الباب الثالث

تكامل الدوال المركبة

Complex Integration

في هذا الباب نكتشف سحراً جديداً في نظرية المتغير المركب .. وإذا كنا قد تمتعنا بمعادلتي كوشي – ريمان ونظريات أخرى كوجود جديد لمفاهيم الاشتقاق للدوال بعد توسيع مفهومها من الحقيقي إلى المركب .. فإن سحر النظرية الحقيقي يكمن في التكامل ..

٣-١ التكامل الخطي Line Integrals

مازالت الاستمرارية تلعب دوراً محورياً .. فإذا ما كانت $f(z)$ دالة مستمرة على كل نقاط المنحنى C (شكل ٣-١) والذي سنفترض أن له طولاً محدوداً وليكن L ولتكن نقطة بدايته $a = z_0$ ونقطة نهايته $b = z_n$ بينما النقاط $z_1, \ldots, z_{n-1}$ نقاط اختيارية على هذا المنحنى .. وإذا ما كوننا التجميع

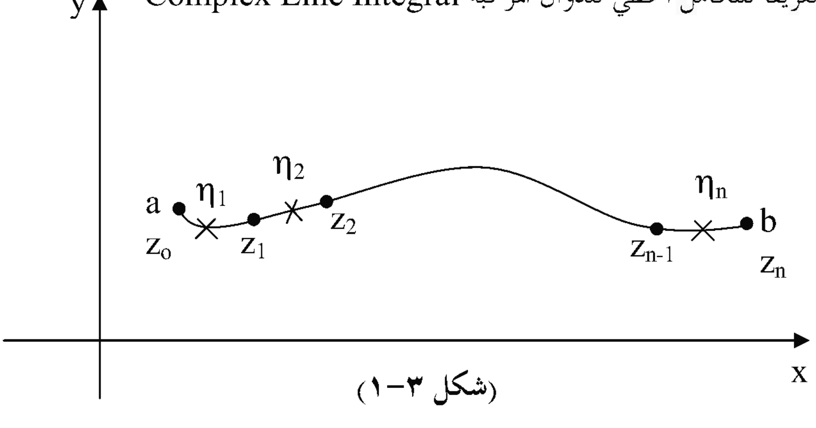
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)\Delta z_k$$

حيث $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$

وبجعل عدد التقسيمات $n \to \infty$ بحيث $|\Delta z_k| \to 0$ فإن

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz$$

يعطى تعريفاً للتكامل الخطي للدوال المركبة Complex Line Integral



(شكل ٣-١)

ومازال شرطنا هو الاتصال .. وبالتالي فإذا ما كانت الدالة دالة تحليلية فهو شرط أكـ.ـبر مـ.ـن المطلوب.

والآن إذا ما كانت $f(z)= u + iv$ فإن

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u+iv)(dx+idy)$$

$$= \int_C (udx - vdy) + i\int_C vdx + udy$$

أي أن التكامل المركب ينقسم إلى تكاملين خطيين معرفين على الدوال الحقيقية .. ومن هنـ.ـا تدخل بعض النظريات المفيدة في التكامل الخطي الحقيقي لصياغة نظريات جديـ.ـدة للتكامـ.ـل الخطي المركب .. وبناءً على الخواص ذا ا في الحقل الحقيقي فإنه يمكن كتابة الخواص التاليـ.ـة للتكامل الخطي المركب:

$$\int_C (f(z) \pm g(z))dz = \int_C f(z)dz \pm \int_C g(z)dz \qquad \text{(i)}$$

$$\int_C Af(z)dz = A\int_C f(z), A: \text{ثابت} \qquad \text{(ii)}$$

$$\int_a^b f(z)dz = -\int_b^a f(z)dz \qquad \text{(iii)}$$

$$\int_a^b f(z)dz = \int_a^m f(z)dz + \int_m^b f(z)dz \qquad \text{(iv)}$$

حيث m نقطة على C أيضاً.

(v) وهي خاصية هامة

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \le ML$$

حيث $|f(z)| \le M$ .. أي أن M أحد الحدود القصوى لـ f(z) على C و L هو طول المنحنى C.

الإثبات:

$$\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{\infty} f(\eta_k)\Delta z_k$$

$$\left|\int_C f(z)dz\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} f(\eta_k)\Delta z_k\right|$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} |f(\eta_k)||\Delta z_k| \quad , \qquad |f(z)| \le M$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} M\ |\Delta z_k|$$

$$\le M \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta z_k|$$

$$= M\ L$$

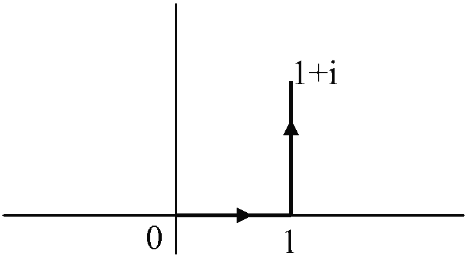
وهذا الأسلوب لحساب القيمة العددية سوف نستعمله كثيرا في هذا الباب وفي مواضع مختلفة فيجب على القارئ فهمه فهماً جيداً .. وكنتيجة لذلك فإن علاقة ذات أهمية كبيرة يجب الالتفات إليها كالتالي:

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_C |f(z)||dz|$$

مثال ٣-١

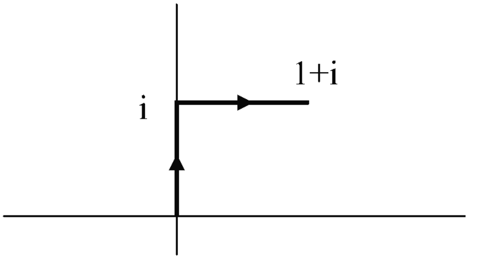
أحسب $\int_0^{1+i} z\ dz$ على

(i) المسار من z=0 إلى z=1 ثم المسار من z=1 إلى z=1+i (شكل ٣-٢)



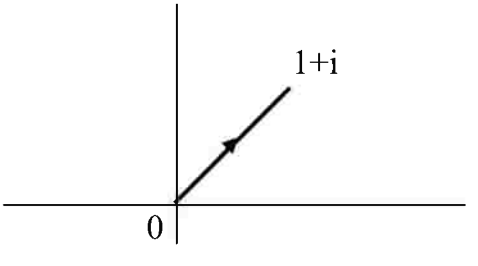
(شكل ٣-٢)

(ii) المسار من $z=0$ إلى $z=i$ ثم المسار من $z=i$ إلى $z=1+i$ (شكل ٣-٣)



(شكل ٣-٣)

(iii) المسار المباشر من $z=0$ إلى $z=1+i$ كما هو مبين بشكل ٣-٤.



(شكل ٣-٤)

الحل

(i) بالنسبة للمسار الأول

$$\int_0^{1+i} zdz = \int_0^1 \underbrace{zdz}_{y=0} + \int_1^{1+i} \underbrace{zdz}_{x=1}$$

$$= \int_0^1 xdx + \int_0^1 (1+iy)idy \quad , \quad 0 \le y \le 1$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 + iy\Big|_0^1 - \frac{1}{2}y^2\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} + i - \frac{1}{2}$$

$$= i$$

(ii) بالنسبة للمسار الثاني

$$\int_0^{1+i} zdz = \int_0^i \underbrace{zdz}_{x=0} + \int_i^{1+i} \underbrace{zdz}_{y=1}$$

$$= \int_0^1 iy(idy) + \int_0^1 (x+i)(dx)$$

$$0 \le y \le 1 \quad , \quad 0 \le x \le 1$$

$$= -\frac{1}{2}y^2\Big|_0^1 + \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 + ix\Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + i$$

$$= i$$

(iii) بالنسبة للمسار الثالث (y=x)

$$\int_0^{1+i} \underbrace{zdz}_{y=x} = \int_0^1 (x+ix)(dx+idx) \quad , \quad 0 \le x \le 1$$

$$= \int_0^1 (x)(1+i)(1+i)dx$$

$$= (1+i)^2 \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1$$
$$= \frac{1}{2}(1+2i-1)$$
$$= i$$

هل هي مجرد مصادفة أن قيم التكامل متساوية على هذه المسارات المتعددة؟

مثال ٣-٢

أحسب $\int_0^{1+i} \bar{z}dz$ على نفس المسارات السابقة

الحل

(i) بالنسبة للمسار الأول

$$\int_0^{1+i} \bar{z}dz = \int_0^{1+i} \underbrace{\bar{z}dz}_{y=0} + \int_1^{1+i} \underbrace{\bar{z}dz}_{x=1}$$
$$= \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 + \int_0^1 (1-iy)(idy)$$
$$= \frac{1}{2} + i(1) + \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^1$$
$$= \frac{1}{2} + i + \frac{1}{2}$$
$$= 1+i$$

(ii) بالنسبة للمسار الثاني

$$\int_0^{1+i} \bar{z}dz = \int_0^{i} \underbrace{\bar{z}dz}_{x=0} + \int_i^{1+i} \underbrace{\bar{z}dz}_{y=1}$$
$$= \int_0^1 (-iy)(idy) + \int_0^1 (x-i)dx$$
$$= \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^1 + \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 - ix\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-i$$
$$=1-i \quad ?$$

(iii) بالنسبة للمسار الثالث

$$\int_0^{1+i}\bar{z}dz=\int_0^{1+i}\underbrace{\bar{z}dz}_{y=x}$$
$$=\int_0^1 (x-ix)(dx+idx)$$
$$=\int_0^1 x(1-i)(1+i)dx$$
$$=2\int_0^1 xdx$$
$$=2\frac{1}{2}x^2\,\Big|_0^1$$
$$=1??$$

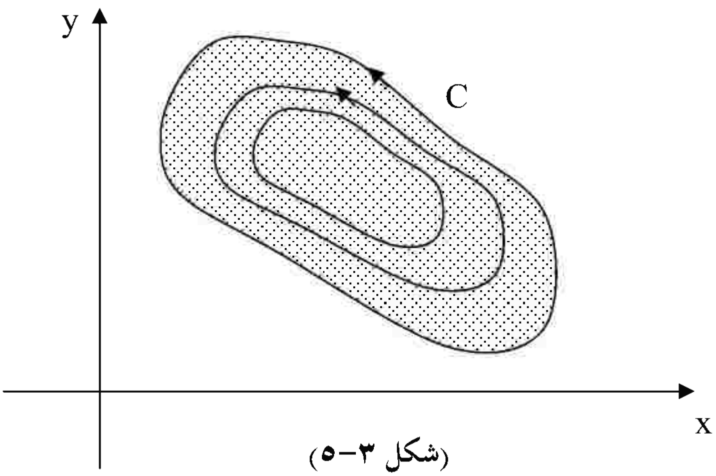
التكامل غير فريد ويعتمد على المسار .. لماذا ؟؟

لابد أن المثالين السابقين يثيران الاهتمام بشكل كبير .. فبعض الدوال تكاملا ا لا تعتمد على المسار بينما يعتمد الآخر على مسار التكامل .. فهل نستطيع س . بر أغوار هذه المسألة ؟! .. فى الواقع نستطيع.

تعريف: المنطقة يسيرة التوصيل والمنطقة عديدة التوصيل

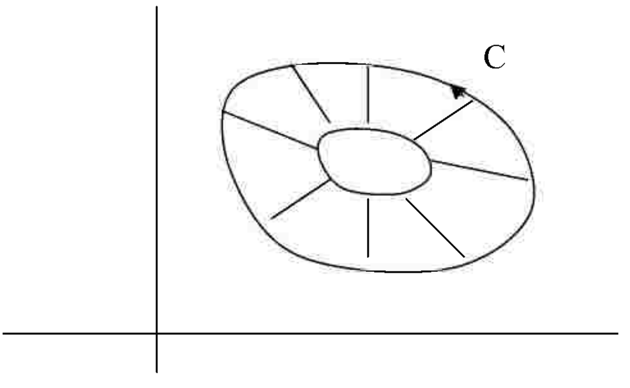
Simply-Connected and Multiply-Connected Regions

يطلق على منطقة أ ا يسيرة التوصيل Simply-Connected إذا كان أي منحنى مغلق يسير Simple closed curve داخل المنطقة يمكن تقليصه إلى نقطة بدون مغادرة المنطقة ذا ا (شكل ٣-٥)



(شكل ٣-٥)

وإذا لم يكن من الممكن إجراء ذلـك فالمنطقـة تـسمى بعديـدة الاتـصال multiply connected .. وعادةً ما يوجد فجوات داخل هذه المناطق (شكل ٣-٦)



(شكل ٣-٦)

وبالطبع وجود فجوة واحدة على الأقل لا تمكننا من تقليص أي منحنى مغلق يسير داخل هذه المناطق إلى نقطة إلا إذا غادرنا المنطقة إلى الفجوة وهي تحتوي نقاط ليست من المنطقة ذا ا.

وسوف لا تم بتعقيدات الأشكال في هذه النقطة .. فالمنحنيات التي ستعتمدها دائما يـسيرة والمناطق التي تحيط ا إما يسيرة أو متعددة.

وإذا كان المسار على المنحنى المغلق اليسير في عكس اتجاه عقارب الساعة counter clock wise فإن هذا الاتجاه يعتبر موجباً والعكس يعتبر اتجاهاً سالباً .. والتكامل على أمثال هذه المنحنيات يسمى بالتكامل المساري Contour integral.

٣-٢ نظرية كوشي Cauchy's Theorem

نظرية ٣-١

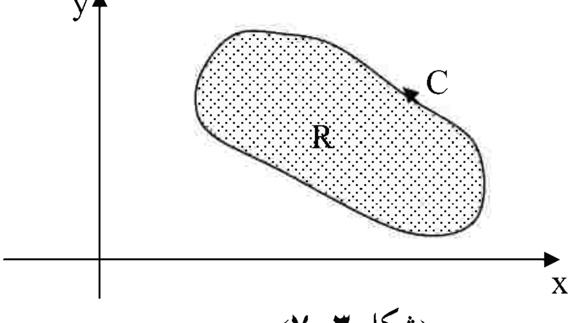
إذا كانت f(z) دالة تحليلية في منطقة R وعلى حدودها المنحنى المغلق C فإن

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

الإثبات

يجب التمهيد أولاً إلى نظرية شهيرة في المتغير الحقيقي وتسمى بنظرية جرين Green's Theorem في المستوى وتنص على أنه إذا كانت P(x, y) و Q(x, y) دوال متصلة ولها تفاضلات جزئية متصلة في منطقة R وعلى حدودها C (أنظر شكل ٣-٧) فإن

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$



(شكل ٣-٧)

فالتكامل الخطي يتحول إلى تكامل على مساحة – نرجو الانتباه لذلك.

وبالنسبة للنظرية فبما أن f(z)=u+iv دالة تحليلية فإن u و v تكون متصلة طبعاً وكذلك مشتقا ـا الجزئية داخل المنطقة R وعلى حدود المنطقة المنحنى C مع ملاحظة أن

$$f(z)dz = (u + iv)(dx + idy)$$
$$= (udx - vdy) + i(vdx + udy)$$

فإن
$$\oint_C f(z)dz = \oint_C (udx - vdy) + i\oint_C (vdx + udy)$$

وبتطبيق نظرية جرين على كل من التكاملين فإن

$$\oint_C f(z)dz = \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy + i\iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy$$

ولكن $f(z)$ دالة تحليلية فهي تحقق معادلتي كوشي – ريمان .. أي أن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

وباستخدام هاتين المعادلتين فإن

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

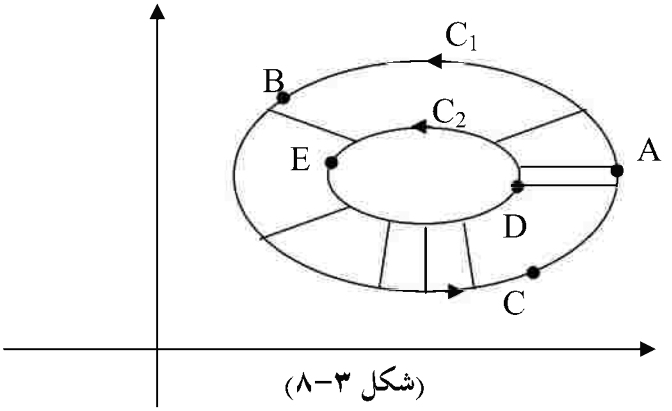
ملاحظات:

(i) طالمَا أن $f(z)$ دالة تحليلية على المنحنى المغلق C اليسير وداخله inside and on فإن التكامل يساوي صفر بغض النظر عما يحدث للدالة من نقاط شاذة تسبب عدم التحليلية لها خارج هذا النطاق .. فمثلاً

$$\oint_{|z-2|=1} \frac{1}{z}dz = 0$$

لأن الدائرة $|z-2| = 1$ لا تحتوي على النقطة الشاذة $z=0$.

(ii) يمكن تطبيق هذه النظرية على المناطق المتعددة الاتصال وذلك بعمل قطع (أو عدة قطوع) بين الفجوات التي تحتويها هذه المنطقة .. فمثلا بالنسبة للمنطقة الموضحة بشكل ٣-٨



(شكل ٣-٨)

فهي محدودة بالمنحنى C_1 من الخارج والمنحنى C_2 من الداخل وهي بذلك منطقة متعددة الاتصال فإذا ما جئنا عند نقطتي D, A وتصورنا وجود قطع من A إلى D وأكملنا المسار من A إلى B إلى C إلى A ثم إلى D ثم إلى E (بعكس اتجاه المنحنى) ثم إلى D ثم إلى A مرة أخرى فإننا بذلك نحصل على منطقة يسيرة الاتصال (لأننا تجنبنا وجود الفجوة) وبذلك يمكن تطبيق نظرية كوشي فيكون

$$\oint_{ABCADEDA} f(z)dz = 0$$

ثم بتقسيم المسار مرة أخرى فأننا نحصل على

$$\underset{\text{(في اتجاه } C_1)}{\int_{ABCA} f(z)dz} + \int_A^D f(z)dz + \underset{\text{(بعكس اتجاه } C_2)}{\int_{DED} f(z)dz} + \int_D^A f(z)dz = 0$$

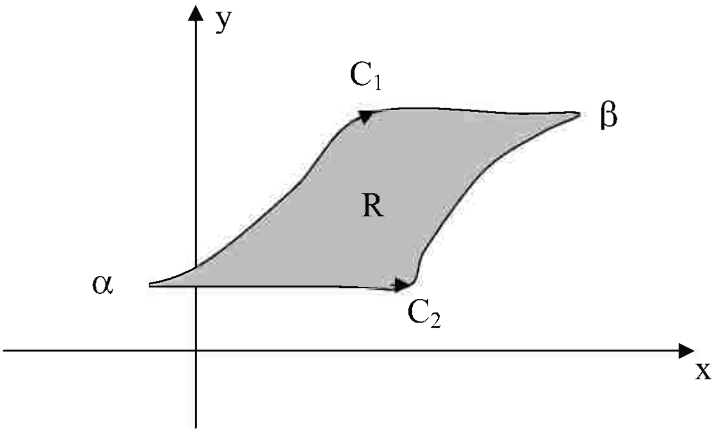
والتكامل الثاني والرابع متساويان عددياً ويتضادان في الإشارة ..فبالتالي

$$\oint_{C_1} f(z)dz - \oint_{C_2} f(z)dz = 0$$

أي أن
$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz$$

وهي نتيجة هامة جداً لنظرية كوشي.

(iii) والآن نأتي إلى نتيجة هامة جداً جداً من نتائج نظرية كوشي .. فإذا أخذنا المسار المبين بشكل (٣-٩)



(شكل ٣-٩)

والمطلوب إيجاد التكامل $\int_{\alpha}^{\beta} f(z)dz$ على المسار C_1 أو المسار C_2 وكانت $f(z)$ دالة تحليلية على كل من C_1 و C_2 وداخل النقاط في R المحدود بهما .. فإن

حيث C يحد المنطقة R ، $\oint_C f(z)dz = 0$

$$\int_{C_2} f(z)dz - \int_{C_1} f(z)dz = 0$$

أي أن

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

أي أن التكامل للدوال التحليلية في منطقة R لا يعتمد على المسار بين النقطتين في R .. وعلى ذلك فالدوال المعروفة إنها تحليلية في كل مكان يمكن تكاملها مباشرة بغض النظر عن المسار بين حدود التكامل. كذلك بالنسبة للدوال المعروفة إنها تحليلية في منطقة R فإن التكامل بين أي نقطتين في R لا يعتمد على المسار بين النقطتين .. وبذلك نجد أن التحليلية مرة أخرى هي الكلمة السحرية التي تيسر الأمور.

(iv) نظرية موريرا Morera's Theorem

إذا كانت $f(z)$ دالة متصلة في R المنطقة اليسيرة التوصيل وأن $\oint_C f(z)dz = 0$

على أي منحنى مغلق يسير في R .. فأن $f(z)$ دالة تحليلية في R.

وهذا المنطوق هو عكس منطوق نظرية كوشي .. والإثبات يسير بشكل عكسي مع تغيير طفيف.

٣-٣ التكامل غير المحدود Indefinite Integrals

دعونا نتقدم خطوة كبيرة في اتجاه حساب بعض تكاملات الدوال المركبة .. خاصةً عندما تكون هذه الدوال تحليلية.

نظرية ٣-٢

دع $f(z)$ دالة تحليلية في منطقة يسيرة الاتصال R ودع a و z نقطتان في هذه المنطقة فإن

$$F(z) = \int_a^z f(u)du \qquad \text{(a)}$$

$$F'(z) = f(z) \qquad \text{(b)}$$

الإثبات

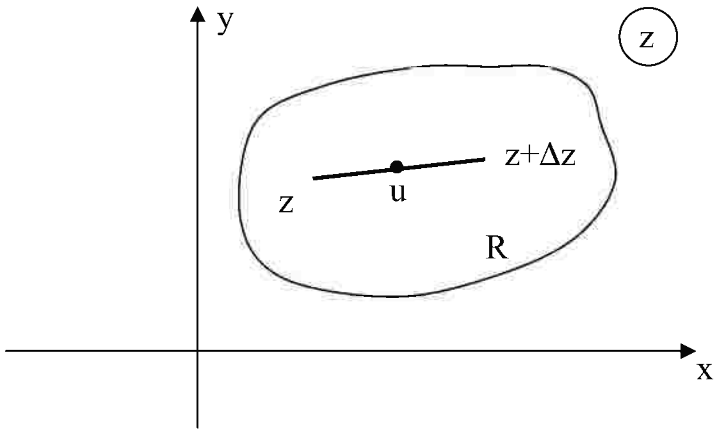
دعنا نكون المقدار

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z}\left[\int_a^{z+\Delta z} f(u)du - \int_a^z f(u)du\right] - f(z)$$

$$= \frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} f(u)du - f(z) \qquad \text{(لماذا؟)}$$

$$= \frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} \left(f(u)-f(z)\right)du \qquad \text{(لماذا؟)} \quad (1)$$

ولكن الدالة $(f(u) - f(z))$ دالة تحليلية في R وبالتالي فتكاملها غير معتمد على المسار بين z و $z+\Delta z$ طالما كانتا النقطتان في R .. فإذا أخذنا المسار الخطى المباشر بين z و z+Δz (أنظر شكل ٣-١٠).



(شكل ٣-١٠)

وطبقا لاستمرار الدالة f(z) في R فإن $|f(u)-f(z)|<\in$ طالما $|u-z|<\delta$ أي $|\Delta z|<\delta$ .. وبالتالي

$$\left|\int_{z}^{z+\Delta z}(f(u)-f(z))du\right| <\in |\Delta z| \qquad (2)$$

أي أن من (1) و (2):

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right| = \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_{z}^{z+\Delta z}(f(u)-f(z))du\right| <\in$$

أي أن

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} = f(z)$$

أي أن $F(z)$ على صور لـ $\int_a^z f(u)du$ دالة تحليلية ويكون $F`(z)=f(z)$.

هذه النظريـة تعـني أن التكامـل $\int f(z)dz$ سـيكون مـساوياً لـ $F(z)+C$ .. لأن $(F(z)+C)`=f(z)$ حسب منطوق النظرية السابقة .. وهذه النتيجة بالنسبة إلينا عادية لأنه سبق استعمالها في الدوال الحقيقية ..

أي أن

$$\int f(z)dz = F(z) + C$$

وعلى هذا الأساس فجدول التفاضلات الموجود ص ٥٤ يمكن عكسه للحصول على جـدول آخر للتكاملات .. أنظر جدول ٣-١.

ودعونا الآن نلخص الحقائق التي حصلنا عليها حتى الآن:

(i) إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في منطقة R وكان النقطتان z, a في R فإن

$\int_a^z f(z)dz$ يكون مستقلا عن المسار بين النقطتين z, a.

(ii) أيضا فإن $F(z)=\int_a^z f(z)dz$ تكـون دالـة تحليليـة أيـضا في R ويكـون

$$F`(z)=f(z)$$

(iii) ويكون أيضا $\int_a^b f(z)dz = F(b)-F(a)$ وذلك لأن

$$\int_a^b f(z)dz = F(z)_a\Big|^b = F(b)-F(a)$$

ولننتبه لذلك جيداً .. إننا يمكننا التكامل بشكل مباشر الآن وبكافة الطـرق الـتي تعودنا عليها وباستخدام الجدول ٣-١ فقط إذا تحقق الشرط السحري وهـو أن $f(z)$ دالـة تحليلية في منطقة R تحتوي حدود ومسار التكامل..

مثال ٣-٣

$$\int_{0}^{1+i} zdz = \frac{1}{2}z^2 \Big|_{0}^{1+i} = \frac{1}{2}(1+i)^2$$

$$= \frac{1}{2}(1+2i-1) = i$$

لأن الدالة $f(z) = z$ دالة تحليلية في كل مكان.

وفي الواقع فإن الوصول إلى هذه النتيجة أمر مدهش ومهم .. لأننا الآن يمكننا إجراء تكاملات كثيرة وعديدة واستخدام بنك معلوماتنا السابقة من طرق التكامل لتكامل الدوال المركبة والتي هي تحليلية.

(iv) لا ننسى أبداً النظرية الأم .. نظرية كوشي والتي تقول أن

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

طالما كانت $f(z)$ دالة تحليلية في المنطقة اليسيرة الاتصال (وحـ.ـتى المتعـ.ـددة الاتـ.ـصال بتصرف خاص كما بيننا) والمحاطة بالمنحنى المغلق اليسير C.

مثال ٣-٤

$$\oint_{|z|=3} z\, dz = 0$$

بدون عناء في الإثبات لأن الدالة $f(z) = z$ دالة تحليلية في كل مكان .. وليس داخل وعلـ.ـى الدائرة $|z| = 3$ فقط.

ويبدو أن معركتنا الحقيقية ستكون مع هذه الدوال التي تحتوي نقاط شـ.ـاذة في المنطقـ.ـة R .. كيف يمكن حساب التكامل لأمثال هذه الدوال (الدوال غير التحليلية عنـ.ـد نقـ.ـاط شـ.ـاذة محدودة)...

$$1.\ \int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} \qquad n \neq -1$$

$$2.\ \int \frac{dz}{z} = \ln z$$

$$3.\ \int e^z dz = e^z$$

$$4.\ \int a^z dz = \frac{a^z}{\ln a}$$

$$5.\ \int \sin z dz = -\cos z$$

$$6.\ \int \cos z dz = \sin z$$

$$7.\ \int \tan z dz = \ln \sec z = -\ln \cos z$$

$$8.\ \int \cot z dz = \ln \sin z$$

$$9.\ \int \sec z dz = \ln(\sec z + \tan z) = \ln \tan(z/2 + \pi/4)$$

$$10.\ \int \csc z dz = \ln(\csc z - \cot z) = \ln \tan(z/2)$$

$$11.\ \int \sec^2 z dz = \tan z$$

$$12.\ \int \csc^2 z dz = -\cot z$$

$$13.\ \int \sec z \tan z dz = \sec z$$

$$14.\ \int \csc z \cot z dz = -\csc z$$

$$15.\ \int \sinh z dz = \cosh z$$

$$16.\ \int \cosh z dz = \sinh z$$

$$17.\ \int \tanh z dz = \ln \cosh z$$

$$18.\ \int \coth z\, dz = \ln \sinh z$$

$$19.\ \int \operatorname{sech} z\, dz = \tan^{-1}(\sinh z)$$

$$20.\ \int \operatorname{csch} z\, dz = -\coth^{-1}(\cosh z)$$

$$21.\ \int \operatorname{sech}^2 z\, dz = \tanh z$$

$$22.\ \int \operatorname{csch}^2 z dz = -\coth z$$

$$23.\ \int \operatorname{sech} z \tanh z\, dz = -\operatorname{sech} z$$

$$24.\ \int \operatorname{csch} z \coth z\, dz = -\operatorname{csch} z$$

$$25.\ \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 \pm a^2}} = \ln\left(z + \sqrt{z^2 \pm a^2}\right)$$

$$26.\ \int \frac{dz}{z^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{z}{a} \text{ or } -\frac{1}{a}\cot^{-1}\frac{z}{a}$$

$$27.\ \int \frac{dz}{z^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{z-a}{z+a}\right)$$

$$28.\ \int \frac{dz}{\sqrt{a^2 - z^2}} = \sin^{-1}\frac{z}{a} \text{ or } -\cos^{-1}\frac{z}{a}$$

$$29.\ \int \frac{dz}{z\sqrt{a^2 \pm z^2}} = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{z}{a + \sqrt{a^2 \pm z^2}}\right)$$

$$30.\ \int \frac{dz}{z\sqrt{z^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\cos^{-1}\frac{a}{z} \text{ or } \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{z}{a}$$

$$31.\ \int \sqrt{z^2 \pm a^2}\, dz = \frac{z}{2}\sqrt{z^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left(z + \sqrt{z^2 \pm a^2}\right)$$

$$32.\ \int \sqrt{a^2 - z^2}\, dz = \frac{z}{2}\sqrt{a^2 - z^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{z}{a}$$

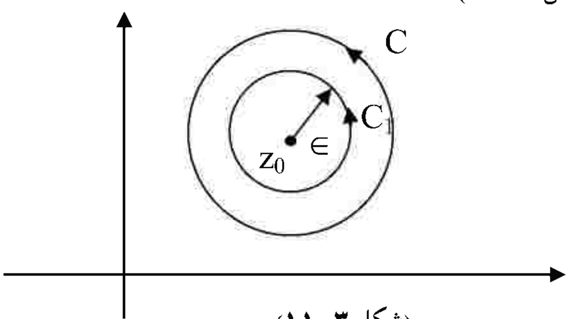
$$33.\ \int e^{az}\sin bz dz = \frac{e^{az}(a\sin bz - b\cos bz)}{a^2 + b^2}$$

$$34.\ \int e^{az}\cos bz dz = \frac{e^{az}(a\cos bz + b\sin bz)}{a^2 + b^2}$$

(v) ولا ننسى أيضا النتيجة الهامة للنظرية الأم وهي أنه إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في منطقة محدودة بمنحنيين مغلقين يسيرين C_1, C_2 وعلى المنحنيين أيضا .. فإن

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz$$

ونرجو أن ننتبه أيضا إلى هذه النتيجة المدهشة .. فهي تعطي حلاً لمسألة تواجد النقـاط الشاذة في المنطقة R إذ يمكننا عزل هذه النقطة الشـاذة بدائرة تكون نصف قطرهـا ∈ ومركزها هو النقطة الشـاذة نفسها أي أن $|z-z_0|=\in$ حيث $z=z_0$ هي النقطة الشاذة فإذا ما حدث ذلك فإننا يمكننا استخدام النتيجة السابقة لإجراء التكامل على الدائرة ذا ـا .. (أنظر شكل ٣-١١) ..



(شكل ٣-١١)

أي أن

$$\oint_{C} f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{|z-z_0|=\in} f(z)dz$$

في الواقع هذه النتيجة تعطينا نقطة الانطلاق في حساب أمثال هذه التكاملات ..

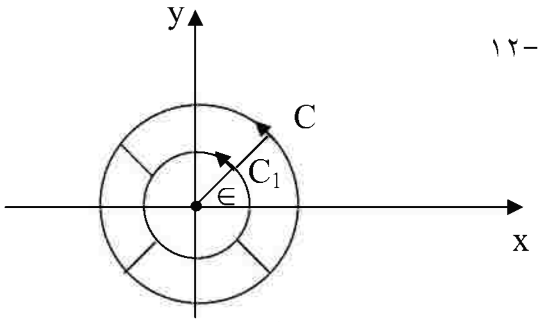
مثال ٣-٥

$$\oint_{C} \frac{dz}{z}$$

حيث C منحنى مغلق يسير يحتوي النقطة $z = 0$

الحل

انظر شكل ٣-١٢



(شكل ٣-١٢)

وبالتالي

$$\oint_C \frac{dz}{z} = \oint_{C_1} \frac{dz}{z} = \oint_{|z|=\in} \frac{dz}{z}$$

لاحـ..ظ أن كـ..ل النقـ..ـاط الواقعـ..ة علـ..ى الـ..دائرة $|z| = \in$ تكتـ..ب بـ..صورة $z = \in e^{i\theta}\ , 0 \le \theta < 2\pi$ وبالتالي فإن $dz = \in i\ e^{i\theta}\ d\theta$

$$\oint_C \frac{dz}{z} = \oint_{|z|=C} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{\in ie^{i\theta} d\theta}{\in e^{i\theta}}$$

$$= i \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= 2\pi i$$

وهي قيمة تخيلية لتكامل لا نستطيع إجراءه بالطرق العادية لأن $f(z)$ في هذه الحالة دالة غـير تحليلية في R .. فلا يمكننا أن نحسب التكامل على أنه $\ln z+C$ .. هذا خطأ فادح .. وهنـا يظهر التأثير الكبير لكون الدالة مركبة أولاً وثانياً أن لها نقاط شاذة في المنطقة R المحدودة بـ C.

ويمكن توسيع استعمال هذه النتيجة الجميلة في حالة وجود أكثر من نقطة شـاذة .. وذلـك باستخدام أساليب جبرية مثل الكسور الجزئية كما يوضح المثال التالي.

مثال ٣-٦

$$\oint_C \frac{dz}{z(z-1)}$$

حيث C يحتوى النقاط الشاذة $z = 0$ و $z = 1$

الحل

يمكن استخدام الكسور الجزئية ليكون

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1}$$

حيث $A = -1$ و $B = 1$ (يمكن الرجوع لأي كتاب جبر في المرحلة الجامعية)

أي أن
$$\oint_C \frac{dz}{z(z-1)} = -\oint_C \frac{dz}{z} + \oint_C \frac{dz}{z-1}$$

وبالتالي فكل تكامل الآن مشكلته هو وجود نقطة شاذة واحدة فقط يمكن عزلها والتعامل معها كما سبق في مثال ٣-٥ (أنظر شكل ٣-١٣)

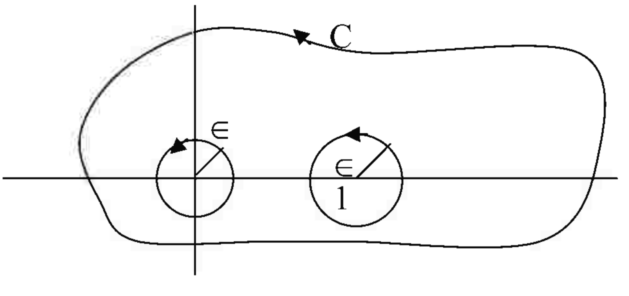
$$\oint_C \frac{dz}{z} = \oint_{\substack{|z|=\in \\ z=\in e^{i\theta}}} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{\in ie^{i\theta}}{\in e^{i\theta}} = 2\pi i$$

$$\oint_C \frac{dz}{(z-1)} = \oint_{\substack{|z-1|=\in \\ z-1=\in e^{i\theta}}} \frac{dz}{z-1} = \int_0^{2\pi} \frac{\in ie^{i\theta} d\theta}{\in e^{i\theta}} = 2\pi i$$

وبالتالي فإن التكامل

$$\oint_C \frac{dz}{z(z-1)} = -2\pi i + 2\pi i$$
$$= 0$$

وهذا ليس معناه أن الدالة $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ دالة تحليلية باستخدام نظرية موريرا لأن شرط أن f(z) دالة متصلة في R غير متواجد .. نرجو الانتباه لذلك .. فمن الممكن للتكامل أن يساوي صفر بغض النظر عن تطبيق نظرية كوشي .. فالتكامل يمكنه أخذ أي قيمة في C.

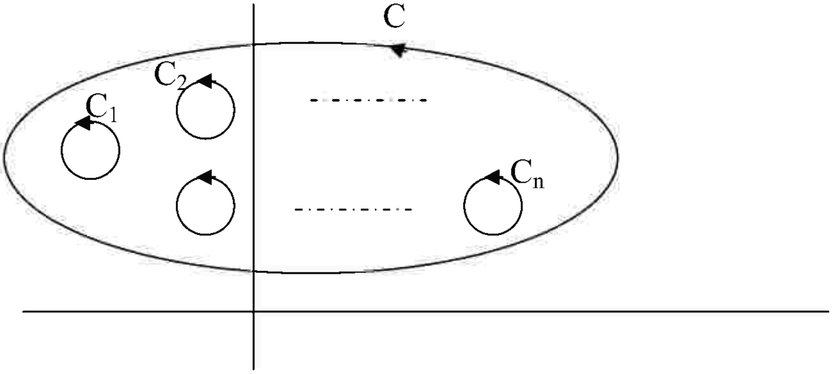


(شكل ٣-١٣)

بذلك نكون قد مهدنا للنظرية العامة التالية:

٣-٤ تكامل دالة غير تحليلية عند عدد محدود من النقاط الشاذة

نظرية ٣-٣ دع $f(z)$ دالة تحليلية في منطقة R محدودة بالمنحنيات المغلقة اليسيرة $C, C_1, C_2, .., C_n$ (أنظر شكل ٣-١٤).



(شكل ٣-١٤)

فإن
$$\oint_C f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} f(z)dz$$

الإثبات: بتعميم القطوع Cuts التي سبق واستعملناها في إثبات النتيجة المحدودة بوجود نقطة شاذة واحدة (انظر ص ١١٠) وبذلك نحصل على

$$\oint_C f(z)dz - \oint_{C_1} f(z)dz - \oint_{C_2} f(z)dz \ldots - \oint_{C_n} f(z)dz = 0$$

وبالتالي يثبت منطوق النظرية.

ملاحظة: هذه النظرية تعمم ما سبق قوله في (v) ص ١١٨ .. وبالتالي مع استعمال واسع لنظرية الكسور الجزئية يمكننا تطبيق هذه النظرية بنجاح ولكن على النقاط الشاذة الداخلية فقط .. وإهمال النقاط التي هي خارج R.

مثال ٣-٧

$$\oint_C \frac{1}{z(z^2-1)}$$

حيث

(i) C تحتوي كل النقاط الشاذة للدالة.

(ii) C تحتوي z = 1 و z = -1 فقط.

(iii) C تحتوي z = 0 و z = 1 فقط.

الحل

أولا باستخدام الكسور الجزئية فإن

$$\frac{1}{z\left(z^2-1\right)}=\frac{1}{z(z-1)(z+1)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}+\frac{C}{z+1}$$

وبالطرق المعتادة فإن $C=\frac{1}{2}, B=\frac{1}{2}, A=-1$

أي أن

$$\frac{1}{z\left(z^2-1\right)}=\frac{-1}{z}+\frac{\frac{1}{2}}{z-1}+\frac{\frac{1}{2}}{z+1}$$

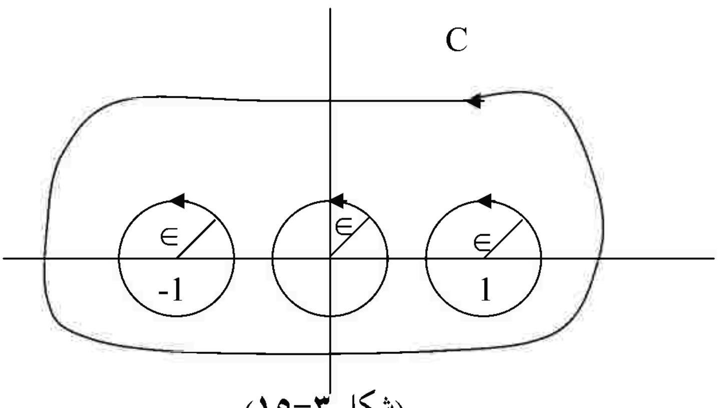
(i) وبالتالي طبقاً للنظرية ٣-٣ فإن (أنظر شكل ٣-١٥)

$$\oint_C \frac{dz}{z(z^2-1)}=-\oint_C \frac{dz}{z}+\frac{1}{2}\oint_C \frac{dz}{z-1}+\frac{1}{2}\oint_C \frac{dz}{z+1}$$

$$=-\oint_{\substack{|z|=\in\\ z=\in e^{i\theta}}} \frac{dz}{z}+\frac{1}{2}\oint_{\substack{|z-1|=\in\\ z-1=\in e^{i\theta}}} \frac{dz}{z-1}+\frac{1}{2}\oint_{\substack{|z+1|=\in\\ z+1=\in e^{i\theta}}} \frac{dz}{z+1}$$

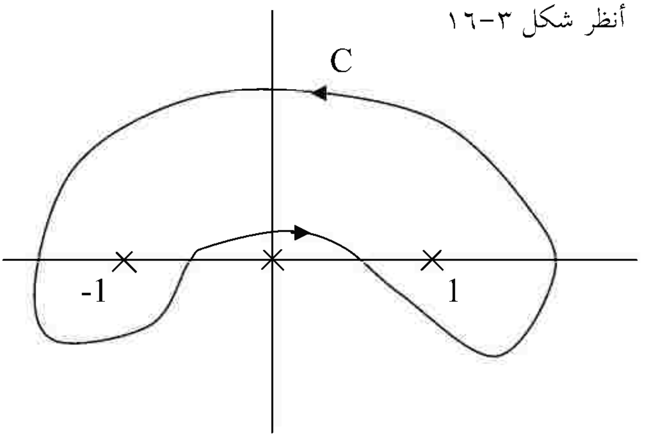
$$=-2\pi i+\frac{1}{2}2\pi i+\frac{1}{2}2\pi i$$

$$=0$$



(شكل ٣-١٥)

(ii) أنظر شكل ٣-١٦



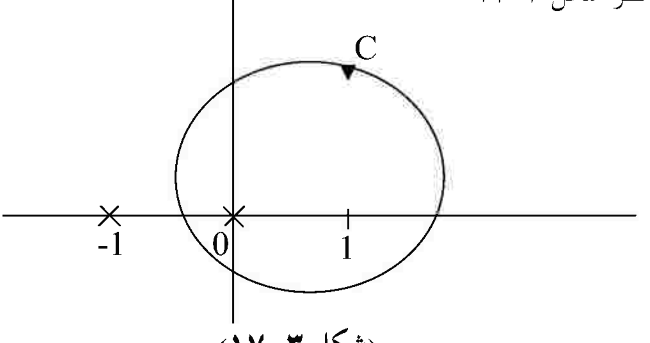
(شكل ٣-١٦)

$$\oint_C \frac{dz}{z(z^2-1)} = -\oint_C \frac{dz}{z} + \frac{1}{2}\oint_C \frac{dz}{z-1} + \frac{1}{2}\oint_C \frac{dz}{z-1}$$

$$= 0\,(\text{لماذا؟}) + \frac{1}{2}(2\pi i) + \frac{1}{2}(2\pi i)$$

$$= 2\pi i$$

(iii) أنظر شكل ٣-١٧



(شكل ٣-١٧)

$$\oint_C \frac{dz}{z(z^2-1)} = -\oint_C \frac{dz}{z} + \frac{1}{2}\oint_C \frac{dz}{z-1} + \frac{1}{2}\oint_C \frac{dz}{z+1}$$

$$= -2\pi i + \frac{1}{2}(2\pi i) + 0\,(\text{لماذا؟})$$

$$= -\pi i$$

ملاحظة: أليس وجود الثابت $(2\pi i)$ لافتاً للنظر ؟!

٣-٥ أمثلة محلولة (١) Solved Examples:

مثال ٣-٨

أحسب التكامل $\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n}, n = 1,2,3,...$ حيث z=a نقطة داخل المنطقة المحدودة بـ C.

الحل:

في حالة $n = 1$

$$\oint_C \frac{dz}{z-a} = \oint_{\substack{|z-a|=\in \\ z-a=\in e^{i\theta}}} \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{\in ie^{i\theta}}{\in e^{i\theta}} d\theta$$

$$= 2\pi i$$

والآن في حالة $n \geq 2$

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \oint_{\substack{|z-a|=\in \\ z-a=\in e^{i\theta}}} \frac{dz}{(z-a)^n}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\in ie^{i\theta} d\theta}{\in^n e^{in\theta}} = \frac{i}{\in^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta} d\theta, n \geq 2$$

$$= \frac{i}{\in^{n-1}} \left. \frac{e^{i(1-n)\theta}}{i(1-n)} \right|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{i}{\in^{n-1} i(1-n)} \left[e^{i(1-n)2\pi} - 1 \right]$$

ولكن $n \geq 2$ فإن $e^{i(1-n)2\pi}=1$ وبالتالي

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = 0 \quad , \qquad n \geq 2$$

أي أن

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i & n = 1 \\ 0 & n \geq 2 \end{cases}$$

ونلاحظ عدم اعتماد التكامل على قيمة النقطة الشاذة الداخلية $z = a$.

مثال ٣-٩

احسب $\displaystyle\int_{z=1}^{z=1+i} z \cos z \, dz$

الحل

حيث أن دالة التكامل $f(z) = z \cos z$ دالة تحليلية في كل مكان فقطعاً هناك دائما منطقة تحتوى حدود ومسار التكامل .. وبالتالي فالتكامل لا يعتمد على المسار بين النقط . تين $z = 1$ و $z = 1+i$ والتالي

$$\int_{z=1}^{z=1+i} z \cos z dz = \int_{1}^{1+i} z d(\sin z)$$

$$= z \sin z \Big|_1^{1+i} - \int_{1}^{1+i} \sin z dz$$

$$= (1+i)\cos(1+i) - \sin 1 + \cos z \Big|_1^{1+i}$$

$$= (2+i)\cos(1+i) - \sin(1) - \cos(1)$$

ملاحظة:

يمكن للقارئ اختبار النتيجة بأخ . ذ أي مس . ار بين النقطتين $z = 1$ و $z = 1+i$ .. ومقارن . ة النتيجة .. كذلك لاحظ أننا استعملنا التكامل بالتجزيء By parts .. وه . ذا ممكن .. وكذلك كل طرق التكامل المتعارف عليها في هذا الباب طالما أن f(z) دالة تحليلية.

مثال ٣-١٠

احسب التكامل $\int_C \frac{dz}{z^2+a^2}$ في الحالات التالية:

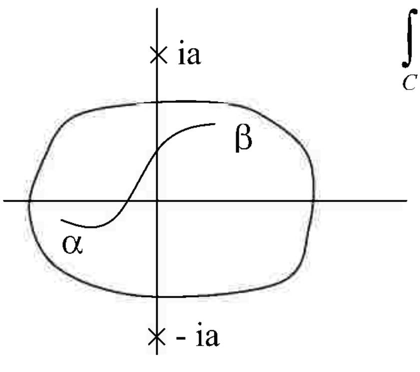
(i) في حالة C موجود في منطقة R لا تحتوي النقاط $z = \pm ai$

(ii) في حالة C موجود في منطقة R تحتوي $z = ai$ ولا تحتوي على $z = -ai$

(iii) في حالة C موجود في منطقة R تحتوي النقطتان $z = \pm ai$

الحل

(i) في الحالة الأولى فإن الدالة $f(z) = \frac{1}{z^2+a^2}$ دالة تحليلية في R وبالتالي



$$\int_C \frac{dz}{z^2+a^2} = \int_\alpha^\beta \frac{dz}{z^2+a^2}$$

$$= \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{z}{a}\Big|_\alpha^\beta$$

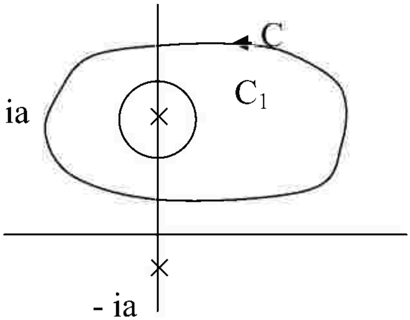
$$= \frac{1}{a}\left[\tan^{-1}\frac{\beta}{a} - \tan^{-1}\frac{\alpha}{a}\right]$$

وإذا كان C منحنى مغلقا فإن

$$\oint_C \frac{dz}{z^2+a^2} = 0$$

طبقاً لنظرية كوشي.

(ii) في حالة احتواء النقطة $z = ai$ وعدم احتواء الأخرى فإن التكامل يعتمد على المسار بين النقطتين α و β(لماذا؟) فإذا كان المسار C مغلقاً فإن :



$$\oint_C \frac{dz}{z^2+a^2} = \oint_C \frac{dz}{(z+ai)(z-ai)}$$

$$= \frac{1}{2ai} \oint_C \left(\frac{1}{z-ai} - \frac{1}{z+ai} \right) dz \qquad \text{(لماذا؟)}$$

$$= \frac{1}{2ai} \oint_{\substack{|z-ai|=\in \\ z-ai=\in e^{i\theta}}} \frac{dz}{z-ai} - \frac{1}{2ai} \oint_C \frac{dz}{z+ai}$$

$$= \frac{1}{2ai}(2\pi i) - 0 \qquad \text{(لماذا؟)}$$

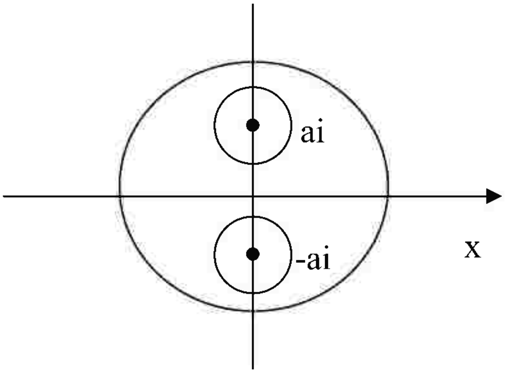
$$= \frac{\pi}{a}$$

أي أن $\oint_C \frac{dz}{z^2+a^2} = \frac{\pi}{a}$: pure real

(iii) وفي حالة احتواء النقطتين $z = \pm ai$ فإن التكامل يعتمد على المسار بين α و β ..
أما في حالة كون C منحنى مغلقاً فإن

$$\oint_C \frac{dz}{z^2+a^2} = \frac{1}{2ai}\left[\oint_C \frac{dz}{z-ai} - \oint_C \frac{dz}{z+ai} \right]$$

$$= 0$$



أو استعمال النظرية العامة

$$\oint_C \frac{dz}{z^2+a^2} = \oint_{\substack{|z-ai|=\in \\ z-ai=\in e^{i\theta}}} \frac{dz}{z^2+a^2} + \oint_{\substack{|z+ai|=\in \\ z=-ai+\in e^{i\theta}}} \frac{dz}{z^2+a^2} dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\in ie^{i\theta} d\theta}{\underbrace{\in e^{i\theta}}_{z-ai} . \underbrace{(2ai+\in e^{i\theta})}_{z+ai}} + \int_0^{2\pi} \frac{\in ie^{i\theta}}{\underbrace{\in e^{i\theta}}_{z+ai} . \underbrace{(-2ai+\in e^{i\theta})}_{z-ai}}$$

$$= i\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2ai+\in e^{i\theta}} + i\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left(-2ai+\in e^{i\theta}\right)}$$

$$= i\int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\theta} d\theta}{2ai\, e^{-i\theta}+\in} + i\int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\theta} d\theta}{\left(-2ai\, e^{-i\theta}+\in\right)} \qquad \text{(لماذا؟)}$$

$$= \frac{-1}{2ai}\left[\ln\left(\in +2aie^{-i\theta}\right)\Big|_0^{2\pi} + \ln\left(-2aie^{-i\theta}+\in\right)\Big|_0^{2\pi} \right]$$

$$= -\frac{1}{2ai}\left[\ln(\in +2ai) - \ln(\in +2ai) + \ln(-2ai+\in) - \ln(-2ai+\in)\right]$$

$$= 0$$

وواضح أن استعمال الكسور الجزئية ييسر المسألة تيسيراً كبيراً.

والآن يمكننا التقدم خطوة أخرى في حسابات تكامل الدوال المركبة.

٣-٦ صيغة كوشي للتكامل Cauchy's integral formulae

نظرية ٣-٤

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية داخل وعلى منحنى مغلق يسير C وكانت النقطة $z = a$ داخل C فإن

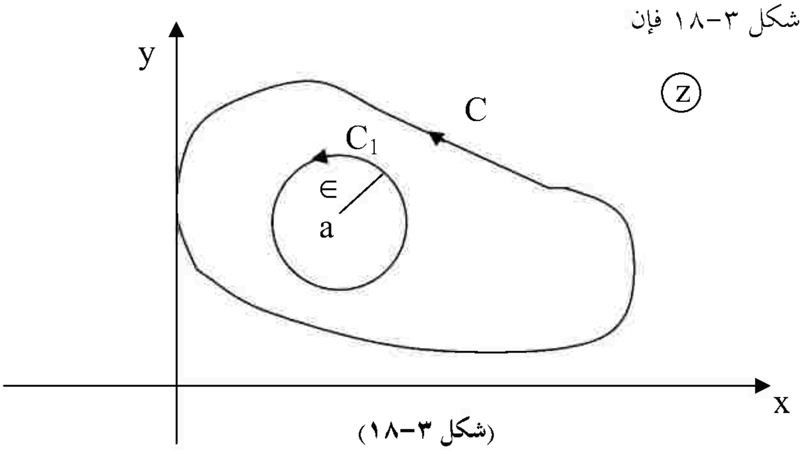
$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(z)}{z-a}dz$$

وبشكل عام فإن

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \qquad n=1,2,\ldots$$

الإثبات

لإثبات الحالة $n = 0$ فإننا نستخدم نفس الأسلوب الذي تعلمناه في الفصل السابق .. فمن شكل ٣-١٨ فإن



(شكل ٣-١٨)

$$\oint_{C}\frac{f(z)}{z-a}dz=\oint_{C_1}\frac{f(z)}{z-a}dz=\oint_{|z-a|=\in}\frac{f(z)}{z-a}dz$$

$$=\int_{0}^{2\pi}\frac{f(a+\in e^{i\theta})}{\in e^{i\theta}}\in i\,e^{i\theta}d\theta$$

$$=i\int_{0}^{2\pi}f(a+\in e^{i\theta})d\theta \qquad (1)$$

ولكن $f(z)$ دالة تحليلية فهي متصلة وبالتالي فإن $\lim\limits_{\in\to 0} f\left(a+\in e^{i\theta}\right)=f(a)$

وبأخذ النهاية عندما $\in\to 0$ لـ (١) فإن

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz = i(f(a))2\pi$$

أي أن
$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz$$

وهذا يثبت الحالة $n = 0$.

وعند $n = 1$ فإننا نأخذ القيمة

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{1}{h}\left[\frac{1}{z-(a+h)}-\frac{1}{z-a}\right]f(z)dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{1}{h}\frac{z-a-z+a+h}{(z-a)(z-(a+h))}f(z)dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)(z-(a+h))}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{(z-a)f(z)}{(z-a)^2(z-(a+h))}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{(z-a-h+h)f(z)}{(z-a)^2(z-a-h)}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{[(z-a-h)+(h)]f(z)}{(z-a)^2(z-a-h)}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^2}+\frac{h}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a-h)(z-a)^2}dz$$

وواضح أنه في حالة $h\to 0$ فإن الطرف الأيسر يصبح $\bar{f}(a)$ ويأخذ الطرف الأيمن الـ. صورة المطلوب إثبا ا .. ولذلك فبأخذ الحد الثاني الطرف الأيمن:

$$\frac{h}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^2(z-a-h)}=\frac{h}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(z)dz}{(z-a)^2(z-a-h)}$$

$$=\frac{h}{2\pi i}\oint_{|z-a|=\in} \frac{f(z)dz}{(z-a)^2(z-a-h)}$$

وباختيار h صغيرة جداً بحيث أن $z = a + h$ يكون داخل المسار C_1 أيضاً وبحيث يكون $|h| < \frac{\in}{2}$ .. أي أن (وباستخدام المتباينة $|a - b| \geq |a| - |b|$):

$$|z-a-h| \geq |z-a| - |h| > \in - \frac{\in}{2} = \frac{\in}{2}$$

كذلك فلأن $f(z)$ دالة تحليلية فهي محدودة أي أن $|f(z)| < M$

حيث M عدد موجب .. والآن يمكننا عمل هذه الحسابات

$$\left| \frac{h}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)dz}{(z-a)^2(z-a-h)} \right| \leq \frac{|h|}{2\pi} \oint_{C_1} \frac{|f(z)|}{|(z-a)^2||z-a-h|} |dz|$$

$$\leq \frac{|h| M \in}{2\pi (\in^2)\left(\frac{\in}{2}\right)} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{2|h| M}{\in^2}$$

وعندما نأخذ النهاية $h \to 0$ فإن التكامل ينعدم وبالتالي

فإن

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^2}$$

ومشياً على هذا المنوال فإن

$$\frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{h} \left[\frac{1}{(z-a-h)^2} - \frac{1}{(z-a)^2} \right] f(z)dz$$

$$= \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^3} dz + \frac{h}{2\pi i} \oint_C \frac{3(z-a) - 2h}{(z-a-h)^2 (z-a)^3} f(z)dz$$

وبأخذ النهاية $h \to 0$ فإننا نصل للمطلوب عند $n = 2$ بإثبات أن الحد الثاني ينعدم عندما يتم التكامل على الدائرة $|z-a| = \in$ .. فبملاحظة أن

$$\begin{aligned}|(3(z-a)-2h)f(z)| &= |3(z-a)-2h||f(z)|\\ &\le (3|z-a|+2|h|)M\\ &\le \left(3\in +2\frac{\in}{2}\right)\mathrm{M}\\ &\le 4\in M\end{aligned}$$

كذلك

$$\left|\frac{h}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{3(z-a)-2h}{(z-a-h)^2(z-a)^3}f(z)dz\right| \le \frac{|h|}{2\pi}\frac{(4\in M)}{\left(\frac{\in}{2}\right)^2\in^3}=\frac{|h|16M}{\in^3}$$

وواضح أ ا تنعدم عندما $h \to 0$ .. أي أن الحد الثاني ينعدم وبالتالي فإن

$$f''(a)=\frac{2!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-a)^3}dz$$

وهكذا بالاستنتاج نستطيع إثبات أن

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

ولإثبات النظرية إثباتاً كاملا فلابد من استخدام الاستنتاج الرياضي mathematical induction.

ملاحظة هامة:

(i) يمكننا ملاحظة أن الصورة

$$f'(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-a)^2}dz$$

هي مكافئة للصورة

$$f'(a)=\frac{d}{da}f(a)=\frac{d}{da}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-a}dz\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\partial}{\partial a}\frac{f(z)}{z-a}dz$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz$$

وكذلك

$$f''(a) = \frac{d}{da}f'(a) = \frac{d}{da}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz\right]$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\partial}{\partial a}\frac{f(z)}{(z-a)^2}dz$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C (2)\frac{f(z)}{(z-a)^3}dz$$

وكذلك

$$f'''(a) = \frac{d}{da}f''(a) = \frac{d}{da}\left[\frac{2}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^3}\right]$$
$$= \frac{2}{2\pi i}\oint_C \frac{\partial}{\partial a}\frac{f(z)}{(z-a)^3}dz$$
$$= \frac{2}{2\pi i}\oint_C (3)\frac{f(z)}{(z-a)^4}dz$$

وهكذا .. فهي امتداد لنظرية ليبنتز لتكامل الدوال الحقيقية والتي تمكننا من التفاضل تحت علامة التكامل.

(ii) من نتائج النظرية السابقة وطريقة إثبا ا فإنه إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في منطق . ة R فإن $f'(z)$ دالة تحليلية أيضا وكذلك $f''(z)$ .. وب . شكل ع . ام ف . إن $f^{(n)}(z)$ تحليلية في R.

مثال ٣-١١

أوجد التكامل $\oint_C \frac{e^{5z}}{(z-1)^5}dz$ حيث C يحتوي النقطة z = 1

الحل:

من صيغة كوشي للتكامل مباشرة فإن

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a)$$

ولكن $f(z) = e^{5z}$ دالة تحليلية في كل مكان ومشتقتها النونية $f^{(n)}(z) = (5)^n e^{5z}$ فإن

$$\oint_C \frac{e^{5z}}{(z-1)^5}dz = \frac{2\pi i}{4!} f^{(4)}(1)$$

$$= \frac{2\pi i}{4!}\ (5)^4\ e^5.$$

مثال ٣-١٢

أوجد التكامل $\oint_C \frac{\sin z}{(z-1)(z-2)}dz$ حيث C يحيط النقطتين $z = 1, 2$.

الحل:

باستخدام الكسور الجزئية فإن

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}$$

حيث $A = -1$ و $B = 1$

أي أن

$$\oint_C \frac{\sin z}{(z-1)(z-2)}dz = -\oint_C \frac{\sin z}{z-1}dz + \oint_C \frac{\sin z}{z-2}dz$$

ويمكننا هنا استعمال صيغة تكامل كوشي بيسر تام حيث

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i\ \ f(a)$$

أي أن

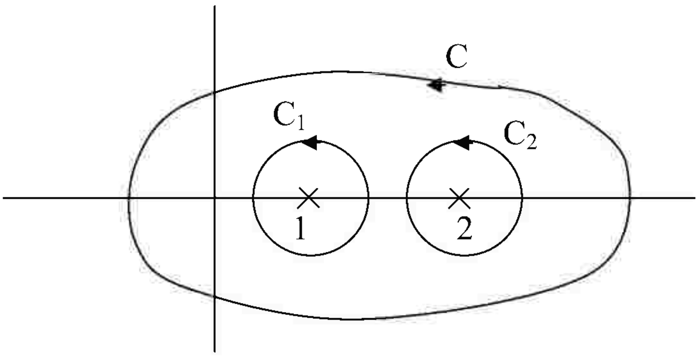
$$\oint_C \frac{\sin z}{(z-1)(z-2)}dz = -2\pi i \sin(1) + 2\pi i \sin(2)$$

$$= 2\pi i[\sin(2) - \sin(1)]$$

مرة أخرى يظهر لنا أهمية الإلمام بالكسور الجزئية.

حل أخر

(انظر شكل ٣-١٩)



(شكل ٣-١٩)

(لماذا؟)

$$\oint_C \frac{\sin z}{(z-1)(z-2)}dz = \oint_{C_1} \frac{\sin z}{(z-1)(z-2)}dz + \oint_{C_2} \frac{\sin z}{(z-1)(z-2)}dz$$

$$= \oint_{C_1} \frac{\left(\frac{\sin z}{z-2}\right)}{z-1}dz + \oint_{C_2} \frac{\left(\frac{\sin z}{z-1}\right)}{z-2}dz$$

$$= 2\pi i\left(\frac{\sin z}{z-2}\right)\bigg|_{z=1} + 2\pi i\left(\frac{\sin z}{z-1}\right)\bigg|_{z=2}$$ (لماذا؟)

$$= -2\pi i\ \sin(1) + 2\pi i\ \sin(2)$$

وهى نفس النتيجة السابقة ..

لاحظ أننا لم نستعمل الكسور الجزئية واستخدمنا النظرية العامة ٣-٣ ثم استخدمنا صيغة كوشي للتكامل على كل منحنى على حدة مع كون الدالة $\frac{\sin z}{z-2}$ دالة تحليلية على C_1 وداخل C_1 وكذلك الدالة $\frac{\sin z}{z-1}$ دالة تحليلية على C_2 وداخل C_2.

مثال ٣-١٣

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية على الدائرة C وداخلها والتي نصف قطرها r ومركزها عند $z = a$ .. اثبت متباينة كوشي Cauchy's inequality:

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \le \frac{M.n!}{r^n} \quad , \quad n = 0,1,2,...$$

حيث $|f(z)| < M$.

الإثبات

يأتي الإثبات مباشرة من استعمال صيغة كوشي للتكامل

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \quad , \quad n = 0,1,2,...$$

وبالتالي فإن

$$\left|f^{(n)}(a)\right| = \frac{n!}{2\pi}\left|\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\right|$$

$$= \frac{n!}{2\pi}\left|\oint_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\right|$$

$$\le \frac{n!}{2\pi}\oint_{|z-a|=r} \frac{|f(z)||dz|}{|z-a|^{n+1}} \quad , \quad z = a + re^{i\theta} \quad , \quad dz = ire^{i\theta}d\theta$$

$$\le \frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{M\, r\, d\theta}{\mathrm{r}^{\mathrm{n}+1}}$$

$$= \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{r^n}(2\pi)$$

$$= \frac{n!\ M}{r^n}$$

وبالتالي فإن

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \le \frac{M.n!}{r^n} \qquad , \qquad n = 0,1,2,...$$

نظرية ٣-٥: نظرية ليوفيل Liouville's theorem

إذا كانت

(i) $f(z)$ دالة تحليلية في كل z في مستوى z

و (ii) $f(z)$ محدودة $|f(z)| < M$;

فإن $f(z)$ يجب أن تكون ثابتة.

الإثبات

بوضع $n = 1$ في المثال السابق (متباينة كوشي) فإن

$$\left|f'(a)\right| \le \frac{M}{r}$$

ولكن $f(z)$ دالة تحليلية في كل مكان فإننا يمكننا جعل $r \to \infty$ وبالتالي $|f'(a)| \le 0$ .. أي أن $|f'(a)| = 0$ فإذا كانت a نقطة عامة z فان $|f'(z)| = 0$ أي أن

$$f'(z) = 0$$

وهذا لا يحدث إلا إذا كانت $f(z)$ دالة ثابتة.

ملاحظة هامة:

النتيجة السابقة تمكننا من إثبات النظرية الأساسية للجبر fundamental theorem of algebra .. والتي تقول أن الحدودية $p(z)$ من درجة n في المعادلة

$$p(z) = a_0 + a_1 z + .. + a^n z^n = 0$$

يكون لها n من الجذور تحقق المعادلة .. وذلك لأننا يمكننا إثبات أولا أن لها جذراً واحداً على الأقل .. فإن كانت $p(z) = 0$ ليس لها جذور فإن $f(z) = \dfrac{1}{p(z)}$ تكون دالة تحليلية في كل مكان (لماذا) وبالتالي فإن $f(z) = \dfrac{1}{p(z)}$ تكون محدودة (لماذا؟) وبالتالي طبقاً لنظرية ليوفيل فإن $f(z)$ وبالتالي $p(z)$ يجب أن تكون ثابتة .. وهذا يعارض الواقع .. وبالتالي فإن لها جذراً واحداً على الأقل يحقق $p(z) = 0$ ..

والآن إذا افترضنا أن هذا الجذر هو α فإننا نحصل على أن $p(z) = (z-a)Q(z)$ حيث $Q(z)$ حدودية من درجة (n-1) وبالتالي فإن لها أيضاً جذراً واحداً على الأقل .. هكذا نستطيع إثبات أن $p(z)$ سيكون لها n من الجذور.

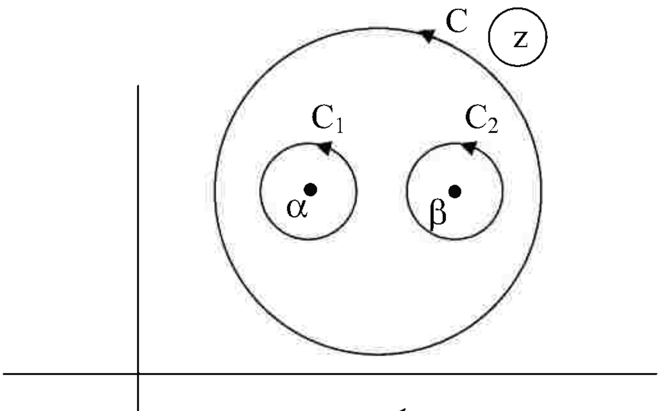
نظرية ٣-٦ نظرية السعة The Argument Theorem

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية على منحنى مغلق يسير C وداخله باستثناء نقطة $z = \alpha$ داخل C والتي هي قطب من رتبة p .. وكذلك $f(z)$ لها صفر وحيد عند $z = \beta$ داخل C برتبة n (أي أن $\dfrac{1}{f(z)}$ لها قطب من رتبة n عند $z = \beta$) .. (أنظر شكل (٣-١٩)) فإن

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = (n-p)\,2\pi i$$

الإثبات

برسم الدائرتين C_1 و C_2 مركزهما $z = \alpha$ و $z = \beta$ على الترتيب بحيث لا يتقاطعان مع C أو داخل C (أنظر شكل ٣-١٩).



(شكل ٣-١٩)

أيضا إذا كانت $f(z)$ لها أصفار وأقطاب معلومة فأنه بأخذ لوغاريتم الطرفين ثم التفاضل سنلاحظ أن $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ سيصبح لها أقطاباً هي الأقطاب السابقة مضافاً إليها الأصفار .. أي أن الأصفار والأقطاب القديمة أصبحت هي أقطاباً للدالة الجديدة $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$.

وبالتالي فإن $$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \oint_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)}dz + \oint_{C_2} \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

والآن .. بما أن $f(z)$ لها قطب وحيد من رتبة p فإ ا يمكن كتابتها على صورة

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z-\alpha)^p}$$ وبالتالي فإن

$$\ln f(z) = \ln F(z) - p \ln (z-\alpha)$$

وبالاشتقاق بالنسبة الي z فإن $$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{p}{z-\alpha}$$

وبالتالي فإن $$\oint_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \oint_{C_1} \frac{F'(z)}{F(z)}dz - P\oint_{C_1} \frac{dz}{z-\alpha}$$

ولكن $F(z)$ دالة تحليلية وغير صفرية على C_1 وداخل C_1 (لماذا؟)

فإن $\oint_{C_1} \frac{F'(z)}{F(z)}dz = 0$ (لماذا؟) .. كذلك $\oint_{C_1} \frac{dz}{z-\alpha} = 2\pi i$ (لماذا؟)

وبالتالي فإن

$$\oint_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = -p(2\pi i) \qquad .... \qquad (1)$$

والآن بما أن $f(z)$ لها صفر وحيـد مـن رتبـة n فإنـه يمكـن كتابتـها علـى صـورة $f(z)=(z-\beta)^n G(z)$ وبنفس الطريقة

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{G'(z)}{G(z)} + \frac{n}{z-\beta}$$

ولكن $G(z)$ دالة تحليلية وغير صفرية على C_2 وداخل C_2 فإن

$$\oint_{C_2} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \oint_{C_2} \frac{G'(z)}{G(z)}dz + n\oint_{C_2} \frac{n}{z-\beta}dz$$

$$= 0 + n(2\pi i) \qquad .... \qquad (2)$$ (لماذا؟)

من (1) ، (2) فإن
$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = (n-p)(2\pi i)$$

مثال ٣-١٤

إذا كان $f(z)=\dfrac{z-1}{(z-2)^2}$ فاثبت أن
$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = -2\pi i$$
حيث $f(z)$ دالة تحليلية على C وداخل C باستثناء القطب z = 2 وأن z = 1 نقطة داخل C.

الإثبات:

من النظرية السابقة فإن
$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = (n-p)(2\pi i)$$
حيث $f(z)$ لها قطب وحيد من رتبة p ولها صفر وحيد من رتبة n وكلاهم. ا داخ. ل C ..
وحيث أن الشروط متوفرة و p = 2 و n = 1 وكلاهما داخل C فإن
$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i(n-p)$$
$$= 2\pi i(1-2)$$
$$= -2\pi i$$

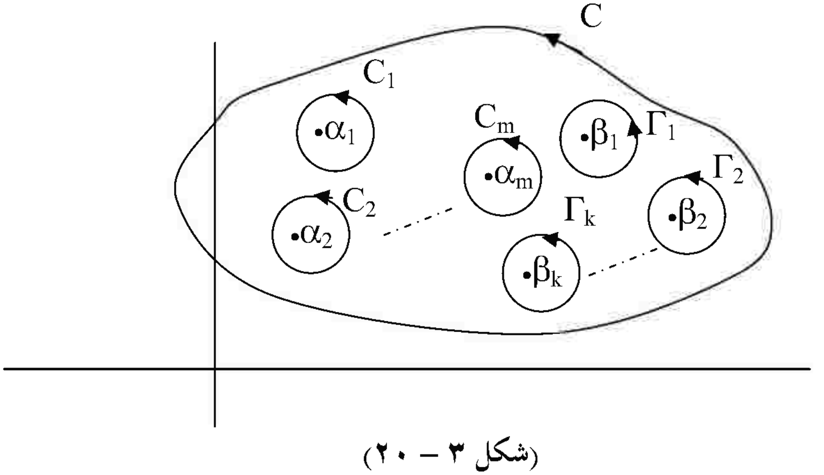
ملاحظة:

أنظر كم هي مدهشة ومريحة هذه النظرية للسعة .. وتغنينا عن إجراءات مطولة هي طول إثبات النظرية ذا ا .. وتخيل معي لو أن
$$f(z)=\frac{(z-1)^2}{(z-2)^3(z-4)^4}$$
حيث C يحتوي النقاط z = 1 و z = 2 فقط وبالتالي فإن p = 3 و n = 2 وبيسر تام فإن

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i(n-p)$$
$$= -2\pi i$$

كذلك لاحظ أن قيمة التكامل على هيئة $\ln f(z)$ قد استبعدناها من فكرنا تماماً (لمـ ـاذا؟) .. والآن أصبحت النظريات التي تخص الدوال المركبة أكثر تميزاً وأكثر وضوحاً وهـ ـي إضـ ـافة جديدة تماماً لعلم التكامل .. لاحظ أيضاً وجود الثابت $(2\pi i)$ .. وهو مازال سراً من أسرار حساب هذه التكاملات .. والأهم من ذلك أن قيمة هذه التكاملات تخيلية فهـ ـي خيـ ـال في خيال .. ولكن أيمكن لهذا الخيال أن ينتج شيئاً واقعياً .. دعنا نري.

ويمكننا تعميم النظرية السابقة إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية على C وداخل C باسـ ـتثناء عـ ـدد محدود من الأقطاب $\alpha_1,\alpha_2,..,\alpha_m$ والتي رتبها $p_1,p_2,..,p_m$ داخل C .. وإذا كانت للدالة $f(z)$ عدد محدود من الأصفار $\beta_1,\beta_2,..,\beta_k$ والتي رتبها $n_1,\ n_2,\ ..,\ n_k$ فإنه بعـ ـزل كـ ـل الأقطاب والأصفار بدوائر C_i و Γ_j بالترتيب (أنظر شكل (٣-٢٠).



(شكل ٣ – ٢٠)

فإن
$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{i=1}^{m} \oint_{C_i} \underbrace{\frac{f'(z)}{f(z)}dz}_{\text{الأقطاب}} + \sum_{j=1}^{k} \oint_{\Gamma_j} \underbrace{\frac{f'(z)}{f(z)}dz}_{\text{الأصفار}}$$
$$= -2\pi i\left(\sum_{i=1}^{m} P_i\right) + 2\pi i\left(\sum_{j=1}^{k} n_k\right)$$
$$= (-P+N)2\pi i$$
$$= (N-P)2\pi i$$

حيث N و p هي مجموع رتب الأصفار والأقطاب للدالة $f(z)$.

ملاحظة هامة:

لاحظ أن نقطة الصفر نفسها أو القطب غير داخلة في الحسابات .. فقيمة التكامل لا تعتمد على موضع الأصفار أو الأقطاب فقط تعتمد على رتب هذه الأصفار والأقطاب.

مثال ٣-١٥

إذا كانت
$$f(z) = \frac{(z-1)^3(z-i)^4}{(z+5)^2(z+i)^6(z^2+1)^3}$$

فأوجد $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ .. حيث كل الأصفار والأقطاب داخل C.

الحـ . . ـل:

لاحظ أولا الآتي:
$$f(z) = \frac{(z-1)^3(z-i)^4}{(z+5)^2(z+i)^6(z+i)^3(z-i)^3}$$
$$= \frac{(z-1)^3(z-i)}{(z+5)^2(z+i)^9}$$

وبالتالي فأصفار الدالة عند $z = 1$ و $z = i$ برتب 3 و 1 على الترتيب وكذلك أقطاب الدالة عند $z = -5$ و $z=-i$ برتب 2 و 9 على الترتيب .

أي أن $P_1 = 2 , P_2 = 9$ و $n_1 = 3 , n_2 = 1$

وبالتالي فإن

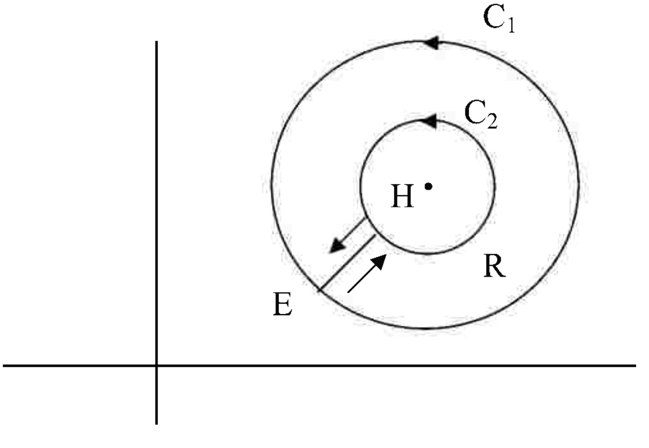
$$N = n_1 + n_2 = 3 + 1 = 4$$
$$P = P_1 + P_2 = 2 + 9 = 11$$

وبالتالي وبيسر تام فإن

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i (N - P)$$
$$= 2\pi i (4 - 11)$$
$$= -14\pi i$$

مثال ٣-١٦

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في منطقة R محدودة بدائرتين متحدتا المركز concentric circles، C_1 و C_2 (أنظر شكل ٣-٢١) .. وكذلك $f(z)$ دالة تحليلية على C_1 وعلى C_2 فإذا كانت $z_o \in R$ فإن



(شكل ٣-٢١)

$$f(z_o) = \frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_o} dz - \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_o} dz\right]$$

الإثبات

كما فعلنا سابقاً فبعمل القطع E-H كما هو مبين بالشكل فإننا يمكننا تطبيق صيغة تكامل كوشي على $f(z)$ على المسار $M : C_1' - EH - (-C_2') - HE$ وبالتالي فإن

$$f(z_o) = \frac{1}{2\pi i} \oint_M \frac{f(z)}{z - z_o} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{C_1'} \frac{f(z)}{z - z_o} dz + \int_{EH} \frac{f(z)}{z - z_o} dz + \int_{-C_2'} \frac{f(z)}{z - z_o} dz + \int_{HE} \frac{f(z)}{z - z_o} dz\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_o} dz - \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_o} dz\right]..$$

وذلك لأن

$$\int_{EH} \frac{f(z)}{z - z_o} dz = -\int_{HE} \frac{f(z)}{z - z_o} dz$$

مثال ٣-١٧

أوجد قيمة التكامل $\oint_C \frac{dz}{z^n}, n = 1,2,3,...$ باستخدام صيغة تكامل كوشي،

حيث C منحنى مغلق يسير يحتوي $z = 0$.

الحل

باستخدام صيغة تكامل كوشي

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \quad n \geq 0$$

فإنه عندما $a = 0$ و $f(z) = 1$ و $n = 0$ فإن

$$\oint_C \frac{dz}{(z)} = \frac{2\pi i}{0!}(1) \Rightarrow \oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

كذلك فإن: (لماذا؟) $\oint_C \frac{dz}{z^n} = \frac{2\pi i}{n!}(0)$

$$= 0$$

مثال ٣-١٨

أوجد تكامل $\int_{0}^{2\pi} \cos^{2n}\theta \; d\theta$ باستخدام صيغة تكامل كوشي.

الحل:

يبدو هذا الطلب غريباً .. فهذا تكامل حقيقي فكيف سنستعمل تكامل كوشي؟! ..
دعنا نرى ذلك

نعلم أن $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$ فإذا أخذنا دائرة الوحدة وعليه . ا $z = e^{i\theta}$ ف . إن

وبالتالي وتعميماً للدوال المركبة فإن $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

$$\int_{0}^{2\pi} \cos^{2n}\theta d\theta = \oint_{|z|=1} \left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]^{2n}\left(\frac{dz}{iz}\right) \quad , \quad dz = ie^{i\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{2^{2n} i}\oint_{|z|=1} \frac{1}{z}\left[z^{2n} + {}^{2n}C_1 z^{2n-1}\left(\frac{1}{z}\right) + \ldots + {}^{2n}C_k\left(z^{2n-k}\right)\left(\frac{1}{z}\right)^k + \right.$$

$$\left. \ldots. + \left(\frac{1}{z}\right)^{2n}\right]dz$$

فإذا نظرنا للتكاملات في الطرف الأيمن فكلها تتلاشى ما عدا التي على صورة $\oint_C \frac{dz}{z}$

وتساوي حينئذ $2\pi i$ (أنظر المثال السابق) .. ومعامل هذا الحد هو ${}^{2n}C_n$ (لماذا؟) .. وبالتالي فإن

(لاحظ اختفاء القيمة التخيلية) ..

$$\int_{0}^{2\pi} \cos^{2n}\theta d\theta = \frac{1}{2^{2n} i}\,{}^{2n}C_n.(2\pi i)$$

$$= \frac{2\pi}{2^{2n}}\frac{2n!}{n!(n!)} \qquad \text{(من تعريف التوافيق)}$$

$$=\frac{2\pi}{2^{2n}}\frac{(2n)(2n-1)(2n-2)\ .....\ n(n-1)....\times 2\times 1}{n!\ (n!)}$$

$$=\frac{2\pi}{2^{n}n!}\cdot\frac{(2n)(2n-1)(2n-2).....(n+1)n\ .....2\times 1}{2^{n}\ n!}$$

$$=\frac{2\pi}{2^{n}n!}\cdot\frac{(2n)(2n-2)...4\times 2}{2^{n}\ n!}\cdot\frac{(2n-1)...\times 5\times 3\times 1}{1}$$ (بإعادة الترتيب)

$$=\frac{2\pi}{2^{n}n!}\cdot\frac{n(n-1)...\times 2\times 1}{n!}[(2n-1)...\times 5\times 3\times 1]$$

(لماذا؟)

$$=2\pi\frac{1\times 3\times 5...\times(2n-1)}{2\times 4\times 6...\times 2n}$$

أي أن قيمة التكامل تم استنتاجها فعلاً بحيث يكون

$$\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\theta d\theta=\frac{2\pi}{2^{2n}}\ {}^{2n}C_n$$

أما الصورة الأخيرة فلإثبات الصورة المحفوظة لها في تكامل الدوال الحقيقية أي أننا يمكننا باستخدام نظريات التكامل للدوال المركبة أن نثبت تكاملات حقيقية .. هل يمكن ذلك؟ .. نعم .

٣-٧ تمهيد لنظرية الباقي Residue theorem

عارض ٣-١ الباقي Residue

إذا كانت f(z) دالة تحليلية على وداخل منحنى مغلق يسير C باستثناء قطب من رتبة m عند z = a داخل C فإن

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i\quad R$$

حيث

$$R=\lim_{z\to a}\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-a)^m f(z)$$

الإثبات:

يمكن كتابة f(z) كالمعتاد على صورة

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-a)^m}$$

حيث g(z) دالة تحليلية على وداخل C وأيضاً $g(a)\neq 0$. وبالتالي فباستخدام صيغة كوشي للتكامل فإن

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)dz &= \oint_C \frac{g(z)}{(z-a)^m}dz\\ &= \frac{2\pi i}{(m-1)!}\, g^{(m-1)}(a)\\ &= \frac{2\pi i}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-a)^m f(z)\Big|_{z=a}\\ &= 2\pi i\left[\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-a)^m f(z)\right]\\ &= 2\pi i\quad R.\end{aligned}$$

ملاحظة:

لأسباب سنعلمها فيما بعد فإن R تسمى بالباقي .. باقي ماذا ؟! سنعلم آنفاً.

عارض ٣-٢

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية على وداخل C باستثناء القطبين z = a و z = b داخل C فإن

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i[R_1+R_2]$$

حيث $R_{1,2}$ هما الباقيان عند نقطتي القطبين z = a و z = b على الترتيب.

الإثبات:

بعزل القطبين عند z = a و z = b بدائرتين C_2, C_1 فإنه وكما تعودنا فإن

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz$$

فإذا كررنا أسلوب الإثبات الذي أجريناه في عارض ٣-١ على كل من التكـ.املين في الطرف الثاني فإننا نصل إلى

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i[R_1 + R_2]$$

حيث

$$R_1 = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-a)^m f(z)$$

و

$$R_2 = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to b} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z-b)^k f(z)$$

بافتراض أن $z = a$ قطب من رتبة m و $z = b$ قطب من رتبة k.

تعميم:

في الواقع يمكننا وبنفس الأسلوب السابق في عارض ٣ – ١ وعارض ٣ – ٢ أن نعمم هذه المسألة بحيث إذا كانت $f(z)$ لها أقطاب عند $a_1,a_2,\ldots,a_l$ من رتبة $m_1,m_2,\ldots,m_l$ على الترتيب فإن

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{\ell} R_i$$

بحيث يكون

$$R_i = \frac{1}{(m_i-1)!} \lim_{z \to a_i} \frac{d^{m_i-1}}{dz^{m_i-1}}(z-a_i)^{m_i} f(z)$$

وهذه النظرية تسمي نظرية الباقي .. ولكن ليست هذه نظرية الباقي ذا ا ولكن تمهيد لهـ.ـا .. لأن النقاط الشاذة الوحيدة المسموح لها للدالة حتى الآن هو الأقطاب فماذا عن بقيـ.ة أنـ.واع النقاط الشاذة من نقاط تفرع وأساسية .. وهل يمكن أن توجد نظرية شبيهة عامة لكل النقاط الشاذة؟!.

والآن فقط انكشف لنا سر العامل التخيلي $(2\pi i)$ .. فإن التكامل للدالة $f(z)$ على المسار المغلق اليسير C الذي يحتوي أقطاب الدالة $f(z)$ هو $2\pi i$ مضروباً في تجميع البواقي لكل الأقطاب .. يا لها من نظرية رائعة .. وهذه النظرية لها تطبيقات كثيرة سوف نتعرض لها في باب منفصل لاحق من هذا الكتاب.

مثال ٣-١٩

أحسب التكامل $\oint_C \frac{z-1}{(z-2)(z+i)}dz$ حيث C يحتوي النقطة $z = -i$ ولا تحتوى $z = 2$.

الحل

يمكن الحل بأكثر من أسلوب

(i) باستخدام صيغة تكامل كوشي مع تصرف يسير كالآتي:

$$\oint_C \frac{z-1}{(z-2)(z+i)}dz = \oint_C \frac{\left(\frac{z-1}{z-2}\right)}{(z+i)}dz$$

$$= \frac{2\pi i}{0!}\left(\frac{z-1}{z-2}\right)\Bigg|_{z=-i}$$

$$= 2\pi i\left(\frac{-i-1}{-i-2}\right)$$

$$= 2\pi i\frac{i+1}{i+2}$$

$$= 2\pi i\frac{1}{3}(2+1+i)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{3+i}{3}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\pi(-1+3i)$$

(ii) بأسلوب نظرية الباقي ويوجد باقي واحد R_1 لقطب يسير (m=0): وبالتالي:

$$R_1 = \frac{1}{0!} \lim_{z\to -i} (z+i).\frac{z-1}{(z-2)(z+i)}$$ (لماذا)

$$= \frac{-i-1}{-i-2} = \frac{1+i}{2+i}$$

$$= \frac{1}{3}(1+i)(2-i)$$

$$= \frac{1}{3}(3+i)$$

وبالتالي فإن

$$\oint_C \frac{z-1}{(z-2)(z+i)} dz = 2\pi i\left(\frac{1}{3}\right)(3+i)$$

$$= \frac{2\pi}{3}(-1+3i)$$

أي أسلوب تفضل لحساب هذا التكامل .. وماذا إذا تعددت الأقطاب .. في هـ ـذه الحال ـة لا يمكننا تطبيق تكامل كوشي مباشرة وأحياناً لا نستطيع تطبيقها .. بينما يمكننا تطبيـق نظريـة الباقي ..

تمرينات ٣

١. احسب $\int_{1+i}^{1-i} |z|^2 dz$ على المسارات التالية

(i) المسار الأفقي ثم المسار الرأسي

(ii) المسار الرأسي ثم المسار الأفقي

(iii) الخط الواصل بين النقطتين

وما هو تعليقك على قيمة التكامل.

٢. احسب $\oint_C (x+2y)dx+(y-2x)dy$ حول القطع الناقص C المعرف بـ.

$0 \le \theta < 2y \quad , \quad y = 3 \sin \theta \quad , \quad x = 4 \cos \theta$

(الإجابة: -48π)

٣. احسب $\int_C (x^2 - iy^2) dz$ على القطع المكافئ $y = 2x^2$ من النقطة (1,1) إلى النقطة (2,8) في z

(الإجابة: $\frac{511}{3} - \frac{49}{5}i$)

٤. اثبت أن $\int_C e^{-2z} dz$ مستقلة عن المسار الذي يربط بين النقطتين $1-\pi i$ و $2+3\pi i$

وأوجد قيمة التكامل.

(الإجابة: $\frac{1}{2}e^{-2}(1-e^{-2})$)

٥. إذا كانت $G(z) = \int_{1+i}^{z} \sin z^2 \, dz$ فأثبت أن G(z) دالة تحليلية في z وأن $G'(z) = \sin z^2$.

٦. احسب $\int_C \frac{dz}{z^2+4}$ عبر الخط $x + y = 1$ في اتجاه زيادة x (الإجابة: $\left(\frac{\pi}{2}\right)$)

٧. هل يمكنك تطبيق نظرية كوشي على الدالة $w = \sqrt{z}$ حيث C هو دائـ.ـرة الوحـ.ـدة
$|z| = 1$. وضح.

٨. إذا كانت C بحيث $|z| = R$ اثبت ان

$$\lim_{R\to\infty} \oint_C \frac{z^2+2z-5}{(z^2+4)(z^2+2z+2)}\,dz = 0$$

٩. اثبت نظرية متوسط القيمة الجاوسى Gauss mean value theorem: إذا كانت
$f(z)$ دالة تحليلية على وداخل الدائرة C التي مركزها عند $z = a$ ونصف قطرها r فإن
$f(a)$ هو القيمة المتوسطة لـ $f(z)$ .. أي أن

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a+re^{i\theta}\right)d\theta$$

١٠. احسب

$$\oint_{\substack{C\\|z|=3}} \frac{\sin\pi z^2+\cos\pi z^2}{(z-1)(z-2)}\,dz \qquad \text{(i)}$$

((الإجابة $4\pi i$))

$$\oint_{\substack{C\\|z|=3}} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\,dz \qquad \text{(ii)}$$

(الإجابة: $8\pi i\, e^{-2/3}$)

١١. إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية على وداخل الدائرة $C: |z| = R$ وكان

$$f\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\phi)+r^2} f\left(\mathrm{Re}^{i\phi}\right)d\phi \quad ، \quad r < R$$

حيث يتم التكامل على C فاثبت أن الجزء الحقيقي $u(r, \theta)$ والتخيلي $v(r, \theta)$ لـ .
$f(r\, e^{i\theta})$ هما

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left(R^2-r^2\right)u(R,\phi)d\phi}{\mathrm{R}^2-2Rr\cos(\theta-\phi)+r^2} \qquad (i)$$

$$v(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left(R^2-r^2\right)v(R,\phi)d\phi}{\mathrm{R}^2-2Rr\cos(\theta-\phi)+r^2} \qquad (ii)$$

يطلق على هذا التكامل $\oint_C f(z)dz$ بتكامل بواسون. ولإثباته لابد من الرجـ.و ع الى [ ].

١٢. احسـ. .ب $\displaystyle\oint_{\substack{\mathrm{C}\\ |z|=4}} \frac{e^z}{\left(z^2+\pi^2\right)^2}\,dz$

الإجابة $\left(\dfrac{i}{\pi}\right)$.

١٣. احسب التكامل $\displaystyle\oint_{\substack{\mathrm{C}\\ |z|=2}} \frac{dz}{z+1}$ ومن ثم اثبت أن

$$\oint_{\mathrm{C}} \frac{(x+1)dx+ydy}{(x+1)^2+y^2}=0, \qquad \oint_{\mathrm{C}} \frac{(x+1)dy-ydx}{(x+1)^2+y^2}=2\pi$$

١٤. إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية على وداخل المنحنى المغلق اليسير C .. فاثبت أن

$$f'(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\theta} f\left(a+e^{i\theta}\right)d\theta \qquad (i)$$

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\theta} f\left(a+e^{i\theta}\right)d\theta \qquad (ii)$$

مساعدة:

يمكنك أخذ التكامل على الدائرة $|z| = a$ .. واستعمال صيغة تكامل كوشي.

١٥. إذا كانت $g(z)$ دالة تحليلية على وداخل C وكانت $f(z)$ دالة تحليلية على وداخل C باستثناء أن لها أقطاباً عند النقاط $b_1,b_2,..,b_n$ داخل C وكذلك لها أصفار عند النقاط $a_1,a_2,..,a_m$ داخل C أيضاً وبرتبة $p_1,p_2,..,p_n$ للأقطاب و $q_1,q_2,..,q_m$ للأصفار .. على ضوء إثبات نظرية السعة argument theorem اثبت أن

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{k=1}^{n} P_k g(a_k) - \sum_{k=1}^{m} q_k g(b_k)$$

١٦. على ضوء تمرين (١٥) .. وإذا كانت

$$f(z) = a_o z^n + a_1 z^{n-1} + .. + a_n \quad , \quad a_i \in C\ \forall_i$$

وكان C منحنى مغلق يسير يحتوي كل أصفار الحدودية $f(z)$ فاثبت أن

$$\oint_C z\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \left(-\frac{a_1}{a_o}\right)(2\pi i)$$

$$\oint_C z^2\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \left(\frac{a_1^2 - 2a_o a_2}{a_o^2}\right)(2\pi i)$$

. . . .