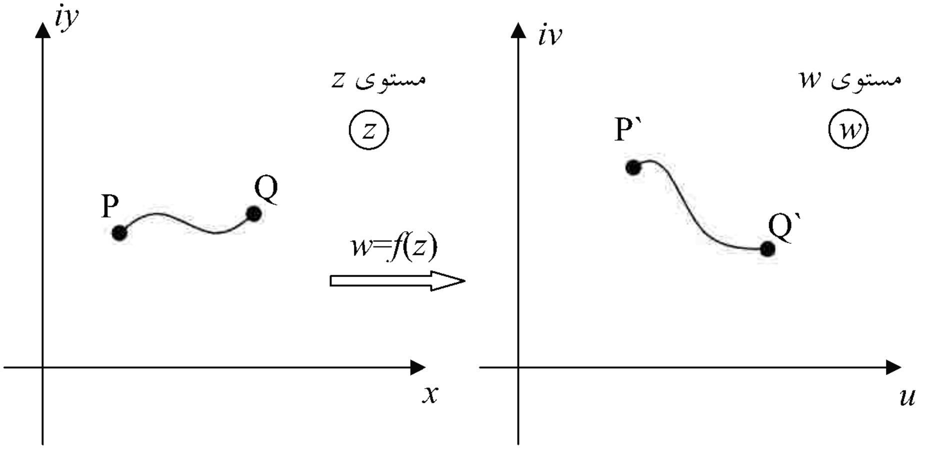
إذا كانت $(x,\ y)$ نقطة عامة في مستوى يسمى بمستوى المتغير المركب أو بالمستوى المركب وكان $z=x+iy$ وهو مستوى غير موجود لأن هياكل الإسناد فيه إحـ ـداهما حقيقي (وهو محور x) والآخر تخيلي (وهو iy) .. فهذا المستوى موجود في خيـ ـال الرياضيين فقط مثله مثل الفراغات التي أبعادها أكثر من ثلاثة حيث لا يمكن تمثيـ ـها هندسياً بشكل يمكن تخيله .. ولكن بالاستغراق في هذا الخيال اكتشفنا عالماً جديـ ـداً .. كأنه الأحلام .. ومثل الأحلام فإن بعضها مثل الرؤى ينم عن حقائق فإن هـ ـذا المستوى الخيالي ينتج واقعاً رياضياً وتطبيقات لم يكن لها حل في المستوى الحقيقـ ـي فوجدنا لها حلاً بواسطة المستوى الخيالي أو المركب complex plane.

١–٢ دوال المتغير المركب Functions of Complex Variables

١–٢–١ مقدمة

إذا كانت $z = x + iy$ فإن $w = f(z)$ تمثل علاقة بين z و w .. وتحت الـ ـشروط المعروفة للعلاقات لكي تكون دوال فإن الشروط نفسها تنتج لنـ ـا دوال المـ ـتغير المركـ ـب .. وتكون هذه الدوال وحيدة القيمة single valued إذا كانت كل قيمة لـ ـ z تنتج قيمـ ـة

وحيدة لـ w .. ويمثل هذا نوع من التحويل بين مستويين خياليين .. كما بالشكل ١-١ حيث $z = x + iy$ و $w = u + iv$



(شكل ١-١)

وهذا التحويل ينتج أشياءً فريدة غير موجودة في واقع المستوى الحقيقي وتحويلاته .. إذ لا يمكن رسم العلاقة بين z و w فى مستوى خاص بما لأن z تقع في في مستوى و w تقع فى مستوى آخر ولا يمكن رسم العلاقة بين z و w مباشرةً .. فنحن ننقل النقطة من مستوى z إلى مستوى w وهكذا ينتقل الشكل في مستوى z إلى شكل آخر في مستوى w وبينما يمثل $w = f(x,y)$ علاقة سطح surface في نظام حقيقي ثلاثي الأبعاد فإن هذه العلاقة على صورة $w = f(z)$ لا تعطى هذا المعنى إطلاقاً .. وإن كان من الممكن إطلاق علاقات الحساب التفاضلي التكاملي لدوال ذات متغيرين على العلاقة في المستوى المركب .. ولكن ليس كل العلاقات .. كما أن هناك حساباً جديداً ينشأ .. دعونا الآن نأصل فكرة التحويل المركب complex transformation عن طريق الأمثلة الآتية:

مثال ١-١:

إذا كان $w = z + \alpha$

حيث $\alpha \in z$ فإنه بوضع $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$

حيث $\alpha_1, \alpha_2 \in \Re$ فإن:

$$u + iv = (x+iy) + (\alpha_1 + i\alpha_2)$$

وبالتالي فان علاقات التحويل

$$u = x + \alpha_1$$
$$v = y + \alpha_2$$

فإذا كان الشكل في مستوى z خطياً بحيث يكون

$$y = \gamma\, x + \Gamma \quad , \qquad \gamma\,, \Gamma \in \Re$$

فإن:

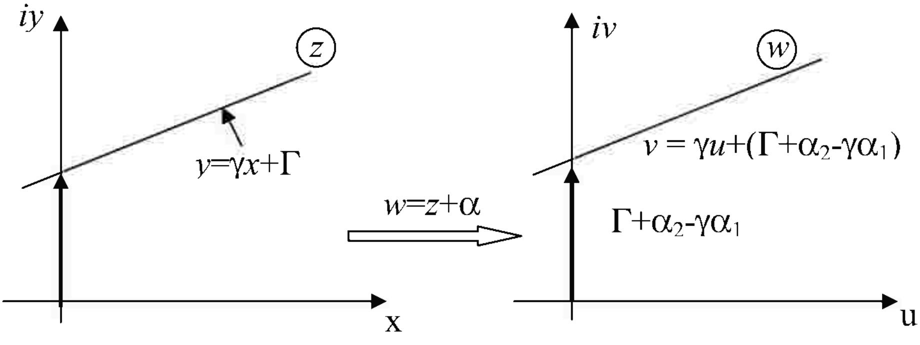
$$u = x + \alpha_1$$
$$v = y + \alpha_2 = \gamma\, x + \Gamma + \alpha_2$$

وبحذف x بين المعادلتين لـ u, v فإن:

$$v = \gamma\,(u - \alpha_1) + \Gamma + \alpha_2$$

$$\boxed{v = \gamma\, u + (\Gamma + \alpha_2 - \gamma\alpha_1)}$$

أي أن الأشكال الخطية في مستوى z تنتقل إلى أشكالٍ أيضا خطية في مستوى w كمـا يبين شكل ١-٢

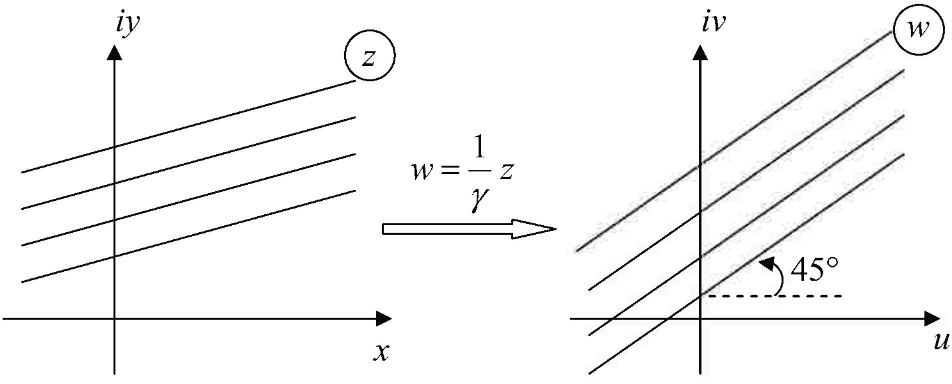


(شكل ١-٢)

ونلاحـظ أن الخطوط تنتقل بين المسـتويين بنفس الميل γ ولكن هناك تغـير في الجـزء المقطوع من المحور الرأسـي .. فإذا تغيرت العلاقة بين z و w بحيث يكون $w = \alpha\, z$ فإن تغيراً يطرأ على الميل بحيث يكون مضروباً في α في مستوى ω ويمكن استغلال هذا في تصنيع شبكة من الخطوط ذات ميل معين مرغوب فيه فمثلاً إذا كان $y = \gamma\, x + \Gamma$

فإن العلاقة
$$w = \frac{1}{\gamma} z$$

تنتج شبكة من الخطوط ذات ميل ٤٥° كما هو مبين بالشكل ١ –٣



(شكل ١–٣)

ويمكن الحصول على شبكة من الخطوط الأفقية أو الرأسية .. وهكذا باستعمال هذا التحويـ.ل الخطي.

مثال ١–٢:

لنفس العلاقة الخطية

$$\alpha \in \Re \quad , \quad w = \alpha z + \beta$$

فإن الدوائر في مستوى z تصبح دوائر أيضا في مستوى w

الإثبات: $z = x + iy$

حيث $x^2 + y^2 = a^2$ (دوائر مركزها نقطة الأصل)

وبالتالي فإن $u + iv = \alpha x + \beta_1 + i(\alpha y + \beta_2)$ حيث $\beta = \beta_1 + i\beta_2$

أي أن علاقات التحويل

$$u = \alpha x + \beta_1$$
$$v = \alpha y + \beta_2$$

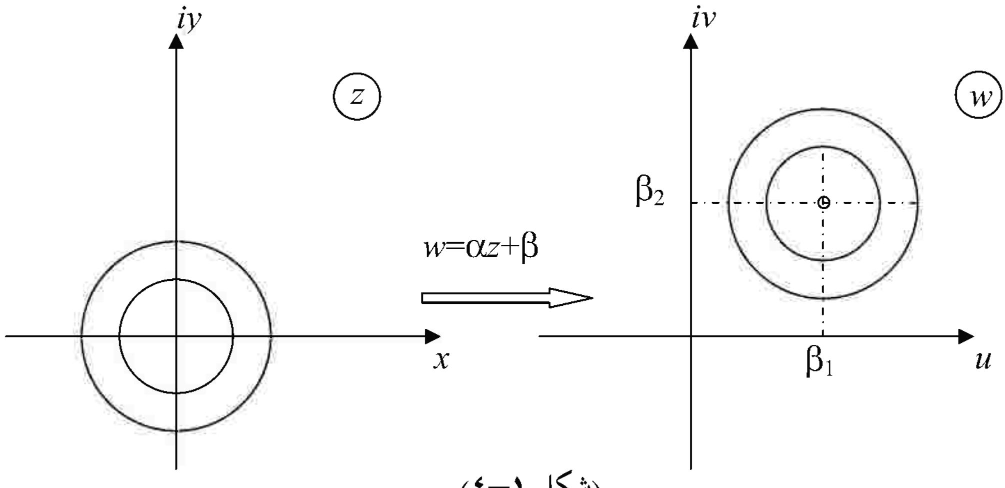
أي أن
$$x = \frac{u-\beta_1}{\alpha} \Rightarrow x^2 = \frac{(u-\beta_1)^2}{\alpha^2}$$

كذلك
$$y = \frac{v-\beta_2}{\alpha} \Rightarrow y^2 = \frac{(v-\beta_2)^2}{\alpha^2}$$

والتالي فإن:
$$a^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow a^2 = \frac{(u-\beta_1)^2}{\alpha^2} + \frac{(v-\beta_2)^2}{\alpha^2}$$

أي أن
$$(\alpha\, a)^2 = (u - \beta_1)^2 + (v - \beta_2)^2$$

وهي دوائر نصف قطرها $\alpha\, a$ ومركزها (β_1, β_2) كما يوضح الشكل ١-٤



(شكل ١-٤)

وتمثل β نقطة إزاحة المركز بينما تمثل α معامل التكبير والتصغير للدوائر.

وربما يتضح فائدة أكبر لأمثال هذه التحويلات حين نجدها قادرة على تحويل شبكة غير خطية إلى شبكة خطية أفقية ورأسية كما بالمثال التالي:

مثال ١-٣:

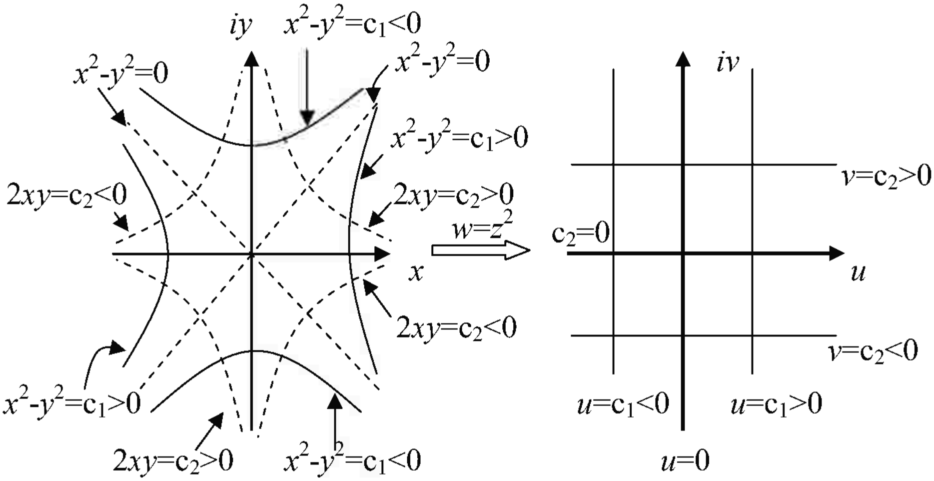
إذا كان
$$w = z^2$$

فإن علاقات التحويل
$$u = x^2 - y^2$$
$$v = 2\,xy$$

فإذا أخذنا العلاقات التي فيها u, v ثابتين فإن هذا معناه أن الأشكال غير الخطية

$$x^2 - y^2 = c_1$$
$$2xy = c_2$$

تنتج أشكال أفقية $v = c_2$ وأشكال رأسية $u = c_1$ مصاحبة لها كما بالشكل ١-٥



(شكل ١-٥)

ويتضح من الشكل أن الشبكة غير الخطية $x^2 - y^2 = c_1>0$ تتحول إلى خطوط رأسية متوازية وأن $x^2-y^2=c_1<0$ تتحول أيضاً إلى شبكة خطوط رأسية متوازية بينما تتحول $2xy = c_2$ إلى شبكة خطوط أفقية ويتحول الخطان $x^2-y^2=0$ إلى المحور التخيلي في مستوى w بينما يتحول الخطان $x = 0$ و $y = 0$ إلى المحور الحقيقي في مستوى w وهى تحويلات يمكن استغلالها في كثير من التطبيقات.

وأحياناً ينتج من هذه التحويلات دوال عديدة القيم وفيها يتم الحصول على أكثر من قيم لـ w لقيمة وحيدة z والدوال الناتجة من أمثال هذه العلاقات يمكن اعتبارها مجموعة من الدوال وحيدة القيمة a collection of single-valued functions ويطلق على كل عضو في المجموعة بالفرع branch.

مثال ١-٤:

الدالة $w = z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x+iy}$

في هذه الحالة $k = 0,1$, $w = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\left(\frac{\theta+2\pi k}{2}\right)}$

حيث $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

وبالتالي فهناك قيمتان للدالة الأولى:

$$w_o = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}} \quad (k=0)$$

وتسمى بالفرع الأساسي للدالة principal function

والأخرى:

$$w_1 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\left(\frac{\theta+2\pi}{2}\right)} \qquad (k=1)$$

$$w_1 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}}.e^{i\pi}$$

$$w_1 = -\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

ولذلك فإن $w = z^{\frac{1}{2}}$ دالة مزدوجة القيم Two-valued functions.

ملاحظة:

الدالة $w = z^{\frac{1}{n}}$, $n \in N^+$ هى دالة عديدة القيم بدرجة n n-valued function بحيث يكون

$$w_k = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)}, \; k = 0,1,2..,n-1$$

ودائما عند $k=0$ فإننا نحصل على الدالة الأساسية.

ولاحظ أن العلاقة تعطي المعادلة $w^n = z$ وهي معادلة من درجة n ولذلك فلها n من الجذور جميعها تحقق المعادلة ونلاحظ أن

$$w_k^n = \sqrt{(x^2+y^2)}\ e^{i(\theta+2\pi k)} = \sqrt{(x^2+y^2)}\ e^{i\theta}.e^{i2\pi} = r\,e^{i\theta}$$
$$= z.$$

١-٢-٢ الدوال الحدودية Polynomial Functions

وفيها يكون:

$$w = a_o + a_1 z + a_2 z^2 + .. + a_n z^n,\ a_n \in z$$

والعلاقة الخطية تحافظ على الأشكال كما برهنا سابقاً .. ولكن العلاقات غير الخطية تعطـي تغييراً وحيداً في الأشكال وقد بيننا سابقاً في بعض الأمثلة هذه التغيرات.

نظرية

التحويلة الخطية $w=\alpha z+\beta$ حيث $\alpha\in\Re$

تحافظ على شكل العلاقات في مستوى z

الإثبات:

من المعلوم أنه إذا كان $c = f(x, y)$ تمثـل شـكلاً مـا في مـستوى z فـإن $c= f(\alpha x, \alpha y)$ تمثل نفس الشكل ولكن بمقياس scale مختلف فإن الـدائرة $a^2=x^2+y^2$ تحافظ على شكلها كدائرة إذا كان $a^2=(\alpha x)^2+(\alpha y)^2$ ولكن بنصف قطر مختلف (a/α)، كذلك فأن $f(x-\alpha, y-\beta)$ تمثل نفس الشكل أيضا بنقل المحاور إلى النقطة (α,β) كانتقـال الدائرة من $a^2=x^2+y^2$ الى الدائرة $a^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2$ ، فإذا حدث التحويلان معاً فهو تغير في المقياس مصحوباً بانتقال المحاور ولكن الشكل يظل كما هو دون تغيير.

وفى حالتنا هذه فإن علاقات التحويل هى:

$$u = \alpha\, x + \beta_1 \quad , v = \alpha\, y + \beta_2$$

أي أن:

$$x = \frac{u - \beta_1}{\alpha} \quad , \quad y = \frac{v - \beta_2}{\alpha}$$

وبالتالي فإن العلاقة $f(x, y)= c$ تصبح $f\left(\dfrac{u-\beta_1}{\alpha}, \dfrac{\text{v} - \beta_2}{\alpha}\right) = c$

وهي تمثل نقلاً للمحاور الى النقطة (β_1,β_2) وتغييراً في القياس بمقدار α.

وهذا يثبت أن التحويلة الخطية تحافظ على الأشكال.

ملاحظات:

إذا كانت $\alpha \in z$ فإن معادلات التحويل تصبح:

$$u = \alpha_1 x - \alpha_2 y + \beta_1$$
$$v = \alpha_2 x + \alpha_1 y + \beta_2$$

أي أن:

$$\alpha_1 x - \alpha_2 y = u - \beta_1$$
$$\alpha_2 x + \alpha_1 y = v - \beta_2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\right)\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u-\beta_1 \\ v-\beta_2 \end{pmatrix}$$

وهي مازالت تمثل علاقات خطية بين المحاور القديمة (x, y) والجديدة (u, v)

وبالتالي تعطي نفس فصيلة الأشكال بدوران ونقل المحاور.

مثال ١–٥:

إذا كانت $w=(1+i)z$ فإن:

$$u = x - y$$
$$v = x + y$$

أي أن:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

وبالتالي فإن الدائرة $x^2 + y^2 = \mathrm{a}^2$ تصبح:

$$\frac{1}{4}(u+v)^2 + \frac{1}{4}(u-v)^2 = a^2$$
$$u^2 + 2uv + v^2 + v^2 - 2uv + u^2 = 4a^2$$

$$u^2+v^2=2a^2$$

$$u^2+v^2=\left(\sqrt{2}\ \mathrm{a}\right)^2$$

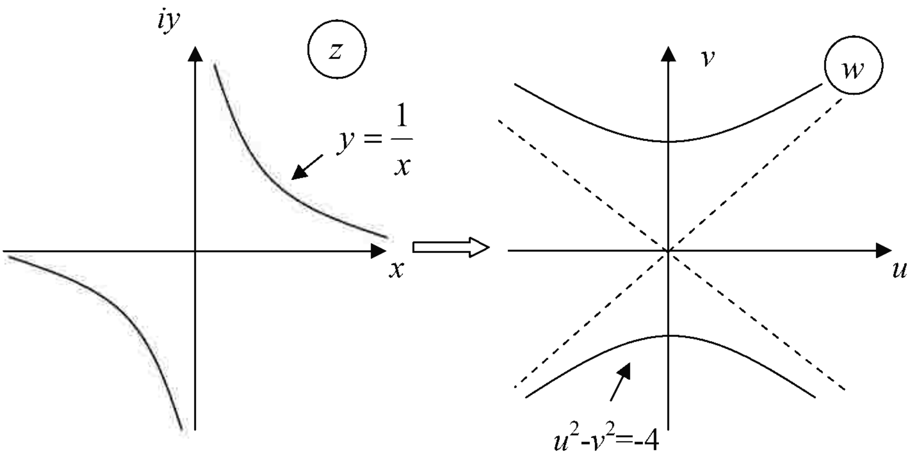
وبالتالي فإن الدوائر بنصف قطر a تتحول الي دوائر بنصف قطر $\left(\sqrt{2}\,\mathrm{a}\right)$.

كذلك فإن القطع الزائد $xy=1$ يتحول الي:

$$\frac{1}{4}(u+v)\ (v-u)=1$$

$$u^2-v^2=-4$$

وهو قطع زائد كما هو مبين بالشكل ١–٦، وهو مجرد دوران للمحاور للشكل الأصلي.



(شكل ١–٦)

١–٢–٣ الدوال النسبية الجبرية Rational Algebraic Functions

وفيها يكون $w=\dfrac{f(z)}{Q(z)}$

حيث $f(z)$ و $Q(z)$ دوال حدودية وحيث $Q(z)\neq 0$.

ومن أشهر هذه الدوال ما يسمى بمزدوج الخطية bilinear

$$w(z)=\frac{az+b}{cz+d},\ \left(\mathrm{ad-bc}\neq 0\right)$$

مثال ١–٦:

أثبت أن التحويل المزدوج الخطية

$$w = \frac{z-1}{i(z+1)}$$

يحول المحور التخيلي إلى دائرة الوحدة unit circle

الإثبات

$$w = \frac{z-1}{i(z+1)} \Rightarrow |w| = \frac{|z-1|}{|i|\,|z+1|}$$

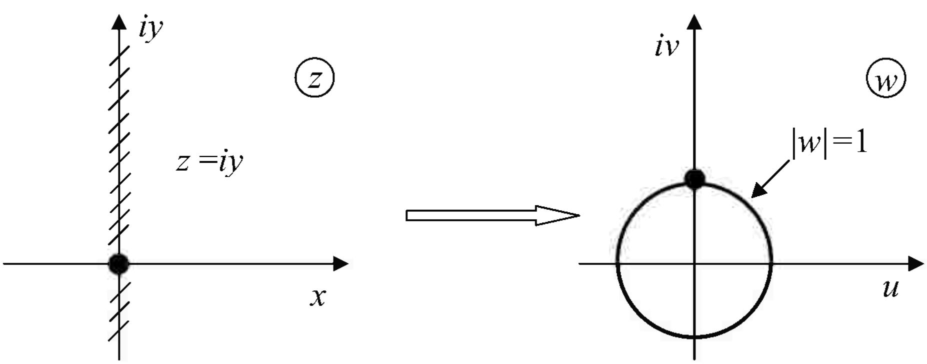
ولكن $|i| = 1$ ، كذلك بالنسبة للمحور التخيلي:

$$z-1 = iy-1 \Rightarrow |z-1| = \sqrt{1+y^2}$$

$$z+1 = iy+1 \Rightarrow |z+1| = \sqrt{1+y^2}$$

وبالتالي فإن: $|w| = 1$

وهى معادلة دائرة الوحدة. أي أن المحور التخيلي في مستوى z يتحول إلى دائرة الوحدة في مستوى w كما بالشكل ١–٧



(شكل ١–٧)

ملاحظة هامة: علاقة الدائرة في مستوى z كالآتي:

$$|z - z_0| = r$$

وهي دائرة مركزها عند z_0 ونصف قطرها r

أما العلاقة $\quad |z - z_0| + |z - z_1| = r$

فهي تعطي علاقة قطع ناقص حيث مجموع المسافتين بين أي نقطة z والقطبين z_0 و z_1 هي r.

١-٢-٤ الدالة الأسـ . . ـية Exponential Function

وتعرف كالآتي:

$$\begin{aligned} w &= e^z \\ &= e^{x+iy} \\ &= e^x \, . \, e^{iy} \\ &= e^x(\cos y + i \sin y) \end{aligned}$$

باستخدام علاقة أويلر

أي أن علاقات التحويل هي:

$$u = e^x \cos y$$
$$v = e^x \sin y$$

ولهذه الدالة الخواص الآتية:

(أ) $$e^{z_1} . e^{z_2} = e^{(z_1+z_2)}$$

الإثبات

$$\begin{aligned} e^{z_1} . e^{z_2} &= e^{x_1+iy_1} . e^{x_2+iy_2} = e^{x_1} \, e^{x_2} \, e^{iy_1} \, e^{iy_2} \\ &= e^{(x_1+x_2)} \quad e^{i(y_1+y_2)} \\ &= e^{z_1+z_2} \end{aligned}$$

(ب) $$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{\,z_1 - z_2}$$

(ج) $$|e^z| = e^x$$

الإثبات:

$$e^{z} = e^{x}\left(\cos y + i\sin y\right)$$

$$|e^{z}| = |e^{x}|\sqrt{\cos^{2} y + \sin^{2} y} = |e^{x}|$$

(د) $e^{z+2\pi ik} = e^{z}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

الإثبات:

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi ik} &= e^{z}.\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{ik}} \\ &= e^{z}.\left(\cos 2\pi \mathrm{k} + \mathrm{i}\sin 2\pi \mathrm{k}\right) \\ &= e^{z}\left(1 + i0\right) \\ &= e^{z} \end{aligned}$$

أي أن الدالة $w = e^{z}$ دالة دورية periodic بدورة قدرها $2\pi ik$.

(هـ .) $\mathrm{Arg}\,(e^{z}) = y$

وذلك لأن

$$\begin{aligned} e^{z} &= e^{x}\,(\cos y + i\sin y) \\ &= e^{x}\,.\,e^{iy} \end{aligned}$$

وهذا يعني أن e^{z} كمتغير مركب له مقدار e^{x} وسعة قدرها y.

(و) $e^{i(0)} = 1$

وذلك لأن

$$\begin{aligned} e^{i(0)} &= \cos 0 + i\sin 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

مثال ١–٧:

الدالة $w = e^{z}$ تحول الخطوط الرأسية إلى دوائر

الإثبات: بأخذ الخط الرأسي في مستوي z كالآتي: $x = c$

فإن:

$$w = u + iv = e^{x+iy} = e^{c}\,(\cos y + i\sin y)$$

إذن علاقات التحويل:

$$u = e^{c} \cos y$$

$$v = e^{c} \sin y$$

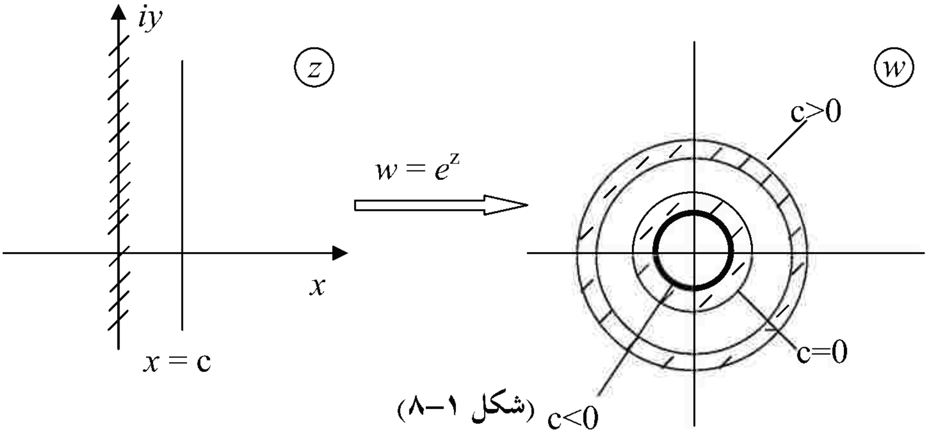
وبالتالي

$$\cos^2 y + \sin^2 y = 1 = e^{-2c}(u^2+v^2)$$

أي أن:

$$u^2 + v^2 = e^{2c}$$

وهذه علاقة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها e^{c} ولذلك فإن المحور التخيلي يتحول الى دائرة الوحدة .. وفي حالة $c > 0$ فإن الدوائر تزداد اتساعاً وفي حالة $c < 0$ فإن الدوائر تتقلص داخل دائرة الوحدة كما هو مبين بالشكل ١–٨



(شكل ١–٨)

١–٢–٥ الدوال الهندسية Trigonometric Functions

وتتبع التعريفات الآتية كما هو متبع في الدوال الحقيقية:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad , \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} \quad , \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad , \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

مع ملاحظة أن هذه الدوال لا تعبر عن نسب مثلثية كما أن z ليست زاوية .. ولكن . هما الآن مجرد علاقات ذات شبه بالعلاقات القديمة في المستوى الحقيقي.

ولهذه الدوال الخواص الآتية:

(أ) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

الإثبات:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = -\frac{1}{4}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)^2$$

$$= -\frac{1}{4}\left(e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}\right) + \frac{1}{4}\left(e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

(ب) $\sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$

الإثبات:

$$\sin\left(z_1 + z_2\right) = \frac{1}{2!}\left(e^{i\left(z_1+z_2\right)} - e^{-i\left(z_1+z_2\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{2!}\left(e^{iz_1}.e^{iz_2} - e^{-iz_1}.e^{-iz_2}\right)$$

$$= \frac{1}{2!}\left(\left(\cos z_1 + i\sin z_1\right)\left(\cos z_2 + i\sin z_2\right)\right.$$

$$\left. - \left(\cos z_1 - i\sin z_1\right)\left(\cos z_2 - i\sin z_2\right)\right)$$

(وذلك باستخدام أن $\sin(-z) = -\sin z$

$\cos(-z) = \cos z$

.. بغض النظر عن التسميات فردي وزوجي)

$$= \frac{1}{2i}[\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$+ i\left(\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2\right)$$

$$- \cos z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \sin z_2$$

$$+i(\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2)]$$

$$=\frac{1}{2}(2\sin z_1 \cos z_2 + 2\cos z_1 \sin z_2)$$

$$=\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

وبالمثل فكل العلاقات الشبيهة مازالت سارية مثل

- $\sin(z_1 - z_2) = \sin z_1 \cos z_2 - \cos z_1 \sin z_2$
- $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \ \mu \sin z_1 \sin z_2$
- $\tan(z_1 \pm z_2) = \dfrac{\tan z_1 \pm \tan z_2}{1 \quad \mu \tan z_1 \tan z_2}$
- $1+\tan^2 z = \sec^2 z$

وعلى القارئ محاولة إثبات هذه العلاقات كنوع من التمرين ..

وأكرر أن هذه العلاقات مجرد تشابه بين الدوال الحقيقية والدوال المركبة.

مثال ١-٨:

أثبت أن أصفار الدالة w=sin z والدالة w=cos z كلها حقيقية وأوجدها.

الحل:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \Rightarrow e^{iz} = e^{-iz} \Rightarrow e^{2iz} = 1 = e^{2\pi ik}$$

أذن $2iz = 2\pi ik$

أي أن: $z = \pi k\ ,\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

وكلها حقيقية.

كذلك:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i} = 0 \Rightarrow e^{iz} = -e^{-iz} \Rightarrow e^{2iz} = -1 = e^{(2k+1)\pi i}$$

$$2z = (2k+1)\pi$$

$$z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, \qquad k = 0, \pm1, \pm2, ..$$

وكلها حقيقية

وعلى ذلك يتضح أن الدوال الحقيقية sin x و cos x تتفق مع الدوال المركبة sin z و cos z في نفس الأصفار على الترتيب.

مثال ١-٩:

أثبت أن:

$$\lim_{z\to\infty} |\cos z| \to \infty$$

الإثبات:

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-iz}\right)$$

$$|\cos z| = \frac{1}{2}\left|e^{iz} + e^{-iz}\right| \le \frac{1}{2}\left|e^{iz}\right| + \frac{1}{2}\left|e^{-iz}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|e^{-y}.e^{ix}\right| + \frac{1}{2}\left|e^{y}.e^{-ix}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|e^{-y}\right| + \frac{1}{2}\left|e^{y}\right|$$

حيث $\therefore \left|e^{i\theta}\right| = 1$

وبالتالي:

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ \left(\begin{smallmatrix} x\to\infty \\ y\to\infty \end{smallmatrix}\right)}} |\cos z| \le \infty$$

ووجود التساوي يعني أن:

$$\lim_{z\to\infty} |\cos z| \to \infty$$

أي أن هذه الدالة لم تعد محدودة كما كانت في المستوي الحقيقي.

مثال ١–١٠:

الدالة $w = \sin z$ دالة دورية ودور لها 2π.

الإثبات:

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

$$\sin(z+2\pi) = \frac{1}{2i}\left(e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{iz}\, e^{i2\pi} - e^{-iz} e^{-iz\pi}\right)$$

ولكن $e^{\pm i2\pi}=1$ .. إذن

$$\sin(z+2\pi) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = \sin z$$

أي أن الدالة $\sin z$ دالة دورية ودور لها قدره 2π. وبالمثل الدالة $w = \cos z$.

(ج) $\cos(0) = 1 \quad , \quad \sin(0) = 0$

١–٢–٦ الدوال الزائدية Hyperbolic functions

وهي تتبع التعريفات الآتية:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad , \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z} \quad , \quad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z}$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} \quad , \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$$

ولها الخواص الآتية:

(أ) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

(ب) $1 - \tanh^2 z = \operatorname{sech}^2 z$

(ج) $\coth^2 z - 1 = \text{csch}^2 z$

(د) $\sinh(-z) = -\sinh z$

(هـ) $\cosh(-z) = \cosh(z)$

(و) $\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2$

(ز) $\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2$

(ح) $$\tanh(z_1 \pm z_2) = \frac{\tanh z_1 \pm \tanh z_2}{1 \pm \tanh z_1 . \tanh z_2}$$

وهناك علاقات أخري هامة كالآتي:

(أ) $e^{iz} = \cos z + i \sin z$

(ب) $e^{z} = \cosh z + \sinh z$

(ج) $\sin i z = i \sinh z$,

$\sinh i z = i \sin z$

(د) $\cos i z = \cosh z$,

$\cosh i z = \cos z$

(هـ) $\tan i z = i \tanh z$

$\tan i z = i \tanh z$

مثال ١-١١:

أوجد u, v للدالة $w = \sin z$

الحل:

$$w = \sin z = \sin(x + iy)$$
$$= \sin x \cos iy + \cos x \sin iy$$
$$= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

وبالتالي فإن:

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \sin x \cosh y \\ v &= \cos x \sinh y \end{aligned}}$$

مثال ١-١٢:

أثبت أن:

$$|\cos z| = \sqrt{\frac{1}{2}(\cos 2x + \cosh 2y)}$$

الإثبات:

$$\begin{aligned}
\cos z &= \cos(x + iy) \\
&= \cos x \cos iy - \sin x \sin iy \\
&= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\cos z|^2 &= \cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y \\
&= \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\cosh^2 y + \frac{1}{2}(1 - \cos 2x).\sinh^2 y \\
&= \frac{1}{2}\left(\cosh^2 y + \sinh^2 y\right) + \frac{1}{2}\cos 2x\left(\cosh^2 y - \sinh^2 y\right) \\
&= \frac{1}{2}\cosh 2y + \frac{1}{2}\cos 2x(1) \\
&= \frac{1}{2}(\cos 2x + \cosh 2y)
\end{aligned}$$

أي أن:

$$|\cos z| = \sqrt{\frac{1}{2}(\cos 2x + \cosh 2y)}$$

ملاحظة: وعلى هذا يتضح أيضا أن الدالة cosz ليست محدودة بالنسبة لـ y . لأن:

$$\lim_{y \to \infty} \cosh 2y \to \infty$$

مثال ١-١٣:

أوجد شكل التحويل $w = \sin z$ لخطوط أفقية في مستوى z

الحل

الخط الأفقي في مستوى z .. $y = c$

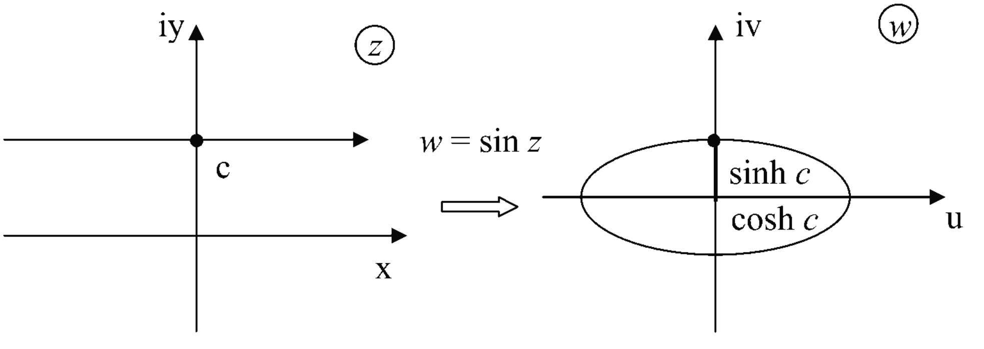
ومن علاقات التحويل السابق الحصول عليها في مثال ١-٩:

$$u = \sin x \cosh c$$
$$v = \cos x \sinh c$$

وبالتالي فإن:

$$\frac{u^2}{\cosh^2 c} + \frac{v^2}{\sinh^2 c} = 1$$

وهي علاقة قطع ناقص كما هو مبين بالشكل ١-٩



(شكل ١-٩)

١-٢-٧ الدالة اللوغاريتمية Logarithmic Function

وتعرف كالآتي: $w = \ln z$

وهي معكوس الدالة $z = e^w$ .. على أن الدالة $w = \ln z$ هي دالة عديدة القيم وذلك لأن:

$$w = \ln z = \ln r\, e^{i\theta} = \ln r\, e^{i(\theta+2\pi k)}$$
$$= \ln r + i(\theta+2\pi k) \ , \qquad k = 0, \pm1, \pm2, ..$$

وعلاقات التحويل هي:

$$u = \ln r$$
$$v = \theta+2\pi k$$

ونحصل على القيمة الأساسية للدالة عندما يكون $k = 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi$

ملاحظات:

(i) بشكل عام فإن $z = a^{w}$ تنتج $w = \log_a z,\ a > 0,\ a \neq 1$

(ii) يمكن كتابة $z = e^{\ln a^{w}}$

$$z = e^{w \ln a}$$

وبالتالي فإن: $\ln z = w \ln a$

أي أن: $w = \dfrac{\ln z}{\ln a}$

وبالتالي فإن: $w = \log_a z = \dfrac{\ln z}{\ln a}$

أي أنه يمكن صياغة الدوال اللوغاريتمية بشكل عام عن طريق الدالة $\ln z$.

(iii) باستغلال العلاقة السابقة فإن:

$$w = \log_a z = \frac{\ln z}{\ln a} = \frac{\ln r}{\ln a} + i\frac{(\theta + 2\pi k)}{\ln a}$$

أي أن علاقات التحويل:

$$u = \frac{\ln r}{\ln a}$$

$$v = \frac{\theta + 2\pi k}{\ln a}, \qquad k = 0, \pm 1, .., \qquad \underline{a \neq 1}$$

مثال ١-١٤:

أثبت أن التحويل $w = \ln z$ تحويل الدوائر في مستوى z إلى خطوط رأسية في مستوى w.

الإثبات:

العلاقة $w = \ln z$ تعطي:

$$u = \ln r, \qquad v = \theta + 2\pi k$$

وبأخذ الدالة الأساسية فقط $(k = 0)$ فإن:

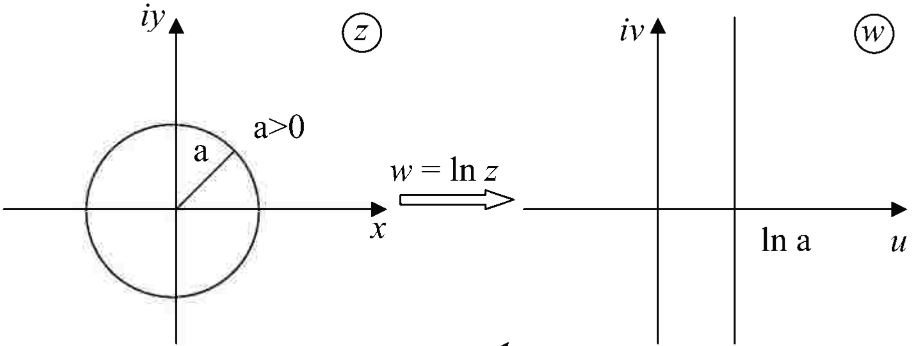
$$u = \ln r$$
$$v = \theta$$

وبالتالي فإن: الدائرة في مستوى z: وليكن $|z| = r = a$

فإن $u = \ln a = \text{constant}$

$v = \theta$

أي أن العلاقة هي $u =$ ثابت وهي علاقة خط رأسي كما هو مبين بشكل(١ – ١٠)



(شكل ١–١٠)

وفي حالة كون $a < 1$ فإن $u = \ln a < 0$ في الجزء السالب من المستوى w وفي حالة $a > 1$ فإن $u=\ln a>0$ في الجزء الموجب من المستوى w.

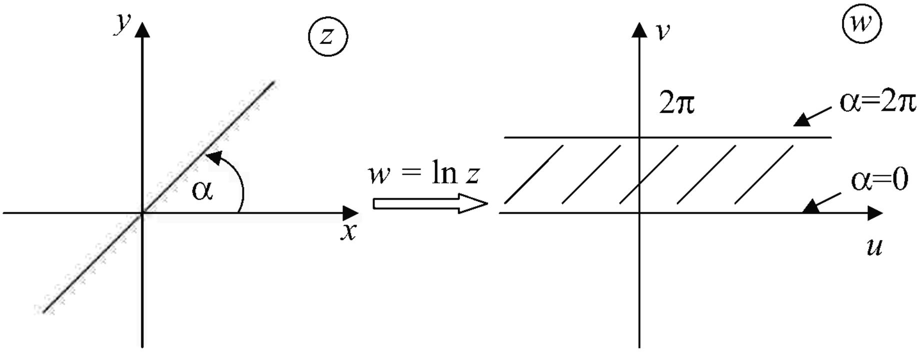
مثال ١–١٥:

في نفس المثال السابق .. ماذا يحدث إذا كانت الخطوط في مستوى z تمر بنقطة الأصل؟

الحل:

في هذه الحالة فإن (ثابت) $\theta = \alpha$ (كم هو مبين بشكل ١ –١١)

وبالتالي فإن $v = \theta = \alpha$ تعطي خطوط أفقية.



(شكل ١-١١)

ونلاحظ هنا أن المستوى z كله قد تحول إلى شريحة محصورة بين $v=0$ و $v = 2\pi$ في مستوى w.

١-٢-٨ الدوال المثلثية العكسية Inverse Trigonometric Functions

وتعرف كالآتي:

$$\sin^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right) \qquad \cos^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$$

$$\tan^{-1} z = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \qquad \cot^{-1} z = \frac{1}{2i}\ln\frac{z+i}{z-i}$$

$$\sec^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right) \qquad \csc^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(\frac{i+\sqrt{z^2-1}}{z}\right)$$

علما بأن التعريفات المكتوبة هي للفرع الأساسي فقط .. إذ أن هذه الدوال بشكل عام دوال متعددة القيم.

مثال ١-١٦:

إذا اخترنا أن $\sin^{-1}0 = 0$ اثبت أن الدالة (الفرع الأساسي) $\sin^{-1}z$ هو

$$\sin^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$$

الإثبات:

$$w = \sin^{-1} z \Rightarrow z = \sin w$$

أذن:

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

أي أن:

$$e^{iw} - e^{-iw} = 2iz$$
$$e^{iw} - 1 = 2iz\, e^{iw}$$
$$e^{2iw} - 2iz\ \ e^{iw} - 1 = 0$$

وبالتالي:

$$e^{iw} = \frac{2iz \pm \sqrt{4 - 4z^2}}{2} = iz \pm \sqrt{1 - z^2}$$

وبالتالي فإن:

$$e^{i(w - 2\pi k)} = iz + \sqrt{1 - z^2}$$

$$i(w - 2\pi k) = \ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right), k = 0, \pm 1, \pm 2, ..$$

or

$$w = 2\pi k + \frac{1}{i}\ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$$

لجعل $\sin^{-1}0 = 0$ فإن $k=0$ وبالتالي:

$$w = \frac{1}{i}\ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$$

١-٢-٩ الدوال الزائدية العكسية Inverse Hyperbolic Functions

ويعرف الفرع الأساسي منها كالآتي:

$$\sinh^{-1} z = \ln\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right) \qquad \cosh^{-1} z = \ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z} \qquad \coth^{-1} z = \frac{1}{2}\ln\frac{z+1}{z-1}$$

$$\operatorname{sech}^{-1} z = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - z^2}}{z}\right) \qquad \operatorname{csch}^{-1} z = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{z^2 + 1}}{z}\right)$$

مثال ١-١٧:

أثبت أن $\tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$

الإثبات:

$$w = \tanh^{-1} z \Rightarrow z = \tanh w$$

$$= \frac{\sinh w}{\cosh w}$$

$$= \frac{e^{w} - e^{-w}}{e^{w} + e^{-w}}$$

$$= \frac{e^{2w} - 1}{e^{2w} + 1}$$

وبالتالي

$$z + ze^{2w} = e^{2w} - 1$$

$$e^{2w}(z-1) = -1 - z$$

$$e^{2w} = \frac{1+z}{1-z}$$

وبالتالي

$$2w = \ln\frac{1+z}{1-z}$$

أي أن

$$w = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$$

١-٢-١٠ الدوال $\mathbf{w = z^{\alpha}, \quad \alpha \in z}$

وهى دوال متعددة القيم ويمكن كتابتها على الصورة اللوغاريتمية

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \ln z}$$

فإذا ما كانت $\alpha \in N$ فإ ا تصبح وحيدة القيمة.

وللحصول على معادلات التحويل فإننا نجري الآتي:

$$(z)^{\alpha}=u+iv=e^{\alpha \ln z}=e^{(\alpha_1+i\alpha_2)(\ln r+i(\theta+2\pi k))}$$
$$=e^{(\alpha_1 \ln r-\alpha_2(\theta+2\pi k))+i(\alpha_2 \ln r+\alpha_1(\theta+2\pi k))}$$
$$=e^{(\alpha_1 \ln r-\alpha_2(\theta+2\pi k))}[\cos(\alpha_2 \ln r+\alpha_1(\theta+2\pi k))+i\sin(\alpha_2 \ln r+\alpha_1(\theta+2\pi k))$$

وبالتالي فإن:

$$u=e^{(\alpha_1 \ln r-\alpha_2(\theta+2\pi k))}\cos(\alpha_2 \ln r+\alpha_1(\theta+2\pi k))$$
$$v=e^{(\alpha_1 \ln r-\alpha_2(\theta+2\pi k))}\sin(\alpha_2 \ln r+\alpha_1(\theta+2\pi k))$$
$$k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

وفي حالة انتماء $\alpha \in \Re$ فان $\alpha_2=0$ وبالتالي

$$u=e^{\alpha_1 \ln r}\cos(\alpha_1(\theta+2\pi k))$$
$$v=e^{\alpha_1 \ln r}\sin(\alpha_1(\theta+2\pi k))$$

حيث $\alpha_1=\alpha \in \Re$

مثال ١-١٨:

أوجد علاقات التحويل للدالة: $w=z^{i}$

الحل:

$$w=z^{i}=e^{i\ln z}$$
$$=e^{i(\ln r+i(\theta+2\pi k)}$$
$$=e^{-(\theta+2\pi k)}\,e^{i\ln r}$$
$$=e^{-(\theta+2\pi k)}(\cos \ln r+i\sin \ln r)$$

إذن

$$\boxed{\begin{aligned}u&=e^{-(\theta+2\pi k)}\cos \ln r\\ v&=e^{-(\theta+2\pi k)}\sin \ln r\end{aligned}}\qquad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

وعلى هذا فإن

i) $$(i)^{i}=e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}(\cos 0+i\sin 0),\qquad i=e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$=e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}$$

والغريب أن $(i)^i$ قيمة حقيقية بحتة.

ii) $$(a)^i = e^{-(0+2\pi k)} (\cos \ln |a| + i \sin \ln |a|), \; a \in \Re^+, \;\; z = |a|\, e^{i(0)}$$
$$= e^{-2\pi k} (\cos \ln |a| + i \sin \ln |a|)$$
$$(a)^i = e^{-(\pi+2\pi k)} (\cos \ln |a| + i \sin \ln |a|) \; a \in \Re^-, \;\; z = |a|\, e^{i(\pi)}$$

وبالتالي فإن

$$(1)^i = e^{-2\pi k} (\cos 0 + i \sin 0)$$
$$= e^{-2\pi k}$$

أي أن الكمية $(1)^i = e^{-2\pi k}$ كمية حقيقية بحتة.

مثال ١-١٩:

التحويلة $w = z^i$ تحول دائرة الوحدة في مستوى z إلى القطعة المستقيمة $[e^{-2\pi}, 1]$، بأخذ الفرع الأساسي فقط.

الإثبات

$$w = z^i = e^{-(\theta+2\pi k)} (\cos \ln r + i \sin \ln r)$$

وعند $k=0$ فإن

$$w = e^{-\theta} (\cos \ln r + i \sin \ln r)$$

وبالنسبة لدائرة الوحدة فإن $\quad |z| = 1$

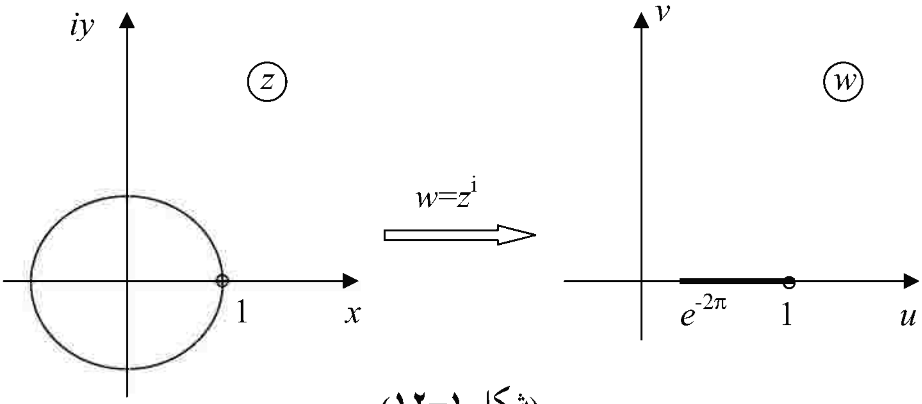
أي أن $r = 1$ وبالتالي

$$w = e^{-\theta} (1 + i\, 0)$$

أي أن $\quad u = e^{-\theta}$

$$v = 0$$

وبالتالي فعند تغير θ من صفر الي 2π فإن u تتغير من 1 الي $e^{-2\pi}$ والـ شكل الآتي يوضـح التحويل.



(شكل ١-١٢)

١-٢-١١ النقط الفرعية Branch Points

دعنا نقدم للموضوع باستخدام الدالة $w=z^{\frac{1}{3}}$ فإن قيمة w عند النقطة A على المسار C في مستوي z والتي تتميز بأن $\theta = \theta_1$ عندها فإن $w_1=(r)^{\frac{1}{3}}e^{i\left(\frac{\theta_1}{3}\right)}$ لأن $z = re^{i\theta_1}$ عند هذه النقطة. فإذا ما دارت الزاوية θ_1 الى دورة كاملة بحيث تصبح $\theta_1+2\pi$ فإن

$$w=(r)^{\frac{1}{3}}e^{i\left(\frac{\theta_1+2\pi}{3}\right)}$$

ونكتشف منها أن $w=w_2=(r)^{\frac{1}{3}}e^{i\left(\frac{\theta_1}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)}$ وهي قيمة تختلف عن القيمة w_1 .. فإذا ما أخذنا دورة أخرى بحيث تكون زاوية z هي $\theta_1+4\pi$ فإن $w=(r)^{\frac{1}{3}}e^{i\left(\frac{\theta_1+4\pi}{3}\right)}$ ونكتشف أيضا قيمة ثالثة لـ w حيث

$$w=w_3=(r)^{\frac{1}{3}}e^{i\left(\frac{\theta_1}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)}$$

ولكن هل يستمر الوضع على ذلك .. فإذا أخذنا $\theta_1+6\pi$ فإن

$$w=(r)^{\frac{1}{3}}e^{i\left(\frac{\theta_1}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)}=(r)^{\frac{1}{3}}e^{i\left(\frac{\theta_1}{3}+2\pi\right)}$$
$$=(r)^{\frac{1}{3}}e^{i\left(\frac{\theta_1}{3}\right)}$$
$$=w_1$$

أي أننا نكون قد عدنا مرة أخرى إلى القيمة الأولى .. وهكذا أيضا بالنسبة لـ دورة أخـ ـرى $\theta_1+8\pi$ إذ نصل إلى $w=w_2$ وعند $\theta_1+10\pi$ نصل الى w_3 .. فهناك ثلاث قيم مـ ـستقلة عن بعضها البعض تعتبر هي التحويل من z الى $w=z^{1/3}$.

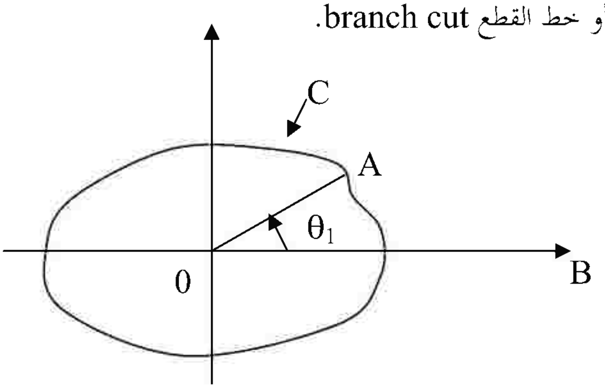
ونصف النتائج التي توصلنا إليها كالآتي:

في حالة $0\leq\theta<2\pi$ هناك فرع من الدالة $w=z^{1/3}$

في حالة $2\pi\leq\theta<4\pi$ هناك فرع ثاني من الدالة $w=z^{1/3}$

في حالة $4\pi\leq\theta<6\pi$ هناك فرع ثالث من الدالة $w=z^{1/3}$

أي أن الدالة $w=z^{1/3}$ دالة عديدة القيم وتتميز بوجود ثلاث فروع مختلفة لها .. كل فـ ـرع محدد بمنطقة مختلفة للزاوية θ. النقطة التي قيم الدوران حولها لتصنع ذلك تسمى بنقطة التفرع branch point وكل فرع من الدالة هو دالة وحيدة القيمة single-valued وللحفـ ـاظ على حد بين كل فرع للدالة والفرع الأخر نصنع خطاً افتراضياً لا يجب تعديه لنظل في الفرع الواحد وهو خط اختياري ويمكن أخذ الخط OB في شكل ١–١٣ ليكون هذا الخط ويسمى بخط التفرع أو خط القطع branch cut.



(شكل ١–١٣)

وفي الشكل السابق فإن $z=0$ هي نقطة تفرع للدالة $w=z^{1/3}$ بينما الخط OB (واصل الى مالا نهاية) هو خط التفرع أو خط القطع .. ولا يوجد نقطة تفرع أخرى محددة لهذه الدالة .. ولكن الدالة $w=(z-z_0)^{1/3}$ لها نقطة تفرع عند $z=z_0$ وليس عند $z=0$ إذ هي النقطة التي تسمح بالدوران حولها والحصول على الفروع المستقلة الأخرى.

وهكذا نكون قد حددنا مفهوم التفرع ونقاط التفرع وخط القطع الفاصل بين الفروع. وقد جمع ريمان كل هذا في تصور مدهش بتكوين ما يسمى بسطح ريمان Riemann Surfaces .. فإذا تصورنا أن ثلاثة مستويات لـ z يتم قطعها عند الخط OB ثم يتم لحمها بطريقة تجعل الثلاثة مستويات متصلة .. بذلك نحصل على سطح مستمر له ثلاث مستويات متصلة ببعضها البعض ومن هنا جاءت التسمية للخط OB الوهمي بالقطع cut. وسطح ريمان هذا له شريحتان في حالة $w=z^{1/2}$ وثلاث شرائح في حالة $w=z^{1/3}$ و n من الشرائح في حالة $w=z^{1/n}$ وعدد لا نهائي من الشرائح في حالة $w = \ln z$.

١-٢-١٢ النهايات Limits

يجري التعريف المعتاد للنهاية على الدالة وحيدة القيمة f(z) كالآتي:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \ell$$

إذا كان

$$|z - z_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(z) - \ell| < \in$$

لأي عدد موجب $\in$ ولأي عدد موجب δ .. أي أن $f(z)$ تقترب من ℓ, ℓ approaches، إذا ما اقتربت z من z_0, z_0 approaches، ويجب أن تكون النهاية مستقلة عن الطريقة التي تؤول فيها z الي z_0 .. فإذا كانت هذه النهاية موجودة exists فهي فريدة unique. وفي حالة كون $f(z)$ عديدة القيم فإن قيمة النهاية قد تعتمد على الفرع .. أي أن لكل فرع نهاياته المستقلة عن الفرع الأخر.

فإذا ما آلت $z_0 \to \infty$ فإن تعريف النهاية يأخذ الشكل الآتي:

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \ell$$

إذا كان

$$|z| > M \;\Rightarrow\; |f(z) - \ell| < \in$$

لأي $\in > 0$ و $M > 0$.

كذلك فإن $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$

إذا ما كان $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > N$

لأي عدد موجب $\delta > 0$ و $N > 0$.

والنهايتان الآتيتان متساويتان

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \lim_{w \to 0} f\left(\frac{1}{w}\right)$$

ويحكم النهايات النظريات الآتية (باختصار):

إذا ما كان $\lim_{z \to z_o} f(z) = A$ و $\lim_{z \to z_o} g(z) = B$

فإن

(i) $$\lim_{z \to z_o} f(z) \pm g(z) = A \pm B$$

(ii) $$\lim_{z \to z_o} f(z)g(z) = A.B$$

(iii) $$\lim_{z \to z_o} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B}$$

حيث $B \neq 0$.

مثال ١-٢٠:

اثبت أن $\lim_{z \to 0} \frac{\bar{z}}{z}$ غير موجود ($\nexists$)

الإثبات:

نعلم أنه إذا ما كانت هناك قيمة للنهاية فلا بد أن تكون فريدة ودعنا نوجد هذه النهاية على مسارين مختلفين

i) المسار الأول Pass 1: على المحور الحقيقي $y = 0$

أي أن $z = x$ وبالتالي $\bar{z} = x$ أيضا و $z \to 0$ تكافئ $x \to 0$ .. أي أن

$$\lim_{z \to 0} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$$

ii) المسار الثاني Pass 2: على المحور التخيلي $x = 0$

أي أن $z = iy \quad , \quad \bar{z} = -iy$

وبالتالي فإن $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\bar{z}}{z} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\text{iy}}{\text{- iy}} = \text{-1}$

أي أن قيمة النهاية تعتمد على المسار .. وذلك مستحيل وبالتالي فلابد أن نقول أن النهاية غير موجودة أصلا أي أن:

$$\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z} \quad \nexists$$

١-٢-١٣ الاتصال (الاستمرار) Continuity

مازلنا نسير في نفس فلك التعريفات الأساسية التي سبق استعمالها في حالة الدوال الحقيقية .. فإن $f(z)$ تعتبر دالة متصلة عند النقطة z_0 إذا

1. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) \exists$
2. $f(z_0) \exists$
3. $f(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$

ولا غرابة إطلاقا في استعمال هذه المفاهيم فلقد سبق استعمالها في حالة الأعـداد الحقيقيـة .. وبالتالي فإن $f(z)$ دالة مستمرة في منطقة R من مستوى z إذا ما كانت مـستمرة في كـل النقاط في R ، $\forall$ points $\in$ R .. أيضا فإنه إذا ما كانت $f(z)$, $g(z)$ دالتان متصلتان عند النقطة $z=z_0$ فإن $f(z)\pm g(z)$ دالة متصلة و $f(z).g(z)$ دالة متصلة و $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ دالـة متصلة بشرط أن $g(z_0)\neq 0$ .. وبناءً على استعمالنا نفس المفاهيم فإن نفس النتـائج تقريبـاً نحصل عليها كالآتي:

(i) الحدوديات في z والدوال z^n , cos z , sin z , e^z كلها دوال متصلة في كـل النقاط continuous everywhere.

(ii) إذا كانت $f(z), g(z)$ دالتان متصلتان فإن $g(f(z))$ تكون دالة متصلة.

(iii) إذا كانت $f(z)$ دالة متصلة فإن u , v دوال متصلة أيضا حيث $f(z)=u+iv$

(iv) إذا كانت $f(z)$ دالـة متـصلة في منطقـة مغلقـة closed region R فـإن $|f(z)| < M$ أي أ ا دالة محدودة.

وكالمعتاد فإنه إذا ما كانت $f(z)$ متصلة عند $z=z_0$ فإننا نعرف أن

$$|z-z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \in$$

فإذا ما كنا نستطيع الحصول على δ معتمدة على $\in$ وليس على النقطة z_0 فإننا نقول أن الاستمرار منتظم uniformly continuous..

وإذا كانت $f(z)$ مستمرة في منطقة مغلقة Closed region فإ ا تكون مستمرة بانتظام في هذه المنطقة.

١-٢-١٤ المتتابعات والمتسلسلات

يتبع تعريف المتتابعة وكو ا متقاربة أو متباعدة نفس الأسلوب المتبع للأعداد الحقيقية .. فلا جديد في هذا الموضوع .. فأنه إذا كانت

$$w_0, w_1, w_2, \ldots w_n, \ldots$$

متتابعة من الأعداد المركبة فإنه $\lim_{n\to\infty} w_n = \ell$

إذا كان لأي عدد موجب $\in > 0$ نستطيع إيجاد عدد N معتمـداً علـى $\in$ بحيـث يكـون $|\omega_n - \ell| < \in$ لكل $n>N$. ولا جديد في هذا. فإذا ما وجدت هذه النهاية فـإن المتتابعـة متقاربة convergent وإذا لم يكن كذلك فإ ا متباعدة divergent.

وكذلك فإن $S_n = \sum_{i=0}^{n} w_i$

تكون متسلسلة محدودة فإذا آلت n الي ∞ فان المتسلسلة تصبح لا ائية وهي إما متقاربـة أو متباعدة كالمعتاد.

. . . .

تمرينات – ١

١) اثبت أن التحويل $w=\frac{1}{z}$ يحول الدوائر ذات المركز $(0,0)$ في مستوى z الى دوائر ذات المركز $(0,0)$ في مستوى w.

٢) بين أن الخطوط الأفقية في مستوى z تتحول إلى قطع ناقص في مستوى w عندما يكون $w = \sin z$ وما هو تحويل الخطوط الرأسية وما هو التغير الذي سيطرأ على التحويل بأخذ $w=\sin\bar{z}$.

٣) إذا كان $w = u + iv$ فأوجد u, v عندما

$$i)\ w=\frac{a}{z}+z \quad , \quad ii)\ w=ae^{z}$$
$$iii)\ w=z^{4} \quad , \quad iv)\ w=\ln(z-z_0)$$

٤) إذا كان $w=\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)$ فأوجد تحويل الأشكال الآتية في مستوى z

$$i)\ |z|=R$$
$$ii)\ Arg\ z=\alpha \quad , \quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$$

حيث α : ثابت

$$iii)\ Arg\ z=-\frac{\pi}{2}$$

٥) إذا كانت $w=e^{i\theta_0}\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$ بحيث يكون

$$\lim_{z\to\infty} w=-1 \quad , \quad \lim_{z\to i} w=0$$

فأوجد $w(z)$.

٦) اثبت أن التحويلة $w = az + b \ , \ a,b\in z$ تحافظ على الأشكال الدائرية.

٧) أوجد النقاط الثابتة للتحويلة $w=\frac{2z-5}{z+4}$

ملاحظة: النقاط الثابتة هي التي عندها w = z

الجواب $(z = -1\pm 2i)$

٨) إذا كانت $w=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ .. فأوجد صورة التحويلة التي تحول النقاط z = 0, -i, -1
إلى w = i, 1, 0 على الترتيب.

الجواب $w=\dfrac{i(1+z)}{1-z}$

٩) في المسألة السابقة أوجد التحويل الذي يحول (-i, 0, i) إلى (-1, i, 1) على الترتيب ..
ومن ثم أوجد صورة المحور التخيلي في مستوى z.

الجواب $w=\dfrac{z-1}{i(1+z)}$، دائرة

١٠)اثبت أن التحويلة المزدوجة الخطية $w=e^{i\theta}\,\dfrac{z-\alpha}{\overline{\alpha}\,z-1}$ حيث $|\alpha|<1$ تحول

(i) $|z| = 1$ إلى $|w| = 1$

(ii) $|z| < 1$ إلى $|w| < 1$

ملاحظة: (ضع $z=e^{i\psi}$, $\alpha=be^{i\lambda}$ حيث $0<b<1$ ثم أوجد $|w|^2$ لإثبات (i)
وضع $z=re^{i\psi}, r<1$ في حالة (ii).

١١)أوجد a, R في $w=\dfrac{az-1}{z-i}$ التي تحول $|z| = 1$ إلى $|w|=R$

الجواب ($R=1$, $a = -i$)

١٢)إذا كانت z_0 نقطة في نصف مستوى z الأعلى ($z_0=x_0+iy_0,\ y_0>0$) فبين أن
$w=e^{i\theta_0}\,\dfrac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$ تحول نصف المستوى الأعلى في مستوى z إلى القرص $|w|\le 1$.

١٣)اثبت أن $w=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ (ما يسمى بمزدوج الخطية) يحافظ على الأشكال الدائرية.

١٤)اثبت أن $w=\dfrac{z-\frac{1}{2}i}{-\frac{1}{2}i\,z-1}$ تحول الدائرة $|z| = 1$ إلى الدائرة $|w| = 1$.

١٥)اثبت المتطابقات الهامة للدوال المركبة المثلثية والزائدية.

١٦) أوجد أصفار الدوال $\sin z$ و $\sinh z$ و $\cos z$ و $\cosh z$

١٧) ناقش وجود النهايات الآتية

i) $\sin \bar{z}$ عند الصفر　　ii) $\cos \bar{z}$ عند الصفر

iii) $e^{\bar{z}/z}$ عند الصفر

١٨) اثبت أن $\lim\limits_{z \to 0} f(\bar{z})$ غير موجود.

١٩) ناقش تفرع الدالة $w = \ln (z-z_0)$ حول النقطة z_0.

. . . .