الباب الثاني

الاشتقاق Differentiation

٢-١ مقدمة

كما رأينا سابقاً فإن المفاهيم الأساسية في النهاية والاتصال لم تتغير عن مثيلتها في المتغير الحقيقي وهناك اختلافات يسيرة جداً راجعة الى طبيعة المتغير المركب ودواله التي هي تحويل من مستوى z الى مستوى w كما تم إيضاحه في الباب الأول .. وبالرغم من أن المفهوم الأساسي للاشتقاق لم يتغير أيضا إلا أن النتائج التي سنحصل عليها في هذا الباب غير مسبوقة وليس لها نظير للمتغير الحقيقي وهو ما يعرف بمعادلات كوش – ريمان .. وهى لب هذا الباب الأساسي في مادة المتغير المركب.

٢-٢ اشتقاق الدوال المركبة Complex function differentiation

إذا كانت $w = f(z)$ دالة وحيدة القيمة في منطقة R من مستوى z فإن اشتقاق w يعرف كالآتي:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{d}{dz} f(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

بشرط وجود هذه النهاية مستقلة عن الطريقة التي يؤول فيها Δz إلى الصفر.

والجملة الأخيرة هي صاحبة الجديد في هذا الباب.

ويقال حينئذ أن $\bar{f}(z)$ موجود $\exists$ لكل نقطة في المنطقة R $\forall\ z \in \Re$ وتسمي $f(z)$ بالدالة التحليلية analytic أو الدالة المنتظمة regular أو دالة هولمورفيه holomorphic وهذه الاصطلاحات مرادفة لبعضها البعض تمام. اً .. والدالة $f(z)$ دالة تحليلية عند نقطة z_0 طالم. ا كانت $\bar{f}(z)$ موجودة في كل نقاط الج. وار neighbourhood $|z-z_0|<\delta$ لأي ع. دد موجب δ.

مثال ٢-١

استخدم التعريف لإثبات أن:

$$\frac{d}{dt} z^2 = 2z$$

الحل: يتشابه أسلوب الحل هنا تماما مع ما سبق فعله للدوال الحقيقية .. فأيضا

$$\bar{f}(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z^2 + 2z\Delta z + (\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z}$$

$$= 2z$$

وبالتالي فإن $\frac{d}{dz} z^2 = 2z$

وبالتالي يمكننا إيجاد $\bar{f}(1+i) = 2(1+i)$

وهكذا .. ونجد أن كل ما تعلمناه لحذف العامل الصفري في هذه النهاية يمكن تطبيقه بدون تغيير ولا مشاكل إطلاقا إذا أمكن ذلك.

مثال ٢-٢:

إذا كانت $w = |z|^2$ فهل يوجد لهذه الدالة اشتقاق؟

الحل:

في هذه الحالة $w = z\,\bar{z}$ لأن $|z|^2 = z\,\bar{z}$

وبالتالي

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)(\overline{z+\Delta z}) - (z)(\bar{z})}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)(\bar{z}+\overline{\Delta z}) - (z)(\bar{z})}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z\bar{z} + \bar{z}\Delta z + z\overline{\Delta z} + \Delta z\overline{\Delta z} - z\bar{z}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} (\bar{z} + \overline{\Delta z} + z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z})$$

هنا يجب أن نكون حذرين في أخذ النهاية .. فالمرافق $\bar{z}$ وجود جديد للمتغير المركب ليس له مثيل في دوال المتغير الحقيقي .. ولذلك يجب أن ندرسه بعناية .. فمثلاً هل $\lim\limits_{\Delta z\to 0}(\bar{z}+\overline{\Delta z}+z\dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z})$ موجود أم غير موجود، ولقد سبق التعامل مع مثل هذه المفاهيم بل أن أحد التمارين في تمرين –١ يقول أن $\lim\limits_{z\to 0} f(\bar{z})$ غير موجود .. فهل هذه النهاية مثلها؟! .. دعنا نرى ذلك .. إذا ما أخذنا المسار $\Delta y=0$ و $\Delta x\to 0$ فإن

$$\lim_{\Delta z\to 0}(\bar{z}+\overline{\Delta z}+z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z})=\lim_{\Delta x\to 0}((x-iy)+(\Delta x)+(x+iy)\frac{\Delta x}{\Delta x})=2x$$

وإذا ما أخذنا المسار $\Delta x=0$ و $\Delta y\to 0$ فإن

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z\to 0}(\bar{z}+\overline{\Delta z}+z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}) &= \lim_{\Delta y\to 0}((x-iy)-i\Delta y+(x+iy)\frac{-i\Delta y}{i\Delta y})\\ &= \lim_{\Delta y\to 0}\left[(-2iy)-i\Delta y\right]\\ &= -2iy\end{aligned}$$

ولا يمكن أن يتساوى قيمتا النهايتين فأحدهما حقيقية والأخرى تخيلية .. إذاً يتنافى وجود هذه النهاية لأي نقطة في المستوى z .. وعلى هذا نقول بشكل مطلق أن الاشتقاق غير موجود في أي مكان أي أنها دالة غير تحليلية في أي مكان non-analytic anywhere وجدير بالمناقشة هنا أن نقول أنه لإثبات وجود الاشتقاق .. لابد من إثبات أن النهاية لها قيمة لا تعتمد على المسار .. ولكن كيف نثبت ذلك ؟! .. فإذا أخذنا عدد كافي من المسارات وكلها توجد نفس القيمة للنهاية فليس هذا بإثبات كافي لوجود النهاية (أي وجود الاشتقاق) .. ولكن العكس صحيح فيكفي أن تختلف قيمة النهاية عند مسارين .. في هذه الحالة نقول بتأكيد أن النهاية غير موجودة أي أن الاشتقاق غير موجود. فهذه الطريقة لا تصلح لإثبات وجود الاشتقاق ولكنه ربما يكون موجوداً ولذلك لا بد من تأكيد الوجود بطريقة أخرى .. أما إثبات عدم الوجود فمتاح.

كذلك لاحظ أيها القارئ أن سبب ذلك هو وجود الدوال غير المسبوقة في المتغير الحقيقي وهي دوال المرافق مثل $\bar{z}$ و $\overline{\Delta z}$ ويجب التعامل معها بحظر شديد.

مثال ٢-٣

أوجد مناطق تحليلية الدالة $w=\dfrac{1+z}{1-z}$

الحل:

كالمعتاد فإن

$$\overline{w}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\dfrac{1+z+\Delta z}{1-z-\Delta}-\dfrac{1+z}{1-z}}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(1+z+\Delta z)(1-z)-(1+z)(1-z-\Delta z)}{(\Delta z)(1-z-\Delta z)(1-z)}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1-z+z-z^2+\Delta z-\Delta zz-1+z+\Delta z-z+z^2+\Delta zz}{(\Delta z)(1-z-\Delta z)(1-z)}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{2}{(1-z)(1-z-\Delta z)}$$

$$=\frac{2}{(1-z)^2}$$

بأي طريقة تؤول فيها $\Delta z\to 0$ فإن هذه هي قيمة الاشتقاق .. وبالطبع لابد أن نستثني النقطة $z=1$. أي أن الاشتقاق موجود في كل المستوي ما عدا $z=1$. وهي نتيجة لا تصطدم مع معلوماتنا السابقة.

نظرية ٢-١

إذا كانت الدالة $f(z)$ تحليلية عند نقطة z فأ ا أيضا تكون متصلة .. والعكس غير صحيح.

الإثبات

بوضع $\Delta z=h$ فإن

$$f(z+h)-f(z)=\frac{f(z+h)-f(z)}{h}.h\quad,\quad h\neq 0$$

وبالتالي فإن $\lim\limits_{h\to 0}\left(f(z+h)-f(z)\right)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}.h$

لأن $\exists \bar{f}(z)$ ، $=\bar{f}(z).(0)$

$=0$

وهذا يعني أن $\lim\limits_{h\to 0} f(z+h)=f(z)$

أي أن f(z) دالة متصلة.

ولكن الدالة $f(z)=\bar{z}$ هي دالة مستمرة ولكن اشتقاقها غير موجود (لماذا؟) .. وبالتالي فإن الاستمرار لا يؤدي إلى الاشتقاق ولكن العكس هو الصحيح.

ونلاحظ هنا عدم اصطدمنا لذا المفهوم فهو يتفق مع معلوماتنا السابقة.

٢-٣ قواعد الاشتقاق Differentiation Rules

لا مفاجآت عندنا تحت هذا المسمى .. فقواعد اشتقاق الدوال التحليلية هي نفسها القواعد المتعارف عليها ..

$$\frac{d}{dz}\left(f(z)\pm g(z)\right)=\bar{f}(z)\pm\bar{g}(z) \qquad (i)$$

$$\frac{d}{dz}c\,f(z)=c\,\bar{f}(z) \qquad (ii)$$

$$\frac{d}{dz}\left(f(z).g(z)\right)=f(z)\bar{g}(z)+\bar{f}(z)g(z) \qquad (iii)$$

$$\frac{d}{dz}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{g(z)\bar{f}(z)-f(z)\bar{g}(z)}{g^2(z)},\ g(z)\neq 0 \qquad (iv)$$

(v) إذا كان $w=f(z)$ وكان $z=g(\eta)$

فإن قاعدة التسلسل chain rule كالمعتاد هي:

$$\frac{dw}{d\eta}=\frac{dw}{dz}.\frac{dz}{d\eta}$$

.. وهكذا

(vi) إذا كان $w=f(z)$ فإنه إذا وجدت $z=f^{-1}(w)$ فإن

$$\frac{dw}{dz}=\frac{1}{\left(\frac{dz}{dw}\right)}$$

(*vii*) كذلك إذا كان $z=f(t)$ وكان $w=g(t)$ فان

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\bar{g}(t)}{\bar{f}(t)},$$

حيث '–' تشير الى تفاضل بالنسبة للبارامتر t.

(*viii*) نفس القواعد المعتادة لما يسمى بالتفاضلة تسري هنا على دوال المتغير المركب بلا حذر .. فمثلاً

$$d\left(f(z)\pm g(z)\right)=\left(\bar{f}(z)\pm \bar{g}(z)\right)dz$$

وهكذا.

(*ixx*) الاشتقاق من رتب أعلى higher order derivatives يمكن إجراءه بتكرار التعريف دون حذر طالما كانت $f'(z)$ دالة تحليلية وهكذا يمكن الحصول على $f''(z)$ ، $f'''(z)\ \cdots\ f^{(n)}(z)$ إذا أمكن ذلك .. ولكن يوجد تميز لدوال المتغير المركب في النظرية التالية:

نظرية ٢–٢

إذا كانت f(z) دالة تحليلية في منطقة R في مستوى z فإنه أيضا يكون $f'(z)$, $f''(z)$ لأي رتبة، دوال تحليلية في المنطقة ذا ا R. أي أن كل المشتقات من رتب أعلى تتواجد إذا ما وجدت المشتقة الأولى.

(*xx*) قاعدة لاهوبيتال L’Hosptal’s rule الشهيرة يمكن تطبيقها أيضا على دوال المتغير المركب فأيضاً إذا كان f(z) , g(z) دوال تحليلية في منطقة R عند نقطة z_0 وبافتراض أن $f(z_0)=g(z_0)=0$ ولكن $g'(z_0)\neq 0$ فان:

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

وتعمل القاعدة طبقا للإضافات والإمتدادات المعتاد عليها لدوال المتغير الحقيقي دون تغيير يذكر

فيمكن تكرار استعمالها كما يمكن استعمالها لحالات أخرى غير $\frac{0}{0}$ مثل $\frac{\infty}{\infty}$ ..

وهكذا.

وكما نرى فإنه لا مفاجآت كبيرة حتى الآن في باب الاشتقاق .. ولا يوجد شئ مميز جدا لاشتقاق دوال المتغير المركب حتى الآن.

٢-٤ معادلتي كوشي-ريمان Cauchy-Riemann Equations

بتدقيق أكبر في اعتماد النهاية على المسار .. اثبت كوشي ومعه ريمان هذه النظرية الشهيرة .. وهي التمييز الأكبر في باب الاشتقاق للدوال المركبة عنها للدوال الحقيقية إذ لا يوجد نظرية مماثلة في هذا الفرع ..

نظرية (٢-٣) كوشي-ريمان

الشرط الضروري necessary condition للدالة $w = f(z) = u + iv$ حتى تكون دالة تحليلية في منطقة R في مستوى z هي أن تحقق كل من v, u هذان الشرطان (ويعرفان بمعادلتي كوشي-ريمان):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad , \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

الإثبات:

نحن الآن نثبت وجود النهاية $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$

ولذلك دعونا نكتب $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ بشكل عام ونأخذ المسارين المعتادين اليسيرين وهما $(\Delta y = 0$ و $\Delta x \to 0)$ و $(\Delta x = 0$ و $\Delta y \to 0)$ ونرى ما النتائج التي سنحصل عليها.

دع $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ وبالتالي فإن:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{[u(x+\Delta x, y+\Delta y) + iv(x+\Delta x, y+\Delta y)] - [u(x,y) + iv(x,y)]}{\Delta x + i\Delta y}$$

وفي حالة المسار الأول Pass 1 ($\Delta x=0$ و $\Delta y\to 0$):

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{i\Delta y}\left[u(x,y+\Delta y)+iv(x,y+\Delta y)-u(x,y)-iv(x,y)\right]$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{i\Delta y}\left(u(x,y+\Delta y)-u(x,y)\right)$$

$$+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{i}{i\Delta y}\left(v(x,y+\Delta y)-v(x,y)\right)$$

وفي الواقع فإن كميات مثل $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{g(x,y+\Delta y)-g(x,y+\Delta y)}{\Delta y}$ سبق التعامل معها وتعريفا على أ ا الاشتقاق الجزئي للدالة ثنائية المتغيرات $g(x,y)$ بالنسبة الى y (في حالة عدم تغيير x) .. أي أ ا تساوي $\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y}$ وبالتالي فإن

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (1)$$

وفي حالة المسار الثاني (pass 2): $\Delta x=0$ و $\Delta y\to 0$ فإن

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[u(x+\Delta x,y)+iv(x+\Delta x,y)-u(x,y)-iv(x,y)\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}(i)\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (2)$$

وأقل متطلب نطلبه هنا أن تتساوى قيمة النهاية على هذين المسارين عا . ى الأق . ل (ول . ذلك فالشرط الذي سنحصل عليه هو شرط ضروري ولكنه ليس بكافي) وبالتال فإن:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

وهما المعادلتان الشهيرتان المعروفتان بمعادلتي كوشي – ريمان.

ونعقب هنا على هذين الشرطين أ ما في حالة عدم تحققهما معاً فإن الدالة تفشل في أن تكون تحليلية .. ولكن في حالة تحققهما معا فإن الدالة ربما تكون تحليلية.

نظرية ٢-٤ الكفاية Sufficiency

إذا كانت التفاضلات الجزئية $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ متصلة في نفس المنطقة R في مستوى z التي فيها يتحقق معادلتي كوشي-ريمان فإن f(z) تكون تحليلية.

الإثبات:

حيث أن التفاضلات الجزئية $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ متصلة فإن

$$\begin{aligned}\Delta u &= u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)\\ &= u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y+\Delta y)\\ &\quad + u(x, y+\Delta y) - u(x,y)\\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \in\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \delta\right)\Delta y\end{aligned}$$ باستعمال مفكوك تايلور،

حيث $\in, \delta \to 0$ عندما $\Delta x, \Delta y \to 0$ وعندها تتحقق العلاقة

$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$ وبالتالي فإن

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \in \Delta x + \delta \Delta y$$

وبالمثل فإن

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \gamma \Delta x + \beta \Delta y$$

حيث $\gamma, \beta \to 0$ عندما $\Delta x, \Delta y \to 0$.

وبالتالي فان

$$\Delta w = \Delta u + i\Delta v$$
$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y + (\in + i\gamma)\Delta x + (\delta + i\beta)\Delta y$$

وكالمعتاد فإن $\in + i\gamma \to 0$ و $\delta + i\beta \to 0$ عندما $\Delta x, \Delta y \to 0$

وباستعمال معادلتي كوشي-ريمان فإن

$$\Delta w = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(-\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta y + (\in + i\gamma)\Delta x + (\delta + i\beta)\Delta y$$
$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\underbrace{(\Delta x + i\Delta y)}_{\Delta z} + (\in + i\gamma)\Delta x + (\delta + i\beta)\Delta y$$

وبالقسمة على Δz فإن

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + (\in + i\gamma)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\delta + i\beta)\frac{\Delta y}{\Delta z}$$

وبأخذ النهاية عند $\Delta z \to 0$ أي $(\Delta x \to 0$ و $\Delta y \to 0)$ فإن $\in + i\gamma \to 0$ و $\delta + i\beta \to 0$ وبالتالي

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

وبالتالي فإن التفاضل يكون موجوداً وفريداً وبالتالي فان $f(z)$ تكون دالة تحليلية مع ملاحظة أننا استعملنا معادلتي كوشي-ريمان واستعملنا مفكوك تايلور في البداية الذي يستوجب اتصال الدالتين u,v.

تعقيب: تقول النظريتان ٢-٣، ٢-٤ أنه إذا ما تحقق مع.ادلتي كوش.ي-ريم.ان وكان.ت التفاضلات الجزئية u_x,u_y و v_x,v_y متصلة فإن $f(z)$ تكون دالة تحليلية .. ولا يمك.ن الاكتفاء بتحقق معادلتي كوشي-ريمان وحدهما كما سبق وذكرنا كم.ا لا يمك.ن الاكتفاء بشرط الاتصال لأننا استعلمنا معادلتي كوشي-ريمان في الإثبات. كذلك فإننا لا ننسى أننا حصلنا على التفاضل في حالة وجوده وهو

$$\frac{dw}{dz} = u_x + iv_x = \frac{\partial}{\partial x}(w)$$
$$= v_y - iu_y = \frac{\partial}{\partial y}(-iw)$$

وبالتالي يمكننا معرفة الاشتقاق بيسر باستعمال أحد هذه الصيغ وليكن

$$\boxed{\frac{dw}{dz} = u_x + iv_x}$$

مثال ٢-٤:

أثبت أن $w = \sin \bar{z}$ غير تحليلية في أي مكان وقارن ذلك مع الدالة $w=\sin z$.

الإثبات:

نعلم أن

$$w = \sin z$$
$$= \sin (x + iy)$$
$$= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

وبالتالي فإن

$$w = \sin \bar{z}$$
$$= \sin(x - iy)$$
$$= \sin x \cosh y - i \cos x \sinh y$$

أذن

$$u = \sin x \cosh y \quad , \quad v = - \cos x \sinh y$$
$$u_x = \cos x \cosh y \quad , \quad v_y = \sin x \sinh y$$
$$u_y = \sin x \sinh y \quad , \quad v_x = \sin x \sinh y$$

ولتحقق معادلتي كوشي-ريمان فلابد

$u_x = v_y \Rightarrow 2 \cos x \cosh y = 0$
$u_y = -v_x \Rightarrow 2 \sin x \sinh y = 0$

وقيم x التي تجعل $\cos x = 0$ لا تجعل $\sin x = 0$

وكذلك قيم y التي تجعل $\cosh y = 0$ لا تجعل $\sinh y = 0$

وبذلك فنحن لا نجد أي نقاط تتفق فيها هاتين المعادلتين وبالتالي فان $\sin \bar{z}$ غير تحليلية في كل مكان.

وعلى العكس من ذلك فإننا نجد أن معادلتي كوشي-ريمان متحققتان بالنسبة لـ $\sin z$ ولكن الدوال $\sin x, \cos x$ و $\sinh x, \cosh x$ دوال متصلة وتفاضلاتها الجزئية متصلة أيضاً وبالتالي فإن الشرط الكافي محقق كما أن الشرط الضروري محقق أيضاً وبالتالي فإن الدالة $\sin z$ قابلة للاشتقاق في كل مكان.

٢-٥ الدوال التوافقية Harmonic Functions

يمكن الجمع بين النظريتين ٢-٣ و ٢-٤ في نظرية واحدة بحيث إذا تحققت شروطها فإنها تحتوى شروط النظريتين ٢-٣ و ٢-٤ معاً.

نظرية ٢-٥

إذا كانت المشتقات الجزئية الثانية للدوال موجودة ومستمرة في منطقة R في مستوى z فإنها تحقق

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad ,$$

$$\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

أي أن الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للدالة $f(z)$ يحققان معادلة لابلاس $(\nabla^2 g = 0)$ في متغيرين إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية.

الإثبات:

بما أن $f(z) = u + iv$ دالة تحليلية فإن

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\partial v}{\partial x} \qquad (2)$$

وبالتالي من (1) فإن

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \qquad (3)$$

وبالتالي من (2) فإن

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{-\partial^2 v}{\partial x \partial y} \qquad (4)$$

وبجمع (3),(4) فإن

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

وبالمثل يمكن إثبات أن

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

وحتى نتمكن من إجراء الاشتقاق فإننا نشترط أن المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية يجـب أن تكون موجودة.

ملاحظة:

يطلق على u و v تسمية الدوال المترافقـة conjugate functions ويمكـن في حال معرفة واحدة منهما استنتاج الأخرى.

مثال ٢-٥

a) اثبت أن الدالة $u = e^{-x} (x \sin y - y \cos y)$ دالة توافقية

b) أوجد v المرافقة لـ u.

c) أوجد $f(z) = u + iv$

الحل

(a $u = e^{-x}\,(x \sin y - y \cos y)$

وبالتالي فإن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-x}(\sin y) - e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$$

وبالتالي

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -e^{-x}(\sin y) - e^{-x}(\sin y) + e^{-x}(x \sin y - y \cos y) \quad (1)$$

كذلك

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-x}(x \cos y + y \sin y - \cos y)$$

وبالتالي

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-x}(-x \sin y + y \cos y + \sin y + \sin y) \qquad (2)$$

وبجمع (١) و (٢):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^{-x} \sin y - e^{-x} \sin y + e^{-x} x \sin y - e^{-x} y \cos y$$

$$+ 2e^{-x} \sin y - e^{-x} x \sin y + e^{-x} y \cos y$$

$$= 0$$

أي أن u تحقق معادلة لابلاس Laplace equation

$$\nabla^2 u = 0$$

وبالتالي فإن u دالة توافقية.

b) والآن باستعمال معادلتي كوشي-ريمان فإن

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=e^{-x}\sin y-e^{-x}x\sin y+e^{-x}y\cos y \qquad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=e^{-x}x\cos y+e^{-x}y\sin y-e^{-x}\cos y \qquad (4)$$

من (3) وبالتكامل بالنسبة الى y فإن

$$\begin{aligned} v &= - e^{-x}\cos y + e^{-x}x\cos y + e^{-x}\int y\cos y\, dy \\ &= - e^{-x}\cos y + e^{-x}x\cos y + e^{-x}\left[y\sin y - \int \sin y\, dy\right] \\ &= - e^{-x}\cos y + e^{-x}x\cos y + e^{-x}y\sin y + e^{-x}\cos y + F(x) \end{aligned}$$

أي أن

$$v(x, y) = x\, e^{-x}\cos y + y\, e^{-x}\sin y + F(x)$$

وبتفاضل هذه الدالة جزئياً بالنسبة الى x فإن

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-xe^{-x}\cos y+e^{-x}\cos y-e^{-x}y\sin y+F'(x)$$

ولكن من (4) فإن

$$-xe^{-x}\cos y + e^{-x}\cos y - e^{-x}y\sin y + F'(x) = - e^{-x}x\cos y - e^{-x}y\sin y + e^{-x}\cos y$$

أي أن $F'(x) = 0 \Rightarrow F(x) = A$

وبالتالي فإن

$$v(x, y) = x\, e^{-x}\cos y + y\, e^{-x}\sin y + A$$

$$\boxed{v(x, y) = e^{-x}(x\cos y + y\sin y) + A}$$

وهي الدالة المرافقة المطلوبة.

٢) والآن فإن $f(z) = u + iv$ دالة تحليلية ولإيجادها كدالة في z فأننا نستعمل

$$z = x + iy \qquad , \qquad \bar{z} = x - iy$$

أي أن

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2} \qquad , \qquad y=\frac{1}{2i}\left(z-\bar{z}\right)$$

وأي متطابقات أخرى مفيدة مثل أن $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$ .. وهكذا

وفي حالتنا هذه فإن

$$
\begin{aligned}
f(z) &= u + iv \\
&= e^{-x}(x \sin y - y \cos y) + ie^{-x}(x \cos y + y \sin y) + iA \\
&= e^{-x}x (\sin y + i \cos y) + e^{-x}y (- \cos y + i \sin y) + iA \\
&= e^{-x} x (\underline{\sin y + i \cos y}) + e^{-x} y\, i (\underline{\sin y + i \cos y}) + iA \\
&= e^{-x} (\sin y + i \cos y) (x + i y) + iA \\
&= e^{-x} i (\cos y - i \sin y) (x + i y) + iA \\
&= e^{-x} i\, e^{-iy} z + iA \\
&= i\, e^{-z} z + iA
\end{aligned}
$$

أذن الدالة التحليلية $f(z)$ هي:

$$\boxed{f(z) = iz\, e^{-z} + iA \,,\ A \in \Re}$$

ملاحظات:

(i) هناك أكثر من أسلوب للوصول إلى نفس النتيجة السابقة .. فمن u نوجد v ويمكن من v نوجد u وكذلك من $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$ نوجد v وكذلك من $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ نوجد v أيضا وهكذا .. على أن النتيجة يجب أن تكون فريدة كدالة في z.

(ii) نلاحظ أن دالة $f(z)$ المستنتجة تعتمد على ثابت عام وبالتالي فنظريا نحن نملك عدد لا نهائي من الحلول والانفراد يكون في الجزء المعتمد على z فقط.

(iii) إذا علمنا من الدالة $f(z)$ الجزء الحقيقي فقط (مثلاً)، فإنه وبدون معرفة v يمكننا إيجاد $\frac{df}{dz}$ باستعمال

$$
\begin{aligned}
\frac{df}{dz} &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}
\end{aligned}
$$

وأيضا معرفة v فقط تمكن من ذلك أيضاً باستعمال

$$
\begin{aligned}
\frac{df}{dz} &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \\
&= \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}
\end{aligned}
$$

ويجب الالتفات الى ذلك في حالة طلب مشتقة $f(z)$ فقط دون معرفة $f(z)$.

ففي المثال السابق

$$\frac{df}{dz}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$=e^{-x}\sin y-e^{-x}x\sin y+e^{-x}y\cos y\text{-}i\left(e^{-x}x\cos y+e^{-x}y\sin y-e^{-x}\cos y\right)$$

$$=e^{-x}(\sin y+i\cos y)-e^{-x}(x\sin y+ix\cos y)+e^{-x}(y\cos y-iy\sin y)$$

$$=e^{-x}i(\cos y-i\sin y)-e^{-x}xi(\cos y-i\sin y)+e^{-x}y(\cos y-i\sin y)$$

$$=e^{-x}ie^{-iy}-e^{-x}xie^{-iy}+e^{-x}ye^{-iy}$$

$$=e^{-(x+iy)}i[1-x-iy]$$

$$=e^{-(x+iy)}i(1-(x+iy))$$

$$=ie^{-z}(1-z)$$

وهو ما يمكن التأكد منه بتفاضل $f(z)$

$$f(z) = i\, z\, e^{-z} + i\, A$$
$$f'(z) = i\,(-z\, e^{-z} + e^{-z}) + 0$$
$$= i\, e^{-z}\,(1-z)$$

وهى نفس النتيجة.

٢-٦ معادلتي كوشي – ريمان في الصورة القطبية

Cauchy-Riemann equations in polar form

في كثير من الحالات يكون من الأفضل استعمال الصورة القطبية للمـ ـتغير المركـ ـب وهـ ـي $z = r\,e^{i\theta}$. وبالتالي فيجب تعديل المعادلات من (x,y) إلي (r,θ)

عارض ٢–١ معادلتي كوشي–ريمان في الصورة القطبية هما

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad , \qquad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

الإثبات:

إثبات هذين المعادلتين يتم بعملية تحويل فقط للمعادلات الأصـ ـلية مـ ـن (x,y) إلي (r,θ) باستعمال

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

كالتالي

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}.\frac{\partial r}{x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}.\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{y}{(x^2+y^2)}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\sin\theta \qquad (1)$$

كذلك

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}.\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x}{(x^2+y^2)}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\cos\theta \qquad (2)$$

كذلك

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta}.\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}\left(\frac{x}{r}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)\left(\frac{-y}{r^2}\right)$$

$$= \frac{\partial v}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\sin\theta \qquad (3)$$

كذلك

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta}.\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{1}{r}\cos\theta \qquad (4)$$

وبالتالي فإن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\sin\theta = \frac{\partial v}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{1}{r}\cos\theta$$

ومن استقلال الدوال $\cos\theta, \sin\theta$ فإنه لابد أن يكون

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

ملاحظة:

(i) معادلة لابلاس في الصورة القطبية هي

$$\nabla^2\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial^2 r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=0$$

ومن اليسير إثبات أن $u(r, \theta)$ و $v(r, \theta)$ تحققان معادلة لابلاس في الصورة القطبية.

مثال ٢-٦

اثبت أن $w = z^n$ دالة تحليلية حيث $n \in N^+$

الإثبات

نلاحظ أنه إذا استعملنا الصورة الكارتيزية $z = x + iy$ فإن فك المقدار $(x+iy)^n$ والحصول على v,u أمر صعب ولكن باستعمال الصورة القطبية فإن الأمر أيسر بكثير حيث $z = r\, e^{i\theta}$

فإن $$z^n = r^n\, e^{i\theta} = r^n\,(\cos n\,\theta + \sin n\,\theta)$$

وبالتالي فإن

$$u = r^n \cos n\,\theta$$
$$v = r^n \sin n\,\theta$$

وبالتالي فإن

$$\frac{\partial u}{\partial r}=nr^{n-1}\cos n\theta,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=-nr^{n}\sin n\theta$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=n(n-1)\,r^{n-2}\cos n\theta$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=-n^2 r^{n}\cos n\theta$$

وبالتالي فإن

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=n(n-1)r^{n-2}\cos n\theta+nr^{n-2}\cos n\theta-n^2r^{n-2}\cos n\theta$$
$$=0$$

أي أن $\nabla^2 u=0$ وبالمثل يمكن إثبات أن $\nabla^2 v=0$

وبالتالي فإن u,v دوال توفيقية أي أن $w = z^n$ دالة تحليلية

مثال ٢-٧

اثبت أنه إذا كان $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$ دالة تحليلية فإن

$$\frac{df}{dz}=\frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}$$

الإثبات

باستعمال
$$\frac{df}{dz}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

فان

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}$$
$$=u_r\cos\theta-\frac{1}{r}u_\theta\sin\theta$$

وكذلك فإن

$$\frac{\partial v}{\partial x}=v_r\cos\theta-\frac{1}{r}v_\theta\sin\theta$$

وبالتالي فإن

$$\frac{df}{dz}=u_x+iv_x$$
$$=(u_r+iv_r)\cos\theta-\frac{1}{r}(u_\theta+iv_\theta)\sin\theta$$
$$=\frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}$$

مثال ٢-٨

أوجد $\frac{df}{dz}$ في حالة $f(z)=z^n \quad , \quad n\in N^+$

الإثبات

$$f(z)=r^n\cos n\theta+ir^n\sin n\theta$$
$$\frac{\partial f}{\partial r}=nr^{n-1}\cos n\theta+inr^{n-1}\sin n\theta$$
$$\frac{\partial f}{\partial \theta}=-nr^n\sin n\theta+inr^n\cos n\theta$$

إذن باستعمال الصيغة السابقة في مثال ٢-٧ فإن

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dz}&=\frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}\\
&=\left(nr^{n-1}\cos n\theta+inr^{n-1}\sin n\theta\right)\cos\theta\\
&\quad-\left(-nr^n\sin n\theta+inr^n\cos n\theta\right)\frac{\sin\theta}{r}\\
&=nr^{n-1}(\cos n\theta+i\sin n\theta)\cos\theta\\
&\quad-nr^{n-1}(-\sin n\theta+i\cos n\theta)\sin\theta\\
&=nr^{n-1}e^{in\theta}\cos\theta\\
&\quad-nr^{n-1}i(\cos n\theta+i\sin n\theta)\sin\theta\\
&=nr^{n-1}e^{in\theta}\cos\theta-nr^{n-1}e^{in\theta}i\sin\theta\\
&=nr^{n-1}e^{in\theta}(\cos\theta-i\sin\theta)\\
&=nr^{n-1}e^{in\theta}e^{-i\theta}\\
&=nr^{n-1}e^{i(n-1)\theta}\\
&=n\,z^{n-1}
\end{aligned}$$

أي أن $\frac{d}{dz}\left(z^n\right)=n\,z^{n-1} \quad , \quad n\in N^+$.

مثال ٢-٩

اثبت أنه إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في منطقة R في مستوى z وكان $\bar{f}(z)=0$, $z\in\Re$ فإن (ثابت) $f(z)=\alpha$.

الإثبات

بما أن $f(z)$ دالة تحليلية فإن

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

ولكن $\bar{f}(z)=0$ .. أي أن $\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=0$

وهذا معناه أن $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ .. أي أن $u=f_1(y)$

وكذلك $\frac{\partial v}{\partial x}=0$ .. أي أن $v=f_2(y)$

ولكن من معادلتي كوشي-ريمان يكون $\frac{\partial v}{\partial y}=0$ .. أي أن $u=f_3(x)$

وكذلك $\frac{\partial u}{\partial y}=0$ .. أي أن $u=f_4(x)$

ولا يمكن أن يكون ذلك إلا إذا كان

u = ثابت = α_1

v = ثابت = α_2

وبالتالي فإن ثابت: $f(z)=\alpha$

مثال ٢-١٠

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في R فاثبت إنه إذا كان ثابـ.ـت: $u = \alpha$ فـ.إن $f(z)$ تساوي ثابت أيضاً.

الإثبات

بما أن $f(z)$ دالة تحليلية في R فان

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

ولكن $u = \alpha$ فان $\frac{\partial v}{\partial y}=0$ .. أي أن $v=f_1(x)$

وكذلك $\frac{\partial v}{\partial x}=0$ .. أي أن $v=f_2(y)$

ولا يمكن ذلك إلا إذا كان ثابت = v

وبالتالي فإن ثابت = $f(z)$

ملاحظة:

والعكس صحيح أيضاً فإذا كانت (ثابت) $v = \alpha$ فإن $f(z)$ التحليلية يجب أن تساوي ثابت أيضاً.

مثال ٢-١١

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في R وكان ثابت: $|f(z)| = \alpha$ فـ.إن $f(z)$ تـ.ساوي ثابت أيضاً.

الإثبات

$f(z)$ دالة تحليلية .. فلا بد أن

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

ولكن $|f(z)| = \alpha \Leftarrow u^2 + v^2 = \alpha^2$

أي أن $u^2 = \alpha^2 - v^2$

وبالتالي:

$$2u\frac{\partial u}{\partial x}=-2v\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (1)$$

$$2\mathrm{u}\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2v\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (2)$$

بضرب (1) في v فإن

$$uv\frac{\partial u}{\partial x}=-v^2\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (3)$$

بضرب (2) في u فإن

$$uv\frac{\partial v}{\partial y}=-u^2\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (4)$$

ولكن باستعمال معادلتي كوشي-ريمان وطرح (3) من (4) فإن

$$\left(u^2+v^2\right)\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

ولكن $u^2+v^2=\alpha^2\neq 0$ فإن $\frac{\partial u}{\partial y}=0$ وبالتالي فإن $u=f_1(x)$

كذلك فإن $\frac{\partial v}{\partial x}=0$ أي أن $v=f_2(y)$

وبالمثل فإنه بضرب (1) في u وضرب (2) في v فإننا نصل إلى

$$u^2\frac{\partial u}{\partial x}=-uv\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (5)$$

$$v^2\ \frac{\partial v}{\partial y}=-uv\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (6)$$

وبجمع (5) و (6) فإن

$$\left(u^2+v^2\right)\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

أي أن $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ .. وبالتالي $u=f_3(y)$

كذلك بأن $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ .. أي أن $v = f_4(x)$

ولا يمكن أن يحدث ذلك إلا إذا كان

$u = \alpha_1$ (ثابت)

$v = \alpha_2$ (ثابت)

أي أن $f(z)$ دالة ثابتة.

مثال ٢-١٢

إذا كانت $f(z) = u + iv$ دالة تحليلية في R وكان $w = v + iu$ دالة تحليلية أيضاً .. فأثبت أن : $f(z) = \alpha$ ، ثابت: α.

الإثبات

$f(z) = u + iv$ دالة تحليلية .. أي أن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (2)$$

وكذلك $w = v + iu$ دالة تحليلية أيضا .. فلا بد أن

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (4)$$

من (1) و (4) فإن $2\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ .. أي أن $v = f_1(x)$

وكذلك $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ .. أي أن $u = f_2(y)$

من (2) و (3) فإن $2\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ .. أي أن $u = f_3(x)$

وكذلك $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$ .. أي أن $v = f_4(y)$

ولا يمكن أن يحدث ذلك إلا إذا كان

$u = \alpha_1$ (ثابت)

$v = \alpha_2$ (ثابت)

أي أن (ثابت) $f(z)=\alpha$.

مثال ٢-١٣:

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في R وكانت $f(z)$ دالة حقيقية فإن ذلك معناه أن $f(z)$ دالة ثابتة.

الإثبات:

كالمعتاد فإن $f(z)$ دالة تحليلية فيجب أن يكون

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

ولكن $f(z)$ دالة حقيقية .. أي أن $v = 0$

وبالتالي فإن $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ .. أي أن $u = f_1(y)$

وكذلك $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ .. أي أن $u = f_2(x)$

وهذا لا يمكن حدوثه إلا إذا كان $u = \alpha$ ثابت

أي أن $f(z)$ دالة ثابتة.

مثال ٢-١٤

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في R وكان $\overline{f(z)}$ أيضاً دالة تحليلية فإن ذلك لا يحدث الا اذا كانت $f(z)$ ثابتة.

الإثبات

$f(z) = u + iv$ دالة تحليلية .. أي أن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (2)$$

وكذلك $\overline{f(z)} = u - iv$ دال تحليلية .. فلا بد أن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \qquad (4)$$

من (1) و (3) فإن $2\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ .. أي أن $u = f_1(y)$

وبالتالي $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ .. أي أن $v = f_2(x)$

من (2) و (4) فإن $2\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ .. أي أن $u = f_3(x)$

وكذلك $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ .. أي أن $v = f_4(y)$

ولا يمكن أن يحدث ذلك إلا إذا كان $u = \alpha_1$ و $v = \alpha_2$ أي أن $f(z)$ دالة ثابتة.

مثال ٢–١٥

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية وكان $|f(z)|$ دالة تحليلية أيضاً .. فلا بد أن تكون $f(z)$ ثابتة.

الإثبات

$f(z) = u + iv$ دالة تحليلية .. إذاً

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (2)$$

والآن $|f(z)|=\sqrt{u^2+v^2}$ دالة تحليلية (وهي دالة حقيقية أيضاً) .. إذاً

$$\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{u^2+v^2}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{u^2+v^2}=0$$

أي أن (ثابت) $\sqrt{u^2+v^2}=\alpha$

ومن المثال ٢-١١ حيث أن (ثابت) $|f(z)|=\alpha$ فإنه لابد أن يكون $u=\alpha_1$ و $v=\alpha_1$

أي أن $f(z)=\beta$ .. أي دالة ثابتة.

مثال ٢-١٦

اثبت أن الدالة $f(z)=|z(z-1)|$

غير تحليلية في أي مكان.

الإثبات

بما أن $f(z)=u$ دالة حقيقية فقط

فإذا افترضنا أ ا دالة تحليلية فإ ا يجب أن تكون ثابتة طبقا لما أثبتناه في مثال ٢-١٣ .. ولكن

$$|z(z-1)|=|z||z-1|$$

$$=\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

أي أن المطلوب أن

ثابت $(x^2+y^2)[(x-1)^2+y^2]=\alpha^2$

ولا يمكننا أن نوجد علاقات بين x و y تفي ـذه العلاقة الماضية فإذا وضعنا ثابت = x^2+y^2 (علاقة دائرة) فإننا نحصل على علاقة دائرة أخرى ثابت = $(x-1)^2+y^2$ .. وهـ ـذا تعـ ـارض والعكـ ـس أيـ ـضا غـ ـير ممكـ ـن ولا نـ ـستطيع ايجـ ـاد علاقـ ـة حقيقيـ ـة بحيـ ـث نجعـ ـل $x^2+y^2=0$ أو $(x-1)^2+y^2=0$ .. وبالتالي لا يمكن تحقيق هذه العلاقة .. وهذا تعارض أي أن $f(z)$ دالة غير تحليلية .. وحيث أننا لا نستطيع إيجاد ولو حالة واحدة .. فان الدالـ ـة غـ ـير تحليلية في أي مكان.

مثال ٢-١٧

إذا كانت $w = z^3$

فأوجد Δw , dw , $\Delta w - dw$

الحل:

$$\begin{aligned}\Delta w &= f(z + \Delta z) - f(z) \\ &= (z + \Delta z)^3 - z^3 \\ &= z^3 + 3z^2\Delta z + 3\, z(\Delta z)^2 + (\Delta z)^3 - z^3 \\ \Delta w &= 3z^2\Delta z + 3z(\Delta z)^2 + (\Delta z)^3\end{aligned}$$

وكذلك

$$w = z^3$$
$$dw = (3z^2)\, dz$$

وهي كما نلاحظ الجزء الأساسي في علاقة Δw (حيث $\Delta z = dz$)

والآن

$$\begin{aligned}\Delta w - dw &= 3z\,(\Delta z)^2 + (\Delta z)^3 \\ &= (3z\,\Delta z + (\Delta z)^2)\,\Delta z \\ &= \in\ \Delta z\end{aligned}$$

ونلاحظ أن $\in \to 0$ عندما $\Delta z \to 0$

وبالتالي فإن $\dfrac{\Delta w - dw}{\Delta z} \to 0$ عندما $\Delta z \to 0$

وهذا يعني أن $\Delta w - dw$ كميات منتهية الصغر ولكنها في رتبة أعلى من Δz.

٢-٧ اشتقاق الدوال الأولية Derivatives of elementary functions

مازلنا نطلق على الدوال المعتادة مثل z^n والدوال التي تسمى المثلثية والدوال الأسية والدالة اللوغاريتمية والدوال الزائدية ودوالها العكسية أيضاً بالدوال الأولية .. ولا مفاجآت في اشتقاق هذه الدوال في حالة الدوال المركبة .. فجدول الاشتقاق مشابه تماماً لمعلوماتنا السابقة .. والأمثلة التالية فيها بعض الإثباتات.

مثال ٢-١٨

أثبت أن $\frac{d}{dz}\left(e^z\right)=e^z$

الإثبات:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x\, e^{iy} = e^x\,(\cos y + i\,\sin y)$$

وبالتالي فإن

$$u = e^x \cos y$$
$$v = e^x \sin y$$

وهى دالة تحليلية (من اليسير إثبات ذلك) ..

$$\begin{aligned}\frac{de^z}{dz} &= \frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\\ &= e^x\cos y + ie^x\sin y\\ &= e^x\left(\cos y + i\sin y\right)\\ &= e^x e^{iy}\\ &= e^z\end{aligned}$$

إذن $\frac{d}{dz}\left(e^z\right)=e^z$

مثال ٢-١٩

إثبت أن $\frac{d}{dz}\left(\sin z\right)=\cos z$

الإثبات:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\frac{d}{dz}(\sin z) = \frac{1}{2i}\left(ie^{iz} + ie^{-iz}\right) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i}$$

$$= \cos z$$

إذن
$$\frac{d}{dz}(\sin z) = \cos z$$

مثال ٢–٢٠

أثبت أن $\dfrac{d}{dz}\ln z = \dfrac{1}{z}$

الإثبات

$$\mathrm{w} = \ln \mathrm{z} \Rightarrow \mathrm{z} = \mathrm{e}^{\mathrm{w}}$$

وبالتالي فإن

$$\frac{dz}{dw} = e^{w} = z$$

وبالتالي

$$\frac{d}{dz}\ln z = \frac{dw}{dz} = \frac{1}{\left(\dfrac{dz}{dw}\right)} = \frac{1}{z}$$

وهذه النتيجة صحيحة بغض النظر عن القيمة التفرعية للدالة $w = \ln z$ فهي صالحة لكل الفروع .. ولكن التفاضل غير موجود عند نقطة التفرع $(z = 0)$.

مثال ٢–٢١

اثبت أن
$$\frac{d}{dz}\sin^{-1} z = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$$

الإثبات

من تعريف الدالة

$$\sin^{-1} z = \frac{1}{i}\ln(iz + \sqrt{1 - z^2})$$

وبالتالي

$$\frac{d}{dz}\sin^{-1} z = \frac{1}{i}\frac{1}{iz + \sqrt{1 - z^2}}.\left(i - \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{i}\frac{1}{iz + \sqrt{1 - z^2}}.\frac{-z + i\sqrt{1 - z^2}}{\sqrt{1 - z^2}}$$

$$= \frac{1}{i(iz + \sqrt{1 - z^2})}.\frac{i(iz + \sqrt{1 - z^2})}{\sqrt{1 - z^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$$

وهذه القيمة للتفاضل صالحة لكل فروع الدالة.

مثال ٢–٢٢

اثبت أن $\frac{d}{dz}\left(z^{\alpha}\right) = \alpha\, z^{\alpha - 1}$ حيث $\alpha \in C$

الإثبات

بوضع الدالة

$$z^{\alpha} = e^{\ln z^{\alpha}} = e^{\alpha \ln z}$$

وبالتالي

$$\frac{d}{dz}\left(z^{\alpha}\right) = \frac{d}{dz} e^{(\alpha \ln z)}$$

وبالتالي

$$\frac{d}{dz}\left(z^{\alpha}\right)=e^{\alpha \ln z}.\alpha\frac{1}{z}$$
$$=\alpha(z)^{\alpha}.\frac{1}{z}$$
$$=\alpha\, z^{\alpha-1}$$

إذن
$$\frac{d}{dz}\left(z^{\alpha}\right)=\alpha\, z^{\alpha-1}$$

وهذا القانون صالح لكل تفرعات الدالة إذا وجدت هذه التفرعات.

مثال ٢-٢٣

أوجد مشتقة $(z+1)^{z-1}$

الحل

يحق لنا استعمال طرق الاشتقاق التي تدربنا عليها للدوال الحقيقية ففي هذه الحالة

نضع $w=(z+1)^{z-1}$

وبالتالي فإن $\ln w = (z-1).\ln(z+1)$

وبالتالي فإن
$$\frac{1}{w}\frac{dw}{dz}=(z-1).\frac{1}{z+1}+\ln(z+1)$$

وبالتالي فإن
$$\frac{dw}{dz}=w\left[\frac{z-1}{z+1}+\ln(z+1)\right]$$

أي أن
$$\frac{d}{dz}(z+1)^{z-1}=(z+1)^{z-1}\left[\frac{z-1}{z+1}+\ln(z+1)\right]$$

حل أخر:

$$w=(z+1)^{z-1}=e^{\ln(z+1)^{z-1}}$$
$$=e^{(z-1)\ln(z+1)}$$

وبالتالي:

$$\frac{dw}{dz} = e^{(z-1)\ln(z+1)} \cdot \left[(z-1)\frac{1}{z+1} + \ln(z+1)(1) \right]$$
$$= w\left[\frac{(z-1)}{z+1} + \ln(z+1) \right]$$

وهي نفس النتيجة السابقة.

ملاحظة هامة

كما سبق فإن تعريفات الدوال الأولية واشتقاقها يتبع نفس الشكل الذي تعارفنا عليه للدوال الحقيقية مع الأخذ في الاعتبار طبيعة بعض الدوال التي هي عديدة القيم وتفاضلها أيضاً ربما تكون دوال عديدة القيم فيجب الانتباه لذلك .. كما يجب الانتباه دائما إلى أن التفاضل غير موجود عند نقاط التفرع.

والجدول التالي يوضح الدوال الأولية واشتقاقها.

$1.\ \dfrac{d}{dz}(C)=0$	$16.\ \dfrac{d}{dz}\cot^{-1}u=-\dfrac{1}{1+u^2}\cdot\dfrac{du}{dz}$
$2.\ \dfrac{d}{dz}u^n=nu^{n-1}\cdot\dfrac{du}{dz}$	$17.\ \dfrac{d}{dz}\sec^{-1}u=\pm\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\cdot\dfrac{du}{dz}\begin{cases}+u>1\\-u<-1\end{cases}$
$3.\ \dfrac{d}{dz}\sin u=\cos u\cdot\dfrac{du}{dz}$	$18.\ \dfrac{d}{dz}\csc^{-1}u=\mp\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\cdot\dfrac{du}{dz}\begin{cases}-u>1\\+u<-1\end{cases}$
$4.\ \dfrac{d}{dz}\cos u=-\sin u\cdot\dfrac{du}{dz}$	$19.\ \dfrac{d}{dz}\sinh u=\cosh u\cdot\dfrac{du}{dz}$
$5.\ \dfrac{d}{dz}\tan u=\sec^2 u\cdot\dfrac{du}{dz}$	$20.\ \dfrac{d}{dz}\cosh u=\sinh u\cdot\dfrac{du}{dz}$
$6.\ \dfrac{d}{dz}\cot u=-\csc^2 u\cdot\dfrac{du}{dz}$	$21.\ \dfrac{d}{dz}\tanh u=\operatorname{sech}^2 u\cdot\dfrac{du}{dz}$
$7.\ \dfrac{d}{dz}\sec u=\sec u\tan u\cdot\dfrac{du}{dz}$	$22.\ \dfrac{d}{dz}\coth u=-\operatorname{csch}^2 u\cdot\dfrac{du}{dz}$
$8.\ \dfrac{d}{dz}\csc u=-\csc u\cot u\cdot\dfrac{du}{dz}$	$23.\ \dfrac{d}{dz}\operatorname{sech} u=-\operatorname{sech} u\tanh u\cdot\dfrac{du}{dz}$
$9.\ \dfrac{d}{dz}\log_a u=\dfrac{\log_a e}{u}\dfrac{du}{dz},a>0,a\neq 1$	$24.\ \dfrac{d}{dz}\operatorname{csch} u=-\operatorname{csch} u\coth u\cdot\dfrac{du}{dz}$
$10.\ \dfrac{d}{dz}\log_a u=\dfrac{d}{dz}\ln u=\dfrac{1}{u}\cdot\dfrac{du}{dz}$	$25.\ \dfrac{d}{dz}\sinh^{-1}u=\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}\cdot\dfrac{du}{dz}$
$11.\ \dfrac{d}{dz}a^u=a^u\ln a\cdot\dfrac{du}{dz}$	$26.\ \dfrac{d}{dz}\cosh^{-1}u=\dfrac{1}{\sqrt{u^2-1}}\cdot\dfrac{du}{dz}$
$12.\ \dfrac{d}{dz}e^u=e^u\cdot\dfrac{du}{dz}$	$27.\ \dfrac{d}{dz}\tanh^{-1}u=\dfrac{1}{1-u^2}\dfrac{du}{dz},\lvert u\rvert<1$
$13.\ \dfrac{d}{dz}\sin^{-1}u=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\dfrac{du}{dz}$	$28.\ \dfrac{d}{dz}\coth^{-1}u=\dfrac{1}{1-u^2}\dfrac{du}{dz},\lvert u\rvert>1$
$14.\ \dfrac{d}{dz}\cos^{-1}u=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\dfrac{du}{dz}$	$29.\ \dfrac{d}{dz}\operatorname{sech}^{-1}u=-\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\cdot\dfrac{du}{dz}$
$15.\ \dfrac{d}{dz}\tan^{-1}u=\dfrac{1}{1+u^2}\cdot\dfrac{du}{dz}$	$30.\ \dfrac{d}{dz}\operatorname{csch}^{-1}u=-\dfrac{1}{u\sqrt{u^2+1}}\cdot\dfrac{du}{dz}$

(جدول ٢-١)

٢–٨ النقاط الشاذة Singular Points

النقاط التي تفشل عندها $f(z)$ في أن تكون دالة تحليلية يقال عليهـا نقـاط شـاذة Singular Points .. وهذا عرض موجز بأنواع النقاط الشاذة:

٢–٨–١ الشواذ المعزولة Isolated Singularities

إذا ما استطعنا إيجاد $\delta > 0$ بحيث لا تحتوي الدائرة $|z-z_0|=\delta$ إلا نقطـة شـاذة واحدة للدالة $f(z)$ عند $z=z_0$ .. فإن $z=z_0$ يقال عليها بالنقطة الشاذة المعزولة Isolated Singularity.

وعلى النقيض من ذلك (إذا لم تحتوي الدائرة $|z-z_0|=\delta$ أي نقاط شاذة) يقال على النقطة $z=z_0$ بالنقطة العادية أو المنتظمة Ordinary Point.

٢–٨–٢ نقاط التفرع Branch Points

وهي نقاط شاذة للدوال ذات القيم المتعددة multi-valued functions وهي نقاط عامة لجميع تفرعات الدالة branches وعندها تكون الدالة غير تحليلية لكل التفرعات .. على سبيل المثال

(i) $f(z)=(z-2)^{\frac{1}{n}},\ n\in N^{+}$ .. عند $z=2$

(ii) $f(z)=\ln(z-3+i)$ .. عند $z=3-i$

(iii) $f(z)=\ln(z^2-1)$ .. عند $z=\pm 1$

٢–٨–٣ الشواذ الاعتباريون Removable Singularities

وهي تلك النقاط التي للدالة $f(z)$ ـاية عندها .. أي أن

إذا كان $\exists \quad \lim_{z\to z_0} f(z)$

فإن $z = z_0$ وإن كانت تبدو شاذة الا أنه يمكن تعريف الدالة بقيمة النهايـة عنـد $z = z_0$ وبالتالي نكون قد أزلنا هذا الشذوذ ولذلك فالشذوذ هنا يمكن أن يكون اعتبارياً فقط .. على سبيل المثال

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1 \quad , \quad \lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z}=0,$$

٢-٨-٤ الأقطاب Poles

وهي نوع مميز من النقاط الشاذة وأكثرها استعمالا وخاصة في نظريات التكامل القادمة .. وتعرف كالآتي:

تعريف .. القطب Pole

إذا كان $\lim (z-z_0)^m f(z) = A \neq 0$ حيث $m\in N^+$ و A عدد محدود.

فإن $z = z_0$ يقال عليه قطب من الرتبة m.

وفي حالة m=1 فإن القطب يطلق عليه عادةً قطباً يسيراً a simple pole.

مثال ٢-٢٤

الدالة $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-3)^3}$

لها نقطتان شاذتان من نوع القطب .. (أو بيسر أكثر لها قطبان)

القطب الأول عند z=1 من النوع اليسير (لأن $\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)\neq 0$)

والقطب الثاني عند z=3 ومن الرتبة الثالثة (لأن $\lim_{z\to 3}(z-3)^3 f(z)\neq 0$)

لاحظ أن $\lim_{z\to 3}(z-3)f(z)\to\infty$ وأن $\lim_{z\to 3}(z-3)^2 f(z)\to\infty$ وبالتالي

فالرتبة هنا من الرتبة الثالثة.

٢-٨-٥ الشواذ الأساسية Essential Singularities

النقطة الشاذة التي ليست قطباً أو نقطة تفرع أو نقطة شاذة اعتبارية يقال عليها نقطة شاذة أساسية essential singularity .. على سبيل المثال

$f(z)=\ln\dfrac{1}{z-2}$ عند $z = 2$ .. أو $f(z)=e^{\frac{1}{z-i}}$ عند $z = i$ .. وهكذا

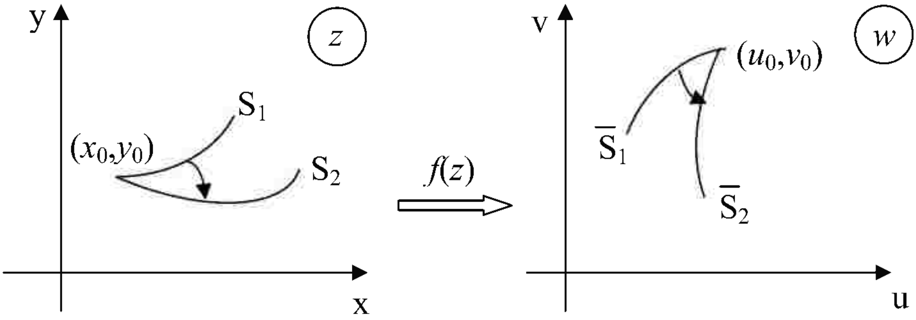
فهذه النقاط لا يمكن إزالتها كما إ ا ليست أقطاباً وليست نقاط تفرع .. فهي بالتالي نقـاط شاذة أساسية.

٢-٩ التحويل المحافظ Conformal mapping

تلعب تحليلية الدالة $f(z)$ دوراً هاماً في هذا النوع من التحويل

تعريف: التحويل المحافظ

لنفرض أن $f(z)$ تحول النقطة (x_0,y_0) في مستوى z إلى النقطة (u_0,v_0) في مستوى w كما هو واضح بالشكل (٢-١) وأن المنحـنيين المتقـاطعين عنـد (x_0,y_0) ، S_1 و S_2 يتحولان الى المنحنين المناظرين المتقاطعين عند (u_0,v_0) ؛ $\bar{S}_1$ وَ $\bar{S}_2$ (كما هو مبين بشكل ٢-١)



(شكل ٢-١)

فإن التحويل يسمى محافظاً إذا ما حافظ على الزاوية بين المنحنيين في المقدار والحس magnitude and sense.

وبالطبع يعلم القارئ أن الزاوية بين المنحنيين هي الزاوية بين المماسين لهذين المنحنيين عند نقطة التقاطع .. وأن المحافظة على الزاوية من حيث الحس معناه أن اتجاه الدوران من منحنى إلى آخر لا يتغير عند التحويل .. والتحويل الذي يحافظ على المقدار فقط ولا يحافظ على الحـس هـو تحويل غير محافظ isogonal mapping.

عارض –٣

التحويل من مستوى z إلى مستوى w يكـ .ون أحادي .ا one-to-one (النقط . ة الواحدة في المستوى z تتحول الى نقطة وحيدة فى مستوى w والعكس ص . حيح) إذا كان . ت $f(z)$ دالة تحليلية وكان معامل التحويل (الجاكوبيان Jacobian)

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

والنقاط التي عندها J = 0 تسمي نقاط حرجة.

عارض – ٤

في حالة كون $f(z)$ دالة تحليلية فإن $J = \left|\bar{f}(z)\right|^2$

الإثبات

دع f(z) = u + iv دالة تحليلية في R

أي أن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (2)$$

وهي معادلات كوشي-ريمان متحققة في نفس المنطقة R.

وبالتالي فإن

$$J = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_y & u_y \\ -u_y & v_y \end{vmatrix} = v_y^2 + u_y^2$$

ولكن $\bar{f}(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$

أي أن $\left|\bar{f}(z)\right|^2 = v_y^2 + u_y^2$

أي أن $J = \left|\bar{f}(z)\right|^2$

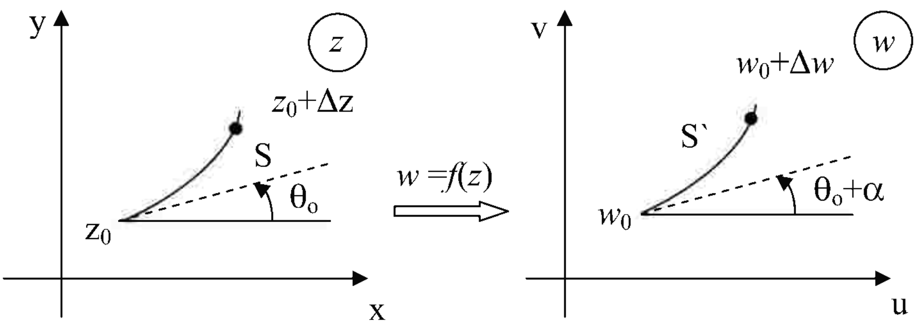
نظرية ٢-٦

التحويل المحافظ Conformal Mapping

إذا كانت $f(z)$ $\left(\bar{f}(z) \neq 0\right)$ دالة تحليلية في منطقة R في مستوى z فإن التحويل $w = f(z)$ يكون تحويلاً محافظاً.

الإثبات:

سنثبت أولاً أنه تحت هذا التحويل فإن المماس للمنحنى S عند النقطة $z=z_0$ في مستوى z يدور بزاوية $Arg\left(\bar{f}(z_0)\right)$ في مستوى w (شكل ٢-٢)



(شكل ٢-٢)

عند انتقال النقطة من z_0 الى $z_0 + \Delta z$ على المنحنى S فإن النقطة w_0 تنتقل الى $w_0 + \Delta w$ على المنحنى `S كما هو مبين بشكل (٢-٢) .. فإذا كان $z = z(t)$ هو المنحنى البارامتري في مستوى z فإن $w = w(t)$ هو المنحنى البارامتري في مستوى w.

وبالتالي فإن متجه المماس في مستوى z هو $\frac{dz}{dt}$ وكذلك متجه المماس في م. ستوى w هـ. و $\frac{dw}{dt}$ .. أي أن

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dz} . \frac{dz}{dt} = \bar{f}(z) \frac{dz}{dt}$$

وذلك عند z_0 و w_0 أي أن

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{w=w_0} = \bar{f}(z_0) \left.\frac{dz}{dt}\right|_{z=z_0}$$

وبكتابة $\left.\frac{dw}{dt}\right|_{w=w_0}$ بصور قطبية وكذلك $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{z=z_0}$

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{w=w_0} = \rho_o e^{i\phi_o} , \bar{f}(z) = \mathrm{R} e^{i\alpha} , \left.\frac{dz}{dt}\right|_{z=z_0} = r_o e^{i\theta_o}$$

فإننا سنجد أن

$$\rho_o e^{i\phi_o} = \mathrm{R} e^{i\alpha} . r_o e^{i\phi_o}$$

وبالتالي

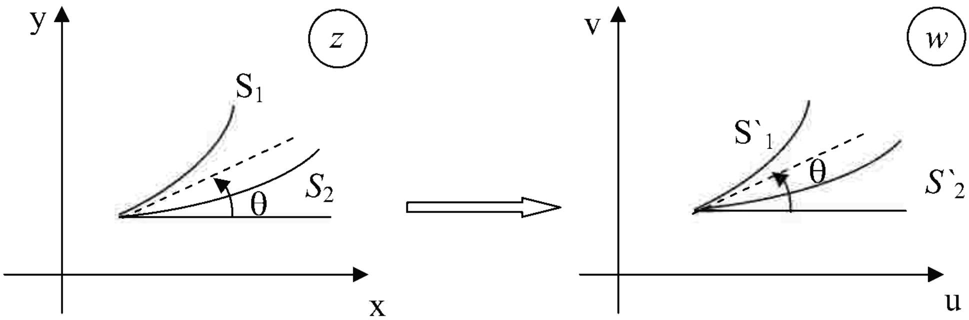
$$\begin{aligned} \rho_o &= R r_o \\ \phi_o &= \alpha + \theta_o \\ &= \theta_o + \arg \bar{f}(z_0) \end{aligned}$$

وبالتالي فإن

$$\boxed{\phi_o = \theta_o + \arg \bar{f}(z_0)}$$

فالزاوية الجديدة هي الزاوية القديمة مضافة إليها زاوية محددة α وهذا مجرد دوران.

والآن إذا كان هناك منحنيان S_1 و S_2 بينها زاوية θ في مستوى z ودار كل منهما في مستوى w بنفس الزاوية α فإن الزاوية بين المنحنيين ستظل θ، (شكل ٢-٣)



(شكل ٢-٣)

عارض – ٥

إذا كانت $w = f(z) = u + iv$ دالة تحليلية بحيث يكون $u = \alpha, v = \beta$ تكون شبكة من المنحنيات (الخطوط) المتعامدة في مستوى w فإن المنحنيات المناظرة لها في مستوى z تكون منحنيات متعامدة أيضاً.

الإثبات:

بما أن $f(z)$ دالة تحليلية .. أي أن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (2)$$

والآن على المنحنى $u(x, y) = \alpha$ و المنحنى $v(x, y) = \beta$ في مستوى z (شكل٢-٤) فإن:

$$du = 0$$

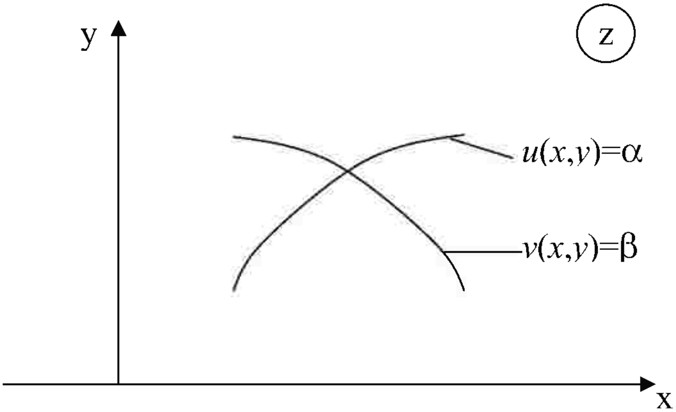
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (3)$$

كذلك $dv = 0$

$$\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0 \qquad (4)$$

من (3) فإن $\quad \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}$: ميل المنحنى $u(x, y)=\alpha$

ومن (4) فإن $\quad \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y}}$: ميل المنحنى $v(x,y)=\beta$



(شكل ٢-٤)

وبالتالي فإن حاصل ضرب الميلين (مع استعمال (١)، (٢))

$$\frac{u_x}{u_y}.\frac{v_x}{v_y}=\frac{v_y}{u_y}.\frac{-u_y}{v_y}=-1$$

أي أن المنحنيان يكونا متعامدين.

٢-٩-١ بعض الأمثلة على التحويل المحافظ Some Examples on Conformal Mapping

٢-٩-١-١ التحويل الانتقالي Translation

ويأخذ الصورة $w = z + \beta \quad , \quad \beta \in C$

تنتقل الأشكال في مستوى z إلى أشكال مناظرة في مستوى w في اتجاه المتجه β.

مثال ٢-٢٥:

المحور التخيلي في مستوى z ينتقل إلى خط رأسي في مستوى w.

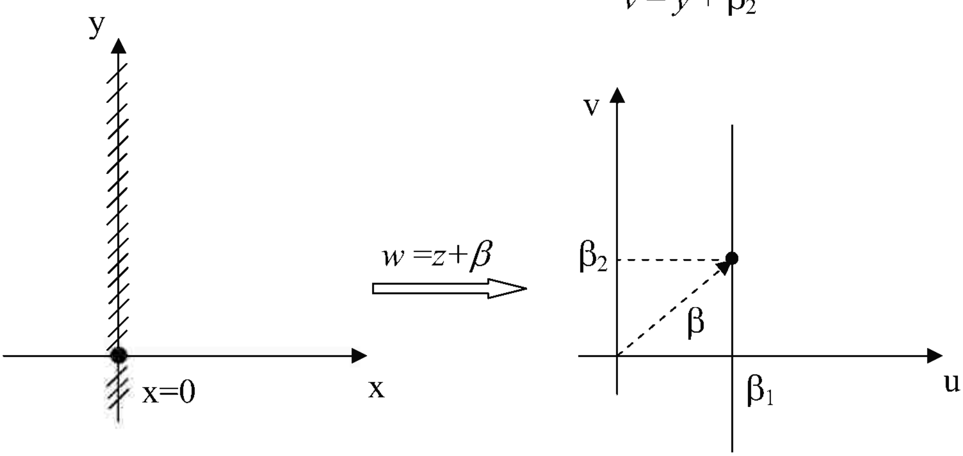
الإثبات:

المحور التخيلي هو $x = 0$

ولكن $u + iv = (x + iy) + \beta_1 + i\,\beta_2$

إذن

$$u = \beta_1$$
$$v = y + \beta_2$$



(شكل ٢-٥)

٢-٩-١-٢ التحويل التدويري Rotation

وبأخذ الصورة

$$w = e^{i\theta_o} z \quad , \quad \theta_o \in \Re$$

وبذلك تدور الأشكال في مستوى z الى نظيرها في مستوى w بزاوية θ_o .. واتجاه الدوران يتبع زاوية θ_o.

مثال ٢-٢٦

المحور التخيلي في مستوى z ينتقل إلى خط مائل بزاوية $\frac{\pi}{2}+\theta_o$.

الإثبات

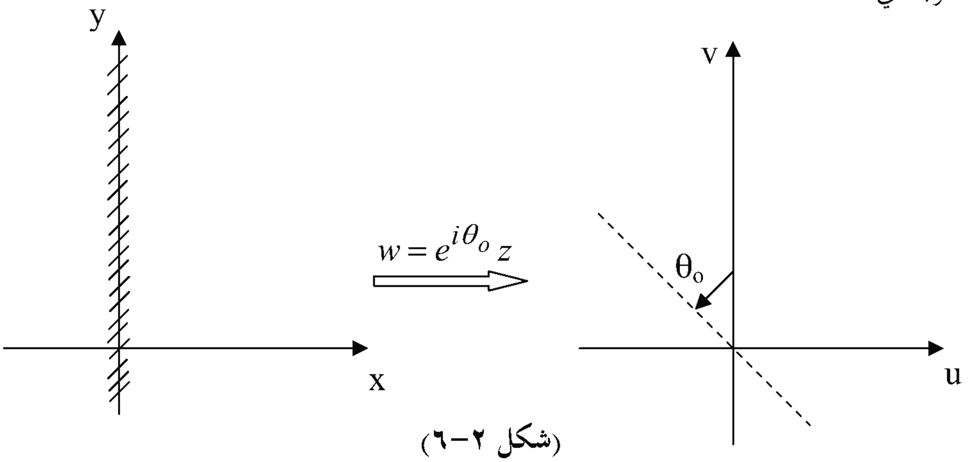
$$w = e^{i\theta_o} z$$

والآن المحور التخيلي

$$z = r\, e^{i\frac{\pi}{2}}$$

وبالتالي

$$w = r\, e^{i\left(\theta_o + \frac{\pi}{2}\right)}$$



(شكل ٢-٦)

٢-٩-١-٣ المطّ Stretching

وبأخذ الصورة $w = a\, z \quad , \quad a \in \Re$

أي أن

$$u = a\, x$$
$$v = a\, y$$

وكما هو واضح فإن a تمثل معامل تكبير magnification إذا كانت $a > 1$ ومعامل تصغير إذا كانت $0<a<1$

مثال ٢-٢٧

الدائرة $|z| = 1$ تنتقل إلى الدائرة $|w| = a$ عندما يكون $w = a\,z$ و $a > 0$.

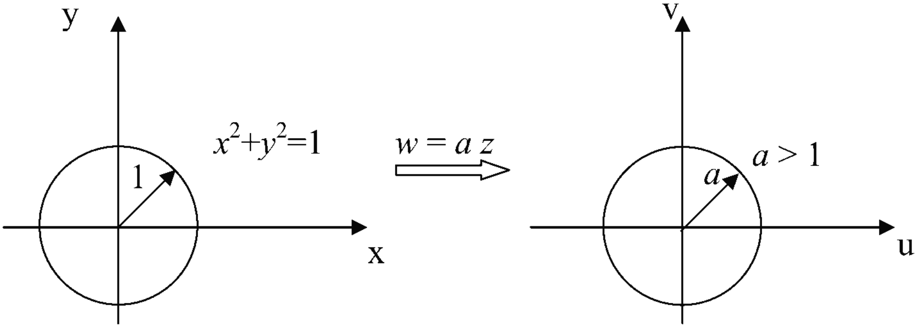
الإثبات

في مستوى z $\qquad x^2 + y^2 = 1$

وكذلك $\qquad u = a\,x \;,\; v = a\,y$

أي أن $\qquad u^2 + v^2 = a^2(x^2+y^2) = a^2$

أي دائرة نصف قطرها a .. (شكل ٢-٧).



(شكل ٢-٧)

٢-٩-١-٤ العكس Inversion

وتأخذ الصورة $\qquad w = \dfrac{1}{z}$

مثال ٢-٢٨

الدائرة $|z| = r$ تنتقل الى دائرة $|w| = \dfrac{1}{r}$

والقرص $|z| < 1$ تنتقل إلى خارج القرص $|w| > 1$

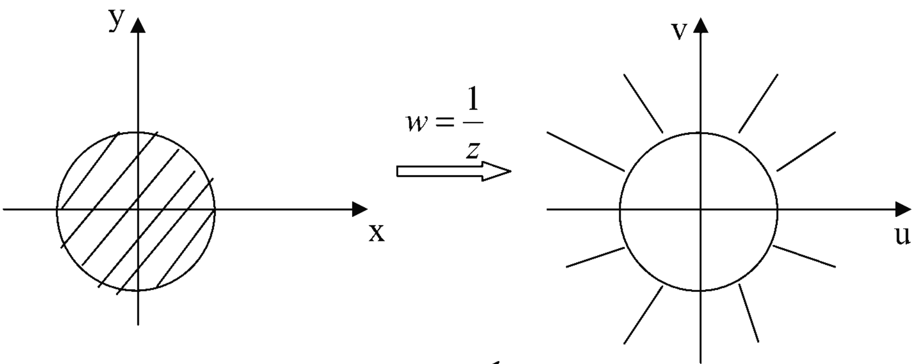
الإثبات

الإثبات مباشر لأن

$$|w| = \frac{1}{|z|}$$

فبالتالي إذا كان $|z| = r$ فإن $|w| = \dfrac{1}{r}$

وإذا كان $|z| < 1$ فإن $|w| > 1$ كما هو مبين بشكل (٢-٨)



(شكل ٢-٨)

وهذا يعطي معنى العكس (عكس الأشكال).

٢-٩-١-٥ التحويل الخطي Linear Transformation

ويأخذ الصورة

$$w = \alpha z + \beta$$

أي أن

$$\begin{aligned} w &= \alpha\left(z + \frac{\beta}{\alpha}\right) \\ &= ae^{i\theta_o}\left(z + \frac{\beta}{\alpha}\right) \quad , \qquad \alpha = ae^{i\theta_o} \\ &= e^{i\theta_o}\left(az + \frac{a\beta}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

وهذا يعني أن هذا التحويل هو مزيج من المط $(a\ \ z)$ و الانتقال $\left(az+\dfrac{a\beta}{\alpha}\right)$ ثم الـ دوران $e^{i\theta_o}\left(az+\dfrac{a\beta}{\alpha}\right)$. وهو بذلك يحافظ على الأشكال كما بيننا في الباب الأول من هـ ذا الكتاب .. ويعتبر هذا إثبات أخر لهذه المسألة.

٢-٩-١-٦ مزدوج الخطية Bilinear Transformation

ويأخذ الصورة $w=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$

حيث $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$

وهذا التحويل يحافظ على شكل الدوائر (بما فيها المستقيمات التي هي دوائر ذات نصف قطر لا ائي) .. وهي أيضاً مزيج من المط والانتقال والدوران والعكس.

مثال ٢-٢٩

التحويل المزدوج الخطية هو مزيج من المط والانتقال والدوران والعكس.

الإثبات

بإعادة كتابة w كالآتي:

$$w=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma(\gamma z+\delta)}$$

حيث $\beta\gamma - \alpha\delta \neq 0$ .. وبالتالي فإن $\gamma z + \delta$ تمثل مط وانتقال وبالتالي فإن $\dfrac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma z+\delta}$ تمثل عكس ودوران وإضافة $\dfrac{\alpha}{\gamma}$ تمثل انتقال آخر.

مثال ٢-٣٠

التحويل المزدوج الخطية يحافظ على شكل الدوائرعلما بأن المعادلة العامة للـ دائرة في مستوى z هو $Az\bar{z}+Bz+\bar{B}\bar{z}+C=0$

حيث $A, C \in \Re^{+}$ و $B \in C$

وفي حالة A=0 تصبح المعادلة معادلة خط مستقيم.

الإثبات:

لو أخذنا هذه المعادلة العامة للدائرة واستعملنا "العكس" $w = \dfrac{1}{z}$ أي أن $z = \dfrac{1}{w}$

فإن

$$A\frac{1}{w}.\frac{1}{\overline{w}} + B\frac{1}{w} + \overline{B}\,\frac{1}{\overline{w}} + C = 0$$

$$A + B\overline{w} + \overline{B}w + Cw\overline{w} = 0$$

وهي بشكل عام معادلة دائرة أيضاً في مستوى w .. وكذلك لو استعملنا علاقة الدوران $w = e^{i\theta_0} z$ .. أو استعملنا علاقة الانتقال $w = z + \beta$ أو علاقة المط $w = a\, z$ ..

فجميعها توصل الى معادلة دائرة فى مستوى w.

وبالتالي فتحويل مزدوج الخطية والذي هو مزيج من ذلك كله يحافظ على الشكل الدائري.

مثال ٢-٣١

أثبت أن تحويل مزدوج الخطية يحول ثلاث نقاط بعينها في مستوى z (ولتكن z_1, z_2, z_3) إلى ثلاث نقاط بعينها في مستوى w (وليكن w_1, w_2, w_3) على الترتيب بما فيها النقطة عند ∞.

الإثبات:

على ضوء المثال ٢-٢٩ فإن

$$w = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma(\gamma z + \delta)}$$

وبالتالي فإن

$$z_1 \to w_1 : \quad w_1 = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma(\gamma z_1 + \delta)} \qquad (1)$$

$$z_2 \to w_2 : \quad w_2 = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma(\gamma z_2 + \delta)} \qquad (2)$$

$$z_3 \to w_3 : \quad w_3 = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma(\gamma z_3 + \delta)} \qquad (3)$$

$$z_4 \to w_4 : \quad w_4 = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma(\gamma z_4 + \delta)} \qquad (4)$$

وبالتالي فإن

$$w_1-w_2=\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma}\left(\frac{1}{\gamma z_1+\delta}-\frac{1}{\gamma z_2+\delta}\right)$$

$$=\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma}\frac{\gamma(z_2-z_1)}{(\gamma z_1+\delta)(\gamma z_2+\delta)} \qquad (5)$$

وبالمثل

$$w_2-w_3=\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma}\frac{\gamma(z_3-z_2)}{(\gamma z_2+\delta)(\gamma z_3+\delta)} \qquad (6)$$

ولو هناك نقطة رابعة $w_4 \to z_4$ فإن

$$w_1-w_4=\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma}\frac{\gamma(z_4-z_1)}{(\gamma z_1+\delta)(\gamma z_4+\delta)} \qquad (7)$$

$$w_3-w_4=\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma}\frac{\gamma(z_4-z_3)}{(\gamma z_3+\delta)(\gamma z_4+\delta)} \qquad (8)$$

ونلاحظ الآتي:

$$\frac{(w_1-w_4)(w_2-w_3)}{(w_1-w_2)(w_3-w_4)}=\frac{(z_4-z_1)(z_3-z_2)}{(z_2-z_1)(z_4-z_3)}$$

$$=\frac{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}$$

أي أن النسبة $\frac{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}$ لا تتغير تحت التحويل مزدوج الخطية وهي لذلك تسمي بالنسبة الضربية Cross ratio. وهي خاصية من خواص تحويل مزدوج الخطية.

وحيث أن التحويل به أربع مجاهيل $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ وهناك علاقة ثابتة لا يوجد فيها هذه البارامترات .. وبالتالي فمن الممكن تحويل ثلاث نقاط الى ثلاث أخرى بشكل فريد .. فباعتبار النقطة الرابعة نقطة عامة $w_4=w,\ z_4=z$ فإن

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_1-w_2)}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_1-z_2)}=\text{cross ratio}$$

وبالتالي فبحل المعادلة في w نحصل على المعادلة المطلوبة.

مثال ٢-٣٢

أوجد مزدوج الخطية التي تنقل النقاط $z = i, 1, 0$ إلى $w = 0, -i, -1$ بالترتيب.

الحل

باستخدام النسبة الضربية فإن

$$\frac{(w-0)(-i+1)}{(w+1)(+i)} = \frac{(z-i)(1)}{(z-0)(i-1)}$$

$$w(1-i)^2 z = (w+1)(-i)(z-i)$$

$$w\left((1-i)^2 z + i(z-i)\right) = (-i)(z-i)$$

$$w(-2iz + iz + 1) = -i(z-i)$$

$$\boxed{w = \frac{-iz-1}{-iz+1}}$$

مثال ٢-٣٣

اثبت أن التحويل $w = e^{i\theta}\left(\dfrac{z-z_o}{z-\bar{z}_o}\right)$ يحول نصف المستوى العلوي في مستوى z إلى القرص الدائري $|w|<1$ بحيث يتحول المحور الأفقي إلى الدائرة $|w|=1$. حيث z_0 أي نقطة معلومة في نصف المستوى العلوي في مستوى z.

الإثبات:

بما أن

$$w = e^{i\theta}\frac{(z-z_o)}{(z-\bar{z}_o)}$$

فإن

$$|w| = \left|e^{i\theta}\right|\frac{|z-z_o|}{|z-\bar{z}_o|}$$

ولكن $|e^{i\theta}| = 1$ .. بالتالي

$$|w| = \frac{|z-z_o|}{|z-\bar{z}_o|}$$

وبوقوع z_0 في النصف العلوي من مستوى z .. فإن $\bar{z}$ تكون في النصف الأسفل وبالتالي فإن $|z-z_0|<|z-\bar{z}_0|$ ويحدث التساوي عندما تقع z_0 على المحور الحقيقي (وبالتالي $\bar{z}_0$ أيضاً) .. وبذلك يثبت المطلوب.

مثال ٢-٣٤

أثبت أن التحويل $|\alpha|<1, w=e^{i\theta}\dfrac{z-\alpha}{\bar{\alpha}z-1}$

يحول (i) $|z| = 1$ إلى $|w| = 1$

(ii) القرص $|z| < 1$ إلى القرص $|w| < 1$

الإثبات:

(i) بوضع $z = e^{i\psi}$ و $\alpha=be^{i\lambda}$, $b < 1$

بالتالي

$$|w|=\left|e^{i\theta}\right|\frac{|z-\alpha|}{|\bar{\alpha}z-1|}$$

$$=\frac{\left|e^{i\psi}-be^{i\lambda}\right|}{\left|be^{-i\lambda}e^{i\psi}-1\right|}$$

أي أن

$$|w|^2=\frac{(\cos\psi-b\cos\lambda)^2+(\sin\psi-b\sin\lambda)^2}{(b\cos(\psi-\lambda)-1)^2+b^2\sin^2(\psi-\lambda)}$$

$$=\frac{1+b^2-2b\cos(\psi-\lambda)}{1+b^2-2b\cos(\psi-\lambda)}$$

$$=1$$

إذن $|w| = 1$

(ii) بوضع $r < 1$, $z = r\,e^{i\psi}$ فإن

$$|w|^2 = \frac{r^2 + b^2 - 2rb\cos(\psi - \lambda)}{r^2b^2 + 1 - 2rb\cos(\psi - \lambda)} = \frac{A}{B}$$

والآن

$$B\text{-}A = r^2b^2 + 1 - r^2 - b^2$$
$$= (1\text{-}r^2)\,(1\text{-}b^2) \quad , \quad r < 1 \quad , \quad b < 1 > 0$$

أي أن $B > A$

وبالتالي فإن $|w|^2 < 1 \Rightarrow |w| < 1$

٢-٩-١-٧ النقاط الثابتة Fixed Points

النقاط التي تحافظ على العلاقة $w = z$ تسمى بالنقاط الثابتة للتحويل Fixed Points of Transformation

مثال ٢-٣٥

أوجد النقاط الثابتة للتحويل $w = \dfrac{2z-5}{z+4}$

الحل

بوضع $w = z$ فإن

$$z = \frac{2z-5}{z+4}$$

أي أن $z^2+4z=2z-5$

أي أن $z^2+2z+5=0$

وهذه المعادلة تعطي النقطتان $z_1 = -1 + 2i$

$z_2 = -1 - 2i$

. . . .

تمرينات –٢

(١) أثبت أن اشتقاق الدوال الأولية كم هو مبين في جدول ٢-١ ص ٥٤.

(٢) أثبت أن الدالة $f(z) = |z|^2$ دالة غير تحليلية في أي مكان.

(٣) أثبت أن الدالة $w = f(\bar{z})$ دالة غير تحليلية في أي مكان.

(٤) أثبت أن $u = 2x(1\text{-}y)$ دالة توافقية ثم أوجد مرافقتها والدالة $f(z)$ واشتقاقها $\bar{f}(z)$

(الإجابة $f(z) = iz^2 + 2z$)

(٥) إذا كانـ ـت $u = x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y$ فأوجـ ـد $\bar{f}(z)$ حيـ ـث $f(z) = u + iv$.

(٦) تأكد من أن الدوال الآتية تحليلية في كل مكان

$$f(z) = e^{z^2} \qquad \text{(i)}$$

$$\cos z^2 \qquad \text{(ii)}$$

(٧) بدل الدالة u بأحد الدوال الآتية وأعد المطلوبات في المسألة (٤)

$$u = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2 \qquad \text{(i)}$$
$$u = 2xy + 3xy^2 - 2y^3 \qquad \text{(ii)}$$
$$u = x\, e^x \cos y - y\, e^x \sin y \qquad \text{(iii)}$$

(٨) إذا كانت $v = -e^{-2xy} \cos (x^2-y^2)$ أوجد مرافقتها والدوال $f(z)$ و $\bar{f}(z)$.

(٩) أثبت أن $\frac{d}{dz}\left(e^z \sin z\right) = e^z\left(\cos z + \sin z\right)$

باستخدام $\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x}$

(١٠) أثبت أن $\frac{d}{dz}\ln f(z) = \frac{\bar{f}(z)}{f(z)}$

(١١) أوجد قيمة a التي تجعل $w = \frac{az-1}{z-i}$ تحول دائرة الوحـ ـدة $|z| = 1$ الى الـ ـدائرة $|w| = R$.

(الإجابة: $R = 1$ و $a = -i$)

(١٢) أوجد تحويل مزدوج الخطية الذي يحول النقاط $(-i,0,i)$ الي $(-1,i,1)$

(الإجابة: $w = \frac{z-1}{i(z+1)}$)

(١٣) أوجد التحويل $w = e^{i\theta}\dfrac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$ الـ . تي تحـ . ول $z = i$ الي $w = 0$ وكـ . ذلك $z = \infty$ إلي $w = -1$. (الإجابة: $w = \dfrac{i - z}{i + z}$)

(١٤) أثبت أن $z = \dfrac{2a}{\pi}\ln\dfrac{1 + w}{1 - w}$ تحول الشريحة الأفقيـ . ة المحـ . صورة بـ . ين $y = a$ و $y = -a$ إلى داخل دائرة الوحدة $|w| = 1$.

(١٥) أثبت أن $w = z + \dfrac{1}{z}$ يحول

(i) الخط $\arg z = a$ حيث $|a| < \dfrac{\pi}{2}$ إلى قطع زائد في مستوى w.

(ii) $|z| > 1 \;,\; y > 0$ إلى المنطقة $v > 0$.

(١٦) اثبت أن $w = \cosh z$ دالة تحليلية ومن ثم أوجد صورة المستطيل المحـ . دود بـ . . $x = 0, a$ و $y = 0, b$.

(١٧) أوجد مشتقات الدوال الآتية:

(i) $f(z) = \left(\sin^{-1}(2z - 1)\right)^2$, (ii) $f(z) = \ln\left(z - \dfrac{3}{2} + \sqrt{z^2 - 3z + 2i}\right)$

الإجابة (i) $2\sin^{-1}(2z - 1)/\sqrt{z - z^2}$, (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{z^2 - 3z + 2i}}$

(١٨) أوجد المشتقة الثانية للدوال:

(i) $f(z) = \sinh (z + 1)^2$

(ii) $f(z) = (z)^{z+i}$

(١٩) أوجد النقاط الشاذة للدوال

(i) $\dfrac{\ln(z + 3i)}{z^2}$ $\quad (z = 0, z = -3i)$

(ii) $\sin^{-1}\dfrac{1}{z}$ $\quad (z = 0)$

(iii) $\sqrt{z(z^2 + 1)}$ $\quad (z = 0, \pm i)$

(٢٠) إذا كانت $f(z) = u + iv$ فاثبت أن

$$f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, -i\frac{z}{2}\right) + C \qquad \text{(i)}$$

$$f(z) = 2iv\left(\frac{z}{2}, -i\frac{z}{2}\right) \qquad \text{(ii)}$$

(٢١) أوجد الدالة التحليلية $f(z)$ والتي تحقق أن $\mathrm{Re}\left(\bar{f}(z)\right) = 3x^2 - 4y - 3y^2$

و $f(1+i) = 0$ الإجابة $(f(z) = z^3 + 2iz^2 + 6 - 2i)$

(٢٢) إذا كانت $w = f(z)$ دالة تحليلية في الصورة القطبية (r,θ) فأثبت أن

$$\frac{dw}{dz} = e^{-i\theta}\frac{\partial w}{\partial r}$$

(٢٣) إذا كانت $f(z) = u + iv$ دالة تحليلية فأثبت أن:

$$w = \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

دالة تحليلية أيضاً.

(٢٤) أوجد معادلتي كوشي-ريمان لنظام المحاور (ρ, η)

حيث $y = e^{\rho}\sinh\eta \quad , \quad x = e^{\rho}\cosh\eta$

(٢٥) إذا كانت معادلة الشحنة في دائرة كهربية خطية مكونة من مصدر للجهد الكهربي $E_o \cos wt$ ومقاومة R ومكثف C وممانعة L هي

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = E_o \cos wt$$

أثبت أن حل هذه المعادلة هو

$$Q = \mathrm{Re}\left\{\frac{E_o e^{iwt}}{iw\left(R + i\left(wL - \frac{1}{wC}\right)\right)}\right\}$$

مساعدة: يمكنك إعادة كتابة الطرف الأيمن من المعادلة كالآتي $E_o\, e^{iwt}$ وأفترض أن الحل في صورة Ae^{iwt} ثم أوجد A.

. . . .