الباب الخامس

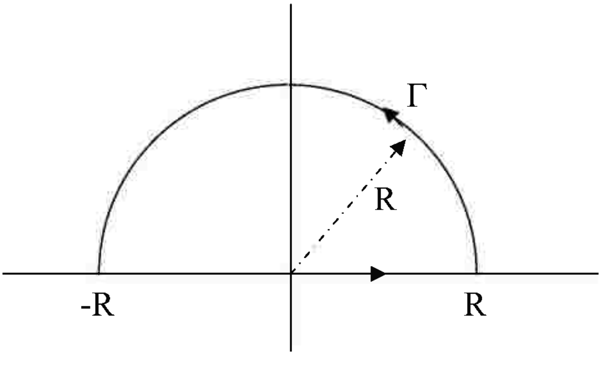
تطبيقات في التكامل المحدود
Applications on Definite Integrals

٥-١ مقدمة

من أهم التطبيقات التي يمكن أن نستفيد ا من نظرية الباقي هو حساب بعض التكاملات المحدودة .. والتي كانت تمثل صعوبة أو حتى مستحيلة الحل في R. ويتطلب التطبيق شروطاً خاصة سيتم ذكرها .. ولكن بشكل عام لا بد من تطبيق نظرية الباقي على دالة مختارة بدقة $f(z)$ وعلى مسار مغلق مختار بعناية وخبرة Contour.

٥-١-١ تكاملات على صورة $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx$, $F(x)$ دالة نسبية **rational**

في هذه الحال احسب التكامل $\oint_C F(z)dz$ على المسار المغلق المبين في شكل (٥-١)



(شكل ٥-١)

ويتطلب الأمر بالنسبة لشكل (٥-١) حذقاً ومهارة لإيجاد التكامل على المسار Γ عندما $R\to\infty$.

عارض ٥-١

إذا كانت $\left|F(z)\right| \le \frac{M}{R^k}$ لـ. $z = Re^{i\theta}$ حيث $k > 1$ و M ثابت فإن

$\lim\limits_{R\to\infty} \int_\Gamma F(z)dz = 0$ على نصف الدائرة Γ المبينة في شكل (٥-١).

الإثبات:

$$\left|\int_\Gamma F(z)dz\right| \le \int_\Gamma \left|F(z)\right|\left|dz\right|$$

$$\le \int_\Gamma \frac{M}{R^k}\left|i\,\mathrm{Re}^{i\theta}\,d\theta\right|$$

$$= \frac{M}{R^k}\pi R = \frac{\pi M}{R^{k-1}}$$

فإذا كانت $k > 1$ فإن

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| = 0$$

وبالتالي

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

مثال ٥-١ (مثال اختباري)

أحسب $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

الحل:

من المعروف لدينا أن

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\tan^{-1}x\Big|_o^{\infty} = 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi$$

فدعنا نختبر المسار C في شكل (٥-١) ..

$$\oint_C \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i\left(\sum R_i\right)$$

ولكن
$$\oint_C \frac{dz}{1+z^2} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{\Gamma} \frac{dz}{1+z^2}$$

ولكن عند $z = Re^{i\theta}$ (على Γ)، $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$

$$= \frac{1}{1+R^2 e^{2i\theta}}$$

وبالتالي فإن

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{1+R^2 e^{2i\theta}}\right| \le \frac{1}{\left|R^2 e^{2i\theta}\right| - |1|} \quad ، \quad |z_1 + z_2| \ge |z_1| - |z_2|$$

$$= \frac{1}{R^2 - 1}$$

ولكن $R \to \infty$ وبأخذ R كبيرة بشكل كافي

وليكن
$$\Leftarrow \frac{1}{R^2} < \frac{1}{4} \quad \Leftarrow R^2 > 4 \quad \Leftarrow R > 2$$

$$\frac{R^2}{R^2-1} < \frac{4}{3} \Leftarrow \frac{R^2-1}{R^2} > \frac{3}{4} \Leftarrow 1 - \frac{1}{R^2} > \frac{3}{4} \Leftarrow -\frac{1}{R^2} > -\frac{1}{4}$$

أي أن
$$\frac{1}{R^2-1} < \frac{(4/3)}{R^2}$$

وبالتالي وطبقا لعارض (٥-١) فإن

$$|F(z)| \le \frac{M}{R^k}$$

حيث $M = \dfrac{4}{3}$ و $k = 2 > 1$ .. وهذا معناه طبقاً للعارض أن $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} f(z)\,dz = 0$

أي أن $$\lim_{R\to\infty}\oint_C \frac{dz}{1+z^2}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\pi i\left(\sum R_i\right)$$

والآن فإن $1+z^2=0$ لها جذران هما $z=\pm i$

وبالتالي عندنا قطبان يسيران عند $z=\pm i$ أحدهما داخلي والأخر خارجي فيهمل وبالتالي:

$$R=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{1+z^2}=\lim_{z\to i}\frac{1}{2z}=\frac{1}{2!}$$

وبالتالي فإن $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\pi i\left[\frac{1}{2!}\right]=\pi$$

وهي نفس قيمة التكامل المحسوبة سابقاً.

والآن يمكننا إجراء تكاملات صعبة بتيسير نظرية الباقي وهذا المسار المغلق المدهش .. مثل ..

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^4},\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^6}$$

وجدير بالذكر أننا يمكننا وضع

$$\left|\frac{1}{1+z^4}\right|=\left|\frac{1}{1+R^4e^{i4\theta}}\right|\le\frac{1}{R^4-1}$$

وبأخذ $$1-\frac{1}{R^4}>\frac{15}{16}\Leftarrow\frac{1}{R^4}<\frac{1}{16}\Leftarrow R^4>16\Leftarrow R>2$$

أي أن $$\frac{R^4}{R^4-1}<\frac{16}{15}\Leftarrow\frac{R^4-1}{R^4}>\frac{15}{16}$$

أي أن $$\frac{1}{R^4-1}<\frac{(16/15)}{R^4}$$

وبالتالي فإن $$|f(z)|\le\frac{M}{R^4},k=4>1$$

أي أن $$\lim_{0\to\infty}\int_{\Gamma}f(z)dz=0$$

وهكذا بالمثل لبقية الدوال المشا ة.

مثال ٥-٢:

أوجد $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$

الحل:

باستعمال نفس المسار المغلق في شكل (٥-١) .. فإن

$$\oint_C \frac{dz}{\left(1+z^2\right)^2} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} + \int_{\Gamma} \frac{dz}{\left(1+z^2\right)^2}$$
$$= 2\pi \mathrm{i} \sum R_{\mathrm{i}}$$

والآن فإنه على Γ $(z = R\, e^{\mathrm{i}\theta})$

$$|f(z)| = \frac{1}{\left|1+z^2\right|^2} = \frac{1}{\left|1+R^2 e^{2i\theta}\right|} \le \frac{1}{\left(\left|R^2 e^{2i\theta}\right|-1\right)^2}$$
$$= \frac{1}{\left(R^2-1\right)^2}$$

ولكن

$$\frac{1}{R^2-1} < \frac{4/3}{R^2}$$

إذن

$$\frac{1}{\left(R^2-1\right)^2} < \frac{16/9}{R^4} = \frac{M}{R^k}, \quad k > 1$$

وبالتالي فإن

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_{\Gamma} \frac{dz}{\left(1+z^2\right)^2} \right| = 0$$

أي أن

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} \frac{dz}{\left(1+z^2\right)^2} = 0$$

وبالتالي فإن

$$\oint_C \frac{dz}{\left(1+z^2\right)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$$
$$= 2\pi i\left[\sum R_i\right]$$

والآن عندما قطب من الرتبة الثانية عند $z = i$ وبالتالي فإن

$$R = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}(z-i)^2\frac{1}{\left(1+z^2\right)^2}$$

$$= \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{1}{(z+i)^2}$$

$$= \lim_{z\to i}\frac{-2(z+i)}{(z+i)^4}$$

$$= \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{-1}{4i(-1)} = \frac{1}{4i}$$

وبالتالي فإن

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} = 2\pi i\left[\frac{1}{4i}\right] = \frac{\pi}{2}$$

مثال ٥–٣:

أوجد $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^8}$

وهذه مسألة صعبة وليست يسيرة .. ولكن دعنا نشاهد كيف تسير الأمور . ذا الأسـلوب الجديد والشيق:

مقدماً فإن (لماذا؟) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^8} = 2\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^8}$

كذلك فإنه على Γ:

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{1+z^8}\right| = \frac{1}{\left|z^8+1\right|} \le \frac{1}{R^8e^{i86}-1}$$

$$= \frac{1}{R^8-1}$$

ولكن إذا كانت R كبيرة بشكل كافي مثلا $R > 2$ فإن

$$1-\frac{1}{R^8}>1-\frac{1}{2^8}\Leftarrow\frac{1}{R^8}<\frac{1}{2^8}\Leftarrow R^8>2^8$$

$$\frac{R^8}{R^8-1}<\frac{2^8}{2^8-1}\Leftarrow\frac{R^8-1}{R^8}>\frac{2^8-1}{2^8}$$

$$\frac{1}{R^8-1}<\frac{M}{R^8}=\frac{M}{R^k}\qquad,\qquad k>1$$

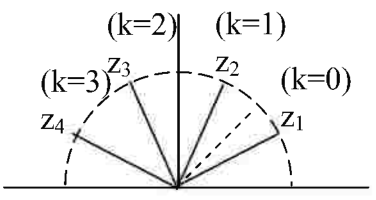
وباستخدام نتيجة العارض ٥-١ فإن

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_\Gamma\frac{dz}{1+z^8}\right|=0\Rightarrow\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma\frac{dz}{1+z^8}=0$$

وهذا يجعلنا مطمئنين إلى أن

$$\oint_C\frac{dz}{1+z^8}=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{dx}{1+x^8}$$
$$=2\pi i\left[\sum R_i\right]$$

والآن لحساب البواقي فإن



$$1+z^8=0\Rightarrow z^8=-1=e^{i(\pi+2\pi k)}$$

وبالتالي فإن $z=e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}\right)},k=0,1,2,3$ داخل المسار

وكلها أقطاب يسيرة وبالتالي فان

$$R_1=\lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{8}}}\frac{z-e^{i\frac{\pi}{8}}}{1+z^8}\qquad,\qquad(k=0)$$

$$=\frac{1}{8e^{i7\frac{\pi}{8}}}=\frac{1}{8}\left(\cos\frac{7\pi}{8}-i\sin\frac{7\pi}{8}\right),\alpha=\frac{\pi}{8}$$

$$=\frac{1}{8}(\cos(\pi-\alpha)-i\sin(\pi-\alpha))=\frac{1}{8}(-\cos\alpha-i\sin\alpha)$$

$$R_2 = \lim_{z \to e^{i\frac{3\pi}{8}}} \frac{z - e^{i\frac{3\pi}{8}}}{1+z^8} \quad , \quad (k=1)$$

$$= \frac{1}{8\,e^{i\frac{21\pi}{8}}} = \frac{1}{8} e^{-i\frac{5\pi}{8}} = \frac{1}{8}\left(\cos\frac{5\pi}{8} - i\sin\frac{5\pi}{8} \right)$$

$$= \frac{1}{8}(\cos(\pi - 3\alpha) - i\sin(\pi - 3\alpha))$$

$$R_3 = \lim_{z \to e^{i\frac{5\pi}{8}}} \frac{z - e^{i\frac{5\pi}{8}}}{1+z^8} \quad , \quad (k=2)$$

$$= \lim_{z \to e^{i\frac{5\pi}{8}}} \frac{1}{8\,z^7} = \frac{1}{8e^{i\frac{35\pi}{8}}}$$

$$= \frac{1}{8} e^{-i\frac{3\pi}{8}} = \frac{1}{8}\left(\cos\frac{3\pi}{8} - i\sin\frac{3\pi}{8} \right)$$

$$= \frac{1}{8}(\cos 3\alpha - i\sin 3\alpha)$$

وأيضا

$$R_4 = \lim_{z \to e^{i7\frac{\pi}{8}}} \frac{z - e^{i7\frac{\pi}{8}}}{1+z^8} \quad , \quad (k=3)$$

$$= \frac{1}{8\,e^{i49\frac{\pi}{8}}} = \frac{1}{8} e^{-i\frac{\pi}{8}}$$

$$= \frac{1}{8}(\cos\alpha - i\sin\alpha)$$

وبالتالي فإن

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^8} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^8}$$

$$= \frac{1}{2}(2\pi i)\left[\frac{1}{8}\right][-\cos\alpha - i\sin\alpha - \cos 3\alpha - i\sin 3\alpha$$

$$+\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha + \cos\alpha - i\sin\alpha]$$

$$= \frac{\pi i}{8}[-2i\sin\alpha]$$

$$= \frac{\pi}{4}\sin\alpha \quad , \quad \alpha = \frac{\pi}{8}$$

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^8} = \frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{8}}$$

ولا بد أن ننتبه فنحن نحسب البواقي للأقطاب الداخلية فقط .. ونستعمل نتيجة العارض ٥-١ بحذر ولابد أن نثبتها دائما ولا نفترض وجودها ..

مثال ٥-٤:

أحسب $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}$$

الحل:

الدالة $$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}$$

لها قطب عند $z = i$ من الرتبة الثانية داخـ ـل المـ ـسار نـ ـصف الـ ـدائري وكـ ـذلك فـ ـإن $z2 + 2z + 2 = 0$ تعطي $z = \frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2}$ أي أن $z = -1\pm i$ ومنهما فإن $z =$ $-1+i$ قطب يسير داخلي ويمكننا حساب البواقي كالآتي:

$$R_1 = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}(z-i)^2 \frac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2\left(z^2+2z+2\right)}$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{d}{dz} \frac{z^2}{(z+i)^2\left(z^2+2z+2\right)}$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{(z+i)^2\left(z^2+2z+2\right)(2z) - z^2\left[(z+i)^2(2z+2) + \left(z^2+2z+2\right)^2(z+i)\right]}{(z+i)^4\left(z^2+2z+2\right)^2}$$

$$= \frac{(2i)^2(1+2i)(2i) + \left[(2i)^2 2(i+1) + (1+2i)2(2i)\right]}{(2i)^4(1+2i)^2}$$

$$= \frac{-8i(1+2i) - 8(i+1) + 4i(1+2i)}{16(1+4i-4)}$$

$$= \frac{-12i}{16(-3+4i)} \cdot \frac{-3-4i}{-3-4i} = \frac{12i(3+4i)}{16(9+16)} = \frac{1}{100}(-12+9i)$$

$$R_2 = \lim_{z\to -1+i} (z+1-i) \frac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2(z+1+i)(z+1+i)}$$

$$= \frac{(-1+i)^2}{\left[(-1+i)^2+1\right]^2[-1+i+1+i]}$$

$$= \frac{(-2i)}{(-2i+1)^2(2i)}$$

$$= \frac{-1}{1-4i-4}$$

$$= \frac{-1}{-3-4i}$$

$$= . \frac{1}{3+4i} . \frac{3-4i}{3-4i}$$

$$= \frac{3-4i}{9+16}$$

$$= \frac{3-4i}{25}$$

والآن فإنه علي Γ:

$$|f(z)|=\left|\frac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2\left(z^2+2z+2\right)}\right|$$

$$=\frac{|z|^2}{\left|z^2+1\right|^2|(z+1-i)||(z+1+i)|}$$

$$=\frac{\left|R^2e^{2i\theta}\right|}{\left|R^2e^{2i\theta}+1\right|^2\left|R\,e^{i\theta}+(1-i)\right|\left|R\,e^{i\theta}+(1+i)\right|}$$

$$\le\frac{R^2}{\left(R^2-1\right)^2(R-|1-i|)(R+|1+i|)}$$

$$=\frac{R^2}{\left(R^2-1\right)^2(R-2)(R+2)}$$

$$=\frac{R^2}{\left(R^2-1\right)^2}\cdot\frac{1}{R^2-4}=\frac{R^4}{\left(R^2-1\right)^2}\cdot\frac{R^2}{R^2-4}\cdot\frac{1}{R^2}$$

بأخذ $R>3$ مثلاً فإن $R^2>9$

أي أن (1) $\dfrac{1}{R^2}<\dfrac{1}{9}$

أي أن $1-\dfrac{1}{R^2}>\dfrac{8}{9}$ أي أن $\dfrac{R^2-1}{R^2}>\dfrac{8}{9}$ أي أن

$\dfrac{R^2}{R^2-1}<\dfrac{9}{8}$ وبالتربيع فإن

$$\frac{R^4}{\left(R^2-1\right)^2}<\frac{81}{64} \qquad (2)$$

كذلك فإن من العلاقة $\frac{1}{9} < \frac{1}{R^2}$ .. أي أن

$$\frac{4}{R^2} < \frac{4}{9}$$ وبالتالي فإن $$1 - \frac{4}{R^2} > \frac{5}{9}$$

أي أن $\frac{R^2-4}{R^2} > \frac{5}{9}$ .. أي أن $\frac{R^2}{R^2-4} < \frac{9}{5}$ .. أي أن

$$\frac{1}{R^2-4} < \frac{9/5}{R^2} \qquad (3)$$

من $(1), (2), (3)$ فإن

$$|f(z)| \le \frac{81}{64} \cdot \frac{9/5}{R^2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{M}{R^k}, \qquad k > 1$$

وبالتالي فإن

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_{\Gamma} f(z)dz \right| = 0$$

أي أن

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$$

وبالتالي فإن

$$\oint_C f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i[R_1 + R_2]$$

$$= 2\pi i\left[\frac{1}{100}(-12+9i) + \frac{1}{25}(3-4i)\right]$$

$$= 2\pi i\left[\frac{-12}{100} + \frac{9i}{100} + \frac{12}{100} - \frac{16i}{100}\right] = 2\pi i\left(-\frac{7i}{100}\right)$$

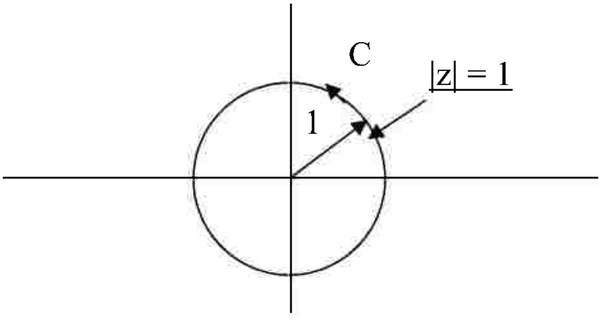
$$= \frac{7\pi}{50}.$$

وأرجو ملاحظة الصعوبة والدقة التي نثبت فيها أن التكامل على Γ مساوياً للصفر .. ونعلم أن

$R\to\infty$ ونأخذ القيمة المناسبة $R>l$ التي تناسب المسألة .. وللعلم فإن $R > 2$ لا تناسب هذه المسألة (لماذا؟).

٥-١-٢ تكاملات على صورة $\int_0^{2\pi} G(\sin\theta,\cos\theta)d\theta$ حيث G( ) دالة نسبية في sin θ أو cos θ.

في هذه الحالة نستعمل المسار المغلق الموضع بشكل (٥-٢)



(شكل ٥-٢)

وبالتالي فإن $z = e^{i\theta}$ وتكون $\sin\theta = \dfrac{z-\frac{1}{z}}{2i}$ وكذلك $\cos\theta = \dfrac{z+\frac{1}{z}}{2}$ وأيضا

$$dz = i\,z\,d\theta$$

وبالتالي نحسب التكامل $\oint_C F(z)\,dz$ بنظرية الباقي.

مثال ٥-٥:

أحسب $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta}$

الحل:

كلنا نعلم التعويضات المشهورة لأمثال هذا التكامل .. ودعنا نرى كيف تسير الأمور باستعمال نظرية الباقي .. باستعمال المسار الدائري $|z| = 1$ .. فإن

$$d\theta = \frac{dz}{iz} \qquad , \qquad \sin\theta = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}$$

وبالتالي فإن

$$\frac{d\theta}{2+\sin\theta} = \frac{\frac{dz}{iz}}{2 + \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}} = \frac{2idz}{4i + z - \frac{1}{z}} \frac{1}{iz}$$

$$= \frac{2dz.z}{z^2 + 4iz - 1} . \frac{1}{z}$$

$$= 2\frac{dz}{z^2 + 4iz - 1}$$

ولكن $z^2 + 4iz - 1 = 0$ تعطي الجذرين $z = \left(-2 \pm \sqrt{3}\right)i$ والعبرة بالذي داخل المسار وهو $z = \left(-2 + \sqrt{3}\right)i$ حيث $\left|-2+\sqrt{3}\right| < 1$ وبالتالي فإن

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta} = \oint_{\substack{C \\ |z|=1}} \frac{2dz}{\left(z^2 + 4iz - 1\right)}$$

$$= 2\pi i (R)$$

حيث

$$R = \lim_{z \to \left(-2+\sqrt{3}\right)i} \frac{\left(z - \left(-2+\sqrt{3}\right)i\right)2}{\left(z - \left(-2+\sqrt{3}\right)i\right)\ \left(z - \left(-2-\sqrt{3}\right)i\right)}$$

$$= \frac{2}{\left(-2+\sqrt{3}\right)i + \left(2+\sqrt{3}\right)i}$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{3}\, i}$$

وبالتالي فإن

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta} = 2\pi i \frac{2}{2\sqrt{3}\, i}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

وعلى القارئ أن يعلم أن التكامل

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} \quad , \quad a>|b|.$$

ويمكنه محاولة إثبات ذلك بشكل عام .. ونلاحظ فشلنا في إيجاد التكامل في حالة $a = |b|$ بهذه الطريقة (لماذا؟).

مثال ٥-٦

أثبت أن
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta+c\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}$$

إذا كان $a^2 > b^2 + c^2$

الحل:

بأخذ المسار المغلق $c: |z| = 1$ فإنه على c يكون

$$z = e^{i\theta} \Rightarrow \sin\theta = \frac{z-\frac{1}{z}}{2i},\ \cos\theta = \frac{z+\frac{1}{z}}{2},\ d\theta = \frac{dz}{iz}$$

وبالتالي فإن

$$\frac{d\theta}{a+b\cos\theta+c\sin\theta} = \frac{dz/iz}{a+\frac{b}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+\frac{c}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)}$$

$$= \frac{(dz)2i}{iz\left(2ai+bi\left(\frac{z^2+1}{z}\right)+c\frac{(z^2-1)}{z}\right)}$$

$$= \frac{2dz.z}{z\left((bi+c)z^2+2aiz+(bi-c)\right)}$$

$$= \frac{2dz}{(c+bi)z^2+2aiz+(-c+bi)}$$

ولكن جذور المعادلة $(c+bi)z^2 + 2aiz + (-c + bi) = 0$ هي

$$z = \frac{-2ai \pm \sqrt{-4a^2 - 4((c+bi)(-c+bi))}}{2(c+bi)}$$

$$= \frac{-ai \pm \sqrt{-a^2 + c^2 + b^2}}{(c+bi)} \cdot \frac{c-bi}{c-bi}$$

$$= \frac{-ai \pm \sqrt{a^2 - \left(c^2+b^2\right)}\, i}{c^2+b^2}\ (c-bi),\ a^2 > c^2 + b^2$$

$$= \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - \left(c^2+b^2\right)}}{c^2+b^2}\ (b+ci)$$

بالتالي فعندنا قطبان عند

$$z_1 = \left(\frac{-a + \sqrt{a^2 - \left(c^2+b^2\right)}}{c^2+b^2}\right)\ (b+ci)$$

وَ

$$z_2 = \left(\frac{-a - \sqrt{a^2 - \left(c^2+b^2\right)}}{c^2+b^2}\right)\ (b+ci)$$

ولكن

$$|z_1| = \frac{\left|a - \sqrt{a^2 - \left(c^2+b^2\right)}\right|}{c^2+b^2}\ \sqrt{b^2+c^2}$$

$$= \left|\frac{a - \sqrt{a^2 - \left(c^2+b^2\right)}}{\sqrt{c^2+b^2}} \cdot \frac{a + \sqrt{a^2 - \left(c^2+b^2\right)}}{a + \sqrt{a^2 - \left(c^2+b^2\right)}}\right|$$

$$= \left|\frac{a^2 - \left(a^2 - \left(c^2+b^2\right)\right)}{\left(\sqrt{c^2+b^2}\right)\left(a + \sqrt{a^2 - \left(c^2+b^2\right)}\right)}\right|$$

$$= \left| \frac{\sqrt{c^2+b^2}}{a+\sqrt{a^2-\left(c^2+b^2\right)}} \right|$$

طالما أن $a^2 > c^2 + b^2$ $\quad < 1$

وبالتالي فإن z_1 قطب داخلي interior pole ولكن z_2 خارجي (لماذا؟).

وبالتالي فإن

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta+c\sin\theta} = \oint_{\substack{C \\ |z|=1}} \frac{2dz}{(c+bi)z^2+2aiz+(-c+bi)}$$

$$= 2\pi i R$$

$$R = \lim_{z\to z_1} (z-z_1)\cdot \frac{2}{(c+bi)z^2+2aiz+(-c+bi)}$$

$$= \lim_{z\to z_1} \frac{2}{2(c+bi)z+2ai}$$ (بتطبيق قاعدة لوبيتال)

$$= \frac{2}{2(c+bi)z_1+2ai}$$

$$= \frac{2}{2(c+bi)\left(\dfrac{-a+\sqrt{a^2-\left(b^2+c^2\right)}}{c^2+b^2}\right)i(c-bi)+2ai}$$

$$= \frac{1}{i\left(\left(\dfrac{-a+\sqrt{a^2-\left(b^2+c^2\right)}}{c^2+b^2}\right)\left(c^2+b^2\right)+a\right)}$$

وبالتالي فإن

$$R = \frac{-i}{\sqrt{a^2-\left(b^2+c^2\right)}}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta+c\sin\theta} = 2\pi i \frac{-i}{\sqrt{a^2-\left(b^2+c^2\right)}}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-\left(b^2+c^2\right)}}$$

بشرط أن $a^2 > (b^2 + c^2)$

٥-١-٣ تكاملات على صورة $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\cos mx \atop {or \atop \sin mx} \right) . F(x)dx$ حيث $F(x)$ دالة نسبية

في هذه الحالة نأخذ المسار c الذي في شكل (٥-١) ونكامل الدالة $F(z)e^{imz}dz$ على c. وننتظر طبعاً مشكلة التكامل على Γ .. والعارض القادم يواجه هذه المشكلة.

عارض ٥-٢

إذا كانت $\left|F(z)\right| \le \frac{M}{R^k}, \mathrm{k} > 0$ على $z = R\, e^{i\theta}$, M ثابت فإن

$$\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma F(z) e^{imz} dz = 0$$

الإثبات:

على Γ فإن $z = R\, e^{i\theta}$ وبالتالي

$$\int_\Gamma e^{imz} F(z) dz = \int_0^{\pi} e^{im\mathrm{Re}^{i\theta}} F\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right) i\,\mathrm{Re}^{i\theta}\, d\theta$$

وبالتالي

$$\left|\int_0^{\pi} e^{im\mathrm{Re}^{i\theta}} F\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right) i\,\mathrm{Re}^{i\theta}\, d\theta\right| \le \int_0^{\pi} \left|e^{im\mathrm{Re}^{i\theta}}\right| \left|F\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)\right| \left|i\,\mathrm{Re}^{i\theta}\right| d\theta$$

$$\le \frac{M}{R^k} \int_0^{\pi} \left|e^{imR\,(\cos\theta + i\sin\theta)}\right| R d\theta$$

$$= \frac{M}{R^k} \int_0^{\pi} \underbrace{\left|e^{imR\cos\theta}\right|}_{1} \left|e^{-mR\sin\theta}\right| R d\theta$$

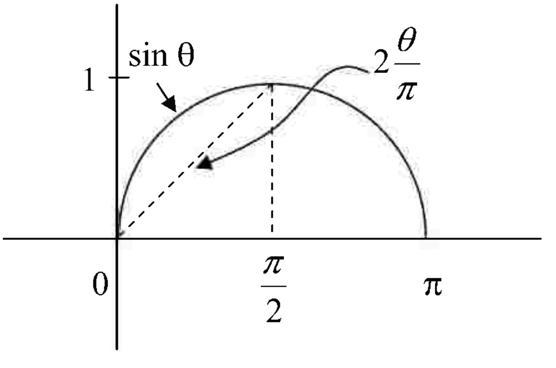
$$= \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi} e^{-mR\sin\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-mR\sin\theta}\, d\theta$$

وذلك لأن $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$ متماثلة حول $\frac{\pi}{2}$.

وبالنظر للشكل (٥-٣) فإن

$$\frac{2\theta}{\pi} \le \sin\theta \qquad , \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$



شكل (٥-٣)

وبالتالي فإن

$$\frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-mR\sin\theta} d\theta \le \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-mR\left(2\frac{\theta}{\pi}\right)} d\theta$$

(لماذا؟)

$$= \frac{2M}{R^{k-1}} \frac{-\pi}{2mR} e^{-2mR\frac{\theta}{\pi}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{-M\pi}{mR^k}\left(e^{-mR} - 1\right)$$

$$= \frac{M\pi\left(1 - e^{-mR}\right)}{mR^k}$$

والآن عندما $R \to \infty$ فإن

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_\Gamma e^{imz} F(z) dz \right| = 0$$

وبالتالي فإن

$$\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma e^{imz} F(z) dz = 0$$

لاحظ أنه للاستفادة من العارض ٥-٢ فلابد من إثبات أن $k > 0$, $|F(z)| \le \frac{M}{R^k}$ على Γ.

مثال ٥-٧

أثبت أن $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{1+x^2} dx = \pi e^{-m}$

الإثبات

لإيجاد $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{1+x^2} dx$ .. نلاحظ أن $F(x) = \frac{1}{1+x^2}$ تم التعامل معها سابقاً في مثال (٥-١) .. وبالتالي فإن

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma} F(z)e^{imz}\,dz=0$$

وبالتالي فإن

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos mx}{1+x^2}dx=\lim_{R\to\infty}\oint_{C}\frac{e^{imz}}{1+z^2}dz$$
$$=2\pi i\left[\sum R_i\right]$$

ويوجد قطبان للدالة F(z) عند z = +i وعند z = -i والعبرة بالأول فقط (لماذا؟) ..

وبالتالي فإن

$$R=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{imz}}{(z-i)(z+i)}$$
$$=\frac{e^{-m}}{2i}$$

وبالتالي

$$\int_{-R}^{R}\frac{e^{imx}}{1+x^2}dx+\underbrace{\int_{\Gamma}\frac{e^{imz}}{1+z^2}dz}_{0}=\frac{e^{-m}}{2i}(2\pi i)$$

وبأخذ R⟶∞ فإن

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos mx}{1+x^2}dx+i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin mx}{1+x^2}dx=\pi\, e^{-m}$$

وبالتالي نحصل على
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos mx}{1+x^2}dx=\pi\, e^{-m}$$

وأيضاً:
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin mx}{1+x^2}dx=0$$

مثال ٥-٨

أوجد $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos \pi x}{x^2+2x+5}dx$

الحل

بأخذ المسار المغلق النصف دائرى (شكل ٥-١) .. فإننا نحسب التكامل

$\oint_C \frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}dz$ ولكن $z^2+2z+5=0$ لها الجذران

$$z=\frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2}=-1\pm 2i$$

وتعتبر فقط القطب الداخلي $z = -1+2i$ وبالتالي فإن

$$R=\lim_{z\to -1+2i}(z+1-2i)\frac{ze^{i\pi z}}{(z+1-2i)(z+1+2i)}$$

$$=\frac{(-1+2i)e^{i\pi(-1+2i)}}{(4i)}$$

$$=\frac{(-1+2i)e^{-2\pi}e^{-i\pi}}{4i}$$

$$=\frac{(-1+2i)e^{-2\pi}(\cos\pi - i\sin\pi)}{4i}$$

$$=\frac{(1-2i)e^{-2\pi}}{4i}$$

وبالتالي فإن

$$\oint_C \frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}dz=2\pi i\ \frac{(1-2i)e^{-2\pi}}{4i}$$

$$=\frac{\pi}{2}e^{-2\pi}(1-2i)$$

ولكن

$$\oint_C \frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}dz = \int_{-R}^{R} \frac{x\,e^{i\pi x}}{x^2+2x+5} + \int_{\Gamma} \frac{ze^{imz}}{z^2+2z+5}dz$$

ولكن على Γ

$$F(z)=\frac{z}{z^2+2z+5} = \frac{\mathrm{Re}^{i\theta}}{R^2e^{2i\theta}+2\mathrm{Re}^{i\theta}+5} = \frac{\mathrm{Re}^{i\theta}}{\left(\mathrm{Re}^{i\theta}+1-2i\right)\left(\mathrm{Re}^{i\theta}+1+2i\right)}$$

وبالتالي فإن

$$|F(z)| = \frac{R}{\left|\mathrm{Re}^{i\theta}+(1-2i)\right|\left|\mathrm{Re}^{i\theta}+(1+2i)\right|} \le \frac{R}{\left(R-|1-2i|\right)\left(R-|1+2i|\right)}$$

$$= \frac{R}{\left(R-\sqrt{5}\right)\left(R-\sqrt{5}\right)} = \frac{R}{R-\sqrt{5}}\cdot\frac{R}{R-\sqrt{5}}$$

الآن بأخذ $R>6$ فإن $\frac{1}{R}<\frac{1}{6}$ وكذلك $\frac{\sqrt{5}}{R}<\frac{\sqrt{5}}{6}$ .. أي أن

$$-\frac{\sqrt{5}}{R}>-\frac{\sqrt{5}}{6}$$

وبالتالي $1-\frac{\sqrt{5}}{R}>1-\frac{\sqrt{5}}{6}$ .. أي أن $1-\frac{\sqrt{5}}{R}>1-\frac{\sqrt{5}}{6}=d$ أي أن

$\frac{R-\sqrt{5}}{R}>\frac{1}{d}$ وبالتالي $\frac{R}{R-\sqrt{5}}<\frac{1}{d}$

وبالتالي فإن

$$\left|F(z)\right|_{\Gamma} = \frac{R}{R-\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{R-\sqrt{5}} < \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{dR} = \frac{1/d^2}{R} = \frac{M}{R^k},\ k > 0$$

وبالتالي فعندما R⟶∞ فإن

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} \frac{ze^{imz}}{z^2+2z+5} dz = 0$$

تبعاً لعارض (٥-٢). وبالتالي فإن

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{xe^{i\pi x}}{x^2+2x+5} dx = \frac{\pi}{2} e^{-2\pi}(1-2i)$$

أي أن

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos \pi x}{x^2+2x+5} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin \pi x}{x^2+2x+5} = \frac{\pi}{2} e^{-2\pi}(1-2i)$$

أي أن

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos \pi x}{x^2+2x+5} dx = \frac{\pi}{2} e^{-2\pi}$$

وأيضا

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin \pi x}{x^2+2x+5} dx = -\pi e^{-2\pi}.$$

ملاحظة:

نلاحظ أنه لو أخذنا

$$\left|F(z)\right|_{\Gamma} = \frac{R}{\left(R-\sqrt{5}\right)^2} = \left(\frac{R}{R-\sqrt{5}}\right)^2 \frac{1}{R}$$

$$< \frac{1}{d^2} \cdot \frac{1}{6}$$

ولفشلنا في إثبات أن $\left|F(z)\right|_{\Gamma} < \dfrac{M}{R^k}, \quad k > 0$..

ولكننا قمنا بتصرف أخر سليم أيضا وهو

$$|F(z)|_{\Gamma}=\frac{R}{R-\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{R-\sqrt{5}}<\frac{1}{d}\cdot\frac{1}{dR}$$
$$=\frac{1/d^2}{R}$$
$$=\frac{M}{R},\qquad k=1>0$$

ولا يجب افتراض انعدام التكامل على Γ.

٥-١-٤ تكاملات ومسارات مغلقة مشهورة

مثال ٥-٩

أوجد تكامل $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$

الحل:

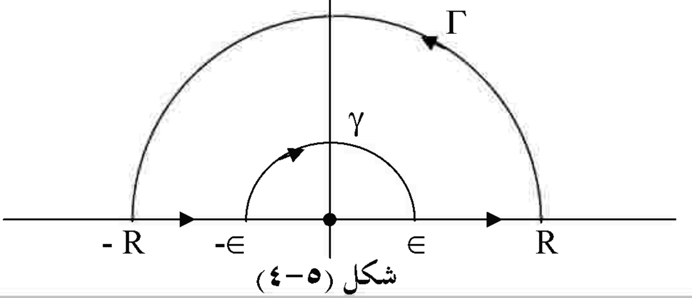
لاحظ أن المسار لا ائي وأن $\frac{\sin x}{x}$ دالة زوجية وبالتالي

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=2\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

أي أن

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{\sin x}{x}dx$$

وبالتالي فالمسار النصف دائري يصلح لذلك ولكن هناك مشكلة تواجه تطبيق هذا المسار وهو أن النقطة الشاذة (المزالة) $z=0$ تقع على المسار الحقيقي من R- إلى R .. لذلك يتم عزل هذه النقطة بنصف دائرة $|z|=\in$ وبالتالي يصبح المسار كالتالي



شكل (٥-٤)

وبالتالي فإن $\oint_C \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$ لأن z = 0 نقطة خارج المسار المغلق C.

وبالتالي

$$\int_{-R}^{-\in} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\in}^{R} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

ولكن

$$\left.\int_{-R}^{-\in} \frac{e^{ix}}{x} dx\right|_{x \to -x} = +\int_{R}^{\in} \frac{e^{-ix}}{x} dx = -\int_{\in}^{R} \frac{e^{-ix}}{x} dx$$

وبالتالي فإن

$$\int_{\in}^{R} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx + \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

أي أن

$$2i \int_{\in}^{R} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \frac{1}{x} dx + \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

أي أن

$$2i \int_{\in}^{R} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0 \qquad (1)$$

ولكن

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

لأن

$$|F(z)| = \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{R}$$

والآن على نصف الدائرة الصغرى $|z| = \in$ .. أي أن $z = \in e^{i\theta}$ فإن

$$\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{\pi}^{0} \frac{e^{i \in e^{i\theta}}}{\in e^{i\theta}} \in i e^{i\theta} d\theta$$

وبأخذ النهاية عندما $\in \to 0$ فإن

$$\lim_{\in\to 0}\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z}dz = \lim_{\in\to 0}\int_{\pi}^{0} \frac{e^{i\in e^{i\theta}}}{1} id\theta$$

$$= i\int_{\pi}^{0} (1)d\theta$$

$$= i(0-\pi)$$

$$= -i\pi$$

وبالتالي نحصل على (بالتعويض في (١) وأخذ $\in\to 0$ و $R\to\infty$)

$$2i\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx - \pi i + 0 = 0$$

أي أن
$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

ملاحظة:

هذا المثال المشهور يعطينا فكرة عن كيفية التصرف إذا وجدت نقاط شاذة على المحور الحقيقي .. فنقوم بعزلها بأنصاف دوائر ثم نحاول إيجاد قيمة التكامل على هذه المسارات الفرعية ونأخذ النهاية عندما تؤول أنصاف الأقطار إلى الصفر.

مثال ٥-١٠

أثبت أن
$$\int_{0}^{\infty} \frac{(\ln u)}{1+u^2}du = \frac{\pi^3}{8}$$

الإثبات: باعتبار التكامل
$$\oint_{C} \frac{(\ln z)^2}{1+z^2}dz$$

حيث c هو نفسه المسار السابق في مثال (٥-١٠) وبالتالي يتم عزل النقطة الشاذة $z = 0$ (لماذا؟) .. ونلاحظ هنا أنه يوجد قطب داخلي عند $z = i$.

وبالتالي فإن

$$\oint_C \frac{(\ln z)^2}{1+z^2}dz = 2\pi i R \;,$$

$$R = \lim_{z\to i}(z-i)\cdot\frac{(\ln z)^2}{(z+i)(z-i)}$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\ln i)^2$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(i\frac{\pi}{2}\right)^2 \qquad \text{(لماذا؟)}$$

$$=-\frac{\pi^2}{8\mathrm{i}}$$

وبالتالي فإن

$$\oint_C \frac{(\ln z)^2}{1+z^2}dz = 2\pi i\left(\frac{-\pi^2}{8i}\right)$$

$$=\frac{-\pi^3}{4}$$

والآن

$$\oint_C \frac{(\ln z)^2}{1+z^2}dz = \int_{-R}^{-\in}\frac{(\ln u)^2}{1+u^2}du + \int_\gamma \frac{(\ln z)^2}{1+z^2}dz$$

$$+\int_{\in}^{R}\frac{(\ln u)^2}{1+u^2}du + \int_\Gamma \frac{(\ln z)^2}{1+z^2}dz = \frac{-\pi^3}{4}$$

والآن على γ:

$$\int_\gamma \frac{(\ln z)^2}{1+z^2}dz = \int_\pi^0 \frac{\left(\ln \in e^{i\theta}\right)^2}{1+\in^2 e^{2i\theta}} \in ie^{i\theta}d\theta$$

وبأخذ $\in \to 0$ فإن:

$$\lim_{\in\to 0}\int_{\gamma}\frac{(\ln z)^2}{1+z^2}dz = i\int_{\pi}^{0}\lim_{\in\to 0}\in e^{i\theta}\cdot\left(\ln\in e^{i\theta}\right)^2 d\theta$$

$$= i\int_{\pi}^{0}\lim_{\in\to 0}\frac{e^{i\theta}\left(\ln\in e^{i\theta}\right)^2}{\left(\frac{1}{\in}\right)}d\theta$$

$$= i\int_{\pi}^{0}\lim_{\in\to 0}\frac{e^{i\theta}\,2\ln\left(\in e^{i\theta}\right)\cdot\frac{1}{e^{i\theta}\in}\cdot e^{i\theta}}{-\frac{1}{\in^2}}d\theta$$

$$= i\int_{\pi}^{0}\lim_{\in\to 0}\frac{2e^{i\theta}\ln\left(\in e^{i\theta}\right)}{-\frac{1}{\in}}d\theta$$

$$= i\int_{\pi}^{0}\lim_{\in\to 0}\frac{2e^{i\theta}\frac{1}{\in e^{i\theta}}\cdot e^{i\theta}}{\frac{1}{\in^2}}d\theta$$

$$= i\int_{\pi}^{0}\lim_{\in\to 0}\frac{2e^{i\theta}}{1}(\in)d\theta$$

$$= 0$$

وبجعل $R\to\infty$ فإن

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma}\frac{(\ln z)^2}{1+z^2}dz = \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma}\frac{\left(\ln \mathrm{Re}^{i\theta}\right)^2}{1+R^2e^{2i\theta}}i\,\mathrm{Re}^{i\theta}\,d\theta$$

$$\left|\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma}\frac{(\ln R+i\theta)^2}{1+R^2e^{2i\theta}}R\,d\theta\right| = \lim_{R\to\infty}\left|\int_{\Gamma}\frac{(\ln R+i\theta)^2}{1+R^2e^{2i\theta}}R\,d\theta\right|$$

$$\le \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma}\frac{|\ln R+i\theta|^2}{\left|1+R^2e^{2i\theta}\right|}R\,d\theta$$

$$\leq \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} \frac{(\ln R)^2+\theta^2}{R^2-1} R\, d\theta, \qquad |z_2+z_1| \geq |z_2|-|z_1|$$

ولكن

$$\lim_{R\to\infty} \frac{R}{R^2-1}=0$$

وكذلك

$$\lim_{R\to\infty} \frac{R(\ln R)^2}{R^2-1} = \lim_{R\to\infty} \frac{R2(\ln R)\cdot\frac{1}{R}+(\ln R)^2}{2R}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{\ln R}{R} + \lim_{R\to\infty} \frac{(\ln R)^2}{2R}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} + \lim_{R\to\infty} \frac{2\ln R\cdot\frac{1}{R}}{2}$$

$$= 0+\lim_{R\to\infty} \frac{\ln R}{R}$$

$$= 0+0$$

وبالتالي فإن

$$\lim_{\substack{\in\to 0\\ R\to\infty}} \left(\int_{-R}^{-\in} \frac{(\ln v)^2}{1+v^2} dv + \int_{\in}^{R} \frac{(\ln u)^2}{1+u^2} du \right) = -\frac{\pi^3}{4} \qquad (2)$$

والآن بوضع $v = -u$ في التكامل الأول.

وبالتالي فإن $\ln v = \ln(-u) = \ln u + \ln(-1)$

(لماذا؟) $= \ln u + \pi i$

وبالتالي فإن (2) تصبح

$$\lim_{\substack{\in\to 0\\ R\to\infty}} \left(-\int_{R}^{\in} \frac{(\ln u+\pi i)^2}{1+u^2} du + \int_{\in}^{R} \frac{(\ln u)^2}{1+u^2} du \right) = -\frac{\pi^3}{4}$$

$$\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ R\to\infty}}\left(\int_{\epsilon}^{R}\frac{\left((\ln u)^2+2\pi i\ln u-\pi^2\right)}{1+u^2}du+\int_{\epsilon}^{R}\frac{(\ln u)^2}{1+u^2}du\right)=-\frac{\pi^3}{4}$$

وبالتالي فإن

$$2\int_0^\infty\frac{(\ln u)^2}{1+u^2}du-\pi^2\int_0^\infty\frac{du}{1+u^2}+i(2\pi)\int_0^\infty\frac{\ln u}{1+u^2}du=-\frac{\pi^3}{4}$$

ولكن
$$\int_0^\infty\frac{du}{1+u^2}=\tan^{-1}u\Big|_0^\infty=\frac{\pi}{2}$$

أي أن
$$2\int_0^\infty\frac{(\ln u)^2}{1+u^2}du+i(2\pi)\int_0^\infty\frac{\ln u}{1+u^2}du=-\frac{\pi^3}{4}+\frac{\pi^3}{2}=\frac{\pi^3}{4}$$

وبالتالي نحصل على
$$\int_0^\infty\frac{(\ln u)^2}{1+u^2}du=\frac{\pi^3}{8}$$

وجانبيا أيضا فإن
$$\int_0^\infty\frac{\ln u}{1+u^2}du=0$$

مثال ٥-١١

أحسب
$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x\left(x^2+a^2\right)}dx$$

الحل:

بأخذ المسار نفسه في شكل ٥-٤ .. مع ملاحظة أن هناك قطب يسير داخل المسار عند $z=ia$ فإن

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z\left(z^2+a^2\right)}dz = 2\pi i R$$

حيث

$$R = \lim_{z\to ai}(z-ai)\frac{e^{iz}}{z(z+ai)(z-ai)}$$

$$= \frac{e^{-a}}{ai(2ai)} = \frac{-1}{2}\frac{e^{-a}}{a^2}$$

وبالتالي فإن

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z\left(z^2+a^2\right)} = 2\pi i\left(-\frac{1}{2}\frac{e^{-a}}{a^2}\right)$$

$$= -\frac{\pi\, i\, e^{-a}}{a^2} \qquad (1)$$

والآن فإن

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z\left(z^2+a^2\right)}dz = \int_{-R}^{-\in} \frac{e^{ix}}{x\left(x^2+a^2\right)}dx + \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z\left(z^2+a^2\right)}dz$$

$$+\int_{\in}^{R} \frac{e^{ix}}{x\left(x^2+a^2\right)}dx + \int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z\left(z^2+a^2\right)}dz$$

وبوضع $x = -u$ في التكامل الأول في الطرف الأيمن فإن:

$$\int_{-R}^{-\in} \frac{e^{ix}}{x\left(x^2+a^2\right)}dx = \int_{R}^{\in} \frac{e^{-iu}}{u\left(u^2+a^2\right)}du = -\int_{\in}^{R} \frac{e^{-iu}}{u\left(u^2+a^2\right)}du$$

وبالتالي فإن

$$\int_{-R}^{-\in} \frac{e^{ix}}{x\left(x^2+a^2\right)}dx + \int_{\in}^{R} \frac{e^{ix}}{x\left(x^2+a^2\right)}dx = \int_{\in}^{R} \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x\left(x^2+a^2\right)}dx$$

$$= 2i\int_{\in}^{R} \frac{\sin x}{x\left(x^2+a^2\right)}dx$$

وبالتالي فإن

$$2i\int_{\in}^{R}\frac{\sin x}{x\left(x^{2}+a^{2}\right)}dx+\int_{\gamma}\frac{e^{iz}}{z\left(z^{2}+a^{2}\right)}dz+\int_{\Gamma}\frac{e^{iz}}{z\left(z^{2}+a^{2}\right)}dz=-\frac{\pi i e^{-a}}{a^{2}} \qquad (2)$$

والآن .. بالتكامل على γ : $z=\in e^{i\theta}$ فإن

$$\int_{\gamma}\frac{e^{iz}}{z\left(z^{2}+a^{2}\right)}dz=\int_{\pi}^{0}\frac{e^{i\in e^{i\theta}}}{\in e^{i\theta}\left(\in^{2}e^{2i\theta}+a^{2}\right)}i\in e^{i\theta}d\theta$$

وبأخذ النهاية $\in\to 0$ فإن:

$$\lim_{\in\to 0}\int_{\gamma}\frac{e^{iz}}{z\left(z^{2}+a^{2}\right)}dz=i\int_{\pi}^{0}\frac{1}{a^{2}}d\theta$$

$$=-\frac{\pi i}{a^{2}} \qquad (3)$$

كذلك على Γ: $z=R\,e^{i\theta}$

$$\left|F(z)\right|_{\Gamma}=\left|\frac{1}{R\left(R^{2}e^{2i\theta}+a^{2}\right)}\right|\le\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{\left(R^{2}-a^{2}\right)}$$

ولكن بأخذ $R>\sqrt{a^{2}+1}$ فإن $\frac{1}{R}<\frac{1}{\sqrt{1+a^{2}}}$ وبالتالي $\frac{a^{2}}{R^{2}}<\frac{a^{2}}{1+a^{2}}$

أي أن
$$1-\frac{a^{2}}{R^{2}}>1-\frac{a^{2}}{1+a^{2}}=\frac{1}{1+a^{2}}$$

أي أن
$$\frac{R^{2}-a^{2}}{R^{2}}>\frac{1}{1+a^{2}}$$

وبالتالي فإن
$$\frac{R^{2}}{R^{2}-a^{2}}<1+a^{2}$$

أي أن
$$\frac{1}{R^{2}-a^{2}}<\frac{1+a^{2}}{R^{2}}$$

أي أن $\quad |F(z)|_{\Gamma} \le \frac{1}{\sqrt{1+a2}} \cdot \frac{1+a^2}{R^2} = \frac{M}{R^k} \quad , \quad k > 0$

فإنه بتطبيق نتيجة العارض ٥-٢ فإن

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z\left(z^2+a^2\right)} dz = 0$$

وبالتالي (2) تصبح $(\in\to 0$ و $R\to\infty)$:

$$2i\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x\left(x^2+a^2\right)} dx - \frac{\pi i}{a^2} + 0 = \frac{-\pi i e^{-a}}{a^2}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x\left(x^2+a^2\right)} dx = \frac{\pi}{2a^2} - \frac{\pi e^{-a}}{2a^2}$$

$$= \frac{\pi}{2a^2}\left(1-e^{-a}\right)$$

أي أن

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x\left(x^2+a^2\right)} dx = \frac{\pi}{2a^2}\left(1-e^{-a}\right)}$$

ملاحظة هامة

لا نستطيع حساب $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x\left(x^2+u^2\right)} dx$ بهذا الأسلوب. (لماذا؟!).

مثال ٥-١٢

أثبت أن $\quad \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 kx}{x^2} dx = \frac{k\pi}{2}$

الحل

باستخدام $\quad \sin^2 kx = \frac{1}{2}\left(1-\cos 2kx\right)$

وباستخدام الدالة $1-e^{2kiz}$ فإن صورة التكامل تصبح كالآتي:

$$\frac{1}{2}\oint_C \frac{1-e^{2kiz}}{z^2}dz$$

وباستخدام المسار المغلق نصف الدائري في شكل (٥-٤) فإن

$$\frac{1}{2}\oint_C \frac{1-e^{2kiz}}{z^2}dz=0$$ (لماذا؟)

وبالتالي فإن

$$\frac{1}{2}\oint_C \frac{1-e^{2kiz}}{z^2}dz=\frac{1}{2}\int_{-R}^{-\in}\frac{1-e^{2kix}}{x^2}dx+\frac{1}{2}\int_{\gamma}\frac{1-e^{2kiz}}{z^2}dz$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\in}^{R}\frac{1-e^{2kix}}{x^2}dx+\frac{1}{2}\int_{\Gamma}\frac{1-e^{2kiz}}{z^2}dz=0 \qquad (1)$$

وبوضع $x=-u$ في التكامل الأول فإن

$$\frac{1}{2}\int_{-R}^{-\in}\frac{1-e^{2kix}}{x^2}dx=-\frac{1}{2}\int_{R}^{\in}\frac{1-e^{-2kiu}}{u^2}du$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\in}^{R}\frac{1-(\cos 2ku-i\sin 2ku)}{u^2}du$$

$$=\int_{\in}^{R}\frac{\sin^2 ku}{u^2}du+\frac{i}{2}\int_{\in}^{R}\frac{\sin 2ku}{u^2}du \qquad (2)$$

كذلك فإن التكامل الثالث:

$$\frac{1}{2}\int_{\in}^{R}\frac{1-e^{2kix}}{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_{\in}^{R}\frac{1-(\cos 2kx+i\sin 2kx)}{x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\in}^{R}\frac{1-\cos 2kx}{x^2}dx-\frac{i}{2}\int_{\in}^{R}\frac{\sin 2kx}{x^2}dx$$

$$=\int_{\in}^{R}\frac{\sin^2 kx}{x^2}dx-\frac{i}{2}\int_{\in}^{R}\frac{\sin 2kx}{x^2}dx \qquad (3)$$

وكذلك فإن التكامل على γ: $z=\in e^{i\theta}$ يصبح

$$\frac{1}{2}\int_{\gamma}\frac{1-e^{2kiz}}{z^2}dz=\frac{1}{2}\int_{\pi}^{0}\frac{1-e^{2ki\in e^{i\theta}}}{\in^2 e^{2i\theta}}\in ie^{i\theta}d\theta$$

$$=\frac{i}{2}\int_{\pi}^{0}\frac{1-e^{2kie^{i\theta}\in}}{\in e^{i\theta}}d\theta$$

وبأخذ النهاية عندما $\in\longrightarrow 0$ فإن

$$\frac{1}{2}\lim_{\in\to 0}\int_{\gamma}\frac{1-e^{2kiz}}{z^2}dz=\frac{i}{2}\lim_{\in\to 0}\int_{\in}^{0}\frac{1-e^{2kie^{i\theta}\in}}{\in e^{i\theta}}d\theta$$

$$=\frac{i}{2}\int_{\pi}^{0}\lim_{\in\to 0}\frac{-e^{2kie^{i\theta}\in}(2ki)e^{i\theta}}{e^{i\theta}}d\theta$$

$$=+\frac{1}{2}(2k)\int_{\pi}^{0}d\theta=-\pi k \qquad (4)$$

وكذلك فإن التكامل على Γ: يصبح

$$\frac{1}{2}\int_{\Gamma}\frac{1-e^{2kiz}}{z^2}dz=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{1-e^{2ki\,\mathrm{R}e^{i\theta}}}{R^2e^{2i\theta}}i\,\mathrm{R}e^{i\theta}\,d\theta$$

$$=\frac{i}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{1-e^{2kiR(\cos\theta+i\sin\theta)}}{R\,e^{i\theta}}d\theta$$

$$=\frac{i}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{1-e^{-2kR\sin\theta}\cdot e^{i(2kR\cos\theta)}}{R\,e^{i\theta}}d\theta$$

$$=\frac{i}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{1-e^{-2kR\sin\theta}(\cos(2kR\cos\theta)+i\sin(2kR\cos\theta))}{R\,e^{i\theta}}d\theta$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{1-e^{-2kR\sin\theta}\sin(2kR\cos\theta)}{R\,e^{i\theta}}d\theta$$

$$+\frac{i}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{1-e^{-2kR\sin\theta}\cos(2kR\cos\theta)}{R\,e^{i\theta}}d\theta$$

وبأخذ النهاية عندما R→∞ وبمعلومية أن $\lim_{R\to\infty} \sin R(-) = l_1$ وأن $\lim_{R\to\infty} \cos R(-) = l_2$ حيث l_2, l_1 كميات محدودة بين 1- و 1 فإن

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2}\int_{\Gamma} \frac{1-e^{2kiz}}{z^2} dz = 0 \qquad (5)$$

وباستعمال النتائج في (2), (3), (4), (5) فإن (1) تصبح بعد جعل ∈→0 و R→∞:

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 kx}{x^2} dx + \frac{i}{2}\int_0^\infty \frac{\sin 2kx}{x^2} dx$$

$$+\int_0^\infty \frac{\sin^2 kx}{x^2} dx - \frac{i}{2}\int_0^\infty \frac{\sin 2kx}{x^2} dx \ -\pi\ k + 0 = 0$$

أي أن
$$2\int_0^\infty \frac{\sin^2 kx}{x^2} dx = \pi\, k$$

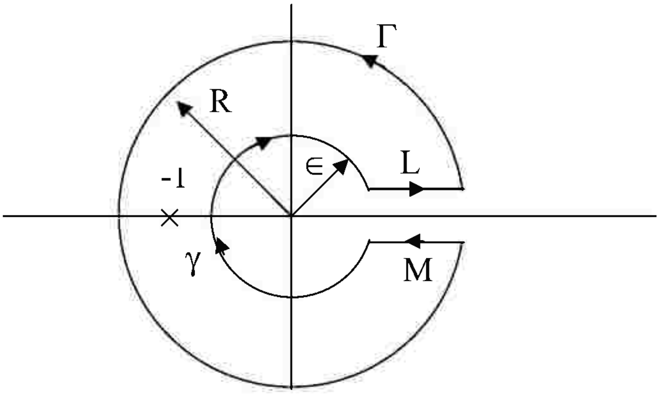
أي أن
$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin^2 kx}{x^2} dx = \pi \frac{k}{2}}$$

مثال ٥-١٣

أثبت أن
$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad , \quad 0 < p < 1$$

الإثبات:

نلاحظ أننا نملك نقطتان شاذتان .. الأولى عند z = 0 وهي نقطة تفرع والأخرى عند z = -1 وهي قطب يسير. ولذلك نقوم باستعمال المسار المغلق الموضح بشكل (٥-٤)



(شكل ٥-٥)

ونعتبر التكامل $\oint_C \frac{z^{P-1}}{1+z}dz = 2\pi i R$

حيث $R = \lim_{z\to -1}(z+1)\frac{z^{p-1}}{(z+1)} = (-1)^{p-1} = e^{i\pi(p-1)}$

وبالتالي فإن $\oint_C \frac{z^{P-1}}{1+z}dz = e^{i\pi(p-1)}(2\pi i) \qquad (1)$

ولكن $$\oint_C \frac{z^{p-1}}{1+z}dz = \int_\Gamma \frac{z^{p-1}}{1+z}dz + \int_M \frac{z^{p-1}}{1+z}dz$$

$$+\int_\gamma \frac{z^{p-1}}{1+z}dz + \int_L \frac{z^{p-1}}{1+z}dz = e^{i\pi(p-1)}(2\pi i) \qquad (2)$$

مع ملاحظة أن L, M ينطبقان على محور x عند أخذ النهاية $\in\to 0$ .. فإن

$$\int_L \frac{z^{p-1}}{1+z}dz = \int_\in^R \frac{x^{p-1}}{1+x}dx, \quad z = xe^{i0}$$

$$\int_M \frac{z^{p-1}}{1+z}dz = \int_R^\in \frac{\left(xe^{2\pi i}\right)^{p-1}}{1+xe^{2\pi i}}dx, \quad z = xe^{i2\pi}$$

والآن:
$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma}\frac{z^{p-1}}{1+z}dz=\lim_{R\to\infty} i\int_{0}^{2\pi}\frac{\left(R\,e^{i\theta}\right)^{p-1}}{R\,e^{i\theta}+1}R\,e^{i\theta}d\theta$$

ولكن
$$\left|\int_{0}^{2\pi}\frac{R^{p}\,e^{ip\theta}}{R\,e^{i\theta}+1}d\theta\right|\le\int_{0}^{2\pi}\frac{R^{p}}{\left|R\,e^{i\theta}+1\right|}d\theta$$

$$\le\int_{0}^{2\pi}\frac{R^{p}}{R-1}d\theta$$

$$=\frac{2\pi R^{p}}{R-1}=\frac{2\pi}{R^{1-p}-R^{-p}}$$

وبالتالي فإنه عند أخذ النهاية $R\to\infty$ فإن

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\Gamma}\frac{z^{p-1}}{1+z}dz\right|\le\lim_{R\to\infty}\frac{2\pi}{R^{1-p}-R^{-p}}=0 \qquad \text{(لماذا؟)}$$

أي أن
$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma}\frac{z^{p-1}}{1+z}dz=0$$

والآن بالنسبة للتكامل على $z=\in e^{i\theta}$ فإن

وبالتالي فإن

$$\int_{\gamma}\frac{z^{p-1}}{z+1}dz=i\int_{0}^{2\pi}\frac{\left(\in e^{i\theta}\right)^{p-1}\in e^{i\theta}d\theta}{1+\in e^{i\theta}}$$

ولكن

$$\left|\int_{\gamma}\frac{z^{p-1}}{z+1}dz\right|\le\int_{0}^{2\pi}\frac{(\in)^{p}}{\left|1+\in e^{i\theta}\right|}d\theta$$

$$\le\int_{0}^{2\pi}\frac{(\in)^{p}}{\in-1}d\theta$$

$$=\frac{\in^{p}}{\in-1}(2\pi)$$

وبأخذ النهاية $\in\to 0$ فإن

$$\lim_{\in\to 0}\left|\int_{\gamma}\frac{z^{p-1}}{z+1}dz\right|=0$$

أي أن

$$\int_{\gamma}\frac{z^{p-1}}{z+1}dz=0$$

وبالتالي بأخذ $\in\to 0$ و $R\to\infty$ للعلاقة (2) فإن:

$$\int_{\infty}^{0}\frac{e^{2\pi i(p-1)}x^{p-1}}{1+xe^{2\pi i}}dx-\int_{\infty}^{0}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=2\pi i\left(e^{i\pi(p-1)}\right)$$

وبوضع $e^{2\pi i}=1$ في مقام التكامل الأول فإن:

$$e^{2\pi i(p-1)}\int_{\infty}^{0}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx+\int_{0}^{\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=2\pi i\,e^{(p-1)\pi i}$$

أي أن

$$\left(1-e^{2\pi(p-1)i}\right)\int_{0}^{\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=2\pi i\,e^{(p-1)\pi i}$$

إذن في النهاية فإن تكاملنا يساوي الآتي:

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx&=\frac{2\pi i e^{p\pi i}e^{-\pi i}}{1-e^{2\pi ip}e^{-2\pi i}}\\&=\frac{2\pi i e^{p\pi i}(-1)}{1-e^{2\pi pi}}\\&=\pi\frac{e^{p\pi i}}{\left(e^{2\pi pi}-1\right)/2i}\\&=\pi\frac{1}{\left(e^{\pi pi}-e^{-\pi pi}\right)/2i}\\&=\frac{\pi}{\sin\ \pi p}\end{aligned}$$

إذن

$$\boxed{\int_{0}^{\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}=\frac{\pi}{\sin p\pi},\qquad 0<p<1}$$

تمرينات ٥

١. أوجد التكامل $\oint_C f(z)dz$ إذا كانت C هـ ـي المـ ـسار المغلـ ـق النـ ـصف دائـ ـرى (شكل ٥-١) .. وكانت f(z):

$$(i)\, f(z)=\frac{1}{z^2+a^2},\, a\in\Re \qquad (ii)\, f(z)=\frac{z^2}{\left(z^2+a^2\right)^2},\, a\in\Re$$

$$(iii)\, f(z)=\frac{1}{z^4+1} \qquad (iv)\, f(z)=\frac{1}{z^4+a^4},\, a\in\Re$$

$$(v)\, f(z)=\frac{1}{z^6+1} \qquad (vi)\, f(z)=\frac{z^2}{z^8+1}$$

$$(vii)\, f(z)=\frac{1}{\left(z^2+1\right)\left(z^4+1\right)} \qquad (viii)\, f(z)=\frac{z^2}{\left(z^2+z+1\right)\left(z^2+1\right)}$$

٢. ومن ثم أوجد التكاملات الآتية:

$$(i)\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} \qquad (ii)\int_0^\infty \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^2}$$

$$(iii)\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} \qquad (iv)\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+a^4}$$

$$(v)\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^6} \qquad (vi)\int_0^\infty \frac{x^2}{x^8+1}$$

$$(vii)\int_0^\infty \frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)} \qquad (viii)\int_0^\infty \frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+1\right)}$$

٣. أوجد التكامل $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3-2\cos\theta+\sin\theta}$ الإجابة (π).

٤. اثبت أن $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}d\theta=\frac{\pi}{12}$

٥. اثبت أن $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5-3\sin\theta)^2} = \frac{5\pi}{32}$

٦. اثبت أن $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5-4\cos 2\theta} d\theta = \frac{3\pi}{8}$

٧. اثبت أن $\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi e^{-m}(1+m)}{4}, \quad m>0$

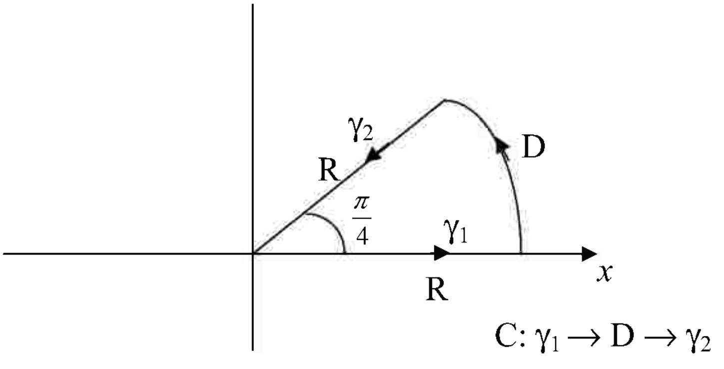
٨. احسب $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^5} dx$

٩. اثبت أن $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+x^2+1} = \pi \frac{\sqrt{3}}{6}$

١٠. اثبت أن $\int_0^{\infty} \frac{\cos 2\pi x}{x^4+x^2+1} dx = \frac{-\pi}{2\sqrt{3}} \; e^{-\pi/\sqrt{3}}$

١١. اثبت أن $\int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

خذ C المسار المغلق الموضح بشكل (٥-٥) .. وكامل $\oint_C e^{iz^2} dz$



(شكل ٥-٥)

١٢. اثبت أن $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}\,dx = \pi \ln 2$

(كامل $\displaystyle\oint_C \frac{\ln(z+i)}{z^2+1}\,dz$ وخذ C هو المسار المغلق النصف دائري).

١٣. اثبت أن $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi \ln 2}{2a}$

١٤. اثبت أن

$$(i)\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^4}\,dx = -\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}$$

$$(ii)\int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{x^4+1}\,dx = \frac{3\pi^3\sqrt{2}}{64}$$

١٥. اثبت أن $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{4}\ln 2$

١٦. اثبت أن $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi \ln 2}{2}$

١٧. اثبت أن $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} = \frac{2\pi}{1-r}, \quad 0 \le r < 1$

١٨. اثبت أن $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin mx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}, \quad m > 0$

١٩. اثبت أن $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{e}$

٢٠. اثبت أن $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos mx}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx = \frac{\pi}{4a^3}e^{-m}\left(1+ma\right)$

٢١. اثبت أن $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^2} = \frac{2\pi a}{\sqrt{a^2-b^2}}, \qquad a>|b|>0$

. . . .