الباب الرابع

نظريـــــة الباقي
The Residue Theorem

٤-١ متسلسلة تايلور ومتسلسلة لورنت Taylor's and Laurent's Series:

٤-١-١ نظرية تايلور Taylor's Theorem

نظرية ٤-١

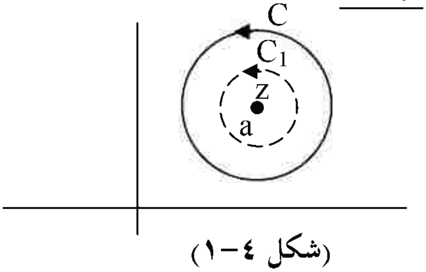
دع $f(z)$ دالة تحليلية على وداخل منحنى مغلق يسير C و دع النقطتان a و a + h داخل C .. فإن

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+..$$

أو بوضع z = a + h وبالتالي h = z - a فإن

$$f(z)=f(a)+f'(a)(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\ldots$$

الإثبات:



(شكل ٤-١)

لكل z داخل C (أنظر شكل ٤-١) يمكن أخذ دائرة C_1 مركزها عند نقطة a وتحتوي z .. وبالتالي بتطبيق صيغة كوشي للتكامل فإن

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{w-z}dw \qquad (1)$$

ولكن

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{(w-a)-(z-a)}=\frac{1}{w-a}\left[\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}}\right]$$

$$=\frac{1}{w-a}\left[1-\frac{z-a}{w-a}\right]^{-1},\left|\frac{z-a}{w-a}\right|<1$$ (لماذا)

$$=\frac{1}{w-a}\left[1+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^2+\ldots+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{n-1}+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{\mathrm{n}}\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}}\right]$$

باستعمال المفكوك $(1-z)^{-1}=1+z+z^2+..+z^{n-1}+z^n.\frac{1}{1-z}$

وبالتالي

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{w-a}+\frac{z-a}{(w-a)^2}+\frac{(z-a)^2}{(w-a)^3}+\ldots+\frac{(z-a)^{n-1}}{(w-a)^n}+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n\frac{1}{w-z} \quad (2)$$

والآن بضرب (2) في f(w) واستعمال الصيغة في (1) فإن

$$2\pi i\ f(z)=\oint_{C_1}\frac{f(w)}{w-a}dw+z-a\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-a)^2}dw+\ldots$$

$$+(z-a)^{n-1}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-a)^n}dw+R_n \quad (3)$$

حيث

$$R_n=\oint_{C_1}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n\frac{f(w)}{w-z}\ dw$$

وباستخدام صيغة تكامل كوشي

$$f_{(a)}^{(n)}=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw \quad , \quad n=0,1,2,\ldots$$

فإن (3) تصبح

$$f(z)=f(a)+f'(a)(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1}+U_n$$

حيث $U_n=\dfrac{1}{2\pi i}R_n$

والآن بما أن w على الدائرة C_1 فإن $\left|\dfrac{z-a}{w-a}\right|=\gamma<1$

أيضا فإن $|f(w)|<M$ حيث M ثابت موجب .. كذلك

$$|w-z|=|(w-a)-(z-a)|\geq|w-a|-|z-a|$$
$$=r_1-|z-a|$$

حيث r_1 هي نصف قطر الدائرة C_1 فإن

$$|U_n|=\frac{1}{2\pi}\left|\oint_{C_1}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n\frac{f(w)}{w-z}dw\right|$$
$$\leq\frac{1}{2\pi}\oint_{C_1}\left|\left|\frac{z-a}{w-a}\right|^n\frac{|f(w)|}{|w-z|}|dw|\right|$$
$$\leq\frac{1}{2\pi}\;\frac{\gamma^{n}M}{r_1-|z-a|}\;2\pi r_1$$
$$=\frac{\gamma^{n}M\,r_1}{r_1-|z-a|}$$

وبالتالي فإن $\lim\limits_{n\to\infty}|U_n|=0$ (لماذا؟)

وبذلك نكون قد أثبتنا صيغة متسلسلة تايلور اللا نهائية

$$f(z)=f(a)+f'(a)(z-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\ldots$$

ملاحظات

١- يلاحظ أن متسلسلة تايلور هي المتسلسلة المعتاد عليها في فك الدوال الحقيقية وتحت نفس الشروط تقريبا مع الاكتفاء بأن $f(z)$ دالة تحليلية لأن ذلك يعني وجود كل رتب مشتقات هذه الدالة بشكل تلقائي وبالتالي فحساب مفكوك تايلور للدوال المركبة سيكون شبيهاً جداً لنفس الدوال في صورها الحقيقية فمثلاً

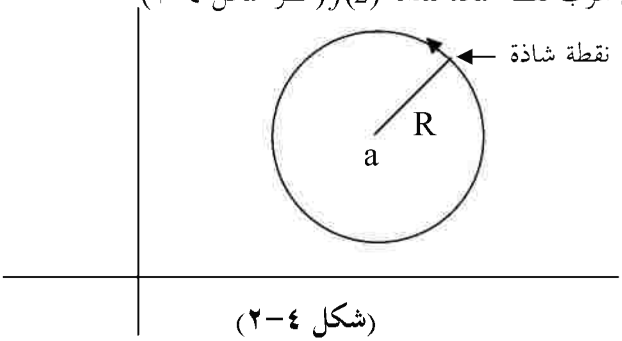
$$1.\ e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots$$

$$2.\ \sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}\ \ldots+(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$$

$$3.\ \cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots$$

وهذه دوال تحليلية في كل مكان ولذلك فليس هناك قيد على قيمة z طالما كانت $|z|<\infty$.

٢- مثل أي متسلسلة لا نهائية لابد أن يكون هناك مشاكل في مجموعها .. فإذا كان محدوداً فهي متقاربة convergent وإذا كان غير محدود (لا نهائي) فهي متباعدة .. وهذا يعطي قيد على المنطقة التي يمكننا استعمالها فيها وتسمى هذه المنطقة بمنطقة التقارب convergence region .. وبالنسبة لمفكوك تايلور فإن منطقة التقارب تعطي بـ $|z-a|<R$ حيث R هو نصف قطر التقارب .. تماماً مثل مفهوم التقارب لمتسلسلة تايلور أو متسلسلات القوى power series بشكل عام حيث R هي المسافة من النقطة a إلي أقرب نقطة شاذة للدالة $f(z)$ (أنظر شكل ٤-٢)



(شكل ٤-٢)

ويجدر الإشارة أنه على الدائرة $|z - a| = R$ فإنه ربما تتقارب المتسلسلة أو لا تتقارب .. إذ يجب بحث ذلك على انفراد.

٣- خارج نطاق هذه الدائرة $|z - a| > R$ فإن المتسلسلة تكون متباعدة ..

وعلى ضوء ذلك فهناك متسلسلات عليها قيود كالآتي:

$$4. \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \ldots, \quad |z| < 1$$

$$5. \tan^{-1} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{2n-1} + \ldots, \quad |z| < 1$$

$$6. (1+z)^p = 1 + pz + \frac{p(p-1)}{2!}z^2 + \ldots + \frac{p(p-1)..(p-n+1)}{n!}z^n + \ldots, \quad |z| < 1$$

حيث p كمية سالبة أو كسرية.

مثال ٤-١

أثبت أن مفكوك $\ln(1-z)$ و $f(z)=\ln(1+z)$ حول $z = 0$ هو

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} .. + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \ldots$$

حيث $|z| < 1$.

الإثبات

باستعمال صيغة مفكوك تايلور فإن

$$f(z) = \ln(1+z) \qquad f(0) = \ln 1 = 0$$

وبالتالي

$$f'(z) = \frac{1}{1+z} \quad , \quad f'(0) = \frac{1}{1} = 1$$

$$f''(z) = \frac{-1}{(1+z)^2} \quad , \quad f''(0) = -1$$

$$f'''(z) = \frac{2!}{(1+z)^3} \quad , \quad f'''(0) = 2!$$

$$f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+z)^n} \quad , \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}$$

وبالتالي فإن

$$f(z)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\ldots$$

$$=f(o)+\frac{f'(o)}{1!}(z)+\frac{f''(o)}{2!}z^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(o)}{n!}z^n+\ldots$$

$$=z-\frac{z^2}{2}+\frac{2!z^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}\ z^n+\ldots$$

$$=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\ z^n+\ldots$$

والآن فهناك نقطة شاذة عند $z = -1$ ولذلك فإن نصف قطر التقارب سيكون $R = 1$ (لماذا؟) وتكون منطقة التقارب هي

$$|z-0|<1$$

وبالتالي فشرط التقارب هو $|z|<1$

مثال ٤-٢:

أثبت أن $\ln\frac{1+z}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\ z^{2n+1}}{2n+1}$ حول $z = 0$.

وأن $|z|<1$ هو شرط التقارب

الإثبات:

يمكننا إيجاد مفكوك ماكلورين $(z = 0)$ للدالة $f(z)=\ln\frac{1+z}{1-z}$

ولكن يمكن الاستفادة من نتائج المثال السابق كالآتي:

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n+\ldots,\qquad |z|<1$$

$$\ln(1-z)=-z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}-\ldots-\frac{z^n}{n}-\ldots,\qquad |z|<1$$

لأن في الحد العام $(-1)^{n-1}(-1)^{n} = (-1)2^{n-1} = -1$

وبطرح المتسلسلتين وبشرط أن $|z| < 1$ فإن

$$\ln(1+z)-\ln(1-z)=\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

$$= 2z + 2\frac{z^3}{3} + 2\frac{z^5}{5} + \dots + 2\frac{z^n}{n} + \dots ,$$ حيث n عدد فردي

$$= 2\left(z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\dots+\frac{z^{2n+1}}{2n+1}+\dots\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z^{(2n+1)}}{(2n+1)}$$

وطبعا مازال شرط التقارب هو $|z| < 1$.

مثال ٤-٣:

أوجد مفكوك ماكلورين للدالة $f(z)=\dfrac{1}{1+3z}$

الحـل:

في هذه الحالة فإن

$$f(z)=\frac{1}{1+3z}=(1+3z)^{-1}$$
$$=1-3z+9z^2-27z^3+\dots+(-1)^{n-1}(3z)^n+\dots$$
$$=1-3z+9z^2-\dots+(-1)^{n-1}(3)^n(z)^n+\dots$$

وشرط التقارب في هذه الحالة هو $|3z| < 1$

أي أن $|z| < \dfrac{1}{3}$.

مثال ٤-٤:

أوجد مفكوك ماكلورين للدالة $f(z)=\dfrac{1}{(5-4z)^2}$

الحـ ل:

في هذه الحالة نستفيد أيضا من مفكوك $(1+z)^p$ تحت شرط $|z| < 1$ ولكن مع استبدال z بدالة لها ..

$$\frac{1}{(5-4z)^2}=\frac{1}{25\left(1-\frac{4}{5}z\right)^2}=\frac{1}{25}\left(1+\frac{4}{5}z+\left(\frac{4}{5}\right)^2z^2+\dots\right.$$
$$\left.\dots+\left(\frac{4}{5}\right)^nz^n+\dots\right)$$

وبشرط أن $\left|\frac{4}{5}z\right|<1$

أي أن $|z|<\left|\frac{5}{4}\right|=\frac{5}{4}$

ونلاحظ هنا أننا طالما داخل منطقة ا f(z) دالة تحليلية فإن كل أساليبنا شبيهة تماما لتصرفاتنا مع الدالة الحقيقية .. فالذي فعلناه وغيره مباح تماماً.

٤-١-٢ نظرية لورنت Laurent's Theorem

(نظرية ٤-٢)

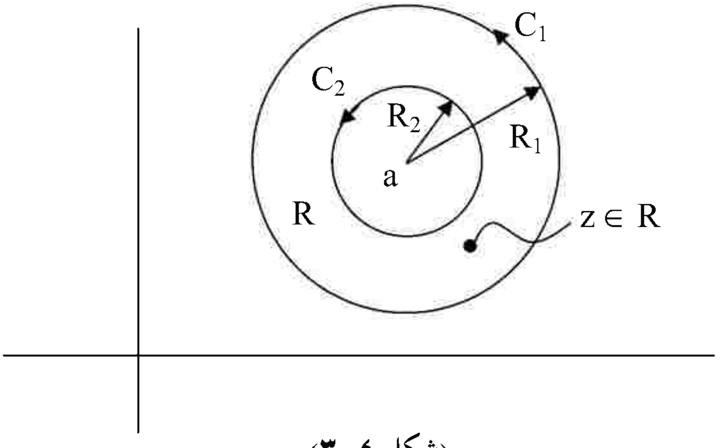
دع f(z) دالة تحليلية وذات قيمة وحيدة single-valued على الدائرتين C_1 و C_2 وبينهما في R (أنظر شكل ٤-٣) ذو الشكل الحلقي ring-shaped or annulus والذي له المركز عند النقطة z = a .. ونصف قطر C_1 هو R_1 ونصف قطر C_2 هو R_2 كما هو مبين بالشكل فإنه لكل $z \in R$

$$f(z)=a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\dots+\frac{a_{-1}}{z-a}+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\dots$$

حيث
$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \qquad , \qquad n=0,\pm1,\pm2,\dots$$

والمسار المغلق اليسير C داخل المنطقة R.

الإثبات:



(شكل ٤-٣)

من مثال ٣-١٦ ص ١٠٣ أثبتنا الآتي لكل $z \in R$ أن

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\underbrace{\frac{f(w)}{w-z}}_{C_1 \text{ على } w}dw-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\underbrace{\frac{f(\eta)}{\eta-z}}_{C_2 \text{ على } \eta}d\eta \qquad (1)$$

وهي صيغة كوشي للتكامل مطبقة على هذا الشكل الحلقي.

وبالنسبة للتكامل الأول في الطرف الأيمن من (1) فإن

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{(w-a)-(z-a)}=\frac{1}{(w-a)\left[1-\frac{z-a}{w-a}\right]}$$

$$=\left(\frac{1}{w-a}\right)\left[1+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^2+\ldots+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{n-1}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n.\left(\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{w-a} + \frac{z-a}{(w-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(w-a)^3} + \ldots + \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{w-z} \qquad (2)$$

مع الشرط المعتاد لهذا الفك وهو أن $\left|\frac{z-a}{w-a}\right| < 1$ وهذا حادث فعلا لأن w موجودة على الدائرة C_1 و z نقطة في R . وبالتالي فإن

$$\oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-z} dw = \oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-a} dw + (z-a) \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-a)^2} dw + \ldots$$

$$\ldots + (z-a)^{n-1} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-a)^n} dw + R_n$$

حيث
$$R_n = \oint_{C_1} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n \frac{f(w)}{w-z} dw$$

وباستعمال صيغة تكامل كوشي فإننا نصل إلى الآتي:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-z} dw = a_0 + a_1(z-a) + \ldots + a_{n-1}(z-a)^{n-1} + U_n \qquad (3)$$

حيث

$$a_j = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-a)^{j+1}} dw \quad , \quad j = 0,1,2,\ldots,n-1 \qquad (4)$$

وكذلك فإن

$$U_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n \frac{f(w)}{w-z} dw \qquad (5)$$

وبأخذ التكامل الثاني في الطرف الأيمن من (1) فإن:

$$-\frac{1}{\eta-z} = \frac{1}{z-\eta} = \frac{1}{(z-a)-(\eta-a)} = \frac{1}{(z-a)\left(1-\frac{\eta-a}{z-a}\right)}$$

لاحظ أن $\left|\frac{\eta-a}{z-a}\right|<1$ لأن η تقع على الدائرة C_2

وبالتالي يمكننا استخدام نفس المفكوك السابق استخدامه في التكامل الأول كالآتي:

$$-\frac{1}{\eta-z}=\frac{1}{z-a}+\frac{\eta-a}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{(\eta-a)^{n-1}}{(z-a)^n}+\left(\frac{\eta-a}{z-a}\right)^n\frac{1}{z-\eta}$$

وبالتالي فإن

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\eta)}{(\eta-z)}d\eta=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\eta)}{z-a}d\eta+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\eta)(\eta-a)}{(z-a)^2}d\eta$$

$$\ldots+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{(\eta-a)^{n-1}}{(z-a)^n}f(\eta)d\eta+V_n$$

$$=\frac{a_{-1}}{z-a}+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}+V_n \qquad (6)$$

حيث

$$a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}(\eta-a)^{n-1}f(\eta)d\eta \qquad (7)$$

$$n=1,2,3,\ldots$$

و

$$V_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\left(\frac{\eta-a}{z-a}\right)^n\frac{f(\eta)}{z-\eta}d\eta$$

ومن (3) و (6) فإن

$$f(z)=a_0+a_1(z-a)+\ldots+a_{n-1}(z-a)^{n-1}$$

$$+\frac{a_{-1}}{z-a}+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}+U_n+V_n \qquad (8)$$

ويبقى أن نثبت أن U_n و V_n يتلاشيان عندما $n\to\infty$ وقليل من الاضافات الصغيرة:

واثبات أن $\lim\limits_{n\to\infty} |U_n| = 0$ شبيه تماماً لما قمنا به في نظرية تايلور ..

والآن على C_2 فإن $\left|\dfrac{\eta - a}{z - a}\right| = k < 1$

وكذلك نعلم أن $|f(\eta)| < M$

وأيضاً $|z - \eta| = |z - a - (\eta - a)|$

$$\geq |z - a| - R_2$$

وبالتالي فإن

$$|V_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\oint_{C_2}\left(\frac{\eta - a}{z - a}\right)^n \frac{f(\eta)}{z\text{-}\eta}\,d\eta\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\oint_{C_2}\left|\frac{\eta - a}{z - a}\right|^n \frac{|f(\eta)|}{|z\text{-}\eta|}\,|d\eta|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\;\frac{k^n M}{|z - a| - R_2}$$

$$= \frac{k^n\ M\ \ R_2}{|z - a| - R_2}$$

وبالتالي فإن $\lim\limits_{n\to\infty}|V_n| = 0$

أي أن $V_n = 0$ .. وبالتالي يكتمل الإثبات.

ملاحظات:

(1) وجود النقطة الشاذة عند $z = a$ في المركز هو الذي سبب كل ذلك التغيير .. وفي حالة عدم وجودها فإن مفكوك لورنت يصبح مفكوك تايلور لأن $f(z)$ في هذه الحالة تصبح تحليلية في المنطقة R والتي تمتد لأسفل لتصبح دائرة واحدة.

(2) يمكننا التكامل على دائرة C بين الدائرتين C_1 و C_2 بحيث يكون

$$(4) \quad a_j = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-a)^{j+1}}dw \quad , \quad j = 0,1,2,...$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C} \frac{f(w)}{(w-a)^{j+1}}dw$$

كذلك

$$(7) \quad a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} (\eta - a)^{n-1} f(\eta)d\eta \quad , \quad n = 1,2,3,...$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C} (\eta - a)^{n-1} f(\eta)\, d\eta$$

وهذا يجعلنا نكتب الحد العام الآتي:

$$a_m = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C} \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}}dz,$$
$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ففي حالة $m = 0,1, 2, \ldots$ تعطي (4)

وفي حالة $m = -1, -2, \ldots$ تعطي (7)

وبالتالي يعتبر هذا حداً عاماً .. وبالتالي فإن

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z-a)^j$$

وهي الصورة العامة لمفكوك لورنت.

(3) يطلق على الحدود ذات الرتبة الموجبة، أي

$$a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \ldots$$

بالجزء التحليلي analytic part لمفكوك لورنت، بينما يطلق على الحدود ذات الرتبة السالبة، أي

$$\frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \ldots$$

بالجز الأساسي principal part لمفكوك لورنت وجدير بالذكر بإنه في حالة اختفاء النقطة الشاذة فإن الجزء الأساسي ينعدم ليصبح المفكوك مفكوك تايلور العادي .. فهذا الجزء يتكون مع تكون الشذوذ.

(4) عند $z=a$ نقطة شـ ـاذة .. هذا الشذوذ لم تحدد نوعه .. فهو عام .. فربما يكون قطباً أو تفرعاً أو يمكن إزالته .. أو أساسياً.

فعندما تكون $\lim_{z\to a} f(z)=\infty$ فإن $z=a$ تكون قطباً (وليكن رتبته n) وعندئذ نجد أن الجزء الأساسي من مفكوك لورنت يكون له عدد محدود بهذه الكيفية

$$\frac{a_{-1}}{z-a}+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{a_{-n}}{(z-a)^n} \qquad , \qquad a_{-n}\neq 0$$

أما إذا كانت الدالة $f(z)$ دالة وحيدة القيمة وغير معرفة عند $z=a$ ولكن $\exists \lim_{z\to a} f(z)$ فإن $z=a$ تسمى بالنقطة الشاذة المزالة removable، وفي هذه الحالة نعيد تعريف الدالة عند $z=a$ بقيمة النهاية .. ونقوم بحساب المفكوك.

فإذا كانت $z=a$ نقطة تفرع للدالة متعددة القيم multi-valued فإنها تكون نقطة شاذة .. على أن كل فرع للدالة هو دالة تحليلية ويمكن فكه بمفكوك تايلور والذي له نصف قطر تقارب يقاس بالمسافة بين نقطة الفك ونقطة التفرع.

وأي نوع من الشذوذ خلاف الأنواع الثلاثة السابقة يسمى بالشذوذ الأساسي essential وفي هذه الحالة فإن الجزء الأساسي من مفكوك لورنت يصبح لا نهائياً في حدوده.

ونقطة اللا نهاية ∞ تنتج نقطة شاذة عند مالا نهاية ∞ singularity at ∞ فمثلا $f(z)=z^2$ لها قطب من الرتبة الثانية عند ∞ لأن $f\left(\frac{1}{w}\right)=\frac{1}{w^2}$ لها قطب عند $w=0$ من الرتبة الثانية

وكذلك $f(z)=e^z$ لها نقطة شاذة أساسية عند ∞ لأن $f\left(\frac{1}{w}\right)=e^{\frac{1}{w}}$ لها نقطة شاذة أساسية عند $w=0$.

والدالة التي هي تحليلية في كل مكان من مستوى w (ماعدا النقاط عند ∞ طبعاً) تسمى بالدالة الكلية entire function من أمثال الدوال $e^z, \sin z, \cos z$ و $\sinh z$ و $\cosh z$ .. وهي دوال يمكن فكها بمفكوك تايلور ولها نصف قطر تقارب لا نهائي.

مثال ٤-٥:

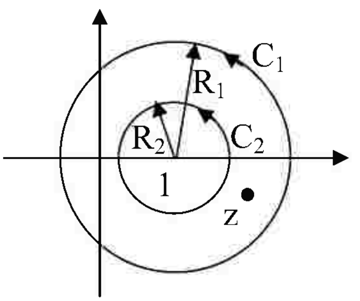
أوجد مفكوك لورنت لـ $f(z)=\dfrac{e^{z}}{(z-1)^{2}}$ حول z = 1

الحل:

دعنا نقدم حلاً تفصيلياً .. فبناءً على نظرية لورنت فإن

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}$$

حيث $a_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\dfrac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw,\qquad n=0,1,2,\ldots$



$$a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\eta)}{(\eta-a)^{-n+1}}d\eta \qquad n=1,2,3,..$$

حيث $C_1 \quad : \quad |w-a|=R_1$

$C_2 \quad : \quad |\eta-a|=R_2 \quad R_1>R_2$

في هذه المسألة فإن $a=1$ وهي تمثل نقطة شاذة للدالة من نوع القطب Pole من رتبة 2.

وبالتالي فإن

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-1)^n}$$

حيث

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{e^{w}}{(w-1)^{n+3}}dw,$$

ومن صيغة تكامل كوشي

$$f^{(n)}(a)=\frac{(n!)}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dw,$$

أي أن $\quad a_n=\left.\frac{e^w}{(n+2)!}\right|_{w=1}=\frac{e}{(n+2)!},\qquad n=0,1,2,\ldots$

كذلك

$$a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{e^\eta}{(\eta-1)^2(\eta-1)^{-n+1}}d\eta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{e^\eta}{(\eta-1)^{3-n}}d\eta$$

والتكامل ينعدم عند $n = 3,4,5,\ldots$ (لماذا؟)

ولكن عندما تكون $n = 1$ فإن

$$a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{e^\eta}{(\eta-1)^2}\,d\eta$$

$$=\left.\left(e^\eta\right)'\right|_{\eta=1}=e$$

وعندما تكون $n = 2$ فإن

$$a_{-2}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{e^\eta}{(\eta-1)}\,d\eta$$

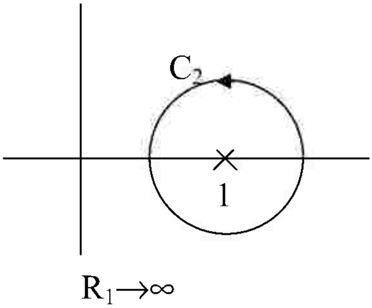
$$=\left.e^\eta\right|_{\eta=1}=e$$

بينما تنعدم بقيمة الحدود في الجزء الأساسي من المفكوك .. وبالتالي فإن

$$f(z)=\frac{e^z}{(z-1)^2}=\underbrace{\frac{e}{z-1}+\frac{e}{(z-1)^2}}_{\text{الجزء الأساسي}}+e\underbrace{\left[\frac{1}{2!}+\frac{(z-1)}{3!}+\frac{(z-1)^2}{4!}+\ldots+\frac{(z-1)^n}{(n+2)!}+\ldots\right]}_{\text{الجزء التحليلي}}$$

والآن نستطيع أن نقدم حلاً مختصراً كالآتي:

بوضع $z-1=u$



$$\frac{e^z}{(z-1)^2}=\frac{e^{1+u}}{u^2}=\frac{e}{u^2}\left[e^u\right]$$

$$=\frac{e}{u^2}\left[1+u+\frac{u^2}{2!}+\ldots+\frac{u^n}{n!}+\ldots\right]$$

$$=e\left[\underbrace{\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}}+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{u}{3!}+\ldots+\frac{u^{n-2}}{n!}}+\ldots\right]$$

بوضع $u=z-1$ مرة أخرى فإن

$$\frac{e^z}{(z-1)^2}=e\left[\underbrace{\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}}+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{z-1}{3!}+\frac{(z-1)^2}{4!}+\ldots+\frac{(z-1)^{n-2}}{n!}}_{n\geq 2}+\ldots\right]$$

وهو بالطبع نفس المفكوك السابق.

ولاحظ أن الجزء الأساسي به حدان فقط (لأن رتبة القطب 2) وأن المتسلسلة متقاربة لجميع قيم z ما عدا $z=1$.

مثال ٤-٦:

وفى حالة الدالة $f(z)=\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3}$ عند $z=1$

الحل:

فإنه بوضع $z-1=u$ فإن

$$f(z)=\frac{e^{2(1+u)}}{u^3}=\frac{e^2e^{2u}}{u^3}$$

$$=\frac{e^2}{u^3}\left[1+(2u)+\frac{(2u)^2}{2!}+\frac{(2u)^3}{3!}+\ldots+\frac{(2u)^n}{n!}+\ldots\right]$$

$$=\frac{e^2}{1}\left[\frac{1}{u^3}+\frac{2}{u^2}+\frac{(2)^2}{2!u}+\frac{(2)^3}{3!}+\ldots+\underbrace{\frac{(2)^nU^{n-3}}{n!}}_{n\geq 3}+\ldots\right]$$

وبوضع $u = z - 1$ فإن

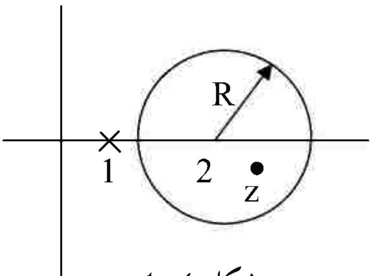
$$\frac{e^{2^{z}}}{(z-1)^3} = e^2\left[\underbrace{\frac{1}{(z-1)^3} + \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{2}{(z-1)}}_{\text{الجزء الأساسي}} + \underbrace{\frac{(2)^3}{3!} + \ldots + \frac{(2)^n (z-1)^{n-3}}{n!} + \ldots}_{\substack{n \geq 3 \\ \text{الجزء التحليلي}}}\right]$$

لاحظ أن الجزء الأساسي به ثلاثة حدود (لأن القطب من رتبة 3).

مثال ٤-٧:

إذا طلب مفكوك لورنت للدالة $f(z) = \dfrac{e^z}{(z-1)}$ حول $z = 2$

فإن الدالة تحليلية عند $z = 2$ ولذلك فإن المفكوك الذي سنحصل عليه هو مفكوك تايلور .. ونصف قطر التقارب هو R بحيث $|z - 2| < R$ هي منطقة التقارب .. أي أن أي نقطة واقعة في هذه المنطقة ستؤدي إلى تقارب هذه المتسلسلة .. وفى حالتنا هذه فإن $R = 1$ (لماذا؟) وبالتالي



(شكل ٤-٤)

$$f(z) = \frac{e^{z-2+2}}{(z-2+2-1)} = \frac{e^2 e^{(z-2)}}{(1+(z-2))} = e^2 e^{z-2}(1+(z-2))^{-1}$$

$$= e^2\left(1 + (z-2) + \ldots + \frac{(z-2)^n}{n!} + \ldots\right)\left(1 - (z-2) + (z-2)^2 - \ldots + (-1)^n (z-2)^n + \ldots\right)$$

$$= e^2\big(1 + (1 + (-1))\big)(z-2) + (1 - 1 + \frac{1}{2!})(z-2)^2$$

$$+ (-1 + 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!})(z-2)^3 + (1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!})(z-2)^4 + \ldots)$$

$$= e^2\left(1 + \frac{1}{2!}(z-2)^2 + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!}\right)(z-2)^3 + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right)(z-2)^4 + \ldots\right)$$

وهو مفكوك تايلور كما نرى ومنطقة التقارب هي $|z-2|<1$ كما هو مبين بالرسم.

ملاحظة:

لإيجاد مفكوك تايلور فإن

$$f(z)=\frac{e^z}{z-1}\rightarrow f(2)=\frac{e^2}{1}$$

$$f'(z)=\frac{e^z(z-1)-e^z}{(z-1)^2}$$

$$=\frac{e^z}{z-1}-\frac{e^z}{(z-1)^2}\rightarrow f'(2)=e^2-\frac{e^2}{1}=0$$

$$f''(z)=\frac{e^z(z-1)-e^z}{(z-1)^2}-\frac{(z-1)^2e^z-e^z2(z-1)}{(z-1)^4}$$

$$\rightarrow f''(2)=0-\frac{e^2-2e^2}{1}=+e^2$$

وفى النهاية

$$f(z)=f(2)+\frac{f'(2)}{1!}(z-2)+\frac{f''(2)}{2!}(z-2)^2+\dots$$

$$=e^2+0-\frac{e^2}{2!}(z-2)^2+\dots$$

وتعتبر الطريقة الأولى مختصرة ومباشرة في الحل.

مثال ٤-٨

أوجد مفكوك $\sin\frac{1}{z}$ حول $z=0$

الحل:

$z=0$ نقطة شاذة من النوع الأساسي essential وبالتالي فإنه بوضع $\frac{1}{z}=u$

$$\sin u = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad ,$$

وبوضع $u = \frac{1}{z}$ فإن

$$\sin\frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \frac{1}{(z)^{2n-1}}$$

لاحظ أنه جزء أساسي فقط وعدد حدوده لا ائي (لأن الشذوذ هنا من النوع الأساسي) .. والمتسلسلة متقاربة عند $z \neq 0$.

مثال ٤-٩:

بالنسبة لمفكوك $e^{\frac{1}{z}}$ حول $z = 0$

الحل:

$z = 0$ نقطة شاذة من النوع الأساسي وبالتالي فان

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}.\frac{1}{z^2} + \ldots + \frac{1}{n!}.\frac{1}{z^n} + \ldots$$

ونلاحظ هنا أيضا أن عدد حدود الجزء الأساسي لا ائي .. وأن الجزء التحليلي هو (1) فقط ويتم الحصول عليه عند ∞ .. والمتسلسلة متقاربة عند $z \neq 0$.

مثال ٤-١٠:

بالنسبة لمفكوك $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ .. عند $z = 0$

الحل:

نلاحظ أن الشذوذ هنا من النوع المُزال لأن $\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$ ويجري تعريف الدالة عند $z = 0$ بأن قيمتها مساوية لـ (1) .. وبالتالي ..

$$\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\left[z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}\ldots\right]$$
$$=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\ldots$$

ونلاحظ هنا أ ا جزء تحليلي فقط (لأن الشذوذ مزال) وهي متقاربة لجميع قيم z.

مثال ٤-١١:

مفكوك لورنت للدالة $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$ حول z = -2

الحل:

z = -2 قطب يسير(من رتبة 1) ... بوضع u = z + 2 .. أي أن

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)}=\frac{u-2}{(u-1)u}=\frac{2-u}{u}\,\frac{1}{1-u}$$
$$=\frac{2-u}{u}(1-u)^{-1},\quad \underline{|u|<1}$$
$$=\frac{2-u}{u}\left(1+u+u^2+\ldots\right)$$
$$=(2-u)\left(\frac{1}{u}+1+u+u^2+\ldots\right)$$
$$=\left(\frac{2}{u}+2+2u+2u^2+\ldots-1-u-u^2-\ldots\right)$$
$$=\frac{2}{u}+1+u+u^2+u^3+\ldots$$

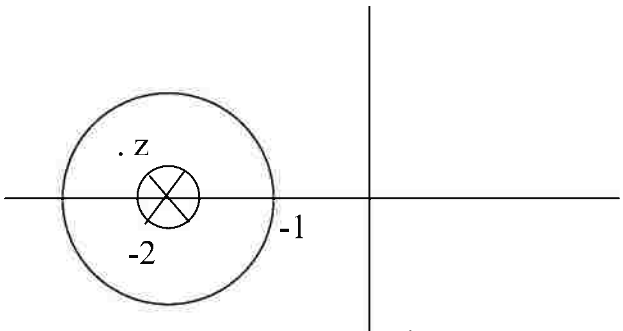
وبوضع u = z + 2 مرة أخرى فإن

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)}=\frac{2}{\underbrace{z+2}_{\text{الجزء الأساسي}}}+1+\underbrace{(z+2)+(z+2)^2}_{\text{الجزء التحليلي}}+\ldots$$

ونلاحظ هنا أن الجزء الأساسي مكون من حد واحد لأن الدالة لها قطب يسير simple pole عند $z = -2$.

ومن شروط المفكوك فإن منطقة التقارب هي

$$0 < |z+2| < 1$$



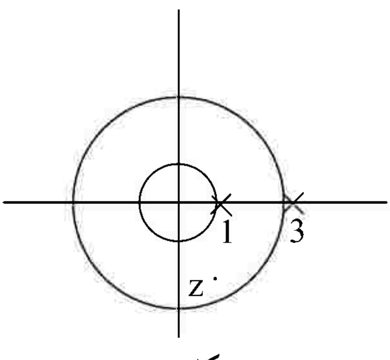
(شكل ٤-٥)

مثال ٤-١٢

فك الدالة $\dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$ بحيث تكون محققة في المنطقة $1 < |z| < 3$

الحل:

في هذه الحالة يتم تحديد منطقة التقارب كما هو مبين بالرسم



(شكل ٤-٦)

ولابد من مراعاة ذلك عند القيام بفك الدالة .. فبإجراء الكسور الجزئية

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+z} - \frac{1}{2}\frac{1}{3+z}$$

لا يمكننا الفك المباشر $(1 + z)^{-1}$ إلا إذا كان $|z| < 1$ .. وهذا يتعارض مع منطقة التقارب المفروضة علينا .. وبالتالي لابد من إجراء جبري يدخلنا في فترة التقارب وذلك يتم كالآتي:

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{z\left(1+\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-1}, \quad \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \Rightarrow |z| > 1$$

وهذا يتفق مع شرط التقارب المعطى .. وبالتالي

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\ldots\right) \qquad (1)$$

كذلك فإن فك $\dfrac{1}{3+z}$ لابد أن يراعى فيه الشرط السابق ..

$$\frac{1}{3+z} = \frac{1}{3\left(1+\frac{z}{3}\right)} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{z}{3}\right)^{-1}, \quad \left|\frac{z}{3}\right| < 1 \Rightarrow |z| < 3$$

وهذا يتفق مع الشرط .. وبالتالي :

$$\frac{1}{3+z} = \frac{1}{3}\left(1-\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}-\frac{z^3}{27}-\ldots\right)$$

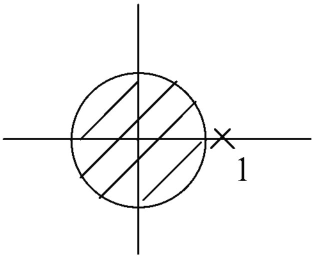
وبالتالي فإن

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z+1)(z+3)} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+z}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3+z}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^4}+\ldots\right)\\ &\quad -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}+\frac{z^3}{27}\ldots\right)\\ &= \ldots \underbrace{-\frac{1}{2}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{z}}_{\text{الجزء الأساسي}} \underbrace{-\frac{1}{6}+\frac{z}{18}-\frac{z^2}{45}}_{\text{الجزء التحليلي}}\ldots\end{aligned}$$

لاحظ أن مركز الدائرتين $|z| = 1$ و $|z| = 3$ هو $z = 0$ وهي هنا ليست نقطة شاذة (ليست قطباً) وبالتالي فإن الجزء الأساسي عدد حدوده لا ائية.

مثال ٤-١٣

بالنسبة للمثال السابق آخذين فترة تقارب $|z| < 1$



(شكل ٤-٧)

الحل:

في هذه الحالة نلاحظ أن الدالة

$f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$ تحليلية بالكامل

وبالتالي سنحصل على مفكوك تايلور كالآتي

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2}\ \frac{1}{1+z} - \frac{1}{2}\ \frac{1}{3+z}$$

$$= \frac{1}{2}(1+z)^{-1} - \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\left(1+\frac{z}{3}\right)^{-1}, \quad |z| < 1 \ , \quad |z| < 3$$

أي أن $|z| < 1$ و $|z| < 3$ وتقاطع الشرطين هو أن $|z| < 1$ فهو يحقق الأثنين معاً ..

وبالتالي

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2}\left(1 - z + z^2 - z^3 - \ldots\right)$$

$$-\frac{1}{6}\left(1 - \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} - \frac{z^3}{27} + \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{4}{9}z + \frac{13}{27}z^2 - \frac{40}{81}z^3 - \ldots$$

أي مفكوك تايلور .. وهو محقق لكل z في $|z| < 1$.

مثال ٤-١٤

ماذا يحدث للمثالين السابقين إذا جعلنا فترة التقارب $|z| > 3$

الحل:

لابد وأن تتفق شروط المفكوك مع المنطقة الجديدة المعطاة ..

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+z}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3+z}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{z}}\right)-\frac{1}{2}\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1+\frac{3}{z}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{z}\left(1+\frac{3}{z}\right)^{-1}$$

والشرطان هما $|z|>1$ و $|z|>3$ (لماذا؟)

وبالتالي فإن الشرط $|z|>3$ يحقق الاثنين معا .. وعنده

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)}=\frac{1}{2}\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\ldots\right)$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{z}\left(1-\frac{3}{z}+\frac{9}{z^2}-\frac{27}{z^3}-\ldots\right)$$

$$=\underbrace{\frac{1}{z^2}-\frac{4}{z^3}+\frac{13}{z^4}-\frac{40}{z^5}}_{\text{جزء أساسي فقط}}+\ldots$$

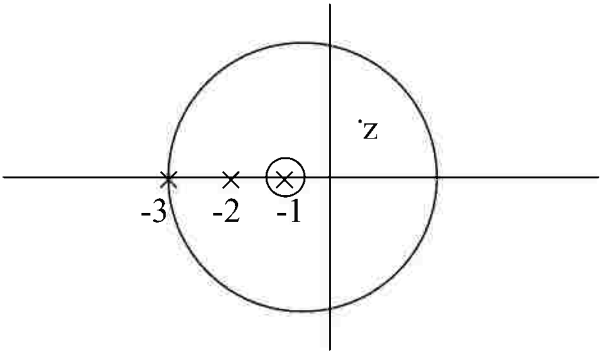
والفك لم يتم حول أي من القطبين

$z=-1$ أو $z=-3$

وبالتالي لا يوجد جزء تحليلي وعدد حدود الجزء الأساسي لا ائي.

مثال ٤-١٥

وفى حالة عزل أحد القطبين .. وليكن $0<|z+1|<2$



(شكل ٤-٨)

فأنه بوضع $z + 1 = u$ فإن

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{u(u+2)} = \frac{1}{2u\left(1+\dfrac{u}{2}\right)} = \frac{1}{2u}\left(1+\frac{u}{2}\right)^{-1},$$

تحت شرط أنه $|u| > 0$ وأن $\left|\dfrac{u}{2}\right| < 1$ أي أن $|u| < 2$

وبالتالي يمكننا إجراء التالي:

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2u}[1-\frac{u}{2}+\frac{u^2}{4}-\ldots$$

$$= \frac{1}{2u}-\frac{1}{4}+\frac{u}{8}-\ldots$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2(1+z)}}_{\text{الجزء الأساسي}} \underbrace{-\frac{1}{4}+\frac{(1+z)}{8}-\ldots}_{\text{الجزء التحليلي}}$$

ونلاحظ هنا أنه لأننا عزلنا القطب $z = -1$ فإن الجزء الأساسي يبين أنه حد واحد يتفق مع كونه قطباً يسيراً .. Simple Pole.

والملاحظ هنا أنه إذا كان الشذوذ قطبياً والفك حول نقطة القطب فإن عدد حدود الجزء الأساسي يجب أن يساوي رتبة هذا القطب وأن الدالة إذا كانت تحليلية في منطقة الفك بالكامل فإن مفكوك لورنت ينطبق مع مفكوك تايلور لهذه الدالة .. فإذا كانت المنطقة تعزل نقاط الشذوذ فإننا سنحصل على الجزء الأساسي فقط ..

٤-٢ نظرية الباقي The Residue Theorem

٤-٢-١ مقدمة

بالنظر إلى مفكوك لورنت للدالة $f(z)$:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

حيث $f(z)$ دالة تحليلية على وداخل الدائرة C الا عند النقطة $z = a$ والتي هي مركز الدائرة أيضا وحيث

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

فإذا ما أردنا إيجاد $\oint_C f(z)dz$ .. فإن الجزء التحليلي من المفكوك يعطى صفراً (لماذا؟) ..

أما الجزء الأساسي فيعطى تكاملات على صورة

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^m} = \begin{cases} 2\pi i & \mathrm{m} = 1 \\ 0 & \mathrm{m} \neq 1 \end{cases}$$

أى لا يتبقى من هذه التكاملات إلا التكامل $\oint_C \frac{dz}{(z-a)}$ .. وهو الخاص بالمعامـل a_{-1} ..

ولذلك فمن وجهة نظر التكامل $\oint_C f(z)dz$ .. فإن a_{-1} هي المعامل البـاقي الوحيـد في الحسابات .. ولذلك يسمى بالباقي residue ويكون التكامل كالآتي:

$$\boxed{\oint_C f(z)dz = 2\pi i \; a_{-1}}$$

ويظهر لنا أهمية إيجاد مفكوك لورنت للدالة $f(z)$ بغض النظر عن نوع النقطة الشاذة $z = a$ .. فبعد إيجاد المفكوك يلعب الباقي a_{-1} دوراً هاما ومحوريا في إيجاد قيمة التكامل $\oint_C f(z)dz$.

فإذا كان الشذوذ من النوع القطبي فقط أي أن $z = a$ قطب من رتبة m فإن مفكوك لورنت حول نقطة $z = a$ يعطى الصورة الآتية:

$$f(z) = \underbrace{\frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \ldots + \frac{a_{-1}}{(z-a)}}_{\text{الجزء الأساسي}} + a_0 + a_1(z-a) + \ldots$$

وهذا شئ أشرنا إليه سابقاً أن عدد الحدود التي تظهر في الجزء الأساسي تساوي رتبة هذا القطب. والآن بالضرب في $(z-a)^m$ فإن

$$(z-a)^m f(z) = a_{-m} + a_{-(m-1)}(z-a) + .. + a_{-1}(z-a)^{m-1}$$
$$+ a_0(z-a)^m + \ldots. \qquad (1)$$

وهي تمثل مفكوك تايلور للدالة التحليلية $(z-a)^m f(z)$ (لماذا؟) حول نقطة $z = a$ وبتفاضل العلاقة (1) $(m-1)$ مرة فإننا سنحصل على

$$\frac{d^{m-1}z}{dz^{m-1}}\left((z-a)^m f(z)\right) = (m-1)!\ a_{-1} +$$
$$m(m-1)\ldots 2a_0(z-a) + \ldots$$

وعند أخذ النهاية $z \to a$ فإن

$$\lim_{z \to a} \frac{d^{m-1}\left((z-a)^m f(z)\right)}{dz^{m-1}} = (m-1)!\, a_{-1}$$

أي أن في حالة وجود قطب عند $z = a$ من رتبة m فإن

$$\boxed{a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-a)^m f(z)}$$

وهذه النتيجة توصلنا إليها سابقا في ـاية الباب الثالث (٣-٧) ولكن بأسلوب مختلف وبعيداً عن مفكوك لورنت للدالة التي لم تكن معروفة حينئذ .. (أنظر ص ١٤٦) ..

والآن نستطيع إيجاد $\oint_C f(z)dz$ بشكل عام ولكل أنواع نقاط الشذوذ وذلك باستخدام النظرية التالية.

نظرية ٤-٣ نظرية الباقي

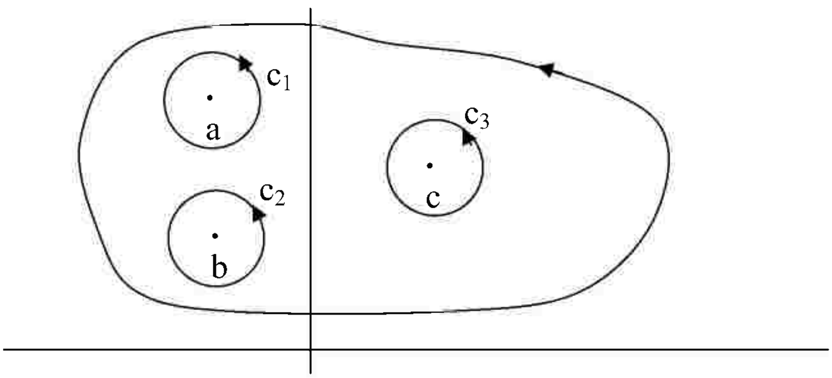
إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية على وداخل منحنى مغلق يسير C باستثناء عدد محدود من النقاط وليكن ..a,b,c, داخل C والتي لها البواقي ... ,a_{-1},b_{-1},c_{-1} على الترتيب فإن

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i[a_{-1}+b_{-1}+c_{-1}+...]$$

$$=2\pi i \sum \text{residues of interior singular points}$$

الإثبات

بالنظر إلى شكل (٤-٩)



(شكل ٤-٩)

وبأخذ المسارات الدائرية ... c_1,c_2 والتي مركزها هي النقاط الشاذة كمـ ـا هـ ـو موضـ ـح بالشكل فإن

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz + \oint_{C_3} f(z)dz + \ldots \qquad (1)$$

ولكن

$$\oint_{C_1} f(z)dz = 2\pi i \ \mathrm{a}_{-1}$$

$$\oint_{C_2} f(z)dz = 2\pi i \ \mathrm{b}_{-1}$$

$$\oint_{C_3} f(z)dz = 2\pi i \ \mathrm{c}_{-1}$$

وهكذا .. حيث .. a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}, هي البواقي كما قدمنا للنظرية وبالتالي فإن

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i\,[a_{-1} + b_{-1} + c_{-1} + \ldots]$$

$$= 2\pi i\,[\text{sum of residues}].$$

ملاحظة هامة:

يمكن مد إثبات هذه النظرية لتطبيقها على المنحنيات العديدة الاتصال multiply-connected وكذلك على عدد لا ائي من النقاط الشاذة المعزولة infinitely many isolated singularities والمهتم بالإثبات العام يمكنه الرجوع الي [4] .. وهى ختام جميل لأفكار هذا الكتاب.

مثال ٤-١٦

أوجد $\oint_C \dfrac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}\,dz$ حيث C يحتوي $z = -1$ و $z = \pm 2i$

الحل:

طبقا لنظرية الباقي فإن

$$\oint \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}\,dz = 2\pi i[R_1 + R_2 + R_3]$$

حيث (i) يوجد قطب من الرتبة الثانية عند $z = -1$ وبالتالي

$$R_1 = \frac{1}{1!} \lim_{z \to -1} \frac{d}{dz} (z+1)^2 . \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2 (z^2+4)}$$

$$= \lim_{z \to -1} \frac{(z^2+4)(2z-2) - (z^2-2z)(2z)}{(z^2+4)^2}$$

$$= -\frac{14}{25}$$

(ii) يوجد قطب من الرتبة الأولى عند $z = +2i$ وبالتالي

$$R_2 = \lim_{z \to 2i} (z-2i) \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2 (z+2i)(z-2i)}$$

$$= \frac{7+i}{25}$$

(iii) يوجد قطب من الرتبة الأولى عند $z = -2i$ وبالتالي

$$R_3 = \lim_{z \to} (z+2i) \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2 (z+2i)(z-2i)}$$

$$= \frac{7-i}{25} = \overline{R}_2$$

وبالتالي فإن

$$\oint \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2 (z^2+4)} dz = 2\pi i \left[-\frac{14}{25} + \frac{7+i}{25} + \frac{7-i}{25} \right]$$

$$= 2\pi i \frac{-14+14}{25}$$

$$= 0$$

ملاحظة:

إذا كان المطلوب $\oint_C \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2 (z^2+4)} dz$ حيث C يحتوي فقط $z = -1$

فإننا نحسب فقط R_1 ويكون التكامل:

$$\oint_C \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}dz = 2\pi i\, R_1$$

$$= 2\pi i\left(\frac{-14}{25}\right)$$

$$= -\frac{28\pi i}{25}$$

وإذا كانت C تحتوي النقطتين $z = \pm 2i$ فقط فإن

$$\oint_C \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}dz = 2\pi i\,[R_2+R_3]$$

$$= 2\pi i\left[\frac{14}{25}\right]$$

$$= \frac{28\pi i}{25}$$

وهكذا يجب أن يلاحظ القارئ أن العبرة بالنقاط الشاذة الداخلية فقط.

مثال ٤-١٧

أحسب $\displaystyle\oint_{\substack{C\\|z|=1}} \sin\frac{1}{z}\,dz$

الحل:

في هذه الحالة فإن $z = 0$ نقطة شاذة من النوع الأساسي essential وهي داخل المسار $|z| = 1$ .. وبالتالي

$$\oint_C \sin\frac{1}{z}dz = 2\pi i \,.\, R$$

ولإيجاد R نقوم بحساب مفكوك لورنت للدالة $\sin\frac{1}{z}$ وقد قمنا بذلك أنفاً حيث

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!}.\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\;\frac{1}{z^5}\ldots$$

وهي جزء أساسي فقط ونجد منها أن $R = a_{-1} = 1$

وبالتالي فإن
$$\oint_{|z|=1} \sin\frac{1}{z}\, dz = 2\pi i$$

مثال ٤-١٨

أوجد $\oint_C (z-3)\sin\frac{1}{z+2}\, dz$ حيث C يحتوي النقطة $z = -2$.

الحل:

توجد نقطة شاذة أساسية عند $z = -2$ المحتواه داخل C وبالتالي

$$\oint_C (z-3)\sin\frac{1}{z+2}\, dz = 2\pi i\, R$$

ولإيجاد R نوجد أولا مفكوك لورنت للدالة $(z-3)\sin\frac{1}{z+2}$ حول نقطة $z = -2$ كالآتي:

بوضع $z + 2 = u$

$$\begin{aligned}
(z-3)\sin\frac{1}{z+2} &= (u-5)\sin\frac{1}{u} \\
&= (u-5)\left[\frac{1}{u} - \frac{1}{3!}\frac{1}{u^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{u^5} - \dots\right] \\
&= \Big[1 - \frac{1}{3!}\frac{1}{u^2} + \frac{1}{5!}\frac{1}{u^4} - \dots \\
&\qquad - \frac{5}{u} + \frac{5}{3!}\frac{1}{u^3} - \frac{5}{5!}\frac{1}{u^5} - \dots\Big]
\end{aligned}$$

وبالتالي فإن $R = a_{-1} = -5$

أي أن

$$\begin{aligned}
\oint_C (z-3)\sin\frac{1}{z+2}\, dz &= 2\pi i(-5) \\
&= -10\pi i
\end{aligned}$$

لاحظ أن $\oint_C (z-3)\sin\frac{1}{z+2}dz = 0$ إذا كانت z = -2 خارج C. تذكر ذلك دائما فنظرية كوشي جاهزة للتطبيق دائماً.

مثال ٤-١٩

أوجد $\oint_C \frac{dz}{(z+1)(z+3)}$

حيث (i) c: |z| < 1 (ii) |z| > 3

الحل:

بالرجوع إلى الأمثلة السابقة في حساب مفكوك لورنت فإن

(i) حالة C: |z| < 1 تكون الدالة $\frac{1}{(z+1)(z+3)}$ تحليلية ومفكوك لورنت لها (كما حصلنا عليه) هو مفكوك تايلور وبالتالي $a_{-1} = 0$ أي أن $\oint_{\substack{C\\|z|<1}} \frac{dz}{(z+1)(z+3)} = 0$

أو بتطبيق نظرية كوشي مباشرة.

(ii) في حالة |z| > 3 كان مفكوك لورنت هو كالآتي:

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{z^2} - \frac{4}{z^3} + \frac{13}{z^4} - \frac{40}{z^5} + \ldots$$

أي أن $a_{-1} = 0$

وبالتالي

$$\oint_{|z|>3} \frac{dz}{(z+1)(z+3)} = 2\pi i(0)$$

$$= 0$$

مثال ٤-٢٠

$\oint_C z^2 \sin\frac{1}{z}\,dz$ حيث C تحتوي z = 0.

الحل:

$$z^2 \sin\frac{1}{z} = z^2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^5} - \dots\right)$$

$$= z - \frac{1}{3!}\frac{1}{z} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^3} - \dots$$

وبالتالي فإن $a_{-1} = -\frac{1}{3!}$

أي أن

$$\oint_C z^2 \sin\frac{1}{z}\,dz = 2\pi i\left(-\frac{1}{3!}\right)$$

$$= -\frac{\pi i}{3}$$

مثال ٤-٢١

$$\oint_{C\; |z|=\frac{3\pi}{2}} \frac{z}{\sin z}\,dz$$

الحل:

$\sin z = 0$ عندما تكون $z = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, ..$ وواضح أن النقاط الشاذة المحتواه داخل $|z| = \frac{3\pi}{2}$ هي $z = 0, \pm\pi$ وبالتالي يوجد ثلاثة نقاط شاذة داخل المسار ..

(i) عند <u>z = 0</u>: نعلم أن $\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = 1$ وبالتالي فإن $\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z} = 1$ أي ا نقطة شاذة مزالة .. وبذلك فإن مفكوك لورنت

$$\frac{z}{\sin z}=\frac{z}{z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5\ldots}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{5!}z^4-\ldots}$$

$$=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots$$

أي أن

$$a_0-\frac{1}{3!}a_0z^2+\frac{1}{5!}z^4a_0-\ldots$$

$$+a_1z-\frac{1}{3!}a_1z^3+\frac{1}{5!}a_1z^5-\ldots$$

$$+a_2z^2-\frac{1}{3!}a_2z^4+\frac{1}{5!}a_2z^6-\ldots$$

$$=1$$

فبالمقارنة بين معاملات z^n في الطرفين فإن

$$a_0=1,\quad a_1z=0\Rightarrow a_1=0\quad ,$$

$$\left(-\frac{1}{3!}a_0+a_2\right)=0\Rightarrow a_2=\frac{1}{3!}$$

وهكذا نحسب بقية المعاملات .. وبالتالي:

$$\frac{z}{\sin z}=1+\frac{1}{3!}z^2+\ldots$$

أي أن $a_{-1}=0$ وبالتالي $R_1=0$

(ii) عند $z=\pi$ .. فهذا قطب من المرتبة الأولى (لماذا؟) ..

وبالتالي

$$R_2=\frac{1}{0!}\lim_{z\to\pi}(z-\pi)\cdot\frac{z}{\sin z}$$

$$=\pi\lim_{z\to\pi}\frac{z-\pi}{\sin z}=\pi\lim_{z\to\pi}\frac{1}{\cos z}=\pi\frac{1}{\cos\pi}=-\pi$$

(iii) عند $z = -\pi$ .. وهذا أيضا قطب يسير وبالتالي:

$$R_3 = \lim_{z\to-\pi}(z+\pi)\frac{z}{\sin z} = (-\pi)\lim_{z\to-\pi}\frac{z+\pi}{\sin z}$$

$$= (-\pi)\lim_{z\to-\pi}\frac{1}{\cos z}$$

$$= (-\pi)\frac{1}{\cos(-\pi)} = \pi$$

أي أن

$$\oint_{|z|=\frac{3\pi}{2}} \frac{z}{\sin z}dz = 2\pi i[R_1 + R_2 + R_3]$$

$$= 2\pi i[0-\pi+\pi]$$

$$= 0$$

مثال ٤-٢٢

$$\oint_{|z|=\frac{\pi}{2}} \frac{z}{\sin^2 z}dz$$

الحل:

$z = 0$ هي النقطة الشاذة الوحيدة الداخلية وبالتالي:

(i) عند $z = 0$

$$\frac{z}{\sin z} = 1 + \frac{1}{3!}z^2 + \dots$$

$$\frac{z^2}{\sin^2 z} = 1 + \left(\frac{2}{3!}\right)z^2 + \dots$$

وبالقسمة على z:

$$\frac{z}{\sin^2 z} = \frac{1}{z} + \left(\frac{2}{3!}\right)z + \dots$$

نلاحظ في مفكوك لورنت هنا أن $a_{-1} = 1$ (أي أن $z = 0$ قطب من رتبة يسيرة) ..

وللتأكد من ذلك فإن $\lim_{z\to 0}(z).\frac{z}{\sin z^2}=1\neq 0$

أي أن $z = 0$ قطب فعلا من رتبة واحد.

وبالتالي فإن $R_1 = 1$

وبالتالي فإن $\oint_{|z|=\frac{\pi}{2}} \frac{z}{\sin^2 z}=2\pi i$

مثال ٤-٢٣

$$\oint_{|z|=\frac{3\pi}{2}} \frac{z}{\sin^2 z}dz$$

الحل:

في هذه الحالة فإن $z = 0, \pm\pi$ ثلاث نقاط شاذة داخلية وبالتالي:

(i) عند $z = 0$ فإن $R_1 = 1$ كما في المثال السابق

(ii) بالنسبة للقطبين $z = \pm\pi$ أو $z = m\pi$ حيث $m = \pm 1$ فإنه ربما يكون من الأيسر إيجاد مفكوك لورنت للدالة $\frac{z}{\sin^2 z}$ دعنا نضع $z - m\pi = u$ وبالتالي

$$\frac{z}{\sin^2 z}=\frac{m\pi+u}{(\sin(m\pi+u))^2}=\frac{(m\pi+u)}{\sin^2 u}$$

$$=\frac{m\pi+u}{\left(u-\frac{1}{3!}u^3+\frac{1}{5!}u^5-\ldots\right)^2}$$

$$=\frac{m\pi+u}{u^2\left(1-\frac{u^2}{6}+\frac{u^4}{120}\ldots\right)^2}$$

$$=\frac{m\pi+u}{u^2\left(1-\frac{u^2}{3}+\frac{2u^4}{45}+\ldots\right)}=\frac{a_{-2}}{(u)^2}+\frac{a_{-1}}{u}+a_0+a_1u+\ldots$$

وذلك لأن $z = \pm\pi$ قطبان من الرتبة الثانية .. وبالتالي:

$$m\pi + u = \left(1 - \frac{u^2}{3} + \frac{2u^4}{45} + \ldots\right)\left(a_{-2} + a_{-1}u + a_0u^2 + a_1u^3 + \ldots\right)$$

$$= a_{-2} + a_{-1}u + a_0u^2 + a_1u^3 + \ldots$$

$$-\frac{1}{3}a_{-2}u^2 - \frac{1}{3}a_{-1}u^3 + \ldots.$$

$$+\frac{2}{45}a_{-2}u^4 - \ldots$$

وبمساواة المعاملات في الطرفين فإن

$$a_{-2} = m\pi, \qquad a_{-1} = 1, \qquad \left(a_0 - \frac{1}{3}a_{-2}\right) = 0$$

أي أن $a_0 = \frac{1}{3}a_{-2} = \frac{1}{3}m\pi$

أي أن $\frac{z}{\sin^2 z} = \frac{m\pi}{(z-m\pi)^2} + \frac{1}{(z-m\pi)} + \frac{m\pi}{3} + \ldots$

وهذا يثبت توقعنا أن $z = m\pi$ قطبان من الرتبة الثانية $(m = \pm 1)$

وأن $R_{2,3} = 1$ في الحالتين:

وبالتالي فإن

$$\oint\limits_{|z|=\frac{3\pi}{2}} \frac{z}{\sin^2 z}dz = 2\pi i\left[R_1 + R_2 + R_3\right]$$

$$= 6\pi i$$

مثال ٤-٢٤

أوجد $\oint\limits_{|z|=\pi} \sec z \, dz$

الحل:

نعلم أن $\sec z = \frac{1}{\cos z}$

وأن $\cos z = 0$ تعطى $z = \frac{\pi}{2}(2k+1),\ k = 0,\ \pm 1 \ldots$

وبالتالي فإن القطب الوحيد المحتوى داخل $|z| = \pi$ هو $z = \frac{\pi}{2}$ وهو قطب يسير .. وبالتالي:

$$R = \lim_{z \to \frac{\pi}{2}} \left(z - \frac{\pi}{2} \right) . \frac{1}{\cos z}$$

$$= \lim_{z \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{-\sin z}$$

$$= -1$$ بتطبيق قاعدة لوبيتال ...

أي أن $$\oint_{|z| = \pi} \sec z \, dz = -2\pi i$$

تمرينات ٤

١. أوجد مفكوك لورنت للدوال الآتية حول النقطة الشاذة الموجودة بين قوسين

$$(i)\ f(z)=\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}, \qquad (z=1)$$

$$(ii)\ f(z)=(z-3)\sin\frac{1}{z+2}, \qquad (z=-2)$$

$$(iii)\ f(z)=\frac{z-\sin z}{z^3}, \qquad (z=0)$$

$$(iv)\ f(z)=\frac{z}{(z+1)(z+2)}, \qquad (z=-1)$$

$$(v)\ f(z)=\frac{1}{z^2(z-3)^3}, \qquad (z=3)$$

٢. أثبت المفكوكات الآتية:

$$(i)\sin z^2=z^2-\frac{z^6}{3!}+\frac{z^{10}}{5!}-\frac{z^{14}}{7!}....,|z|<\infty$$

$$(ii)\tan^{-1}z=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^7}{7}....,|z|<1$$

$$(iii)\tan z=z+\frac{z^3}{3}+\frac{2z^5}{15}+...., \qquad |z|<\frac{\pi}{2}$$

$$(iv)\sec z=1+\frac{z^2}{2}+\frac{5z^4}{24}+...., \qquad |z|<\frac{\pi}{2}$$

$$(v)\csc z=\frac{1}{z}+\frac{z}{6}+\frac{7z^3}{360}...., \qquad |z|<\pi$$

$$(vi)\sin^{-1}z=z+\frac{1}{2}\frac{z^3}{3}+\frac{1\times3}{2\times4}\frac{z^5}{5}+\frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}\frac{z^7}{7}....,|z|<1$$

(اختار الفرع الذي يعطي عند $\sin^{-1}0=0$)

$$(vii)\ \frac{1}{\sqrt{1+z^3}} = 1 - \frac{1}{2}z^3 + \frac{1\times 3}{2\times 4}z^6 - \frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}z^9 + \ldots,\quad |z|<1$$

(اختار الفرع الذي يعطي عند $z = 0$ $\sqrt{1+z^3} = 1,$)

٣. فك الدالة $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$ والمحققة للمناطق الآتية

(i) $|z| < 1$
(ii) $1 < |z| < 2$
(iii) $|z| > 2$
(iv) $|z-1| > 1$
(v) $0 < |z-2| < 1$

٤. فك الدوال الآتية حول $z = 0$

$$(i)\quad f(z) = \frac{1-\cos z}{z}$$

$$(ii)\quad f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^3}$$

$$(iii)\quad f(z) = \frac{1}{z}\cosh\frac{1}{z}$$

$$(iv)\quad f(z) = z\sinh\sqrt{z}$$

٥. أثبت أن $z = \dfrac{\pi}{2}$ قطب يسير للدالة $f(z) = \tan z$ ومن ثم أوجد التكامل

$$\oint\limits_{0<\left|z-\frac{\pi}{2}\right|<\frac{\pi}{2}} \tan z\, dz$$

٦. أوجد مفكوك $f(z) = \dfrac{1}{\ln(1+z)}$ حول $z = 0$ ومن ثم أوجد

$$\oint\limits_{\substack{C\\ 0<|z|<1}} f(z)\, dz$$

٧. أوجد مفكوك $\frac{\ln(1+z)}{1+z}$ واثبت أن z = - 1 شذوذ مزال، ومن ثم أوجد

$$\oint_{|z|<1} \frac{\ln(1+z)}{1+z} dz$$

٨. اثبت أن مفكوك الدالة $e^{\sin z}$ هو

$$e^{\sin z} = 1 + z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{8} - \frac{z^5}{15} + \ldots$$

واثبت أن $\oint_C e^{\sin z}\, dz = 0$ لأي مسار مغلق في C.

٩. أوجد البواقي للدالة $f(z) = e^z \csc^2 z$

(الإجابة: $R_m = e^{m\pi}$, $m = 0, \pm 1, \ldots$)

١٠. أوجد باقي الدالة $f(z) = \frac{\cot z \coth z}{z^3}$ عند z = 0

مساعدة:

$$\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots$$

$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots$$

(الإجابة: $-\frac{7}{45}$)

١١. أوجد التكامل $\oint_{C\;|z|=3} \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)} dz$

(الإجابة: $\frac{t-1}{2} + \frac{1}{2} e^{-t} \cos t$)

١٢. أوجد التكامل $\oint\limits_{\substack{C\\|z|=1}} e^{-\frac{1}{z}} \sin\frac{1}{z}\,dz$

(الإجابة: $2\pi i$)

١٣. أوجد التكامل $\oint\limits_{\substack{C\\|z|=5}} \frac{e^z}{\cosh z}\,dz$

(الإجابة: $8\pi i$)

١٤. دع C هو المربع المحدود بـ $x = \pm 2$ و $y = \pm 2$ اثبت أن

$$\oint\limits_C \frac{\sinh 3z}{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3}\,dz = \frac{-9\pi\sqrt{2}}{2}$$

١٥. اثبت أن نظرية كوشي وصيغة تكامل كوشي هما حالتان خاصتان من نظرية الباقي.

١٦. اثبت أن $\oint\limits_{\substack{C\\|z-1|=4}} z^3 e^{\frac{1}{z}}\,dz = \frac{1}{24}$

١٧. اثبت أن $\oint\limits_C \frac{\cosh z}{z^3}\,dz = \pi i$ إذا كانت C هي المربع الذي رؤوسه ($\pm 2 \pm 2i$).

١٨. اثبت أن $\oint \frac{e^{zt}}{z(z^2+1)} = 2\pi i(1-\cos t), t > 0$

إذا كانت C هي المربع الذي رؤوسه ($1 \pm i, -1 \pm i$).