الفصل الثالث

الإشارات الرقمية والأنظمة الرقمية

Digital Signals and Systems

(٣,١) مقدمة

سنقدم في هذا الفصل تعريفاً بالأشكال المختلفة والشائعة للإشارات الرقمية وكيفية تمثيل كل منها في النطاق الزمني، ثم نقدم تعريفاً بالأنظمة الرقمية والخواص المرتبطة بها مع بعض الأمثلة لكل منها والدوال المرتبطة بكل ذلك في برنامج ماتلاب MATLAB على أنه من أشهر برمجيات الحاسب المستخدمة في مجال معالجة الإشارات سواء الرقمية أو التناظرية.

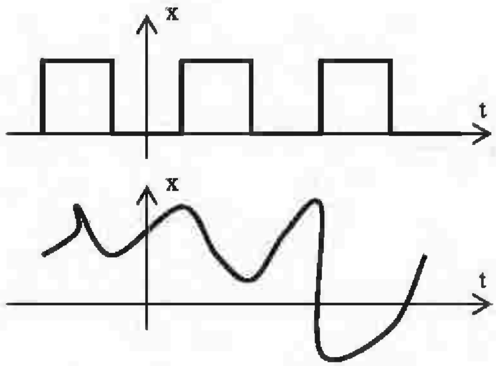
(٣,١,١) الإشارة التناظرية Continuous Time Signal

الإشارة التناظرية هي دالة في الزمن ذات قيمة محددة ومعرفة عند كل قيمة محددة للزمن. الشكل رقم (٣,١) يبين أمثلة لهذه الإشارات. الإشارات المربعه في الشكل رقم (٣,١) تمثل إشارة تناظرية وعلى الرغم من أن لها مستويين فقط، إلا أن لها قيمة محددة عند كل قيمة للزمن.

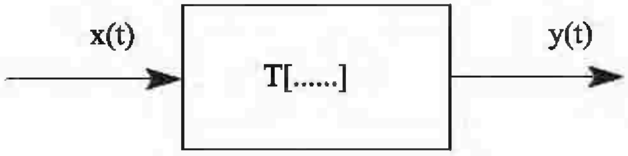
(٣,١,٢) النظام التناظري Continuous Time System

النظام التناظرd هو نظام يحدد قيمة تناظرية للخرج y(t) لكل قيمة تناظرية

للدخل x(t). الشكل رقم (٣,٢) يبين رسماً صندوقياً لهذا النظام حيث[.] T هي العلاقة بين الخرج والدخل. هذه العلاقة قد تكون بين خرج ودخل مرشح، أو مكبر، أو تحويل معين مثل تحويل فورير أو نظام لضغط الصورة أو تحسينها أو التعرف على متكلم، كل هذه أمثلة على الأنظمة التي قد تكون تناظرية أو رقمية.



الشكل رقم (٣,١). نماذج من أشكال الإشارات التناظرية.

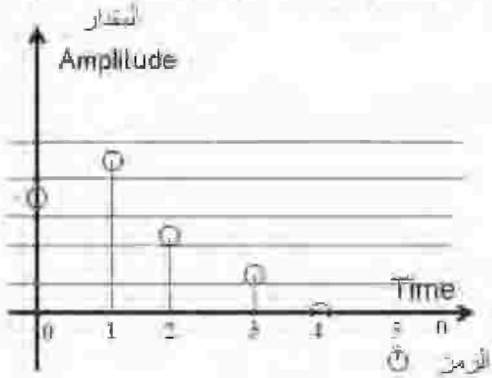


الشكل رقم (٣,٢). مثال لنظام تناظري.

(٣,١,٣)الإشارة المتفاصلة زمنياً Discrete Time Signal

الإشارة المتفاصلة زمنياً عبارة عن تتابع sequence من القيم المحددة غير المكممة not quantized عند أزمنة محددة، هذه القيم سنسميها عينات samples. أي أن الإشارة

تكون معرفة فقط عند نقاط محددة من الزمن n=1, 2, 3، ....، ولكن قيمتها غير مكممة أي أنها تأخذ قيمة الإشارة التناظرية الأصلية عند هذه اللحظة من الزمن. الشكل رقم (٣،٢) يبين التتابع x(n) أو الإشارة المتفاصلة زمنيا x(n). في مثل هذه الإشارات (التتابعات) من الخطأ أن تقول إن x(n) لها القيمة صفر عند الأزمنة t غير الصحيحة ٢،٥ مثلاً. الدالة x(n) تكون غير محددة عند هذه القيم. التتابع x(n) من الممكن أن يكون مقداره كمية مركبة أو حقيقية أو تخيلية كما سنرى فيما بعد.

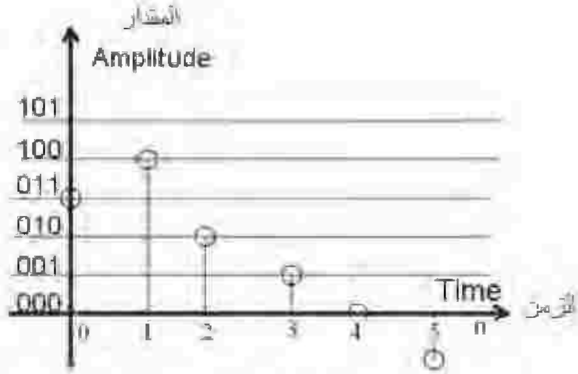


الشكل رقم (٣،٣). الإشارة المتفاصلة زمنياً.

(٣،١،٤) الإشارة الرقمية Digital Signal

بعد تمييز الإشارة عند أزمنة محددة كما في الشكل رقم (٣،٣) وتحويلها إلى عينات samples يتم إدخالها على دائرة مكمي quantizer تحدد قيمة كل عينة بكمية محددة على حسب عدد مستويات التكميم المستخدمة، وهذا هو ما يقوم به المحول التناظري/الرقميA/D كما رأينا في الفصل السابق وبالطبع ينشأ عنه بعض الضوضاء المضافة على الإشارة نتيجة تقريب هذه العينات لأقرب مستوى من مستويات التكميم. الشكل رقم (٣،٤) يبين هذه الإشارات الرقمية. لاحظ أن الإشارة أصبحت الآن معرفة

عند أزمنة معينة ومقدارها لا يأخذ إلا قيماً معينة يعبر عنها بأكواد أو شفرات ثنائية كما في الشكل. أو يمكن أن ننظر إليها على أنها تتابع sequence من الأرقام أو الشفرات وسنعبر عن هذه التتابعات بالرموز x[n] و y[n] ... وهكذا .



الشكل رقم (٣,٤). الإشارة الرقمية.

(٣,١,٥) النظام الرقمي Digital System

هذا النظام هو علاقة بين تتابع خرج y[n] وتتابع دخل x[n] ومن الأمثلة الشهيرة على ذلك المرشح الرقمي كما سنرى في الفصول القادمة.

(٣,٢) بعض الإشارات الرقمية المستخدمة كثيراً

هناك الكثير من الإشارات التي سنستخدمها بكثرة طوال هذا المقرر ولذلك سنقدم هنا تعريف وشكل معظم هذه الإشارات.

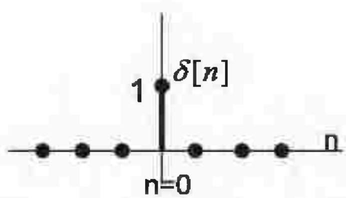
(٣,٢,١) إشارة (دالة) العينة الواحدة Unit Sample

هذه الإشارة كما هي موضحة في الشكل رقم (٣,٥) عبارة عن عينة sample

واحدة موجودة أو معرفة عند الزمن صفر وغير موجودة عند أي قيمة أخرى للزمن، مقدار هذه العينة هو الوحدة. هذه الإشارة يطلق عليها أحياناً (وبالذات في الأنظمة التناظرية) إشارة الاندفاع أو الصدمة impulse لأنها تمثل صدمة للنظام الذي تدخل عليه. هذه الإشارة تعطى بالعلاقة التالية:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (٣.١)$$

وهذه الإشارة كما سنرى فيما بعد تلعب نفس الدور الذي تلعبه إشارة الصدمة مع الأنظمة التناظرية.

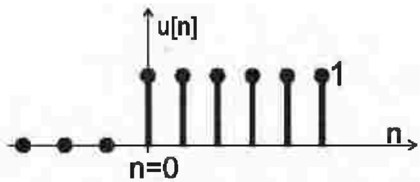


الشكل رقم (٣.٥). الإشارة العينة الواحدة.

(٣.٢.٢) إشارة (دالة) الدرجة الواحدة Unit step

هذه الإشارة لها شكل الدرجة كما في الشكل رقم (٣.٦) حيث أنها لكل قيم n السالبة تكون قيمة هذه الدالة صفرا، ثم عندما n=0 ولكل قيم n الموجبة تصبح قيمة هذه الدالة بواحد ولذلك يمكن كتابة هذه الدالة كما في العلاقة التالية:

$$U[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (٣.٢)$$



الشكل رقم (٣،٦). إشارة الدرجة الواحدة.

يمكن كتابة دالة الدرجة الواحدة أو دالة الخطوة U[n] كما يطلق عليها غالباً بدلالة دالة العينة الواحدة δ [n] كما يلي :

$$u[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m] \qquad (٣،٣)$$

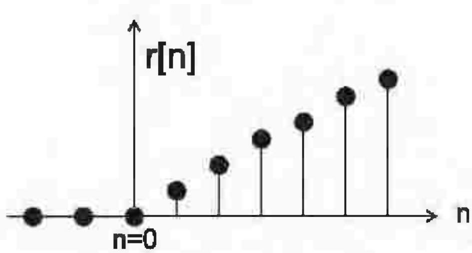
كما يمكن كتابة دالة العينة الواحدة δ [n] بدلالة دالة الخطوة U[n] كما يلي :

$$\delta[n]=u[n]-u[n-1] \qquad (٣،٤)$$

(٣،٢،٣) إشارة (دالة) المطلع Ramp

هي إشارة أو دالة خط مستقيم يبدأ من نقطة الأصل كما في الشكل رقم (٣،٧) هذه الإشارة تعطى بالمعادلة التالية :

$$r[n]=n*u[n] \qquad (٣،٥)$$



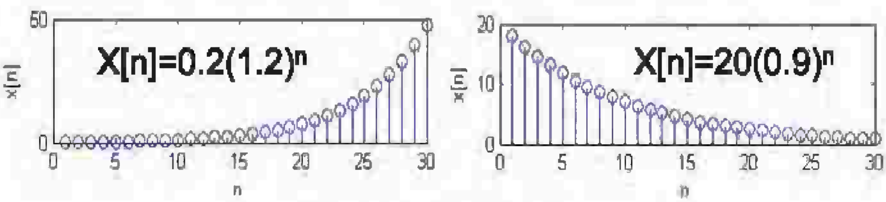
الشكل رقم (٣،٧). دالة المطلع.

(٣,٢,٤) التابع الأسي الحقيقي **Real Exponential Sequence**

يمكن كتابة معادلة هذا التابع كما يلي :

$$x[n] = A\alpha^n \qquad (٣,٦)$$

حيث إن كلاً من A و α يمكن أن تكون كميات حقيقية. في المعادلة رقم (٣,٦) عندما تكون α أكبر من الواحد فإن مقدار التابع يزيد مع زيادة n، بينما إذا كانت α أقل من الواحد فإن مقدار التابع يقل مع زيادة n والشكل رقم (٣,٨) يوضح هاتين الحالتين.



الشكل رقم (٣,٨). دالة المطلع.

أيضاً كل من A و α يمكن أن تكون كميات مركبة وفى هذه الحالة يمكن إعادة كتابة المعادلة رقم (٣,٦) كما يلي :

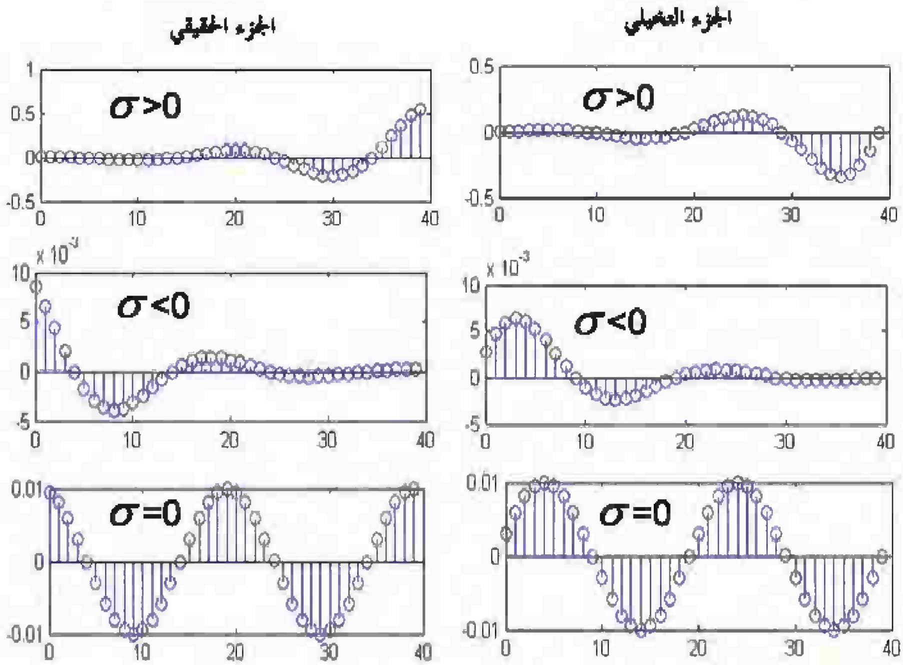
$$x[n] = |A|e^{\sigma n}e^{j(wn+\phi)} \qquad (٣,٧)$$

حيث $|A|e^{\sigma n}$ تمثل مقدار التابع بينما (wn + φ) تمثل زاوية طوره والمعادلة رقم (٣,٧) تمثل الصورة القطبية أو صورة المقدار والزاوية للتابع المركب. المعادلة رقم

(٣,٧) يمكن إعادة كتابتها في الصور الجيبية أو في صورة كميتين إحداهما حقيقية والأخرى تخيلية كما يلي :

$$x[n] = |A|e^{\sigma n}\cos(wn+\phi) + j|A|e^{\sigma n}\sin(wn+\phi) \qquad (٣,٨)$$

حيث $j = \sqrt{-1}$ ، والمقدار الذي يحتوي الدالة cos() هو المقدار الحقيقي ، والمقدار الذي يحتوي الدالة sin() هو المقدار التخيلي والثابت σ في المعادلة رقم (٣,٨) إذا كان موجباً فإن مقدار التابع يتزايد مع زيادة n ، بينما إذا كانت σ سالبة فإن مقدار التابع يتناقص مع زيادة n. أما إذا كانت σ تساوي صفراً فإن مقدار التابع يكون موجة جيبية مستمرة sustained oscillation. الشكل رقم (٣,٩) يبين كل هذه الأحوال للمعادلة رقم (٣,٨).



الشكل رقم (٣,٩). الجزء التخيلي والحقيقي عند قيم مختلفة للثابت σ في المعادلة رقم (٣,٨).

العلاقة بين التتابع الأسي المركب ودالة الجيب مهمة جداً وسيتم استخدامها بكثرة لذلك لابد من إعادة كتابة العلاقة بينهما. التتابع الأسى $x_1[n]$ يمكن كتابته كما يلي:

$$x_1[n] = A e^{jwn}$$

$$= A\cos(wn) + jA\sin(wn) \quad (٣,٩)$$

كما نلاحظ فإن التتابع الأسى يتكون من مركبتين إحداهما مركبة حقيقية بدلالة الدالة cos () والأخرى مركبة تخيلية بدلالة الدالة sin(). يمكن كتابة تتابع آخر $x_2[n]$ كما يلي:

$$x_2[n]= A e^{-jwn}$$

$$=A\cos(wn) - jA\sin(wn \quad (٣,١٠)$$

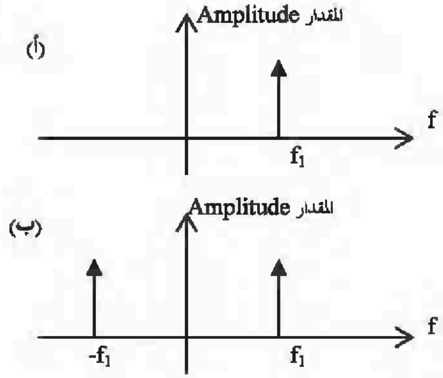
بجمع المعادلتين رقمي (٣,٩) و (٣,١٠) يمكن كتابة المركبة الحقيقية cos()كما يلي:

$$\cos(wn)= 0.5(e^{jwn} + e^{-jwn}) \quad (٣,١١)$$

وبطرح المعادلتين رقمي (٣,٩) و (٣,١٠) يمكن كتابة المركبة التخيلية sin() كما يلي:

$$\sin(wn) = \frac{0.5A(e^{jwn} - e^{-jwn})}{j} \quad (٣,١٢)$$

المعادلتان رقمي (٣,١١) و (٣,١٢) توضحان مدى العلاقة بين أي تتابع أسي مركب والدالتين cos( ) و sin( ) وأن هاتين الدالتين يمكن التعبير عن أي منها بدلالة مركبتين أسيتين تخيليتين كما في المعادلتين (٣,١١) و (٣,١٢). الدالة الجيبية يمكن كتابتها بدلالة التردد f على الصورة cos(wn)=cos(2πfn) وذلك بوضع w=2πf. يمكن رسم طيف spectrum الدالة cos(2πf) كما في الشكل رقم (٣,١٠أ) حيث نرى أنه عبارة عن كمية واحدة عند الترددf حيث إنه لا يوجد سوى تردد واحد فقط وهو التردد f. نفس الدالة الجيبية cos() يمكن كتابتها في صورة مركبتين أسيتين كما في المعادلة رقم (٣,١١) ولذلك يمكن أن ننظر إليها في هذه الحالة بأنها تتكون من مركبتين أسيتين إحداهما ذات تردد موجب f والمركبة الأخرى ذات تردد سالب f– ويمكن رسم طيف الدالة cos() في هذه الحالة كما في الشكل رقم (٣,١٠ب) ، وهذه هي الصورة العامة لرسم الطيف لأي دالة أو إشارة حيث تكون هناك صورة مقلوبة للطيف ناحية الترددات السالبة وهذا ما سنتبعه في رسم الطيف لأي إشارة فيما بعد وهذا هو ما رأيناه عند شرح نظرية العينة في النطاق الترددي في الفصل السابق.



الشكل رقم (٣,١٠). التعبير عن طيف أي دالة

(٣،٣) تصنيف الإشارات الرقمية
Classification of Digital Signals

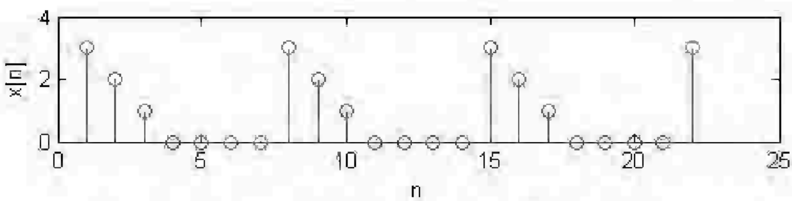
هناك الكثير من الخواص التي يمكن تصنيف الإشارات على أساسها وسنعرف في هذا الجزء كل طريقة على حده.

(٣،٣،١) الدورية Periodicity

هل التتابع أو الإشارة التي نتعامل معها دورية أم لا؟ هل هذا التتابع يكرر نفسه بعد عدد معين من العينات أم لا؟ لذلك يمكن إن نقول هنا أن أي تتابع يكون دورياً إذا كان يكرر نفسه كل عدد N من العينات ويمكن التعبير عن ذلك بالمعادلة التالية:

$$x[n]=x[n+kN] \qquad (٣،١٣)$$

حيث N في هذه الحالة هي الدورة period التي يتكرر بعدها التتابع، و k أي رقم صحيح. الشكل رقم (٣،١١) يبين تتابع دوري طول دورته N=7.



الشكل رقم (٣،١١). تتابع دوري دورته طولها ٧.

لو أن لدينا إشارة تناظرية جيبية على الصورة $\cos(\Omega t)$ (سنلتزم في هذا الكتاب مثل الكثير من المراجع بالرمز للسرعة الزاوية بالرمز w في حالة الإشارات الرقمية والرمز Ω في حالة الإشارات التناظرية)، وهذه الإشارة تم عينتها بمعدل معين، فهل

التابع الناتج يجب أن يكون بالضرورة دورياً هو الآخر مثل الإشارة التناظرية الجيبية؟ الإجابة هي لا !! .. فمن الممكن أن نقطع إشارة جيبية تناظرية دورية ويكون التابع الناتج عنها غير دوري. وهذا بديهي جداً ولكي يكون التابع الناتج دورياً فإن معدل العينة (أو قل الزمن بين عينتين أو الزمن الدوري للعينة) يجب أن يرتبط مع الزمن الدوري للموجة الجيبية التناظرية بعلاقة أو نسبة بسيطة. لتوضيح ذلك نفترض التابع الجيبي في صورته الأسية التالية :

$$x[n]= Ae^{jwn} \tag{٣,١٤}$$

بفرض أن التابع السابق دوري فإنه يمكن تطبيق شرط المعادلة رقم (٣,١٣) عليه وكتابته كما يلي :

$$\begin{aligned} x[n] &= A\,e^{jw(n+N)} \\ &= A\,e^{jwn}\;e^{jwN} \end{aligned} \tag{٣,١٥}$$

في المعادلة رقم (٣,١٥) لكي يكون التابع x[n] دورياً فعلاً فإن الكمية e^{jwN} يجب أن تساوي واحداً ، وهذا يعني أنه يمكننا أن نضع الشرط التالي لكي يكون أي تابع جيبي x[n] دورياً :

$$\begin{gathered} wN=m2\pi \\ w/2\pi=m/N \end{gathered} \tag{٣,١٦}$$

حيث m هي ثابت صحيح موجب ، وهذا يعني أن $w/2\pi$ يجب أن تكون عدداً كسرياً بسيطاً rational number (أو بمعنى آخر يجب أن تكون $2\pi/w$ تساوي رقماً صحيحاً). فمثلاً التابع $x[n]=A\cos(0.1\pi n)$ فيه $w=0.1\pi$ وهذا يعني أن $w/2\pi=0.1/2=1/20$ والتي تعد كسراً بسيطاً ، إذن هذا التابع دوري. بينما التابع

$x[n] = A\cos(\sqrt{3}\pi n)$ فيه $w = \sqrt{3}\pi$ وعلى ذلك فإن $\frac{w}{2\pi} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ والذي لا يعد رقماً كسرياً بسيطاً وعلى ذلك فهذا التابع ليس تابعاً دورياً.

(٣.٣.٢) تصنيف التابعات على حسب الطول

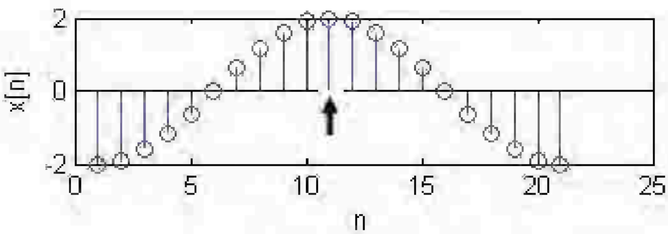
أي تابع يمكن تصنيفه على أنه محدود الطول finite length إذا كان عدد العينات فيه محدوداً. بينما إذا كان عدد العينات ممتداً إلى مالا نهاية في أي من الاتجاهين سواء السالب أو الموجب فإن هذا التابع يصنف على أنه غير محدود الطول أو لانهائي infinite length.

(٣.٣.٣) تصنيف التابعات على حسب التشابه حول نقطة الأصل

يمكن تصنيف التابعات على حسب شكل كل منها عند نقطة الأصل إلى نوعين:

التابع الزوجي even sequence: وهو التابع الذي يكون نصفه الموجود على يمين نقطة الأصل مشابهاً تماماً symmetrical (صورة) لنصفه الموجود على يسار نقطة الأصل. الشكل رقم (٣.١٢) يبين مثالاً لتابع زوجي حيث يمكن أن نعبر عن التشابه الزوجي بالمعادلة التالية:

$$x[n]=x[-n] \qquad (٣.١٧)$$

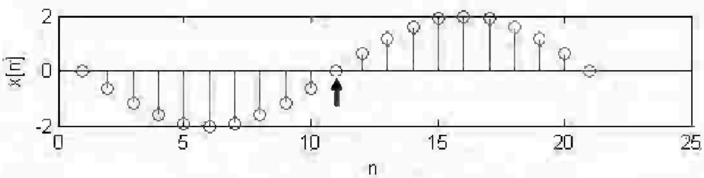


الشكل رقم (٣.١٢). مثال لتابع زوجي.

التابع الفردي odd sequence: وهو التابع الذي يكون نصفه الموجود على يمين نقطة الأصل صورة معكوسة لنصفه الموجود على يسار نقطة الأصل. الشكل رقم (٣،١٣) يبين مثالاً لتابع فردي حيث يمكن أن نعبر عن التشابه الفردي بالمعادلة التالية :

$$x[n]=-x[-n] \qquad (٣،١٨)$$

السهم الموجود في الشكلين رقمي رقم (٣،١٢) و رقم (٣،١٣) يمثل نقطة الأصل التي يوجد التشابه حولها.



الشكل رقم (٣،١٣). مثال لتابع فردي.

(٣،٣،٤) تصنيف التابعات على حسب مقدار التابع

مقدار أي تابع من الممكن أن يكون محدداً bounded إذا كان مقدار أي عينة في هذا التابع يؤول إلى قيمة محددة تختلف عن المالانهاية ، وهذا يمكن التعبير عنه بالمعادلة التالية حيث B أي قيمة موجبة تختلف عن المالانهاية :

$$\left|x[n]\right| \leq B < \infty \qquad (٣،١٩)$$

(٣،٣،٥) تصنيف التابعات على حسب القابلية للجمع

إن أي تابع نقول عنه إنه قابل للجمع summable إذا كان المجموع الكلي لعيناته أقل من المالانهاية ، وهذا يمكن التعبير عنه بالمعادلة التالية :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \qquad (٣,٢٠)$$

(٣,٣,٦) طاقة التتابع

طاقة التتابع energy of a sequence تعرف على أنها مجموع مربعات مقدار جميع العينات الموجودة في التتابع، وهذا يمكن التعبير عنه في المعادلة التالية:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \qquad (٣,٢١)$$

(٣,٤) العمليات الأساسية على التتابعات

يمكن إجراء كل العمليات الحسابية المعتادة مثل الجمع والضرب وغيرها على التتابعات، كما أن هناك بعض العمليات الأخرى مثل عملية الالتفاف التي لم نعتد عليها سابقا وسندرسها هنا.

عملية الضرب multiplication: عند ضرب تتابعين يتم ضرب مقدار كل عينة في التتابع الأول في نظيرتها في التتابع الثاني ويتم التعبير عن ذلك حسابياً كما يلي:

$$z[n]= x[n].y[n] \qquad (٣,٢٢)$$

لاحظ أن رمز عملية الضرب هنا هو النقطة وليس النجمة ✱ كما تعودنا سابقاً لأن النجمة ستستخدم كرمز لعملية الالتفاف convolution كما سنرى. عملية الضرب يطلق عليها مهندسو الاتصالات بأنها عملية التعديل modulation. يمكن رؤية ذلك بفرض التتابع y[n] الذي يساوي حاصل ضرب تتابعين كل منهما جيبي كما يلي:

$$y[n]= 2\cos(w_1 n).\cos(w_2 n)$$

حاصل الضرب السابق يمكن باستخدام بعض قوانين حساب المثلثات أن يوضع على الصورة التالية :

$$y[n]= \cos((w_1+w_2)n) + \cos((w_1-w_2)n)$$

حيث إن التابع الناتج يتكون من مركبتين الأولى ترددها هو مجموع الترددين الداخلين والأخرى ترددها هو مطروح الترددين الداخلين.

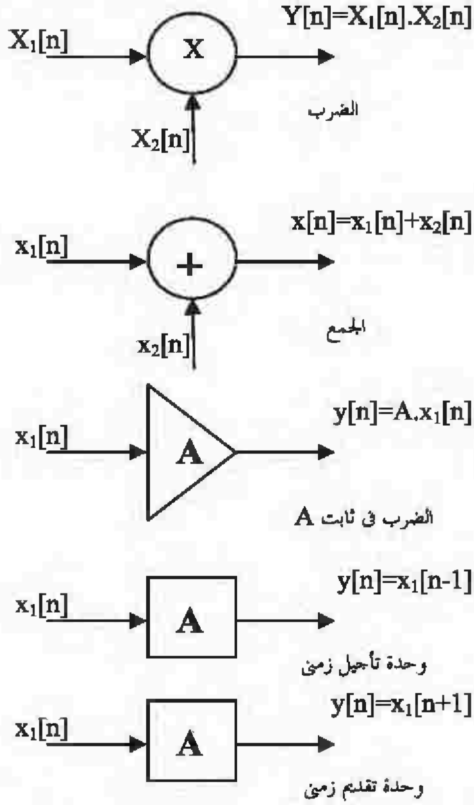
عملية الضرب سنستخدمها بكثرة عند قطع تابع محدد الطول من تابع لانهائي ، وهذه تسمى النافذة windowing حيث إننا نأخذ نافذة من التابع اللانهائي. انظر لرمز عملية الضرب الذي سنستخدمه في هذا الكتاب كما في الشكل رقم (٣,١٤).

عملية الجمع addition: عند جمع تابعين يتم جمع مقدار كل عينة في التابع الأول مع نظيرتها في التابع الثاني ويتم التعبير عن ذلك حسابياً كما يلي :

$$z[n]= x[n] + y[n] \qquad (٣,٢٢)$$

انظر لرمز عملية الجمع الذي سنستخدمه في هذا الكتاب كما في الشكل رقم (٣,١٤).

عملية الضرب في ثابت scaling: حيث يتم ضرب كل عينة من عينات أي تابع في ثابت. انظر لرمز عملية الضرب في ثابت الذي سنستخدمه في هذا الكتاب كما في الشكل رقم (٣,١٤).



الشكل رقم (٣.١٤). العمليات الأساسية على التتابعات.

عملية التأخير الــزمني time delay: يتم تأخير عينات التتابع بأي عدد من وحدات زمن التأخير حيث وحدة زمن التأخير هنا هي زمن العينة sampling time. يمكن التعبير عن ذلك حسابياً كما يلي :

$$y[n]= x[n-N] \quad (٣.٢٤)$$

إذا كانت N رقما سالبا فإن التأخير الزمني يصبح تقديماً زمنياً والمعادلة رقم (٣,٢٤) تصبح $y[n]=x[n+N]$. انظر إلى الشكل (٣,١٤) لترى الرمز المستخدم لهذه العمليات.

مثال رقم (٣,١): افترض التتابعات التالية :

$$x_1[n]= [3.2 \quad 41 \quad 36 \quad -9.5 \quad 0]$$
$$x_2[n]= [1.7 \quad -0.5 \quad 0 \quad 0.8 \quad 1]$$

منها يمكن استنتاج التتابعات التالية :

$$y_1[n]= x_1[n].x_2[n]=[5.44 \quad -20.5 \quad 0 \quad -7.6 \quad 0]$$
$$y_2[n]= x_1[n]+x_2[n]=[\ 4.9 \quad 40.5 \quad 36 \quad -8.7 \quad 1]$$
$$y_3[n]= 0.5.x_1[n]= [1.6 \quad -20.5 \quad 18 \quad -4.75 \quad 0]$$

في أي تتابع من التتابعات السابقة، وأي تتابع نكتبه بعد ذلك، تكون العينة رقم صفر فيه هي العينة الأولى ناحية اليسار. فمثلا العينة $x_1[0]=3.2$ و $x_2[2]=0$ وهكذا. إذا اختلف الوضع عن ذلك فإنه سيتم تعليم العينة رقم صفر بعلامة معينة وهنا سنضع تحتها خط كما في التتابع التالي :

$$x_3[n]= [2.1 \quad 4 \quad \underline{-3} \quad 5.7 \quad 0 \quad 6.4]$$

في هذا التتابع $x_3[0]=-3$ و $x_3[-1]=4$ و $x_3[-2]=2.1$ و $x_3[3]=6.4$.

في أي واحدة من العمليات السابقة ليس بالضرورة أن يكون التتابعان متساويين الطول. في هذه الحالة يتم إضافة أصفار إلى التتابع الأقصر بحيث يتم التطابق بين

التابعين من ناحيتي اليمين واليسار. فمثلا لو أردنا جمع التابعين $x_1[n]$ و $x_3[n]$ فإن التابع $x_1[n]$ سيتم إضافة أصفار له من ناحية اليسار ليطابق التابع $x_3[n]$ من ناحية اليسار ليصبح كالتالي :

$$x_1'[n]= [0 \quad 0 \quad \underline{3.2} \quad 41 \quad 36 \quad -9.5 \quad 0]$$

وسيتم إضافة صفر للتابع $x_3[n]$ ليطابق التابع $x_1[n]$ من ناحية اليمين لأن $x_3[n]$ هو الأقصر من ناحية اليمين، وسيصبح التابع $x_3[n]$ كالتالي :

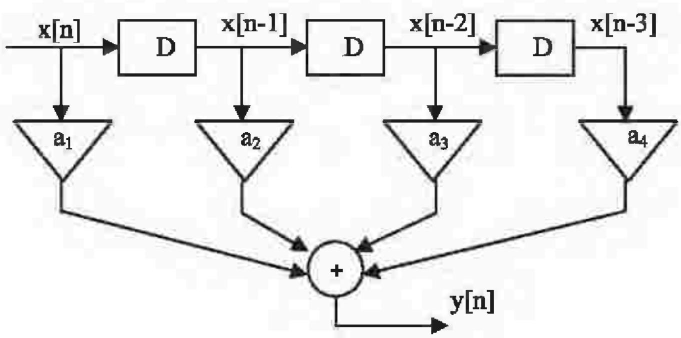
$$x_3'[n]= [2.1 \quad 4 \quad \underline{-3} \quad 5.7 \quad 0 \quad 6.4 \quad 0]$$

بذلك أصبح التابعان $x_1'[n]$ و $x_3'[n]$ متطابقين ويمكن كتابة حاصل جمعهما كالتالي :

$$y_4[n]=x_1'[n]+x_3'[n]= [2.1 \quad 4 \quad \underline{0.2} \quad 46.7 \quad 36 \quad -3.1 \quad 0] \qquad (٣,٢٥)$$

مثال (٣,٢) : التابع $y[n]$ في الشكل رقم (٣,١٥) يمكن كتابته كالتالي :

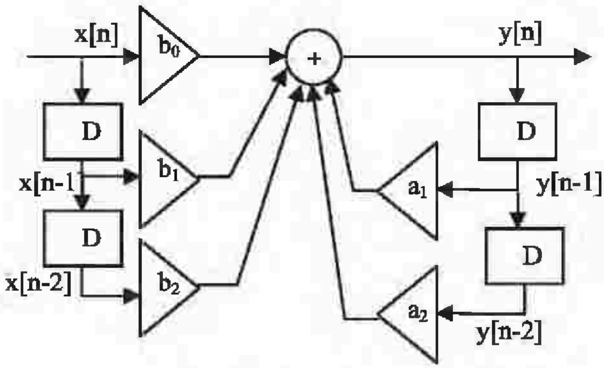
$$y[n]= a_1x[n] + a_2x[n-1] + a_3x[n-2] + a_4x[n-3]$$



الشكل رقم (٣,١٥). مثال الشكل رقم (٣,٢).

مثال (٣,٣): التتابع y[n] في شكل رقم (٣,١٦) يمكن كتابته كالتالي:

$$y[n]= b_0x[n]+b_1x[n-1]+b_2x[n-2]+a_1y[n-1] + a_2y[n-2]$$



الشكل رقم (٣,١٦). مثال الشكل رقم (٣,٣).

(٣,٥) التعبير عن التتابعات بدلالة تتابع العينة الوحيدة

أي تتابع يمكن التعبير عنه في النطاق الزمني كمجموع عدد من الصور المؤخرة زمنياً من إشارة العينة الواحدة unit sample. فمثلاً التتابع $y_4[n]$ في المعادلة رقم (٣,١٧) يمكن إعادة كتابته كدالة في إشارة العينة الواحدة كما يلي:

$$y_4[n]= 2.1\delta[n+2] + 4\delta[n+1] + 0.2\delta[n] + 46.7\delta[n-1] + 36\delta[n-2] -3.1\delta [n-3]) \quad (٣,٢٦)$$

هذه الطريقة في التعبير عن التتابعات سنستخدمها بكثرة عند الحصول على خرج أي نظام بدلالة دخله وهذا سنراه بعد قليل.

(٣,٦) الأنظمة الرقمية Digital Systems

النظام الرقمي هو دالة تعالج تتابع دخل لتعطي تتابع خرج كما في الشكل رقم (٣,١٦). يتم حساب تتابع الخرج بدءا من عينة n معينة ويتتابع خروج العينات من النظام مع تقدم الزمن. الشكلان رقما (٣,١٦) و (٣,١٦) تعتبر أمثلة على الأنظمة الرقمية. ونسوق هنا مثال آخر على أحد الأنظمة الرقمية.

الشكل رقم (٣,١٧). النظام الرقمي.

مثال (٣,٤): من المرشحات الشهيرة مرشح نافذة المتوسط المتحركة التي تتكون من عدد M من النقاط، (M point moving average filter) وتأثيره على الضوضاء. هذا المرشح يأخذ عدد M من نقاط تتابع الدخل ويحسب متوسطها وهذا المتوسط يمثل عينة الخرج عند هذه النقطة، بعد ذلك تزاح النافذة بمقدار عينة أخرى من عينات الدخل ويتم حساب المتوسط الجديد، وهكذا حتى نصل إلى آخر عينة من عينات الدخل. يمكن التعبير عن ذلك كما في المعادلة التالية:

$$y[n] = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} x[n-k] \qquad (٣,٢٧)$$

هذا المرشح يمكن استخدامه لتنعيم الضوضاء المضافة على أي إشارة، ويمكن أن نوضح ذلك بفرض أي إشارة $s[n]=2.n.(0.9)^n$، هذه الإشارة سنضيف عليها

ضوضـاء عـشوائية random noise لنحـصل علـى التـابع x[n]=s[n]+d[n] حيـث x[n] ستكون تتابع الدخل للمرشـح ، s[n] هـي الإشـارة قبـل إضـافة الـضوضاء ، وd[n] هي الضوضاء التي سنضيفها باستخدام الدالة rand() في MATLAB. البرنامج التالي يحسب الإشـارة s[n] ويـضيف عليهـا الـضوضاء ويحسب الخـرج تبعـاً للمعادلـة رقـم (٣،٢٧) ويرسم هذا الخرج في وجود الـضوضاء وفـى عـدم وجودهـا لـترى الفـارق الـذي يقدمـه مثل هذا المرشح البسيط. الشكل رقم (٣،١٨) يوضح كـل هـذه الإشـارات. لـن نخـوض فى شرح أوامر MATLAB لأننا نفترض أن القـارىء علـى درايـة بهـا. حـاول تنفيـذ هـذا البرنامج مستخدماً قيماً مختلفة للنافذة M لترى تأثير النافذة على عملية تنعيم الـضوضاء المضافة.

```
%moving average filter
R=50؛
d=rand(1,R)-0.5; الضوضاء
m=0:1:R-1;
s=2*m.*(0.9.^m; الإشارة
x=s+d;              تتابع الدخل
subplot(2,1,1);
plot(m,d,'r',m,s,'b',m,x,'g' )
xlabel('Time index n' )؛
ylabel('Amplitude' ) ؛
M=3 ؛
b=ones(M,1)/M المرشح  ؛
y=filter(b,1,x) ؛
subplot(2,1,2) ؛
```

```
plot(m,y,'b')
xlabel('Time index n');
ylabel('Amplitude');
```

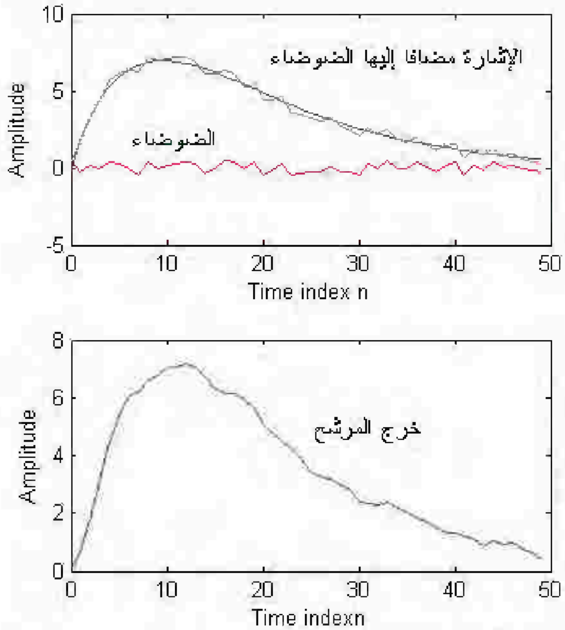
(٣,٧) تصنيف الأنظمة الرقمية

Classification of digital systems

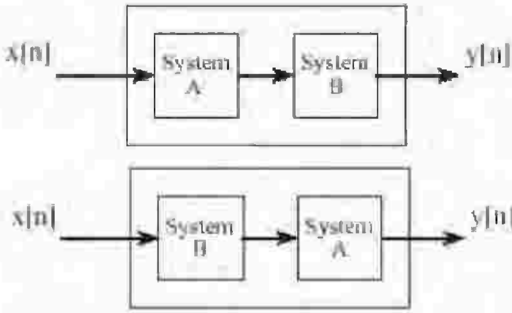
هناك الكثير من التصنيفات التي يمكن ذكرها عن الأنظمة الرقمية ومعظم هذه التصنيفات تكون على حسب علاقة خرج النظام بدخله.

(٣,٧,١) الخطية Linearity

جميع الأنظمة الرقمية التي سنتعامل معها في هذا الكتاب تقريباً عبارة عن أنظمة خطية. بفرض أن $y_1[n]$ و $y_2[n]$ تمثل خرج أو استجابة نظام للدخلين $x_1[n]$ و $x_2[n]$. هذا النظام إذا أدخلنا عليه التتابع $x[n]= ax_1[n]+bx_2[n]$ وأعطى الخرج $y[n]=ay_1[n]+by_2[n]$ ، فإن هذا النظام يعتبر نظاماً خطياً. النظام الخطي يكون دائماً متجانساً homogeneous ، وخاصية التجانس هي أن أي تغير في مقدار إشارة الدخل للنظام يقابلها تغير بنفس المقدار في خرج النظام. أي أنه إذا كان الخرج هو $y[n]$ عندما يكون الدخل $x[n]$ ، فإن النظام يكون متجانساً إذا كان خرجه هو $y_1[n]=ay[n]$ عندما يكون الدخل هو $x_1[n]=ax[n]$. من خواص الأنظمة الخطية أيضا أنها تبادلية فإذا كان لدينا نظاما يتكون من أكثر من نظام فرعي فإن ترتيب هذه الأنظمة الفرعية من الدخل إلى الخرج لا يؤثر على الخرج النهائي كما هو موضح في الشكل رقم (٣,١٩) .



الشكل رقم (٣،١٨). مرشح نافذة المتوسط وتأثيره على الضوضاء، مثال رقم (٣،٤).



الشكل رقم (٣،١٩). خاصية التبادلية في الأنظمة الخطية.

(٣,٧,٢) خاصية الثبات مع الإزاحة Shift Invariant

النظام يوصف بأنه ثابت زمنياً إذا كان أي إزاحة زمنية في تتابع الدخل يقابلها إزاحة زمنية في الخرج بنفس المقدار. خاصية الثبات الإزاحي ليست شرطاً للخطية فيمكن أن يكون هناك نظام ثابت إزاحياً ولكنه غير خطي. يمكن التعبير عن ذلك بأنه إذا كان خرج النظام هو $y[n]$ عندما يكون الدخل $x[n]$ ، فإن النظام يكون ثابتاً إزاحياً إذا كان خرجه هو $y[n]=y_1[n-n0]$ عندما يكون الدخل هو $x[n]=x_1[n-n0]$ حيث $n0$ تمثل إزاحة تقديم أو تأخير في التتابع. الأنظمة التي تحمل خاصية الخطية مع الثبات الإزاحي من الأنظمة المهمة جداً التي سنتعامل معها في هذا الكتاب حيث إن معظم الأنظمة العملية تكون من هذا النوع ، وهي تكون سهلة التحليل رياضياً ومن ثم سهلة التصميم. هذا النوع من الأنظمة يرمز له بالرمز Linear Time Invariant, LTI

مثال رقم (٣,٥) : النظام $y[n]=x[n/L]$ for $n=0, \pm L, \pm 2L$ ، ... ليس نظاماً ثابتاً إزاحياً ويمكن توضيح ذلك بعمل إزاحة في تتابع الدخل فيصبح $x_1[n]=x[(n/L)-n0]$ والذي يمكن كتابته كما يلي : $x_1[n]=x[(n-Ln0)/L]$. بإجراء إزاحة مقابلة على تتابع الخرج نحصل على التتابع التالي : $y_1[n]=y[n-n0]=x[(n-n0)/L]$ ، ومن ذلك نرى أن $y_1[n]\neq x_1[n]$ وهذا يعني أن النظام غير ثابت أو متغير إزاحياً.

(٣,٧,٣) خاصية السببية أو المعقولية Causality

إذا كانت العينة رقم $n0$ مثلاً من الخرج ، $y[n0]$ ، تعتمد فقط على عينة الدخل $x[n0]$ والعينات السابقة لها ، أي كل العينات $x[n]$ حيث $n<n0$ ، فإن هذا النظام يسمى نظام سببي ، أو نظام يمكن تحقيقه ، أو نظام معقول ، وكل هذه تصلح كترجمات

لكلمة causal وربما تكون أفضل من كلمة السببية. باختصار هذه الخاصية تعني أن أي تغيرات في الخرج يجب ألا تسبق زمنياً التغيرات في الدخل، وهذا معقول جداً!! وهذا هو منطق الطبيعة إذ إن لكل سبب أو مؤثر تكون هناك استجابة أو خرج وهذا الخرج يعتمد على قيم المؤثر الحالية والسابقة ولا يمكن أن يعتمد على قيم المؤثر التالية أو القادمة. هذا المنطق من الممكن أن يكون غير محقق وبالذات مع استخدام الحاسبات حيث يمكن أن تكون عينات الدخل مسجلة في الذاكرة وفي هذه الحالة يمكن حساب الخرج اعتمادا على أي عينة من الدخل سواء سابقة أو تالية لعينة الخرج. هذا بالطبع لا يمكن تحقيقه عند التعامل في الأزمنة الحقيقية real time.

مثال (٣,٦) : النظام $y[n]=x[n]+0.5\{x[n-1]+x[n+1]\}$ ليس نظاماً سببياً لأن عينات الخرج عند لحظة معينة تعتمد من ضمن ما تعتمد على عينات دخل قادمة، فمثلاً عندما $n=5$ فإن $y[5]$ تعتمد على $x[5]$ و$x[4]$ و$x[6]$ وهنا تكمن المشكلة حيث لا يعقل أن تعتمد عينة الخرج الخامسة على عينة الدخل السادسة التي لم تأتي بعد.

(٣,٧,٤) الأنظمة المستقرة Stable systems

النظام المستقر: هو النظام الذي يعطي خرجاً محكوماً bounded عندما يكون دخله محكوماً. التابع $x[n]$ يكون محكوما إذا كان $|x[n]| < B_x$ لكل قيم n حيث B_x هي كمية أو ثابت محدد، وهذا يعني باختصار أن مقدار أي عينة في التتابع يكون محدداً ولا يؤول إلى المالانهاية. وعلى ذلك يمكننا القول إن للنظام المستقر إذا كان الدخل هو $|x[n]| < B_x$ فإن خرجه يجب أن يكون $|y[n]| < B_y$ حيث B_y كمية ثابتة لا تساوي مالانهاية. مثل هذه الأنظمة نطلق عليها بأنها أنظمة محكومة الدخل محكومة الخرج

Bounded Input, Bounded Output (BIBO). سيكون هناك حديث أكثر تفصيلاً عن الاستقرار وشروطه عند الحديث عن تحويل Z.

مثال رقم (٣,٧) : مرشح نافذة المتوسط المتحركة في مثال رقم (٣,٤) هو نظام مستقر لأنه بوضع تتابع الدخل x[n] يساوي قيمة ثابتة فإن الخرج يكون أيضاً قيمة ثابتة ويمكن توضيح ذلك كالتالي :

$$|y[n]| = \left|\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} x[n-k]\right| \le \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}|x[n-k]| \le \frac{1}{M}(M)Bx \le Bx$$

(٣,٧,٥)خاصية الانعكاس Invertability

إذا أمكن تحديد دخل أي نظام تحديداً وحيداً unique بمجرد معرفة خرجه ، فإن هذا النظام يقال عنه أنه قابل للعكس ، أي يمكن تحديد دخله بمعرفة خرجه. فمثلاً النظام $y[n]=\{x[n]\}^2$ غير قابل للعكس لأنه بمعرفة الخرج يكون هناك قيمتان للدخل يحققان معادلة هذا النظام.

(٣,٧,٦) خاصية الخمول Passivity

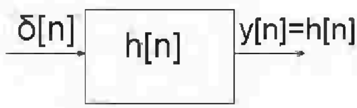
إذا كانت طاقة خرج أي نظام أقل من أو تساوي طاقة دخله فإن هذا النظام يوصف بأنه خامل ، ويمكن التعبير عن ذلك كالتالي :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|y[n]|^2 \le \sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2 < \infty$$

(٣,٨) علاقة الخرج بالدخل للأنظمة الخطية الثابتة إزاحياً LTI

عند تحليل أو بناء أي نظام لابد من معرفة أو تحديد علاقة خرج هذا النظام

بدخله. هناك طريقتان شائعتان للتعبير عن علاقة خرج النظام بدخله وهما استجابة النظام للدفعة أو العينة الواحدة unit sample response واستجابة النظام للخطوة step response.



الشكل رقم (٣,٢٠). استجابة العينة الواحدة (الصدمة أو الدفعة).

٣,٨,١) استجابة العينة الواحدة Unit Sample Response

استجابة العينة الواحدة لأي نظام هي خرج هذا النظام عندما يكون دخله هو تتابع العينة الواحدة δ[n]. عادة يرمز لهذه الاستجابة بالرمز h[n]، واختصارا يطلق عليها استجابة الصدمة أو الدفعة impulse response وهى الأكثر استخداما من استجابة الخطوة. بفرض أن لدينا النظام $y[n]=x[n]+0.5\{x[n-1]+x[n+1]\}$ فإن استجابة الدفعة له يمكن الحصول عليها بوضع x[n] =δ[n] وعلى ذلك فإن استجابة الدفعة أو الصدمة لهذا النظام ستكون $h[n]= \delta[n]+0.5\{\delta[n-1]+ \delta[n+1]\}$.

٣,٨,٢) استجابة الخطوة Step Response

استجابة الخطوة لأي نظام هي خرج هذا النظام عندما يكون دخله هو تتابع الخطوة u[n]. عادة يرمز لهذه الاستجابة بالرمز s[n].

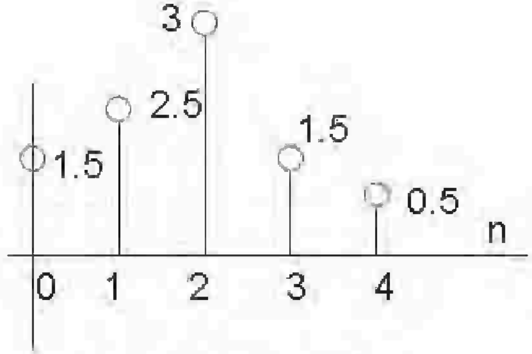
(٣,٨,٣) علاقة الخرج بالدخل للأنظمة الخطية الثابتة إزاحياً LTI

عند تحليل أي نظام أو حتى بناؤه فإن علاقة خرج هذا النظام بدخله تكون مهمة جداً. لقد أشرنا في الجزء رقم (٣,٥) كيف أنه يمكن التعبير عن أي تابع كمجموع من تابعات الصدمة أو وحدة العينة المزاحة زمنياً. الشكل رقم (٣,٢١) يُبين أحد التابعات التي يمكن التعبير عنها كمجموع من تابعات الصدمة كما يلي:

$$x[n]=1.5\delta[n]+2.5\delta[n-1]+3\delta[n-2]+1.5\delta[n-3]+0.5\delta[n-4] \qquad (٣,٢٨)$$

والذي يمكن إعادة كتابته في الحالة العامة كما يلي:

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \qquad (٣,٢٩)$$



الشكل رقم (٣,٢١). تابع افتراضي.

بفرض أن هذا النظام خطي وثابت إزاحياً LTI فإن خرج هذا النظام سيكون مجموع استجاباته لوحدة العينة $1.5\delta[n]$ والتي تساوي $1.5h[n]$ ، ووحدة العينة

$2.5\,\delta[n-1]$ والتي تساوي $2.5\ h[n-1]$ وهكذا لباقي مركبات المعادلة (٣,٢٨) . وعلى ذلك يمكن كتابة خرج هذا النظام الخطي الذي دخله هو التتابع x[n] كما يلي :

$$y[n]=1.5h[n]+2.5h[n-1]+3h[n-2]+1.5h[n-3]+0.5h[n-4] \quad (٣,٣٠)$$

وعلى ذلك يمكن كتابة الخرج بدلالة الاستجابة الصدمية أو الدفعية لأي نظام كما يلي :

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k] \quad (٣,٣١)$$

وبتغيير بسيط في المتغيرات يمكن إعادة كتابتها كما يلي :

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[n-k]h[k] \quad (٣,٣٢)$$

المجموع الموجود في المعادلتين رقمي (٣,٣١) و (٣,٣٢) يسمى المجموع الالتفافي convolutional sum. وهذا يعني أن خرج النظام الخطي الثابت إزاحياً يساوي المجموع الالتفافي لدخل هذا النظام والاستجابة الصدمية له. المجموع الالتفافي يرمز له بالرمز التالي :

$$y[n]=x[n]*h[n] \quad (٣,٣٣)$$

بعض المراجع تضع دائرة حول النجمة الموجودة في المعادلة (٣,٣٣) ولكننا سنكتفي في هذا الكتاب بالنجمة فقط تبسيطا للأمور .

(٣,٨,٤) عملية الجمع الالتفافي Convolution

هذه العملية كما رأينا تستخدم في إيجاد العلاقة بين خرج أي نظام خطي ثابت

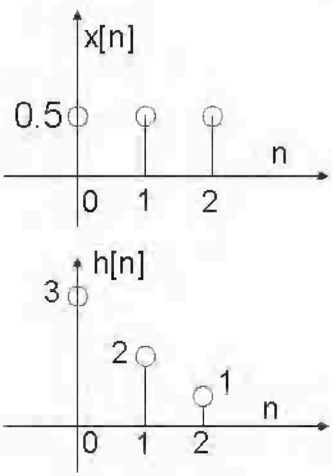
إزاحياً LTI ودخله والاستجابة الصدمية له. وهذه العملية من العمليات الكثيرة المستخدمة في المعالجة الرقمية للإشارات. وسنرى في هذا الجزء كيفية إجراء أو تنفيذ هذه العملية والخواص الشهيرة لها ، وسنرى ذلك من خلال المثال التالي.

مثال رقم (٣،٨): حساب المجموع الالتفافى convolution على التتابعين x[n] و h[n] الموضحين في الشكل رقم (٣،٢٢).

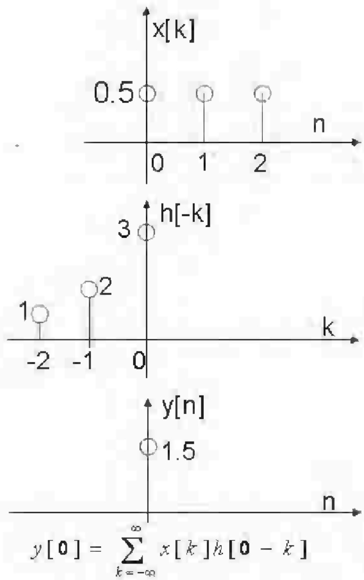
١- بوضع n = 0 في المعادلة رقم (٣،٣١) نحصل على معادلة الخرج التالية :

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-k] \qquad (٣،٣٤)$$

من هذه المعادلة نرى أن عينة الخرج y[0] تساوى حاصل ضرب x[k] في معكوس التتابع h[k] وهو التتابع h[-k] لكل قيم k. الشكل رقم (٣،٢٣). يبين هذه الخطوة وعينة الخرج الناتجة y[0].



الشكل رقم (٣،٢٢). تتابعين مطلوب إجراء المجموع الالتفافي عليهما.

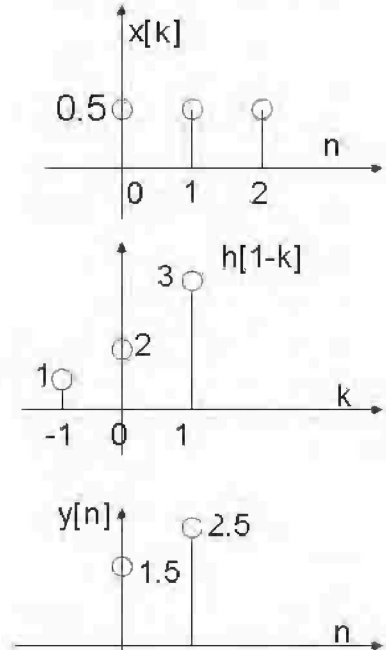


الشكل رقم (٣،٢٣). الخطوة الأولى وهى حساب y[0].

٢- بوضع n = 1 في المعادلة رقم (٣،٣١) نحصل على عينة الخرج y[1] التالية :

$$y[1]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[1-k] \qquad (٣،٣٥)$$

لاحظ أن h[1-k] هي h[-k] بعد إزاحتها ناحية اليمين عينة واحدة. الشكل رقم (٣،٣٤)يبين خطوة حساب y[1].

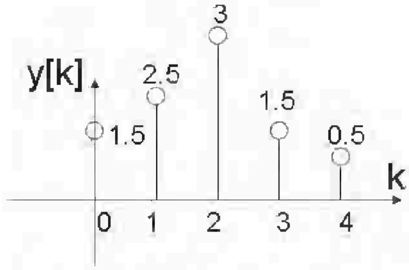


$$y[1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[1-k]$$

الشكل رقم (٣،٢٤). الخطوة رقم (٢) وهي حساب y[1].

٣- نضع n = 2 ثم n = 3 وهكذا وفي كل مرة نزيح h[-k] ناحية اليمين بمقدار عينة واحدة ونحسب في كل مرة حاصل ضرب x[k] في h[n-k] لجميع قيم k.

٤- نستمر في عملية الإزاحة كما في الخطوة رقم(٣) حتى يتم إزاحة h[-k] خارج نطاق x[k] تماماً حيث عندها يكون حاصل ضرب هذين التتابعين صفراً وبذلك تنتهي عملية حساب المجموع الالتفافي. الشكل رقم (٣،٢٥) يبين النتيجة النهائية للمثال السابق حاول تتبعها وحسابها عينة بعينة.



الشكل رقم (٣,٢٥). النتيجة النهائية لمثال رقم (٣,٨).

(٣,٨,٥) خواص عملية الجمع الالتفافي

١- طول كل من التابعين اللذين تجرى عليهما عملية الجمع الالتفافي يجب أن يكونا محددي الطول، وإلا إذا كان أحدهما لا نهائي فلن يمكن حساب نتيجة هذه العملية.

٢- بفرض أن أحد التابعين كان طوله هو M والتابع الثاني طوله هو N فإن التابع الناتج عن عملية الجمع الالتفافي سيكون طوله هو M+N-1. فمثلاً في المثال رقم (٣,٨) كانت M=3 وN=3 وعلى ذلك كان طول التابع الناتج يساوي ٥ كما في الشكل رقم (٣,٢٥).

٣- عملية الجمع الالتفافي عملية تبادلية commutative، أي أن ترتيب إجراء العملية لا يهم:

$$x_1[n]*x_2[n]=x_2[n]*x_1[n]$$

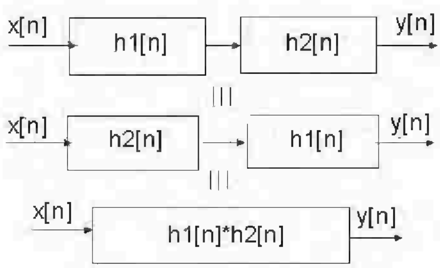
٤- عملية الجمع الالتفافي عملية انضمامية associative، أي يمكن إجراؤها على تابعين منضمين في عملية جمع التفافي أخرى:

$$(x_1[n]*x_2[n])*x_3[n]=x_1[n]*(x_2[n]*x_3[n])$$

٥- عملية الجمع الالتفافي عملية قابلة للتوزيع distributive ، أي أن إجراء عملية الجمع الالتفافي على مجموع تتابعين وتتابع آخر تساوي مجموع عمليتي الجمع الالتفافي على هذا التتابع وكل من التتابعين الآخرين على حده، ويمكن توضيح ذلك كما يلي :

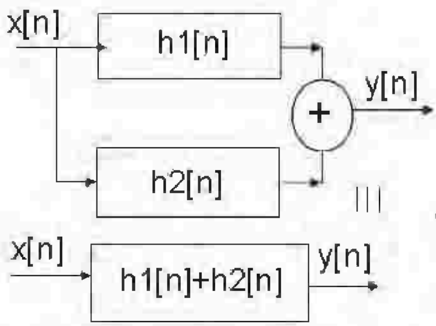
$$x_1[n]*(x_2[n]+x_3[n])=x_1[n]*x_2[n]+x_1[n]*x3[n]$$

٦- توصيل نظامين خطيين ثابتين إزاحياً LTI على التوالي يكافئ عملية الجمع الالتفافي على استجابة الصدمة لكل منهما. الشكل رقم (٣،٢٦) يبين ذلك.



الشكل رقم (٣،٢٦). توصيل نظامين خطيين على التوالي.

٧- توصيل نظامين خطيين ثابتين إزاحياً LTI على التوازي يكافئ مجموعهما. الشكل رقم (٣،٢٧). يبين هذا النوع من التوصيل.



الشكل رقم (٣,٢٧). توصيل نظامين خطيين على التوازي.

مثال (٣,٩). احسب المجموع الالتفافي للتتابعين $h[n]=a^n u[n]$ و $x[n]=u[n]$ حيث $0>a<1$. بتطبيق قانون المجموع الالتفافي يمكن كتابة: $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$

وبالتعويض عن كل من التتابعين يمكن كتابة التتابع الناتج $y[n]$ كما يلي:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u[k]u[n-k]$$

التتابع $u[k]$ يساوي صفراً لكل قيم k السالبة، وذلك من طبيعة تتابع الخطوة، ويساوى واحد لكل قيم k الموجبة. بنفس الطريقة يمكن القول بأن التتابع $u[n-k]$ يساوي صفراً لكل قيم $(n-k)$ السالبة ويساوي واحداً لكل قيم $(n-k)$ الموجبة، أي لكل قيم k التي تحقق $0\le k\le n$. وعلى ذلك يمكن كتابة تتابع الخرج $y[n]$ في المعادلة السابقة بعد تغيير حدود رمز عملية الجمع كما يلي:

$$y[n]=\sum_{k=0}^{n} a^k=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

وبما أن هذا التتابع موجود فقط لكل قيم n الموجبة فإنه يمكن كتابة التتابع السابق كما يلي :

$$y[n]=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}u[n]$$

(٣,٨,٦) بعض خواص الأنظمة الخطية الثابتة إزاحياً LTI

لقد رأينا فيما سبق الخواص التي نستخدمها لتصنيف الأنظمة عامة وهنا سنطبق بعض هذه الخواص على الأنظمة الخطية الثابتة إزاحيا بالذات :

١- خاصية الاستقرار للأنظمة الخطية الثابتة إزاحياً. لقد رأينا فيما سبق أن النظام يكون مستقرا إذا كان يعطى خرجاً محكوماً لكل دخل محكوم ، وبتطبيق ذلك على هذا النوع من الأنظمة يمكننا كتابة ما يلي :

$$|y[n]|=\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]x[n-k]\right|\le\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]||x[n-k]| \qquad (٣,٣٧)$$

بفرض أن تتابع الدخل x[n] كان محكوماً ، ولذلك فإن |x[k] ≤Bx| حيث Bx هي أي ثابت ، فإن المعادلة رقم (٣,٣٦) يمكن إعادة كتابتها كما يلي :

$$|y[n]|\le Bx\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]| \qquad (٣,٣٨)$$

من هذه المعادلة نجد أنه لكي يكون الخرج y[n] محكوماً فإن تتابع استجابة الصدمة h[n] يجب أن يكون محكوماً ، أي أن |h[n] ≤Sx| حيث Sx هي أي ثابت. في هذه الحالة يمكن كتابة المعادلة رقم (٣,٣٧) كالتالي :

$$|y[n]| \leq BxSx \quad (٣,٣٨)$$

باختصار يمكن القول إن أي نظام خطي ثابت إزاحياً لكي يكون مستقراً فإن استجابة الصدمة لهذا النظام يجب أن تكون محكومة أيضاً.

٢- خاصية السببية للأنظمة الخطية الثابتة إزاحياً: لقد عرفنا الأنظمة السببية causal سابقا على أنها الأنظمة التي لا يعتمد خرجها الحالي على عينات مستقبلية للدخل. سنستنتج هنا هذا الشرط بالنسبة للأنظمة الخطية الثابتة إزاحياً بالذات. افترض التتابعين التاليين :

$$x_1[n]=x_2[n], \quad n\leq n0 \quad (٣,٣٩)$$

بفرض أن هذين التتابعين اُستخدما كدخل لنظام خطي ثابت إزاحياً، فإن العينة y[n0] لخرج هذا النظام بناء على الدخلين $x_1[n]$ و $x_2[n]$ يمكن كتابتهما كالتالي :

$$y_1[n0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x_1[n0-k] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x_1[n0-k] + \sum_{k=-\infty}^{-1} h[k]x_1[n0-k] \quad (٣,٤٠)$$

$$y_1[n0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x_2[n0-k] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x_2[n0-k] + \sum_{k=-\infty}^{-1} h[k]x_2[n0-k] \quad (٣,٤١)$$

لكي يكون الخرج $y_2[n0]$ مساوياً للخرج $y_1[n0]$ فإن الدخل $x_2[n0-k]$ يجب أن يساوي $x_1[n0-k]$ وهذا محقق من المعادلة رقم (٣,٣٩) لكل قيم k>0، وعلى ذلك فإن الشق الأول من المعادلة رقم (٣,٤٠) سيساوي الشق الأول من المعادلة رقم (٣,٤١). المشكلة هي مع الشق الثاني في كل من المعادلتين السابقتين حيث تكون k سالبة في هذه الحالة. في هذه الحالة ستخرج الكميتان $x_1[n0-k]$ و $x_2[n0-k]$ عن حدود المعادلة رقم

(٣،٣٩) لأن n0-k في هذه الحالة سيكون أكبر من n0 لأن k سالبة. وعلى ذلك فالحالة الوحيدة التي يمكن عندها أن تتساوى المعادلتين رقمي(٣،٤٠) و (٣،٤١) هي أن يكون h[k]=0 في هذا الشق من المعادلتين. **وعلى ذلك يمكننا كتابة شرط السببية للأنظمة الخطية الثابتة إزاحياً LTI وهو أن يكون h[n]، استجابة الصدمة للنظام، تساوى صفراً لكل قيم n السالبة.**

٣- تصنيف الأنظمة الخطية الثابتة إزاحياً على حسب طول استجابة الصدمة h[n]. يسمى النظام "ذو استجابة صدمية محدودة الطول" Finite Impulse Response, FIR إذا كانت استجابة الصدمة لهذا النظام محدودة الطول. أما إذا كان طول استجابة الصدمة غير محدود ففي هذه الحالة نطلق على النظام أنه "ذو استجابة صدمية غير محدودة" Infinite Impulse Response, IIR. الأمثلة على كل من هذين النوعين كثيرة وسندرس مرشحات عديدة على كل منهما في الفصول القادمة.

٤- تصنيف الأنظمة الخطية الثابتة إزاحياً على حسب طريقة حساب الخرج:

إذا كانت أي عينة من الخرج يمكن حسابها من عينة الدخل الحالية والعينات السابقة للدخل فقط ، فإن هذا النظام يسمى نظاماً غير تكراري nonrecursive. بينما إذا كانت عينة الخرج يتم حسابها بمعرفة عينة الدخل الحالية والعينات السابقة من الدخل والخرج فإن هذا النظام يسمى نظاماً تكرارياً recursive. من أمثلة الأنظمة غير التكرارية النظام التالي :

$$y[n] = \sum_{k=N1}^{N2} h[k]x[n-k] \qquad (٣،٤٢)$$

بينما من أمثلة الأنظمة التكرارية النظام التالي :

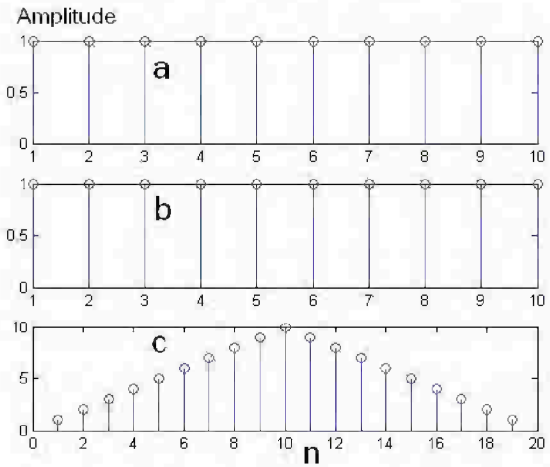
$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} \frac{d_k}{d_0} y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} \frac{p_k}{d_0} x[n-k] \qquad (٣،٤٣)$$

(٣,٩) تطبيقات على برنامج MATLAB

١ - استخدام MATLAB في حساب المجموع الالتفافي convolution : الدالة C= CONV(A, B) تحسب المجوع الالتفافي بين المتجهين A وB. المتجه الناتج C يكون طوله مساوياً لمجموع طولي المتجهين AوB ناقص واحد (طول A+ طول B –1). المتجهات A وB أحادية الأبعاد ويمكن أن تكون لها أكثر من بعد.

مثال (٣,٤١): هذا المثال يوضح برنامج يحسب المجموع الالتفافي لمتجهين (إشارتين) كل منهما عبارة عن متجه الخطوة مكون من ١٠ عينات. المتجه الناتج c يحتوي على ١٩ عينة كما في الشكل رقم (٣,٢٨) الذي يوضح المتجهين a و b والمتجه الناتج c.

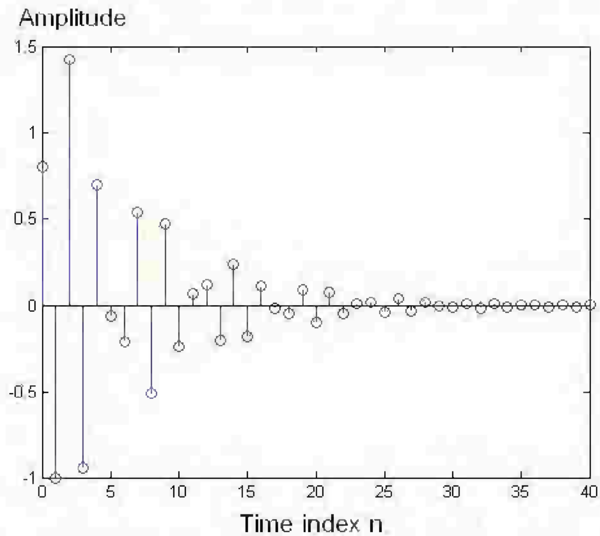
```
%convolution of two sequences
a=[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1];
b=[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1];
c=conv(a,b);
subplot(3,1,1);
stem(a);
subplot(3,1,2);
stem(b);
subplot(3,1,3);
stem(c)
```



الشكل رقم (٣,٢٨). المجموع الالتفافي لتتابعين.

٢- استخدام MATLAB في حساب استجابة الدفعة الصدمة impulse response : واستجابة الخطوة step response للنظم الخطية الثابتة إزاحيا. المعادلة رقم (٣,٤٨) تقدم صورة عامة لهذا النوع من الأنظمة. استجابة الصدمة هي خرج النظام عندما يكون دخله هو الصدمة أو تتابع العينة الواحدة. لذلك فإنه بوضع x[n]=δ[n] في المعادلة (٣- ٤٣) فإن الخرج y[n] في هذه الحالة سيمثل استجابة الصدمة h[n] لهذا النظام. الدالة y=filter(p,d,x) في MATLAB تحسب خرج النظام (مرشح filter) الذي دخله هو التتابع x وp هي معاملات عينات الدخل x[n-k] وd هي معاملات عينات الخرج y[n-k] كما في المعادلة (٣,٤٣). البرنامج التالي يحسب استجابة الصدمة للنظام التالي:

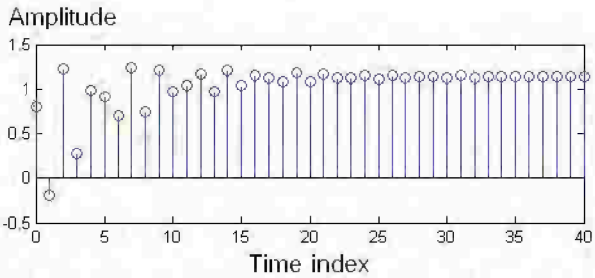
$$y[n]=-0.7y[n-1]+0.45y[n-2]+0.6y[n-3]+0.8x[n]-0.44x[n-1]+0.36x[n-2]+0.02x[n-3] \quad (٣,٤٤)$$



الشكل رقم (٣,٢٩). حساب استجابة الصدمة لنظام المعادلة رقم (٣,٤٤).

البرنـامج الـذي سيحـسب استجابة الـصدمة باسـتخدام الدالـة filter سـيكون كالتالي :

```
%Calculation of impulse response using the filter function
L=41; % length of of output sequence
num=[0.8  -0.44  0.36  0.02] ;
den=[1  0.7  -0.45  -0.6] ;
x=[1 zeros(1,L-1)] ;
y=filter(num, den, x) ;
n=0:1:L-1 ;
stem(n,y) ;
xlabel('time index n') ;
ylabel('Amplitude') ;
```



الشكل رقم (٣،٣٠). حساب استجابة الخطوة لنظام المعادلة رقم (٣،٤٤).

لاحظ في البرنامج السابق كيف تم التعبير عن دالة العينة الواحدة باستخدام الأمر:

```
x=[1 zeros(1,L-1)] ;
```

يمكن حساب استجابة الخطوة للنظام بتغيير هذا الأمر ليمثل دالة الخطوة كما في البرنامج التالي:

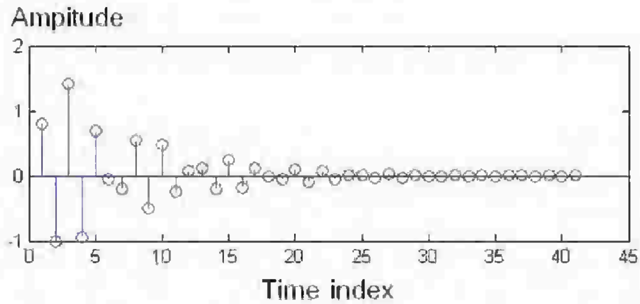
```
%Calculation of step response using the fiter function
L=41; % length of of output sequence
num=[0.8  -0.44  0.36  0.02] ;
den=[1  0.7  -0.45  -0.6] ;
x=[ones(1,L)] ;
y=filter(num, den, x) ;
n=0:1:L-1 ;
stem(n,y) ;
xlabel('time index n') ;
ylabel('Amplitude') ;
```

هناك أيضاً الدالة impz التي تحسب استجابة الصدمة لنظام معطى بدلالة دالة العبور أو الانتقال transfer function التي تعطى علاقة الخرج بالدخل في النطاق z ((y(z)/x(z)=A/B). حيث كل من A وB عبارة عن حدود كثيرة في المتغير z. معادلة النظام رقم (٣،٤٤) يمكن إعادة كتابتها في صورة دالة عبور كما يلي:

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{0.8-0.44Z^{-1}+0.36Z^{-2}+0.02Z^{-3}}{1+0.7Z^{-1}-0.45zZ^{-2}-0.6Z^{-3}} \qquad (٣،٤٤)$$

البرنامج التالي يحسب استجابة الصدمة للنظام السابق باستخدام الدالة impz( ) بدلاً من الدالة filter( ) كما سبق.

```
%Impulse response of a rational function
L=41; % length of of output sequence
num=[0.8 -0.44 0.36 0.02];
den=[1 0.7 -0.45 -0.6];
[y t]=impz(num,den,L);
subplot(2,1,1);
stem(y);
xlabel('time index');
ylabel('Amplitude');
```



الشكل رقم (٣,٣١).: حساب استجابة الصدمة باستخدام الدالة impz().

(٣,١٠) تمارين

١- ارسم كل من الدوال التالية :

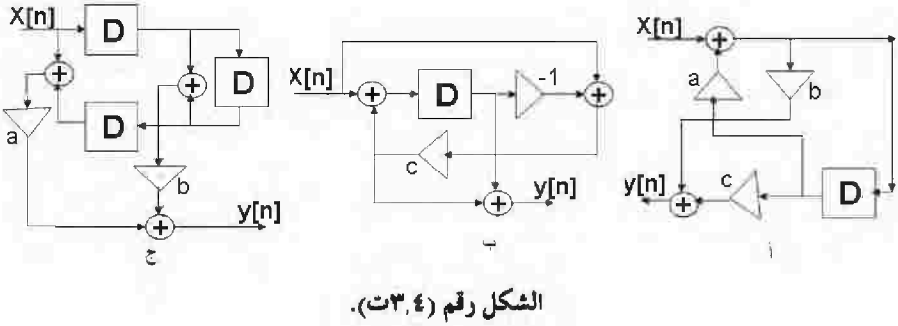
a) $x[n]=2\delta[n-3]-3\delta[n+2]$ b) $x[n]=3\sin(0.2\pi n)u[n]$ c) $x[n]=3\sin(2.2\pi n)u[n]$
d) $x[n]=3\sin(1.8\pi n)u[n]$ e) $x[n]=(0.5)^n u[n]$ f) $x[n]=u[n-2]$
g) $x[n]=u[-n+2]$ h) $x[n]=u[-n-2]$

٢- ارسم التتابع [0 0 0 1 2 3 0 0 $\underline{0}$ 0 0]، لاحظ أن العينة التي تحتها خط تمثل x[0].

من هذا التتابع ارسم التتابعات التالية : x[n-2] وx[n+2] وx[-n-1] وx[-n] وx[2n].

٣- إذا كان التتابع g[n] تتابعاً زوجياً والتتابع h[n] تتابعاً فردياً، فأي التتابعات التالية زوجي وأيها فردي : $x_1[n]=g[n].g[n]$ و $x_2[n]=g[n].h[n]$ و $x_3[n]=h[n]h[n]$.

٤- أكتب علاقة الخرج y[n] بالدخل x[n] في كل من الأنظمة الموضحة في الشكل رقم (٣,٤ت).



الشكل رقم (٣,٤ت).

٥- احسب الزمن الدوري period لكل من التتابعات التالية وبين أيها دوري وأيها ليس دوري:

a) $x[n]=3\sin(0.05\pi n)$ b) $x[n]=-3\sin(0.055\pi n)$

d) $x[n]=5\cos(0.6\pi n)$ c) $x[n]=3\sin(0.05\pi n)+3\sin(0.12\pi n)$

٦- التتابع y[n] هو خرج النظام الذي دخله هو التتابع x[n] في كل مما يلي، حدد إذا كان كل من الأنظمة التالية ١- خطى ٢- سببي ٣- مستقر:

a) $y[n]=Ax^2[n]$ b) $y[n]=Ax[n]+B$ c) $y[n]=Ae^{-\pi n}$

d) $y[n]=Ax[n+1]+Bx[n-1]$ e) $y[n]=Ax[n]x[n-1]$

f) y[n]=median (x[n], x[n-1], x[n-2]) g) y[n]=minimum (x[n], x[n-3])

٧- إذا كان أحد الأنظمة ممثلا بالمعادلة الفرقية التالية:

$$y[n]=3y_2[n-1]-nx[n]+4x[n-1]-2x[n+1] \quad , n\geq 0$$

أ) هل هذا النظام خطى؟ وضح؟ ب) هل النظام ثابت إزاحيا؟ اشرح؟

ج) هل النظام سببى؟اشرح؟ د) هل النظام تكرارى recursive أم لا؟

٨- في كل مما يأتي $x_1[n]$ و $x_2[n]$ تتابعان المجموع الالتفافي لهما هو y[n]، احسب y[n] في كل حالة:

a) $x_1[n]=u[n]-u[n-N]$, $x_2[n]=nu[n]$ b) $x_1[n]=u[n-1]-u[n-3]$, $x_2[n]=u[n+3]-u[n+1]$

c) $x_1[n]=(0.5)^n u[n]$, $x_2[n]=x1[n]$ d) $x_1[n]=2^n u[-n-1]$, $x_2[n]=4^n u[-n-1]$

٩- احسب $y[n]=x_1[n]*x2[n]$ حيث $x_1[n]=\delta[n]+2\delta[n-1]+3\delta[n-2]+4\delta[n-3]$ و $x_2[n]=\delta[n+1]-2\delta[n]+\delta[n-1]$. احسب y[n] مرة يدوياً ومرة باستخدام MATLAB.

١٠- وضح أن المجموع الالتفافي لتتابع طوله M وآخر طوله N يعطي تتابعاً طوله M+N-1.

١١- افترض التتابع x[n] الذي طوله N من العينات والمعطي بالعلاقة التالية:

$$x[n]=\begin{cases}1 & 0\leq n\leq N-1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

احسب $y[n]=x[n]*x[n]$ وبين أن هذا التتابع سيكون رأسه مثلثاً عند العينة N.

حدد العينات التي قيمتها N/4 وN/2 وN.

١٢- افترض التابع x[n] كالتالي :

$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le 0.5\,N-1 \\ -1 & 0.5\,N \le n \le N-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

حدد رقم ومقدار العينة ذات أكبر قيمة موجبة ، ورقم ومقدار العينة ذات أكبر قيمة سالبة في التابع $y[n]=x[n]*x[n]$.

١٣- افترض المعادلة الفرقية التالية التي تمثل أحد الأنظمة :

$y[n]+2y[n-1]+y[n-2]=x[n]$ حيث $y[n]=0$ لكل قيم n السالبة :

أ) احسب y[n] إذا كانت $x[n]= \delta[n]$.

ب) احسب y[n] إذا كانت $x[n]= u[n]$.

ج) احسب y[n] إذا كانت $x[n]= u[n]-u[n-2]$.

د) ما هي استجابة الصدمة h[n] لهذا النظام.

هـ) ما هي استجابة الخطوة S[n] لهذا النظام.

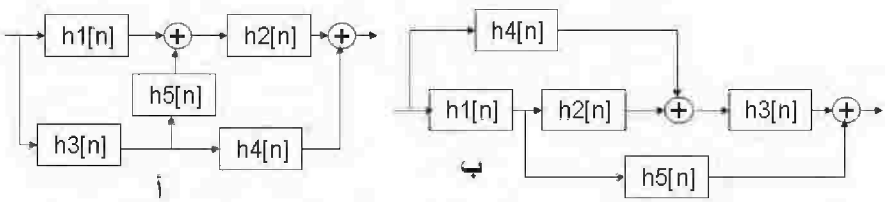
و) هل تعتقد أن هذا النظام مستقر ؟

١٤- استجابة الصدمة لأحد الأنظمة هي : $h[n]=2^{-n}u[n]$ ، احسب وارسم خرج هذا النظام y[n] إذا كان الدخل $x[n]= 2\delta[n]+ 4\delta[n-1]+ 4\delta[n-2]$. هل هذا النظام مستقر؟ هل هذا النظام سببي؟

١٥- استجابة الصدمة لأحد الأنظمة هي : $h[n]=3(0.25)^{-n}u[n-1]$ ، هل هذا النظام مستقر؟ هل هذا النظام سببي؟ هل النظام من النوع المحدود الطول أم اللا محدود ، FIR أم IIR ؟

١٦- أكتب معادلة الاستجابة الصدمية الكلية للأنظمة المركبة الموضحة في

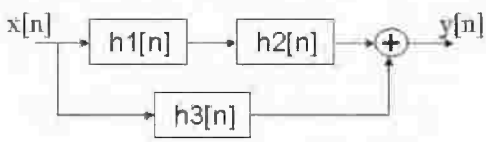
الشكل رقم (٣,١٦ت).



الشكل رقم (٣,١٦ت).

١٧- احسب الاستجابة الصدمية الكلية للنظام الموضح في الشكل رقم (٣,١٧ت). إذا كانت الاستجابة الصدمية للأنظمة الفرعية تعطى بالعلاقات التالية:

$$h1[n]=\delta[n-1]+3\delta[n]$$
$$h2[n]=\delta[n-2]+2\delta[n]$$
$$h3[n]=6\delta[n-6]+7\delta[n-4]-3\delta[n-1]+\delta[n]$$



الشكل رقم (٣,١٧ت).

١٨- اكتب برنامج MATLAB يرسم الدوال: δ[n] و u[n] و nu[n]. ارسم ١٠٠ عينة من كل تابع.

١٩- اطلب المساعدة help وتعرف على الدوال sawtooth وsquare وارسم ١٠٠ عينة من كل منها بعد التعرف على معاملات كل دالة.

٢٠- استخدم الـ MATLAB لرسم ٥٠ عينة من الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للدالة $1.5e^{(-0.3+j\pi/3)n}$.