الفصل التاسع

بناء المرشحات الرقمية

Implementation of Digital Filters

(٩,١) مقدمة

لقد عرضنا في الفصول الأولى من هذا الكتاب نظريات الأنظمة المعيننة والرقمية في كل من النطاق الزمني والنطاق الترددي، ثم عرضنا في الفصل السابع طرق تصميم المرشحات الرقمية ذات الاستجابة الاندفاعية اللانهائية IIR، وفي الفصل الثامن عرضنا الطرق المختلفة لتصميم المرشحات ذات الاستجابة الاندفاعية المحددة FIR. في هذا الفصل سنرى أن معالجة أي إشارة ومن ثم ترشيحها يعتمد على طريقة بناء المرشح كما يعتمد على نوع وطريقة تصميم هذا المرشح. لذلك تم تخصيص هذا الفصل لعرض الطرق المختلفة لبناء هذه المرشحات عملياً.

سنبدأ الفصل بوصف الوحدات الأساسية التي سيتم استخدامها في بناء هذه المرشحات، وفى باقي أجزاء الفصل سنشرح طرق بناء المرشحات IIR و FIR مع شرح دوال الماتلاب MATLAB المستخدمة في هذا الصدد. لبناء المرشحات الرقمية من أي نوع سنحتاج فقط للثلاث وحدات التالية فقط وهى :

(٩,١,١) المجمع Adder

هذا العنصر كما في الشكل رقم (٩,١أ) له دخلان وخرج واحد وخرجه يمثل مجموع الدخلين، في حالة جمع أكثر من دخلين يتم استخدام تتابعات من مثل هذا المجمع كما سنرى.

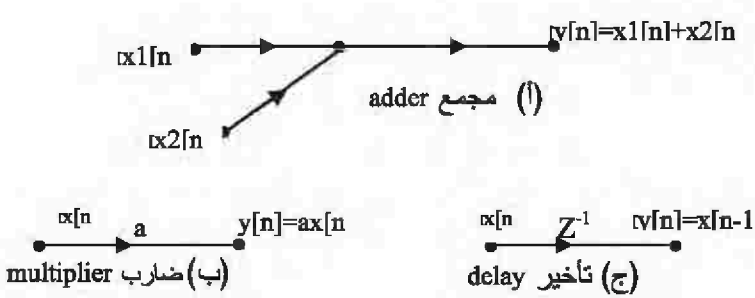
(٩,١,٢) الضارب Multiplier

عنصر له دخل واحد وخرج واحد حيث يكون الخرج مساويا لحاصل ضرب الدخل فى معامل تكبير هذا العنصر. معامل التكبير يكون موضحا على خط سير الإشارة كما في الشكل رقم (٩,١ب).

(٩,١,٣) عنصر التأخير أو التأجيل Delay أو الإزاحة shift أو الذاكرة memory

هذا العنصر كما فى الشكل رقم (٩,١ج). يؤخر الإشارة المارة خلاله بمقدار عينة واحدة أو نبضة تزامن ، ويتم بناؤه باستخدام مسجل إزاحة shift register.

باستخدام هذه العناصر سنرى الآن كيفية بناء المرشحات الرقمية.



الشكل رقم (٩,١). العناصر الأساسية لبناء المرشحات الرقمية.

(٩,٢) بناء المرشحات الرقمية ذات الاستجابة الاندفاعية اللانهائية IIR

الصورة العامة لمعادلة دالة العبور للمرشحات من النوع IIR يمكن كتابتها كما يلي، وكما سبق أن رأيناها في الفصول السابقة:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{n=0}^{M} b_n z^{-n}}{\sum_{n=0}^{N} a_n z^{-n}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}} \quad (٩,١)$$

حيث كل من b_n و a_n تمثل معاملات المرشح كما سبق ورأينا. لاحظ أن a_0 تم اعتبارها بواحد دون أي تأثير على عمومية المعادلة، كما أن درجة هذا المرشح تكون دائماً درجة المقام N. المعادلة رقم (٩,١) يمكن التعبير عنها بالصورة التالية:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{M} b_m x(n-m) - \sum_{m=1}^{M} a_m y(n-m) \quad (٩,٢)$$

حيث x[n] تمثل إشارة الدخل للمرشح و y[n] تمثل إشارة الخرج. هناك ثلاث طرق مختلفة لبناء المرشحات الرقمية بناء على المعادلتين رقمي (٩,١) و (٩,٢) وهي:

١- **الطريقة المباشرة Direct form** : في هذه الطريقة يتم بناء المعادلة (٩,٢) مباشرة، وهناك صورتان لهذا البناء، الطريقة المباشرة ١ والطريقة المباشرة ٢ كما سنرى في تفصيل هذه الطريقة.

٢- **الطريقة المتوالية أو التتابعية Cascade form**: في هذه الطريقة يتم تحليل دالة العبور في المعادلة رقم (٩,١) إلى أجزاء من الدرجة الثانية بحيث تكون دالة العبور

هي حاصل ضرب هذه الأجزاء، يتم بناء كل جزء على حده بالطريقة المباشرة، وأما المرشح كله فيتم بناؤه من هذه الأجزاء على التتابع أو على التوالي.

٣- **الطريقة المتوازية Parallel form** : هنا يتم تحليل دالة العبور رقم (٩،١) إلى أجزاء من الدرجة الثانية كما في الطريقة التتابعية، ثم باستخدام الكسور الجزئية توضع دالة العبور في صورة مجموع من هذه الأجزاء (وليس حاصل ضرب كما سبق). كل جزء يتم بناؤه بالطريقة المباشرة وأما المرشح كله فيتم بناؤه من هذه الأجزاء على التوازي.

في الأجزاء التالية سنشرح الطرق الثلاثة السابقة بالتفصيل.

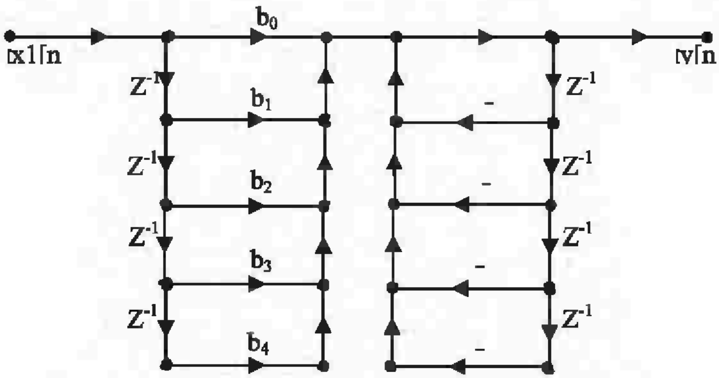
(٩،٢،١) الطريقة المباشرة Direct form

كما يوحي هذا الاسم فإن المعادلة الفرقية رقم رقم (٩،٢) يتم بناؤها مباشرة باستخدام وحدات تأخير ومجمعات ووحدات ضرب. كمثال توضيحي سنفترض M=N=4 في المعادلة رقم (٩،٢) وكتابتها كما يلي:

$$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + b_2x[n-2] + b_3x[n-3] + b_4x[n-4] - a_1y[n-1] - a_2y[n-2] - a_3y[n-3] - a_4y[n-4] \quad (٩،٢)$$

وهذه المعادلة يمكن بناؤها كما في الشكل رقم (٩،٢) وهو ما يسمى بالطريقة المباشرة الأولى direct form1. نلاحظ أنه في هذه الطريقة يتم بناء كل جزء في المعادلة رقم (٩،٢) مباشرة ثم تجميع الجزئين تتابعياً كما في الشكل. نلاحظ في هذه الطريقة أن جزء البسط عبارة عن تتابع من عدد من وحدات التأخير عددهم ٤ متبوعاً بجزء المقام الذي يتكون هو الآخر من تتابع من عدد من وحدات التأخير مقداره أربعة أيضاً،

ولذلك فإن المرشح ككل يحتاج إلى عدد من وحدات التأخير مقداره ثمانية كما في الشكل رقم (٩،٢).



الشكل رقم (٩،٢). الطريقة المباشرة الأولى Direct form 1 .

يمكن استنتاج أكثر من صورة لهذه الطريقة المباشرة عن طريق إعادة كتابة معادلة دالة الانتقال رقم (٩،١) والتي سنعيد كتابتها مرة ثانية للدرجة الرابعة فقط للتوضيح.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + a_4 z^{-4}}$$

ومنها يمكن كتابة دالة الخرج على الصورة التالية :

$$Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4}) W(z) \qquad (٩،٤)$$

حيث :

$$W(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + a_4 z^{-4}} X(z) \qquad (٩،٥)$$

المعادلة (٩،٥) يمكن كتابتها في النطاق الزمني كما يلي :

$$w[n] = x[n] + a_1 w[n-1] + a_2 w[n-2] + a_3 w[n-3] + a_4 w[n-4] \qquad (٩،٥)$$

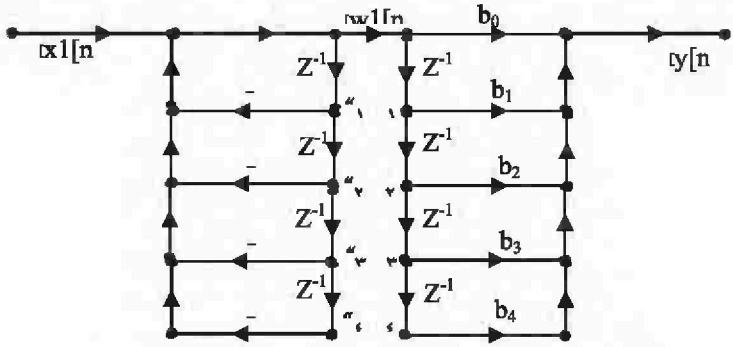
المعادلة رقم (٩،٢) يمكن كتابتها في النطاق الزمني أيضا كما يلي :

$$y[n] = b_0 w[n] + b_1 w[n-1] + b_2 w[n-2] + b_3 I[n-3] + b_4 w[n-4] \qquad (٩،٢)$$

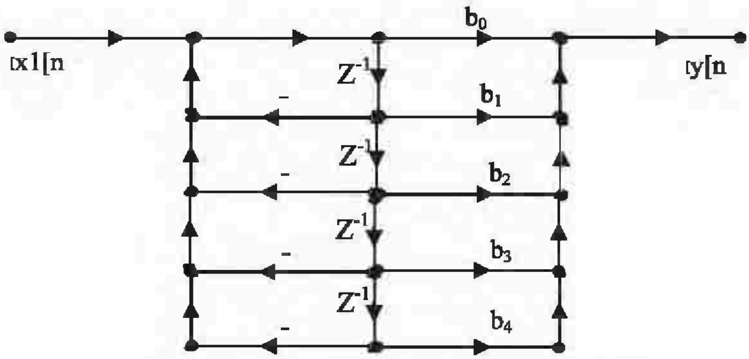
المعادلتـان رقمـا (٩،٦) و (٩،٧) يمكـن بناؤهمـا كمـا في الـشكل رقـم (٩،٣) حيث نلاحظ أن الشكلين رقمي (٩،٢) و (٩،٣) متكـافئين تماماً مع بعض التعـديل في أماكن الوحدات المكونة لهما.

في الـشكل رقـم (٩،٣) نلاحـظ أن النقطـتين 1 و˝ 1 متكـافئتين تمامـاً حيـث إن الإشـارة عنـد كـل منهمـا عبـارة عـن تـأخير مـن الإشـارة w[n] وعلـى ذلـك فإنـه يمكـن ضمهما فى نقطة واحدة، بنفس الطريقة يمكـن ضـم النقطـتين 2 و˝ 2 والنقطـتين 3 و˝ 3 والنقطتين 4 و˝ 4 لنحـصل علـى الـصورة الجديـدة للمرشـح والموضـحة في الـشكل رقـم (٩،٤).

نلاحـظ في الـشكل رقـم (٩،٤) أن عـدد وحـدات التـأخير نـزل للـنصف وأصـبح أربعة بدلا من ثمانية. هذه الصورة تسمى الصورة المباشرة ٢ أو direct form 2، ونلاحظ أنها تستخدم أقل عدد ممكن من عناصر التأخير ولـذلك فإنهـا تـسمى الـصورة المثلى أو الصورة الرسمية أو القانونية canonical form.



الشكل رقم (٩,٣). صورة أخرى للطريقة المباشرة الأولى **direct form 1**.



الشكل رقم (٩,٤). الطريقة المباشرة الثانية **canonical form**.

إن تقليل عدد وحدات التأخير يكون ضرورياً جداً لسببين أن كل وحدة تأخير هي عبارة عن ذاكرة وعلى ذلك فإن تقليل عددها يقلل من الذاكرة المستخدمة ، كما أنه يقلل من زمن تنفيذ أو إجراء حسابات المرشح وهذا يكون عاملاً مهماً جداً بالذات في التطبيقات التي تتطلب سرعة أو عمل في الزمن الحقيقي real time processing.

(٩.٢.٢) الطريقة المتوالية أو التتابعية Cascaded form

في هذه الطريقة يتم كتابة دالة العبور للمرشح في صورة حاصل ضرب أجزاء من الدرجة الثانية ذات المعاملات الحقيقية، ويتم ذلك عن طريق تحليل كل من كثيرتي الحدود في البسط والمقام إلى جذورها الحقيقة وبعد ذلك يتم ربط أزواج الجذور المركبة، أو أي جذرين حقيقيين في صورة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية. بفرض أن N زوجية فإنه يمكن كتابة دالة الانتقال للمرشح كما يلي:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}} \qquad (٩.٨)$$

بقسمة البسط على b_0 يمكن كتابة المعادلة رقم (٩.٨) كما يلي:

$$H(z) = b_0 \frac{1 + \frac{b_1}{b_0} z^{-1} + \cdots + \frac{b_N}{b_0} z^{-4}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_4 z^{-4}} \qquad (٩.٩)$$

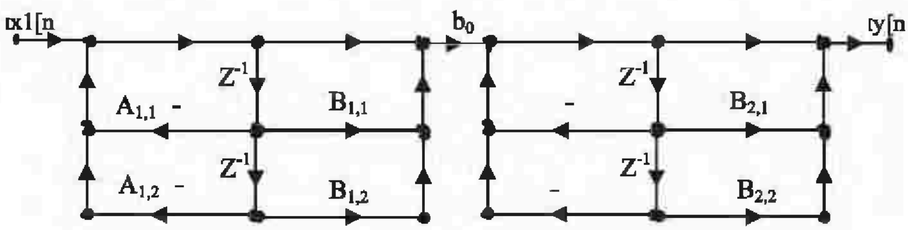
والتي يمكن كتابتها في صورة أجزاء من الدرجة الثانية كما يلي:

$$H(z) = b_0 \Pi_{k=1}^{K} \frac{1 + B_{k,1} z^{-1} + B_{k,2} z^{-2}}{1 + A_{k,1} z^{-1} + A_{k,2} z^{-2}}$$

$$H(z) = b_0 \prod_{k=1}^{K} \frac{1 + B_{k,1} z^{-1} + B_{k,2} z^{-2}}{1 + A_{k,1} z^{-1} + A_{k,2} z^{-2}} \qquad (٩.١٠)$$

حيث $B_{k,1}, B_{k,2}$ و $A_{k,1}, A_{k,2}$ ثوابت حقيقية تمثل معاملات الأجزاء من الدرجة الثانية والتي عددها K حيث $K=N/2$.

المعادلة رقم (٩.١٠) كما ذكرنا تمثل تتابعاً من الأجزاء التي كل منها من الدرجة الثانية بحيث إن دخل الجزء رقم k هو خرج الجزء k-1 وخرج الجزء k يمثل دخلاً للجزء k+1 وهكذا. كل جزء من هذه الأجزاء يمكن بناؤه بالطريقة المباشرة الثانية، وبعد ذلك يتم توصيل هذه الأجزاء على التتابع لنحصل على المرشح كله كما في الشكل رقم (٩.٥) الذي يبين مرشحاً من الدرجة الرابعة مكوناً من جزأين كل منهما من الدرجة الثانية.



الشكل رقم (٩.٥). مرشح من الدرجة الرابعة بالطريقة التتابعية.

(٩.٢.٣) الطريقة المتوازية Parallel form

في هذه الحالة يتم وضع دالة العبور في صورة مجموع من الأجزاء التي كل منها يمثل جزءاً من الدرجة الثانية وذلك باستخدام الكسور الجزئية كما يلي:

$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{\sum_{n=0}^{M} b_n z^{-n}}{\sum_{n=0}^{N} a_n z^{-n}}=\frac{b_0+b_1 z^{-1}+\cdots+b_M z^{-M}}{1+a_1 z^{-1}+\cdots+a_N z^{-N}} \qquad (٩.١١)$$

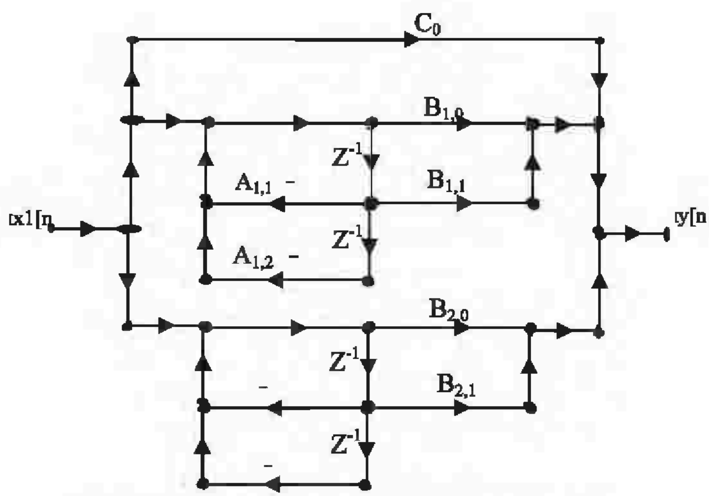
بفرض أن M>N فإنه بقسمة البسط على المقام يمكن كتابة المعادلة السابقة على الصورة:

$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_{N-1}z^{1-N}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_Nz^{-N}}+\sum_{k=0}^{M-N}c_kz^{-k} \tag{٩,١٢}$$

باستخدام الكسور الجزئية يمكن كتابة المعادلة السابقة على الصورة:

$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\sum_{k=1}^{K}\frac{B_{k,0}+B_{k,1}z^{-1}}{1+A_{k,1}z^{-1}+A_{k,2}z^{-2}}+\sum_{k=0}^{M-N}c_kz^{-k} \tag{٩,١٣}$$

حيث $K=N/2$ و $B_{k,0}$ و $B_{k,1}$ و $A_{k,1}$ و $A_{k,2}$ كلها ثوابت حقيقية تمثل معاملات كل جزء من أجزاء الدرجة الثانية. الشكل رقم (٩,٦) يبين بناء المرشح في هذه الحالة بفرض $M=N=4$، وفى هذه الحالة يكون دخل المرشح دخلاً لجميع أجزاء المرشح كما في الشكل.



الشكل رقم (٩,٦). مرشح من الدرجة الرابعة بالطريقة المتوازية.

(٩,٣) بناء المرشحات الرقمية ذات الاستجابة الأندفاعية المحدودة FIR

كما علمنا فإن معادلة دالة العبور لهذا النوع من المرشحات ليس لها مقام أي أنها تتكون فقط من عدد من الأصفار ولا يوجد بها أقطاب مما يجعل طرق بناء هذا النوع أسهل بكثير من النوع السابقIIR. دالة العبور لهذا النوع سنعيد كتابتها كما يلي :

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{M-1} z^{-M+1} = \sum_{n=0}^{M-1} b_n z^{-n} \qquad (٩,١٤)$$

ومنها يمكن كتابة استجابة الصدمة لهذا النوع من المرشحات كما يلي :

$$h(n) = \begin{cases} b_n & u \le n \le m0 \\ a & otherwise \end{cases} \qquad (٩,١٥)$$

كما يمكن كتابة المعادلة الفرقية لهذه المرشحات كما يلي :

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \cdots + b_{M-1} x[n-M+1] \qquad (٩,١٦)$$

بناءً على المعادلات السابقة يمكن بناء هذا النوع من المرشحات بأكثر من طريقة.

(٩,٣,١) الطريقة المباشرة Direct form

في هذه الطريقة يتم بناء المعادلة الفرقية رقم (٩,٦) مباشرة كمجموعة من عناصر التأخير المتتالية كما في الشكل رقم (٩,٧) الذي يبين بناء مرشح من هذا النوع من الدرجة الخامسة.

(٩,٣,٢) الطريقة التتابعية **Cascaded form**

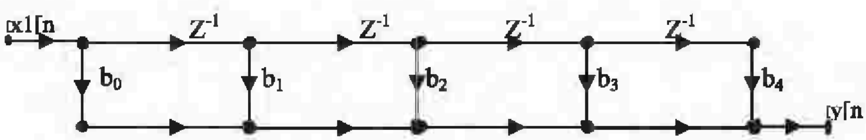
في هذه الطريقة أيضا يتم وضع المعادلة رقم (٩.١٤) في صورة حاصل ضرب أجزاء من الدرجة الثانية كما يلي:

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{M-1} z^{-M+1}$$

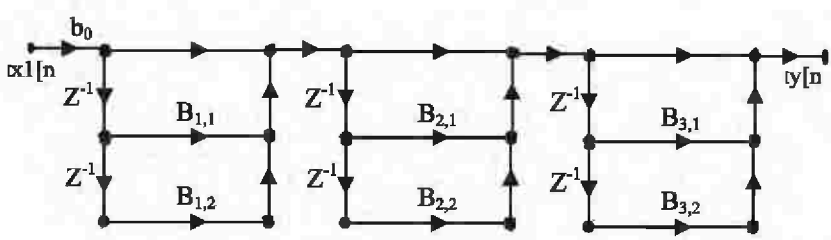
$$H(z) = b_0 \left(1 + \frac{b_1}{b_0} z^{-1} + \cdots + \frac{b_{M-1}}{b_0} z^{-M+1}\right) \qquad (٩.١٧)$$

$$H(z) = b_0 \Pi_{k=1}^{K} \left(1 + B_{k,1} z^{-1} + B_{k,2} z^{-2}\right)$$

حيث $K=M/2$ و $B_{k,1}$ و $B_{k,2}$ ثوابت حقيقية كما أشرنا سابقاً. الشكل رقم (٩.٨) بناءً لمرشح من الدرجة السابعة من هذا النوع.



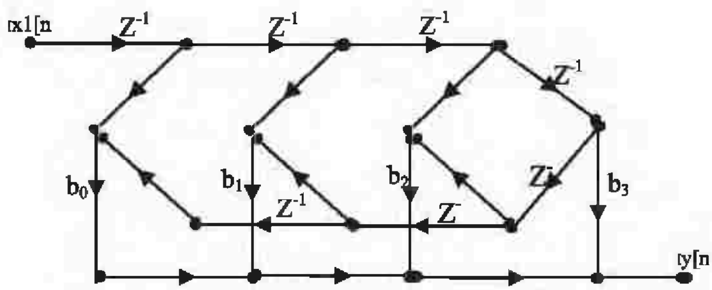
الشكل رقم (٩.٧). مرشح FIR من الدرجة الخامسة بالطريقة المباشرة.



الشكل رقم (٩.٨). مرشح FIR من الدرجة السابعة بالطريقة التتابعية.

(٩,٣,٣) طريقة الطور الخطى Linear phase form

لقد رأينا في فصل تصميم المرشحات الرقمية من النوع FIR أنه عندما تكون هذه المرشحات متماثلة symmetrical أو عكسية التماثل antisymmetrical فإن زاوية الطور لهذه المرشحات تكون خطية ورأينا أن هذه تكون ميزة مهمة من مميزات هذا النوع من المرشحات. في هذه الحالة فإن استجابة الاندفاع لكل من المرشح المتماثل وعكسي التماثل يمكن كتابتهما كما يلي على التوالي :



الشكل رقم (٩,٩). مرشح FIR من الدرجة السابعة بالطريقة الطور الخطي.

(٩,١٨) $h[n] = h[M-n-1] \qquad 0 \le n \le M-1$

(٩,١٩) $h[n] = -h[M-n-1] \qquad 0 \le n \le M-1$

وفي هذه الحالة يمكن كتابة المعادلة الفرقية للمرشح المتماثل في المعادلة رقم (٩,١٨) كما يلي :

(٩,٢٠) $y[n] = b_0\{x[n] + x[n-M+1]\} + b_1\{x[n-1] + x[n-M+2]\} + \cdots$

المعادلة رقم (٩،٢٠) يمكن بناؤها لمرشح من الدرجة السابعة كما في الشكل رقم (٩،٩). كما يمكن بالمثل بناء الصور الأخرى للمرشحات ذات الطور الخطى المتماثلة وعكسية التماثل والزوجية والفردية.