الفصل الرابع

تحويل Z
Z Transform

(٤,١) مقدمة

إن عملية تحويل أي إشارة من نطاق إلى نطاق آخر من العمليات المهمة جداً حيث إن عملية الانتقال بالإشارة إلى النطاق الجديد يتيح للمستخدم التعرف على الكثير من خواص الإشارة التي لا يمكن التعرف عليها في النطاق الأول، كما أنه يمكن إجراء الكثير من العمليات على الإشارة وهي في النطاق الجديد وقد لا يمكن إجراؤها والإشارة في النطاق الأول. بعد ذلك يمكن إرجاع الإشارة إلى نطاقها الأول. تماماً مثل تحويل الماء إلى ثلج، حيث وهو في صورته الثلجية يمكن أن نتعامل معه بالصورة الثلجية ونستفيد من الكثير من خواصه وهو في هذه الصورة، بعد ذلك يمكن إرجاعه إلى صورته السائلة مرة أخرى.

تحويل Z من التحويلات الشهيرة جداً في التعامل مع الإشارات الرقمية. هذا التحويل يمكن النظر إليه على أنه حالة عامة لتحويل فورير الذي سندرسه في الفصل القادم. بتحويل أي إشارة إلى النطاق Z يمكن دراسة مسلكها مع التردد كما هو الحال في تحويل فورير. بتحويل استجابة أي نظام إلى النطاق Z يمكن تحديد أصفار وأقطاب النظام ومن ثم يمكن تحديد هل النظام مستقر أم لا؟ من دراستنا لهذا النظام سنرى أنه

يكافئ تماما تحويل لابلاس في الأنظمة التناظرية، وكما كان تحويل لابلاس يستخدم في حل المعادلات التفاضلية فإن تحويل Z يستخدم في حل المعادلات الفرقية difference equations. باختصار إن تحويل Z أداة مهمة جداً في تحليل وتصميم الأنظمة الرقمية.

(٤,٢) تحويل Z
Z transform

تحويل Z لأي تتابع x[n] يرمز له بالرمز X(Z) ويعطى بالعلاقة التالية :

$$X(Z)= Z(x[n])= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]Z^{-n} \qquad (٤,١)$$

حيث Z متغير مركب complex يمكن التعبير عنه بإحدى الصور التالية :

$$Z= \mathrm{Real}(z) + \mathrm{Imaginary}(z) \qquad (٤,٢)$$

$$Z= re^{jw} \qquad (٤,٢)$$

$$\mathrm{Real}(z)= r\cos(w),\ \ \mathrm{Imaginary}(z)=r\sin(w) \qquad (٤,٣)$$

صورة المتغير z في المعادلة رقم (٤,٢) تسمى الصورة الكارتيزية cartesian، وصورته في المعادلة رقم (٤,٣) تسمى الصورة القطبية polar .r هي مقدار المتغير و w هي السرعة الزاوية له.

في المعادلة رقم (٤,١) يمكن الحصول على تحويل فورير من تحويل z بالتعويض عن z بصورتها القطبية كما يلي :

$$x(re^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}e^{-jwn} \qquad (٤,٥)$$

بوضع r=1 في المعادلة السابقة نحصل على تحويل فورير كما يلي :

$$x(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jwn} \qquad (٤,٦)$$

وهذه هي صورة تحويل فورير كما سنرى في الفصل القادم. أي أن تحويل فورير هو نفسه تحويل Z محسوباً على دائرة الوحدة ، r =1.

تحويل z لأي تتابع x(z) يكون له منطقة تقارب region of convergence. منطقة التقارب هي مجموعة قيم z في المستوى z التي يتقارب عندها هذا التحويل أو يؤول إلى قيمة محددة. هذا يعني أن مقدار المجموع الموجود في المعادلة رقم (٤,١) يجب أن يؤول إلى كمية محددة ، ويمكن التعبير عن ذلك بالمعادلة التالية :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x[n]Z^{-n} \right| < \infty \qquad (٤,٧)$$

وهذا هو شرط منطقة التقارب. منطقة التقارب تكون عادة في صورة حلقات دائرية حول نقطة الأصل في المستوى z المركب ، ويمكن التعبير عن ذلك كما يلي :

$$R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

وهذا يعنى أن منطقة التقارب تكون حلقة نصف قطرها |z| يتراوح بين القيمة R_{x-} التي من الممكن أن تكون صفراً ، والقيمة R_{x+} التي من الممكن أن تقارب المالانهاية ولا تساويها. تحويل z كمية تحليلية analytical مستمرة معرفة عند جميع النقاط داخل منطقة التقارب.

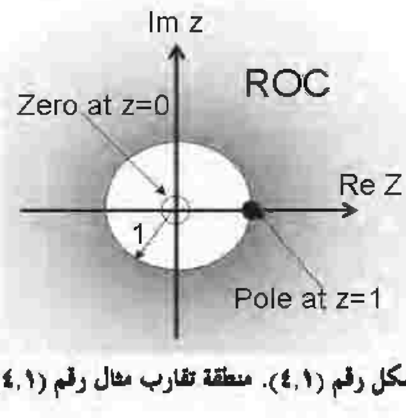
مثال رقم (٤,١) : حساب تحويل z لتتابع الخطوة u[n]. تحويل z لهذا التتابع

يمكن كتابته كما يلي :

$$Z(u[n]) = u(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n]Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} Z^{-n} = \frac{1}{1-Z^{-1}} \ , \ | \ 1 \leq |Z| \leq \infty \qquad (٤,١)$$

في المعادلة رقم (٤,٨) عندما z=1 فإن 1/(1-z) تساوى مالانهاية وهذه القيمة للمتغير z نقول عليها أنها قطب pole، أي أن القطب في المستوى z هو قيمة z التي تصبح عندها الدالة تساوى مالانهاية. بنفس الطريقة نعرف الصفر zero في المستوى z على أنه قيمة z التي تصبح عندها الدالة تساوي صفراً، وسيكون لنا كلاماً كثيراً عن أقطاب وأصفار أي دالة فيما بعد فى هذا الفصل.

في المعادلة رقم (٤,٨) لو بدأنا بقيمة z=0 (نقطة الأصل في المستوى z) كما في الشكل رقم (٤,١) فإنه مع زيادة قيمة z فإن مقدار u(z) في المعادلة رقم (٤,٨) يزداد وذلك لأننا مع زيادة z نقترب من قطب المعادلة. لذلك فإن المنطقة التي تكون فيها قيمة z<1 لا تصلح لأن تكون منطقة تقارب أبداً. لو خرجنا خارج دائرة الوحدة (z>1) فإنه مع زيادة z فإن مقدار u(z) يقل باستمرار، لذلك فإن المنطقة خارج دائرة الوحدة في المستوى z تحد منطقة تقارب لهذه الدالة كما في الشكل رقم (٤,١).



الشكل رقم (٤,١). منطقة تقارب مثال رقم (٤,١).

مثال رقم (٤،١). حساب تحويل z للتتابع $x[n]=a^nu[n]$. تحويل z لهذا التتابع يمكن كتابته كما يلي:

$$Z(x[n]) = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n Z^{-n} = \frac{1}{1-aZ^{-1}} = \frac{Z}{Z-a}, \quad |a| \le |Z| \le \infty \qquad (٤،٩)$$

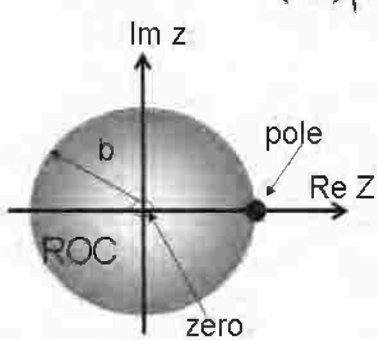
بالمقارنة مع المثال رقم (٤،١) فإن هذا التتابع سيكون له قطب عند z=a ومنطقة التقارب له ستكون خارج الدائرة التي نصف قطرها يساوى a.

مثال رقم (٤،٣): حساب تحويل z للتتابع $x[n]=-b^nu[-n-1]$. هذا التتابع تتابع يساري ، أي أنه موجود أو معرف لقيم n السالبة فقط نتيجة وجـــود تتابع الخطوة u[-n-1] فيه. تحويل z لهذا التتابع يمكن كتابته كما يلي:

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} b^n u[-n-1] Z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} b^n Z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (b/z)^n = -\sum_{m=1}^{\infty} (z/b)^m = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} (z/b)^m$$

$$= 1 - \frac{1}{1-z/b} = \frac{Z}{Z-b} \qquad |Z|<|b| \qquad (٤،١٠)$$

هذا التتابع له قطب عند z=b ومنطقة التقارب له هي المنطقة داخل دائرة نصف قطرها b كما في الشكل رقم (٤،٢).

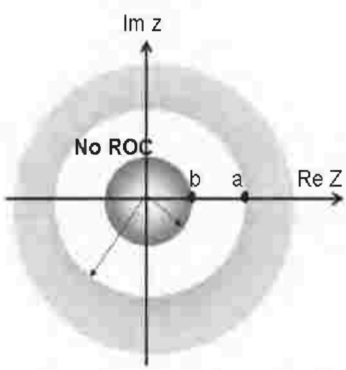


الشكل رقم (٤،١). منطقة تقارب مثال رقم (٤،١) تتابع يساري.

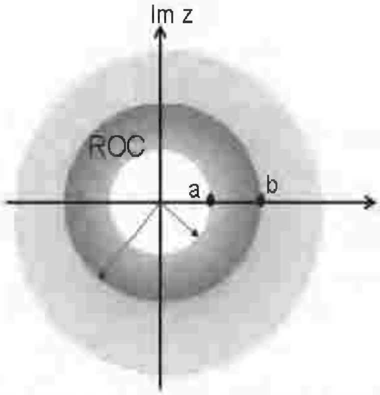
مثال رقم (٤,١): حساب تحويل z للتتابع $x[n] = a^n u[n]-b^n u[-n-1]$. هذا التتابع هو مجموع التتابعين السابقين. بنفس الخطوات السابقة يمكن التعويض في معادلة تحويل z حيث في النهاية سنحصل على المعادلة التالية:

$$X(Z) = \frac{Z}{Z-a} + \frac{Z}{Z-b} \qquad (٤,١١)$$

كما رأينا فإن منطقة التقارب في المثالين السابقين هي خارج دائرة نصف قطرها a للتتابع اليميني، وداخل دائرة نصف قطرها b للتتابع اليساري. لذلك فإن منطقة التقارب الناتجة ستكون تقاطع منطقتي التقارب للتتابعين السابقين. لذلك إذا كانت a>b فلن تتقاطع منطقتا التقارب ولن يكون هناك منطقة تقارب للتتابعين كما في الشكل رقم (٤,٣)، أما إذا كانت a<b فسوف تتقاطع منطقتا التقارب وستكون منطقة التقارب الكلية هي الكعكة الناتجة من تقاطع المنطقتين كما في الشكل رقم (٤,٤).



الشكل رقم (٤,٣). منطقتا التقارب غير متقاطعتين.



الشكل رقم (٤،٤). منطقتا التقارب متقاطعتان.

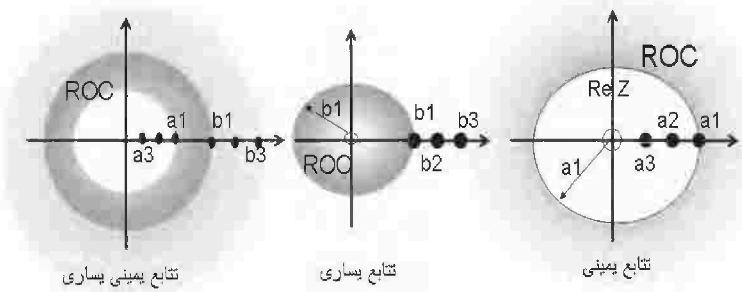
بصورة عامة فإن شرط التقارب سنعيد كتابته هنا مرة ثانية كما يلي:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[n]Z^{-n}\right| < \infty \qquad (٤،٣)$$

في المعادلة السابقة مع زيادة n فإن Z^{-n} تتناقص قيمتها، بفرض أن $x[n]=a^n$ فإنه مع زيادة n فإن x[n] ستزداد قيمتها. لذلك فإنه لكي نضمن تقارب المجموع في المعادلة رقم (٤،١٢) فإن معدل نقصان Z^{-n} يجب أن يكون أسرع من معدل زيادة a^n ويتم ذلك إذا كان $|Z|$ أكبر من $|a|$ وهذا هو شرط التقارب للتتابعات اليمينية. إذا كان التتابع يسارياً، أي أن n سالبة، فإن Z^{-n} ستزداد لأن n سالبة، وبفرض أن $x[n]=b^n$، فإنه مع زيادة n السالبة ستتناقص x[n]. لذلك فإنه لكي نضمن تقارب المجموع في المعادلة رقم (٤،١٢) فإن معدل زيادة Z^{-n} يجب أن يكون أقل من معدل نقصان b^n ويتم ذلك إذا كان $|Z|$ أصغر من $|b|$ وهذا هو شرط التقارب للتتابعات اليسارية كما رأينا في الأمثلة السابقة.

من ذلك نخلص أن تحويل Z عامة يجب ألا يحتوي على أي قطب في منطقة التقارب ويجب أن يكون دالة متصلة لها جميع التفاضلات في هذه المنطقة وهو كما

رأينا سيكون خارج دائرة نصف قطرها يساوى أكبر قطب إذا كان التتابع يمينياً، وستكون منطقة التقارب داخل دائرة نصف قطرها يساوى أصغر قطب إذا كان التتابع يسارياً، أما إذا كان التتابع يمينياً ويسارياً فإن منطقة التقارب ستكون كعكة محدودة بأكبر قطب للتتابع اليميني وأصغر قطب للتابع اليساري على أن يكون أكبر قطب للتتابع اليميني أصغر من أصغر قطب للتتابع اليساري وإلا فإنه لن تكون هناك منطقة تقارب. الشكل رقم (٤,٥) يبين الحالات الثلاث السابقة في حالة وجود أكثر من قطب.



الشكل رقم (٤,٥). أشكال مختلفة لتقارب تحويل z.

(٤,٣) خواص تحويل Z

سنقدم في هذا الجزء بعض خواص تحويل z دون إثبات لها وذلك لسهولتها ونشجع القارىء على أن يحاول في هذه الإثباتات بنفسه وذلك من المعادلة الأصلية للتحويل.

(٤,٣,١) خاصية الخطية Linearity

$$Z\{ax[n] + by[n]\} = aX(z) + bY(z)$$

تحويل Z لمجموع تتابعين يساوي مجموع التحويل لكل من التتابعين على حده. نطاق التقارب في هذه الحالة يساوي تقاطع منطقتي التقارب الخاصة بتحويل كل تتابع.

(٤,٣,٢) خاصية الإزاحة Shifting

$$Z(x[n+n0])=Z^{n0}X(z)$$

تحويل Z لتتابع مزاح بمقدار n0 يساوي تحويل Z للتتابع الأصلي مضروباً في Z^{n0}. نطاق التقارب لا يتغير عن نطاق التجارب الأصلي.

(٤,٣,٣) خاصية الضرب في تتابع أسي

$$Z(a^n x[n])=X(Z/a)$$

وهذا يعني توسيع أو تضييق كل المستوى Z بمقدار a. كل أصفار وأقطاب النظام تضرب في الكمية a ويتم توسيع حدود نطاق التقارب بنفس الكمية.

(٤,٣,٤) خاصية الضرب في n

$$Z(nx[n])=-Z\frac{dX(Z)}{dZ}$$

بنفس نطاق التقارب للتتابع x[n].

(٤,٣,٤) خاصية الالتفاف في النطاق الزمني Convolution

$$Z\{x[n]*y[n]\}=X(z)Y(z)$$

وهذه من الخواص المهمة والأكثر استخداماً. تحويل Z للمجموع الالتفافي لتتابعين في النطاق الزمني يساوي حاصل ضرب تحويل Z لكل من التتابعين. أحياناً يكون من الصعب حساب المجموع الالتفافي لتتابعين، في هذه الحالة يتم حساب تحويل Z لكل من التتابعين على حده وضربهما، ثم يتم حساب تحويل Z العكسي لناتج الضرب الذي سيساوي المجموع الالتفافي للتتابعين. منطقة التقارب الناتجة ستكون تقاطع منطقتي التقارب لتحويل كل من التتابعين.

(٤,٣,٦) خاصية الالتفاف في النطاق Z

$$Z\{x[n].y[n]\} = \frac{1}{2\pi j}\oint_{Cz} X(v)Y(z/v)v^{-1}dv$$

(٤,٣,٧) نظرية القيمة الابتدائية

بفرض أن X(Z) هي تحويل Z للتابع x[n] السببي فإنه يمكن كتابة النظرية التالية:

$$x[0] = \lim_{z\to\infty} X(Z)$$

(٤,٣,٨) نظرية القيمة النهائية

بفرض أن X(Z) هي تحويل Z للتابع x[n] السببي المستقر فإنه يمكن كتابة النظرية التالية:

$$\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to\infty}\left[\left(\frac{z-1}{z}\right)X(Z)\right]$$

(٤,٤) تحويل Z لبعض التتابعات المعروفة

الجدول رقم (٤,١) يبين تحويل Z لبعض التتابعات البسيطة والتي يمكن استخدامها مع خواص تحويل Z التي سبق ذكرها في استنتاج تحويلات Z لتتابعات أكثر تعقيداً. بعض التحويلات المذكورة في الجدول تم استنتاجها من قبل والبعض الآخر يمكن التدريب على استنتاجه.

(٤,٥) تحويل Z العكسي

Inverse Z Transform

إذا كان لدينا تحويل Z لتتابع معين ومنطقة التقارب له، فما هو التتابع الأصلي؟

هذا ما سنراه في هذا الجزء. هناك أكثر من طريقة للحصول التتابع الأصلي بمعرفة تحويل Z لهذا التتابع.

الجدول رقم (٤.١). تحويل Z لبعض التتابعات البسيطة.

منطقة التقارب	تحويلZ	التتابع	
Zكل المستوى	1	δ[n]	العينة الواحدة
|Z|>1 |Z|<1	Z/(Z-1) Z/(Z-1)	u[n] -u[-n-1]	الخطوة
|Z|>|a| |Z|<|b|	Z/(Z-a) Z/(Z-b)	$a^n u[n]$ $-b^n u[-n-1]$	التتابع الأسى
|Z|>|a|	$aZ/(Z-a)^2$	$na^n u[n]$	
|Z|>|a|	$aZ(Z+a)/(Z-a)^3$	$n^2a^n u[n]$	
	$aZ(Z^2+4az+a^2)/(Z-a)^4$	$n^3a^n u[n]$	
|Z|>1 |Z|>1	$\frac{z\sin w}{z^2-2z\cos w+1}$ $\frac{z^2-2\cos w}{z^2-2z\cos w+1}$	sin(wn) u[n] cos(wn) u[n]	التتابع الجيبى
|Z|>1	$\frac{z}{(z-1)^2}$	n u[n]	تتابع المطلع
|Z|>1	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	$n^2u[n]$	
|Z|>1	$\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$	$n^3u[n]$	

(٤،٥،١) باستخدام تكامل كوشي Cauchy Integral

نظرية كوشي تحدد قيمة التكامل على أي مسار مغلق يحتوي على نقطة الأصل في عكس اتجاه عقارب الساعة بالمعادلة التالية :

$$\frac{1}{2\pi j}\oint Z^{k-1}dz \begin{cases} =1 \; for k=0 \\ =0 \; for k\neq 0 \end{cases} \qquad (٤،١)$$

المعادلة الأصلية لحساب تحويل Z سنعيد كتابتها مرة ثانية كما يلي :

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x[n] Z^{-n}$$

بضرب طرفي المعادلة السابقة في ($Z^{k-1}/2\pi j$) والتكامل على مسار مغلق يحتوي على نقطة الأصل وداخل منطقة تقارب التحويل نحصل على المعادلة التالية:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint X(Z)Z^{k-1}dz = \frac{1}{2\pi j}\oint \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]Z^{-n+k-1}dz = \frac{1}{2\pi j}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\oint Z^{-n+k-1}dz \quad (٤,١)$$

في المعادلة رقم (٤,١٤) التكامل الموجود في أقصى يمين المعادلة يساوي صفراً تبعاً لنظرية كوشي عندما يكون الأس —n+k-1=-1 والذي يؤول إلى n=k، أي أن الطرف الأيمن سيكون له قيمة فقط عندما n=k وسيكون صفراً لجميع قيم n الأخرى. وعلى ذلك يمكن كتابة المعادلة رقم (٤,١٤) كالتالي:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint X(Z)Z^{n-1}dz = x[n] \quad (٤,١٥)$$

وهذه المعادلة تمثل تحويل Z العكسي حيث إنها تعطى التتابع x[n] بمعرفة تحويل Z له X(Z). هذه الطريقة في العادة تكون صعبة الاستخدام نتيجة وجود التكامل الذي يكون غالباً تكاملاً معقداً.

(٤,٥,٢) طريقة الكسور الجزئية Partial fraction expansion

في العادة يكون تحويل Z في صورة دالة من بسط ومقام ويمكن تحليل مقامها أو وضعه في صورة مقادير من الدرجة الأولى أو الثانية. بعد ذلك باستخدام الكسور

الجزئية يمكن فصل هذه المقادير لتكون في صورة مجموع مقادير بدلاً من صورة مضروب مقادير. هذه المقادير البسيطة يمكن تحديد تحويل Z العكسي لها بسهولة كما سنرى. عامة تحويل Z لأي دالة يمكن وضعه على الصورة التالية:

$$X(Z) = \frac{P(Z)}{D(Z)} \qquad (٤,١٦)$$

حيث كل من P(Z) و D(Z) كثيرة حدود polynomial في المتغير Z^{-1}. إذا كانت درجة البسط M في المعادلة رقم (٤,١٦) أكبر من درجة المقام N أو تساويها، فإنه في هذه الحالة يتم قسمة البسط على المقام وإعادة وضع المعادلة رقم (٤,١٦) على الصورة التالية:

$$X(Z) = \sum_{r=0}^{M-N} \eta_r Z^{-r} + \frac{P1(Z)}{D(Z)} \qquad (٤,١٧)$$

حيث درجة كثيرة الحدود P1(Z) أقل من درجة كثيرة الحدود D(Z). وفي هذه الحالة فإن الكسر P1(Z)/D(Z) يسمى كسراً سليماً proper. في العادة يكون تحويل Z كسراً مناسباً ولا تحتاج لعملية القسمة ويمكن أن يكون المقام D(Z) في صورة أقطاب poles بسيطة. سنعرف بعد قليل معنى القطب والصفر ولكن مبدئيا القطب هو قيمة Z التي تكون عندها الدالة X(Z) تساوي مالانهاية، والصفر هو قيمة Z التي تكون عندها X(Z) تساوي صفراً. في هذه الحالة يمكن كتابة معادلة X(Z) كما يلي:

$$X(Z) = \frac{P(Z)}{(1-a_1 Z^{-1})(1-a_2 Z^{-2}).....(1-a_N Z^{N})} \qquad (٤,١٨)$$

باستخدام نظرية الكسور الجزئية يمكن وضع المعادلة رقم (٤,١٨) على الصورة التالية:

$$X(Z)=\sum_{r=1}^{N}\frac{p_r}{(1-a_rZ^{-1})} \qquad (٤,١٩)$$

حيث الكمية p_r ثابت تسمى الباقي residue وتعطى بالمعادلة التالية :

$$p_r=(1-a_rZ^{-1})X(Z)\Big|_{z=a_r} \qquad (٤,٢٠)$$

كل مقدار من مجموعة المقادير الموجودة في المعادلة رقم (٤,١٩) عبارة عن تحويل Z لتتابع أسي يميني منطقة التقارب له هي $|Z|>|a_n|$ كما رأينا سابقاً، وعلى ذلك فإن تحويل Z العكسي للمعادلة رقم (٤,١٩) يمكن كتابته كما يلي :

$$x[n]=\sum_{r=1}^{N}p_r(a_r)^n u[n] \qquad (٤,٢١)$$

مثال رقم (٤,٥) : بفرض أن تحويل Z لأحد التتابعات يعطى بالعلاقة التالية :

$$X(Z)=\frac{z(z+2)}{(z-0.2)(z+0.6)}=\frac{1+2z^{-1}}{(1-0.2z^{-1})(1+0.6z^{-1})} \qquad (٤,٢٢)$$

باستخدام الكسور الجزئية وبتطبيق المعادلة رقم (٤,١٩) يمكن كتابة المعادلة السابقة على الصورة التالية :

$$X(Z)=\frac{p1}{(1-0.2z^{-1})}+\frac{p2}{1+0.6z^{-1}} \qquad (٤,٢٢)$$

حيث كل من p_1 و p_2 يتم حسابه بتطبيق المعادلة رقم (٤,٢٠) كما يلي :

$$p_1 = (1-0.2z^{-1})X(Z)\Big|_{z=0.2} = \frac{1+2z^{-1}}{(1+0.6z^{-1})}\Bigg|_{z=0.2} = 2.75$$

$$p_2 = (1+0.6z^{-1})X(Z)\Big|_{z=0.6} = \frac{1+2z^{-1}}{(1+0.2z^{-1})}\Bigg|_{z=0.6} = -1.75$$

وعلى ذلك فالمعادلة رقم (٤,٢٢) يمكن كتابتها كما يلي :

$$X(Z) = \frac{2.75}{(1-0.2z^{-1})} - \frac{1.75}{(1+0.6z^{-1})} \qquad (٤,٢٣)$$

كل من المقدارين في الطرف الأيمن من المعادلة رقم (٤,٢٣) عبارة عن تحويل Z لتتابع أسي معروف كما رأينا سابقا وكما في الجدول رقم (٤,١)، وعلى ذلك يمكن كتابة التتابع x[n] كما يلي :

$$x[n]=2.75(0.2)^n u[n] - 1.75(0.6)^n u[n]$$

من الممكن أن يكون أي قطب في المعادلة العامة رقم (٤,١٩) له درجة أعلى من الدرجة الأولى وفى هذه الحالة نعيد كتابة الصورة العامة للمعادلة رقم (٤,١٩) كما يلي :

$$X(Z) = \sum_{r=1}^{N-L} \frac{p_r}{1-a_r z^{-1}} + \sum_{s=1}^{L} \frac{q_s}{(1-bz^{-1})^s} \qquad (٤,٢٤)$$

حيث q_s تعطى بالعلاقة التالية :

$$q_s = \frac{1}{(L-s)!(-b)^{L-s}} \frac{d^{L-s}}{d(z^{-1})^{L-s}} \left[(1-bz^{-1})^L X(Z)\right]_{z=b} \qquad (٤,٢٥)$$

مثال رقم (٤،٦): احسب تحويل Z العكسي للدالة التالية:

$$X(Z)=\frac{z^2+z}{(z-0.5)^3(z-0.25)}$$

باستخدام نظرية الكسور الجزئية يمكن وضع المعادلة السابقة على الصورة:

$$\frac{X(z)}{Z}=\frac{z+1}{(z-0.5)^3(z-0.25)}=\frac{p_{11}}{(z-0.5)}+\frac{p_{12}}{(z-0.5)^2}+\frac{p_{13}}{(z-0.5)^3}+\frac{p_2}{(z-0.25)}$$

حيث الثوابت في المعادلة السابقة يمكن حسابها تبعاً للمعادلة (٤،٢٥) كما يلي:

$$p_{11}=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{z+1}{z-0.25}\right)\bigg|_{z=0.5}=80 \qquad p_{12}=\frac{d}{dz}\left(\frac{z+1}{z-0.25}\right)\bigg|_{z=0.5}=-20$$

$$p_{13}=\frac{z+1}{z-0.25}\bigg|_{z=0.5}=6 \qquad p_2=\frac{z+1}{(z-0.5)^3}\bigg|_{z=0.25}=-80$$

وعلى ذلك يمكن كتابة X(Z) كما يلي:

$$\begin{aligned}X(Z)&=\frac{80z}{(z-0.5)}-\frac{20z}{(z-0.5)^2}+\frac{6z}{(z-0.5)^3}-\frac{80z}{(z-0.25)}\\&=\frac{80}{(1-0.5z^{-1})}-\frac{20}{z(1-0.5z^{-1})^2}+\frac{6}{z^2(1-0.5z^{-1})^3}-\frac{80}{(1-0.25z^{-1})}\end{aligned}$$

وعلى ذلك يمكن كتابة x[n] كما يلي:

$$x[n]=80(0.5)^n u[n]-20n(0.5)^{n-1}u[n]+6n(n-1)(0.5)(0.5)^{n-2}u[n]-80(0.25)^n u[n]$$

يحتوي MATAB على بعض الأوامر (M files) التي يمكن بها حساب الكسور الجزئية وحساب تحويل Z العكسي وسنتكلم عن هذه الأوامر في نهاية الفصل.

(٤,٥,٣) طريقة القسمة المطولة Long division method

بأخذ تحويل Z لأي تتابع نحصل على متتابعة في Z^{-1} حيث Z^{-n} تقابل تحويل Z للمركبة n من التتابع. العكس من ذلك صحيح أيضاً، فإنه إذا كان لدينا كثيرة الحدود في المتغير Z^{-n} فإنها تمثل تحويل Z لتتابع معين x[n]. السؤال هو إذا كان تحويل Z معطى في صورة دالة كسرية فكيف نضعه على صورة كثيرة الحدود في Z^{-1}. يتم ذلك عن طريق القسمة المطولة كما في المثال التالي:

مثال (٤,٧): أفترض أن X(Z) هي تحويل Z للتتابع x[n] سنستخدم طريقة القسمة المطولة لحساب x[n] بمعلومية X(Z).

$$X(Z) = \frac{1+2z^{-1}}{1+0.4z^{-1}-0.12z^{-2}} \qquad (٤,٢٦)$$

تتم قسمة البسط على المقام كما يلي:

$$\begin{array}{l|llll}
 & 1 + 1.6Z^{-1} - 0.52Z^{-2} + 0.4Z^{-3} - 0.2224Z^{-4} + \ldots\ldots & & & \\
1+0.4Z^{-1}-0.12Z^{-2} & 1+2Z^{-1} & & & \\
\hline
 & 1 + 0.4Z^{-1} - 0.12Z^{-2} & & & \\
 & 1.6Z^{-1} + 0.12Z^{-2} & & & \\
 & 1.6Z^{-1} + 0.64Z^{-2} - 0.192Z^{-3} & & & \\
 & -0.52Z^{-2} + 0.192Z^{-3} & & & \\
 & -0.52Z^{-2} - 0.208Z^{-3} + 0.0624Z^{-4} & & & \\
 & 0.400Z^{-3} - 0.0624Z^{-4} & & & \\
 & 0.400Z^{-3} + 0.1600Z^{-4} - 0.0480Z^{-5} & & & \\
 & -0.2224Z^{-4} + 0.0480Z^{-5} & & & \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & &
\end{array}$$

من نتيجة عملية القسمة المطولة نرى أن:

$$X(Z) = 1 + 1.6Z^{-1} - 0.52Z^{-2} + 0.4Z^{-3} - 0.2224Z^{-4} + \ldots\ldots$$

وبذلك يمكن كتابة x[n] كما يلي :

$$x[n]=\delta[n] + 1.6\delta[n-1] - 0.52\delta[n-2] + 0.4\delta[n-3] - 0.2224\delta[n-4] + \ldots\ldots$$

أو التتابع x[n] :

$$x[n]=[\underline{1}\ \ 1.6\ \ -0.52\ \ 0.4\ \ -0.224\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ ]$$

(٤,٦) أقطاب وأصفار النظام في المستوى Z

لقد ذكرنا من قبل أن القطب pole لأي دالة هو قيمة Z التي تكون عندها قيمة الدالة تساوي مالانهاية، وأما الصفر zero فهو قيمة Z التي تكون عندها قيمة الدالة تساوي صفراً. أي دالة سواء كانت هذه الدالة عبارة عن إشارة دخل لنظام أو إشارة خرج من نظام أو حتى استجابة أي نظام، يمكن كتابتها على الصورة العامة التالية :

$$X(Z)=P(Z)/D(Z)$$

هذه الدالة يمكن التعبير عنها بالمعادلة التالية :

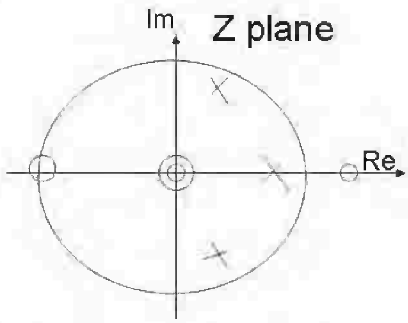
$$X(Z)=\frac{k(z-z1)(z-z2)(z-z3)\ldots\ldots..}{(z-p1)(z-p2)(z-p3)\ldots\ldots..} \qquad (٤,٢٧)$$

في المعادلة السابقة الثوابت z_1 و z_2 و z_3 و ... تسمى أصفار الدالة X(Z)، والثوابت p_1 و p_2 و p_3 و .... تسمى أقطاب هذه الدالة، وأما الثابت k فيسمى معامل التكبير gain factor لهذه الدالة.

المستوى Z هو مستوى تمثل فيه كل قيمة للمتغير Z بنقطة على هذا المستوى. المحور الأفقي هو القيمة الحقيقية real للمتغير Z، والمحور الرأسي هو القيمة التخيلية

imaginary للمتغير Z. على هذا المستوى يرمز للقطب بالحرف X وللصفر بالحرف O. الشكل رقم (٤،٦) يبين تمثيل المتغير X(Z) في المعادلة رقم (٤،٢٨) في صورة أقطاب وأصفار على المستوى Z.

$$X(Z)=\frac{z^2(z-1.2)(z+1)}{(z-0.5+j0.7)(z-0.5-j0.7)(z-0.8)} \qquad (٤،٢٨)$$



الشكل رقم (٤،٦). أقطاب وأصفار المعادلة رقم (٤،٢٨) في المستوى Z.

الدائرة الموضحة في الشكل رقم (٤،٦) هي دائرة الوحدة، أي أن نصف قطرها هو الوحدة، ودائرة الوحدة سيكون لها شأن كبير عندما نتكلم عن استقرار الأنظمة بعد قليل. المعادلة رقم (٤،٢٨) كما فى الشكل لها صفران منطبقان على نقطة الأصل نتيجة وجود z^2 في بسط المعادلة. هناك أيضا صفر عند z=-1 وآخر عند z=1.2 وكل من هذين الصفرين حقيقي لذلك فهما يقعان على المحور الأفقي كما في الشكل رقم (٤،٦). المعادلة رقم (٤،٢٨) لها ثلاثة أقطاب أحدها قطب حقيقي عند z=0.8 والقطبان الآخران مركبان ومترافقان، الأول عند z=0.5-j0.7 والآخر عند z=0.5+j0.7. مواضع الأقطاب والأصفار في الشكل رقم (٤،٦) تقريبية وليست دقيقة (للتوضيح فقط).

(٤,٦,١) استقرار النظام الرقمي في المستوى Z

عندما يكون لدينا دالة انتقال أو العبور transfer function لأي نظام بدلالة المتغير Z فإنه يمكننا من خلالها استنتاج بعض الحقائق المهمة عن هذا النظام وأول هذه الحقائق هي هل هذا النظام مستقر أم لا ؟ افترض أن دالة العبور لنظام ما تعطى بالعلاقة التالية :

$$H(Z)=\frac{Y(Z)}{X(Z)}=\frac{1}{(z-a)} \qquad (٤,٢٩)$$

حيث H(Z) تسمى دالة العبور أو دالة النظام system function ، Y(Z) هي معادلة الخرج ، و X(Z) هي معادلة الدخل وكل هذه الدوال تم التعبير عنها في المستوى Z حيث هذا النظام له قطب عند z=a. بضرب الطرفين في الوسطين في المعادلة السابقة نحصل على :

$$zY(Z)-aY(Z)=X(Z)$$

بأخذ تحويل Z العكسي للمعادلة السابقة نحصل على :

$$y[n+1]-ay[n]=x[n]$$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها كما يلي :

$$y[n]=ay[n-1]+x[n-1] \qquad (٤,٣٠)$$

لحساب استجابة العينة الواحدة (استجابة الدفعة أو الصدمة impulse response) للنظام السابق نضع x[n]=δ[n] ، وبفرض أن y[n]=0 لكل قيم n السالبة فإنه يمكن

حساب قيم y[n] لجميع قيم n بدأ من n=0 حيث سنحصل على :

$$y[n]=[\underline{0},\ 1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ ....]$$

لاحظ أن الخرج السابق y[n] هو خرج النظام عندما كان دخله هو عينة الوحدة، لذلك فإن هذا الخرج سيكون هو استجابة الصدمة لهذا النظام وبالتالي فإن :

$$h[n]=[\underline{0},\ 1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ ....] \qquad (٤,٣١)$$

في المعادلة السابقة ستكون |h[n]| قابلة للجمع summable إذا كان |a|<1 حيث في هذه الحالة فإن |h[n]| تؤول إلى الصفر عندما n تؤول إلى مالانهاية. من ذلك نرى أنه لكي يكون هذا النظام مستقراً يجب أن يكون القطب a أقل من الواحد، أي أن القطب a يقع داخل دائرة الوحدة. **ومن ذلك أيضاً يمكننا أن نضع شرطاً لاستقرار النظام وهو أن تكون جميع أقطابه واقعة داخل دائرة الوحدة.** لذا فإنه عادة ما يعبر عن أقطاب النظام في الصورة القطبية (مقدار وزاوية) بدلاً من الصورة الكارتيزية لأنه في هذه الحالة يكون مقدار القطب هو بعده عن نقطة الأصل في المستوى Z ويكون من السهل استنتاج هل القطب يقع داخل دائرة الوحدة (إذا كان مقداره أقل من الواحد) أم خارجها ومن ثم هل النظام مستقر أم لا؟. سنرى بعد قليل أن MATLAB يمكن استخدامه لحساب أقطاب أي دالة ورسمها في المستوى Z وبذلك استنتاج هل النظام مستقرا أم لا.

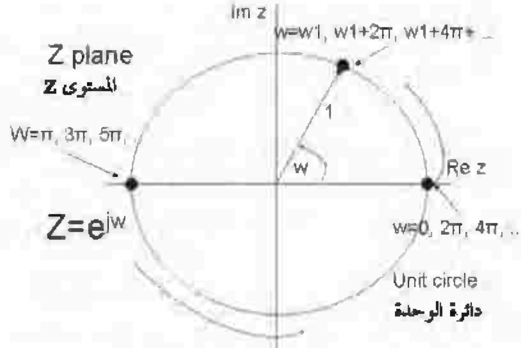
أصفار دالة العبور لا تؤثر على استقرار النظام، حيث إنها تسبب إزاحة فقط لتتابع الصدمة. يمكن إثبات ذلك بوضع H(Z)=z/(z-a) في المعادلة رقم (٤,٣١) واستنتاج تتابع الصدمة h[n] في هذه الحالة حيث ستجد أنه $h[n]=[\underline{1},\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4 ....]$.

(٤,٦,٢) تحويل Z وتحويل فورير

سنرى في الفصل القادم كيفية تحويل أي دالة إلى النطاق الترددي frequency domain عن طريق تحويل فورير لهذه الدالة. ولقد رأينا سابقاً أن تحويل فورير يمكن الحصول عليه من تحويل Z بوضع Z في صورتها القطبية والتعويض عن مقدار r بالواحد الصحيح كما رأينا في المعادلة رقم (٤,٦) التي سنعيد كتابتها هنا مرة ثانية كالتالي:

$$x(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jwn} \qquad (٤,٣٢)$$

المتغير $z=re^{jw}$ يمثل نقطة في المستوى Z عند نصف القطر r والزاوية w من المحور الأفقي. وبذلك عندما r=1 فإن هذه النقطة تقع على دائرة الوحدة، وبزيادة w من الصفر فإن النقطة تدور على دائرة الوحدة ابتداء من الزاوية صفر حتى تصل إلى النقطة $\pi/2$ ثم النقطة π ثم $3\pi/2$ ثم العودة إلى نقطة البداية حيث تكون النقطة قد دارت دورة كاملة على دائرة الوحدة مع تغير w من الصفر حتى 2π كما في الشكل رقم (٤,٧).



الشكل رقم (٤,٧). التعبير عن تحويل فورير في المستوى Z.

كما سنرى أيضاً عند دراسة تحويل فورير أن الاستجابة الترددية لدالة معيننة زمنيا sampled في النطاق الترددي تكون عبارة عن نماذج متكررة لاستجابة النظام عندما تتغير w من صفر حتى 2π. وهذا في الحقيقة هو ما رأيناه هنا، إذ إنه مع كل دورة 2π للمتغير w على دائرة الوحدة في المستوى Z فإن استجابة النظام الترددية تكرر نفسها كما في الشكل رقم (٤،٧).

يمكن استخدام هذه الخاصية ($z=e^{jw}$) في رسم تقديري لاستجابة النظام الترددية، أو رسم تغير مقدار أي دالة مع تغير التردد w. سنتابع ذلك من خلال رسم تقريبي لشكل الاستجابة الترددية للنظام التالي:

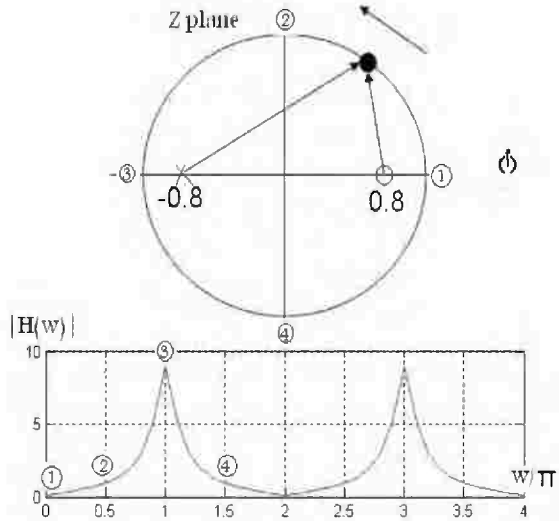
$$H(Z)=\frac{z-0.8}{z+0.8} \qquad (٤،٣٣)$$

بوضع $z=e^{jw}$ في المعادلة (٤- ٣٣) نحصل على المعادلة التالية:

$$H(w)=\frac{e^{jw}-0.8}{e^{jw}+0.8} \qquad (٤،٣٤)$$

بوضع w=0 في المعادلة رقم (٤،٣٤) نقف عند النقطة r=1 وw=0 في المستوى Z كما في الشكل رقم (٤،٨أ) نقطة رقم(١). مقدار المتجه من الصفر z=0.8 إلى هذه النقطة يمكن حسابه لنجد أنه يساوى 1-0.8=0.2 ومقدار المتجه من القطب z = -0.8 إلى هذه النقطة يساوى 1-(-0.8)=1.8 . بالتعويض في المعادلة رقم رقم (٤،٣٤) نحصل على مقدار الاستجابة الترددية عند هذا التردد (w=0) وهى $|H(w)|_{w=0}=0.2/1.8=0.111$، وهذه تمثل أول نقطة في منحنى الاستجابة الترددية كما في الشكل رقم (٤،٨ب) نقطة رقم (١) أيضاً. الآن مع الدوران على دائرة الوحدة عكس عقارب الساعة كما في

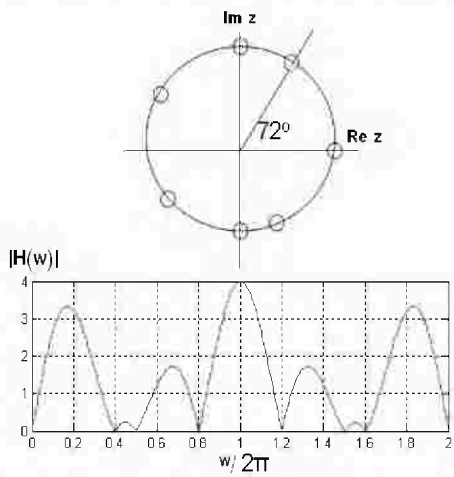
شكل رقم (٤,٨أ) فإننا نبتعد عن الصفر $z=0.8$ وبالتالي فإن مقدار متجه إلى نقطة الدوران على الدائرة يزداد، وفى نفس الوقت مع الدوران فإننا نقترب من القطب عند $z = -0.8$ وبذلك فإن متجهه إلى نقطة الدوران على الدائرة يتناقص، وبالتالي فإن مقدار الاستجابة $|H(w)|$ يزداد كما في شكل رقم (٤,٨ب). يستمر ذلك إلى أن تصل نقطة الدوران إلى $w=\pi/2$ عندها سيتساوى كل من متجه الصفر ومتجه القطب ويكون مقدار الاستجابة $|H(w)|=1$ وهى النقطة (٢) في الشكل رقم (٤,٨ب). مع استمرار الدوران على دائرة الوحدة في الشكل رقم (٤,٨أ) يستمر متجه الصفر في الزيادة ومتجه القطب في التناقص إلى أن نصل إلى النقطة (٣) على دائرة الوحدة عندها $w=\pi$ ويكون متجه الصفر في هذه الحالة يساوي 1.8 بينما متجه القطب يساوي 0.2. ومن ثم فإن مقدار الاستجابة سيكون $|H(w)|_{w=\pi}=1.8/0.2=9$ وهي النقطة (٣) في الشكل رقم (٤,٨ب). نستمر في الدوران على دائرة الوحدة في الشكل رقم (٤,٨أ) إلى أن نصل إلى النقطة (١) مرة أخرى مروراً بالنقطة (٤) في الشكلين رقمي (٤,٨أ) و (٤,٨ب) وبذلك تكتمل أول دورة كاملة وبعدها تتكرر هذه العملية ويكرر منحنى الاستجابة نفسه في الشكل رقم (٤,٨ب) مرة أخرى. تأييداً لهذا الكلام سنرى بعد دراستنا لتحويل فورير أن الاستجابة الترددية لأي نظام رقمي خطي ثابت إزاحياً سيكون عبارة عن تكرار لنفس نموذج الاستجابة من $w=0$ حتى $w=2\pi$. حاول تغيير مواضع كل من الصفر والقطب وهم على نفس المحور الأفقي وارسم أو احسب منحنى الاستجابة في كل حالة. ماذا لو كان الصفر عند النقطة $w=0$ تماماً؟ أو كان القطب عند النقطة $w=\pi$؟ ارسم المنحنى المتوقع في كل حالة. سنرى بعد قليل كيفية رسم منحنى الاستجابة مباشرة باستخدام MATAB.



(أ)

(ب)

الشكل رقم (٤،٨). استنتاج شكل الاستجابة الترددية من مواقع أقطاب وأصفار المعادلة رقم (٤،٣٤).



(أ)

(ب)

الشكل رقم (٤،٩). استنتاج شكل الاستجابة الترددية من مواقع أقطاب وأصفار المعادلة رقم (٤،٣٥).

بنفس الطريقة يمكن تقدير منحنى الاستجابة لأي دالة، حاول تتبع منحنى الاستجابة في الشكل رقم (٤،٩ب) مع المعادلة رقم (٤،٣٥) التي تتكون من أصفار فقط.

$$H(Z)=(z^5-1)(z^2+1) \quad (٤،٣٥)$$

(٤،٦،٣) الأنظمة الرقمية من الدرجات الأولى والثانية

عادة نرمز لدرجة النظام الرقمي بأعلى أس أو أعلى درجة في دالة العبور للمتغير Z. سنرى في الفصول القادمة أن الأنظمة ذات الدرجات العليا يمكن بناؤها باستخدام أكثر من نظام من الأنظمة ذات الدرجات الأولى أو الثانية، وهذه تعد طريقة شهيرة جدا من طرق تصميم الأنظمة الرقمية. لذلك سنعرض في هذا الجزء بعض الخواص المهمة لأنظمة الدرجة الأولى والثانية. الصورة العامة لدالة عبور أو دالة نظام من هذا النوع يمكن كتابتها كما يلي:

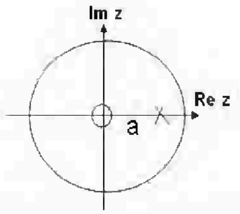
$$H_1(Z)=\frac{z}{z-a} \quad (٤،٣٦)$$

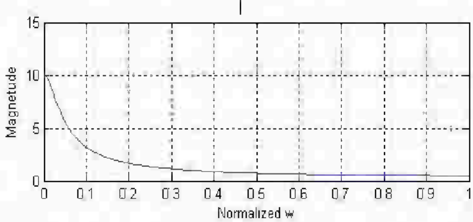
$$H_2(Z)=\frac{z^2}{z^2-2rz\cos\theta+r^2}=\frac{z^2}{(z-re^{j\theta})(z-re^{-j\theta})} \quad (٤،٣٧)$$

حيث $H_1(Z)$ تمثل دالة العبور لنظام من الدرجة الأولى لها قطب واحد عند $z=a$ وصفر عند نقطة الأصل $z=0$ بينما $H_2(Z)$ تمثل دالة المرور أو العبور لنظام من الدرجة الثانية لها قطبان مترافقان كل منهما عند نصف القطر r، الأول عند الزاوية θ والقطب الثاني عند الزاوية -θ، وهذه الدالة لها صفر مزدوج عند نقطة الأصل. كون المعادلتينv رقمي (٤،٣٦) و (٤،٣٧) لكل منهما صفر أو صفران عند نقطة الأصل فإن تحويل Z العكسي لكل منهما يعطى تتابع الاستجابة الاندفاعى أو الصدمى h[n] يبدأ من العينة n=0.

بالنسبة لدالة الدرجة الأولى الشكل رقم (٤،١٠أ) يبين تمثيلها في المستوى Z

والشكل رقم (٤,٣٧ب) يبين الاستجابة الترددية لها. نلاحظ من الشكل رقم (٤,٣٧ب) أن مثل هذه الأنظمة تسلك مسلك المرشحات المنفذة للترددات المنخفضة Low Pass Filters, LPF حيث إن مقدار الاستجابة يكون أكبر ما يمكن عند w=0 ويتناقص مع زيادة w كما في الشكل حتى يصل لأدنى مستوى عند w=π. مقدار الاستجابة العظمى عند w=0 يزداد كلما اقترب القطب من دائرة الوحدة ، أي مع اقتراب a من الواحد. وكلما اقترب القطب من دائرة الوحدة يصبح المنحنى أكثر حدية أي أن عرض المجال Band Width, BW يقل ، وكلما اقترب القطب من نقطة الأصل يزداد عرض المجال وتقل حدية المنحنى. الشكل رقم (٤,١٠ب) تم رسمه بفرض أن a=0.9 . عرض المجال سنعرف التعريف الدقيق له فيما بعد. لاحظ أن القطب في الشكل رقم (٤,١٠أ) كان في الجهة اليمنى من المستوى Z فحصلنا على نظام يسلك مسلك المرشحات المنفذة للترددات المنخفضة.



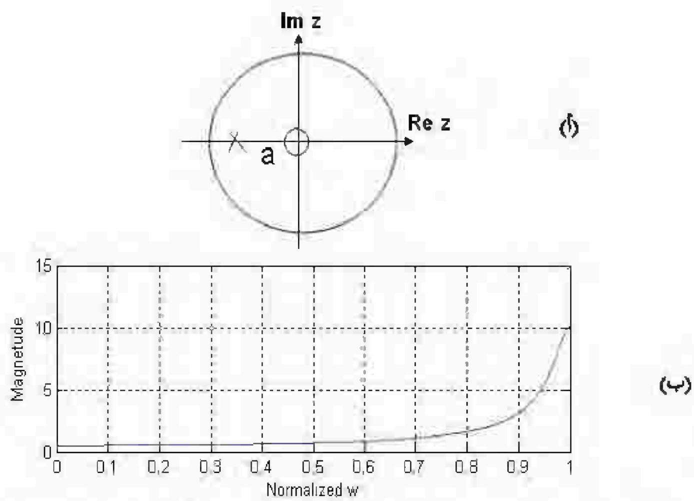


الشكل رقم (٤,١٠). المستوى Z والاستجابة الترددية لنظم الدرجة الأولى ، قطب يميني.

الآن لو نقلنا القطب إلى الجهة اليسرى من المستوى Z وما زال داخل دائرة الوحدة ماذا سيحدث؟ الشكلان رقما (٤,١٠أ) و (٤,١٠ب) يبينان ذلك. هنا حصلنا

على مرشح منفذ للترددات العالية High Pass Filter, HPF حيث إن مقدار الاستجابة تكون قيمته العظمى عند w=π. الشكل رقم (٤,١٠ب) تم رسمه بفرض أن a=-0.9.

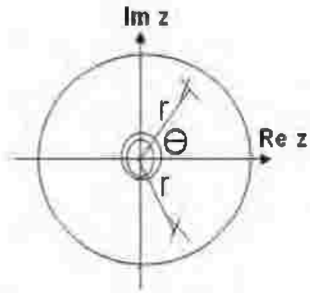
بالنسبة لأنظمة الدرجة الثانية فإن تمثيلها في المستوى Z سيكون كما هو موضح في الشكل رقم (٤,١٢). الصورة العامة لمعادلة هذا النوع من الأنظمة تبينها المعادلة في (٤,٣٧). هذه المعادلة كما ذكرنا لها قطبان مترافقان عند نصف القطر r وأحدهما يوجد عند الزاوية θ والآخر يوجد عند الزاوية -θ كما في الشكل رقم (٤,١٢). عندما θ=0 ينطبق القطبان على المحور الأفقي ونحصل على منحنى استجابة منفذ للترددات المنخفضة مثل حالة أنظمة الدرجة الأولى. مع زيادة θ يبتعد القطبان عن المحور الأفقي كما في الشكل.



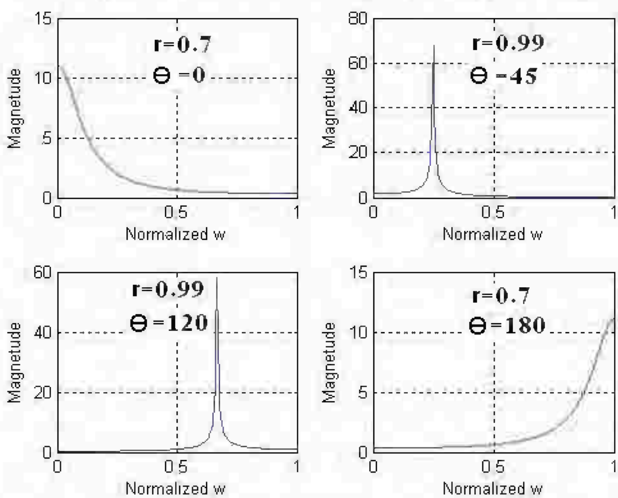
الشكل رقم (٤,١٢). المستوى Z والاستجابة الترددية لنظم الدرجة الأولى ، قطب يساري.

مع الدوران على دائرة الوحدة ابتداء من w=0 حتى w=π فإن مقدار الاستجابة الترددية يزداد مع الاقتراب من القطب حتى يصل إلى قيمته العظمى عندما تتحاذى مع

نقطة القطب تماما وبعدها يبدأ مقدار الاستجابة في النقصان. لذلك فإن الترددات التي ستمر من مثل هذا النوع من الأنظمة لا هي الترددات المنخفضة ولا هي الترددات العالية ولكن هذه الأنظمة تكون منتقية للترددات التي تنفذها ، لذلك يطلـــق عليها



الشكل رقم (٤،١٢). تمثيل أنظمة الدرجة الثانية في المستوى z.



الشكل رقم (٤،١٣). الاستجابة الترددية لنظام من الدرجة الثانية عند مواضع مختلفة للأقطاب.

المرشحات أو الأنظمة المنفذة لمجال من الترددات Band Pass Filters, BPF. شرط هذه الأنظمة كما ذكرنا ألا ينطبق القطبان على المحور الأفقي لا في الناحية الموجبة ولا في

الناحية السالبة. بالطبع مع زيادة r يقترب القطبان من محيط دائرة الوحدة ويكون منحنى الاستجابة أكثر حدية. الشكل رقم (٤,١٣) يبين منحنى الاستجابة لقيم مختلفة من الزاوية θ ونصف القطر r.

(٤,٧) تطبيقات برنامج MATLAB

برنامج MATLAB يحتوى على العديد من الدوال التي تتعامل مع تحويل Z والتي سنقدمها هنا بشيء من التفصيل وننصح القارىء بالذهاب فوراً لبرنامج MATLAB وعرض المساعدة help لكل واحدة من هذه الدوال ثم تنفيذ البرامج الموجودة في الأمثلة التالية لكل دالة.

١- الدالة Zplane(): هذه الدالة ترسم أقطاب وأصفار أي معادلة في المتغير Z في المستوى Z. معاملات هذه الدالة ممكن أن تأخذ أكثر من شكل على حسب طريقة عرض المعادلة. الصورة الأولى أن المعادلة تكون معروضة في صورة بسط ومقام كل منهما عبارة عن كثيرة الحدود في المتغير Z كما يلي:

$$H(Z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_n z^n+b_{n-1}z^{n-1}+.....+1}{a_m z^m+a_{m-1}z^{m-1}+.......+1} \qquad (٤,٣٨)$$

مثال رقم (٤,٨): ارسم أقطاب وأصفار المعادلة التالية:

$$H(Z)=\frac{2z^4+16z^3+44z^2+56z+32}{3z^4+3z^3-15z^2+18z-12} \qquad (٤,٣٩)$$

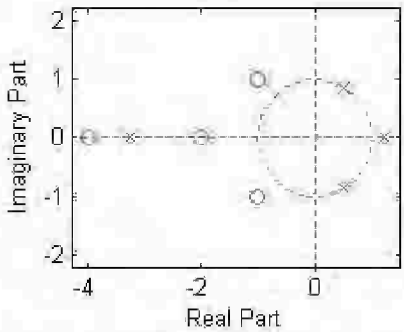
الشكل رقم (٤,١٤) يبين أقطاب وأصفار هذه المعادلة في المستوى Z وقد رسمت دائرة الوحدة كمرجع في الشكل لتبين أي قطب يقع خارج محيط الدائرة وأيها يقع داخل محيط هذه الدائرة. البرنامج m-file لهذا الشكل كان كالتالي:

```
%poles and zeros of a rational z transform
num=[2 16 44 56 32];
den=[3 3 -15 18 -12];
subplot(2,2,1);
zplane(num,den);
```

٢- الدالة tf2zp() : تستخدم هذه الدالة لوضع أي معادلة في صورة أقطاب وأصفار ومعامل تكبير بدلاً من كثيرة الحدود كما في المعادلة رقم (٤,٣٩).

مثال رقم (٤,٩) : احسب قيمة كل قطب وكل صفر للنظام الممثل بالمعادلة رقم (٤,٣٩). احسب أيضا معامل التكبير لهذه المعادلة ونصف قطر كل قطب.

```
%poles and zeros of a rational z transform
num=[2 16 44 56 32];
den=[3 3 -15 18 -12];
[z,p,k]=tf2zp(num,den);
m=abs(p);
disp('zeros are'); disp(z);
disp('poles are'); disp(p);
disp('gain'); disp(k);
disp('radius of poles'); disp(m);
[sos,G]=tf2sos(num,den);
disp('second order sections');
disp(real(sos));
```



الشكل رقم (٤,١٤). أقطاب وأصفار المعادلة رقم (٤,٣٩).

في البرنامج السابق num تمثل معاملات كثيرة الحدود في بسط المعادلة ، و den تمثل معاملات مقام هذه المعادلة. المتغير z في الجانب الأيسر، يمثل متجه الأصفار الناتج ، و p هي متجه الأقطاب و k ستكون معامل التكبير الناتج. بتنفيذ هذا البرنامج تم عرض قيم أقطاب وأصفار المعادلة رقم (٤,٣٩) ومعامل التكبير لها وكذلك نصف قطر كل قطب من أقطابها كما يلي :

```
zeros are
e  -4.0000
  -2.0000
  -1.0000 + 1.0000i
  -1.0000 - 1.0000i
poles are
 -3.2361
   1.2361
   0.5000 + 0.8660i
   0.5000 - 0.8660i
Gain
    0.6667
radius of poles
    3.2361
    1.2361
    1.0000
    1.0000
second order sections
    1.0000    6.0000    8.0000    1.0000    2.0000   -4.0000
    1.0000    2.0000    2.0000    1.0000   -1.0000    1.0000
```

حاول مقارنة قيم هذه الأقطاب والأصفار بموضعها على المستوى Z في الشكل رقم (٤,١٤). من هذه الأقطاب والأصفار يمكن كتابة معادلة النظام على الصورة التالية :

$$H(Z)=\frac{0.6667(z+4)(z+2)(z+1-j)(z+1+j)}{(z+3.2361)(z-1.236)(z-0.5-j0.866)(z-0.5+j0.866)} \qquad (٤,٤٠)$$

٣- الدالــة Tf2sos() : هذه الدالة تحول أي معادلة في النطاق Z من صورة كثيرات الحدود مثل المعادلة (٤- ٣٩) إلى صورة عدد من الأجزاء أو الأنظمة البسيطة كل منها من الدرجة الثانية. إن tf2sos تعني Transfer Function to Second Order Sections. يتم عرض معاملات كل جزء في صف من ستة أعمدة ، الثلاث الأولى هي معاملات البسط والثلاث الثانية هي معاملات المقام لهذا الجزء، أي أنه يكون هناك عدد من الصفوف يساوي عدد أجزاء الدرجة الثانية. ناتج البرنامـــج في المثال رقم (٤,٩) عرض هذه النتيجة بعد العنوان second order sections وبذلك يمكن كتابة معادلة العبور (٤,٣٩) في صورة مقاطع من الدرجة الثانية كالتالي :

$$H(Z) = 0.667\frac{(z^2+6z+8)(z^2+2z+2)}{(z^2+2z-4)(z^2-z+1)} \qquad (٤,٤١)$$

لاحظ أن المعادلة رقم (٤,٤٠) موضوعة في صورة أجزاء من الدرجة الأولى بينما المعادلة رقم (٤,٤١) موضوعة في صورة أجزاء من الدرجة الثانية.

٤- الدالة Tf2sos() : هذه الدالة تقوم بالعملية العكسية للدالة Tf2zp() حيث أنها تأخذ أصفار وأقطاب أي نظام وتعطي معاملات كثيرة الحدود في البسط ومعاملات كثيرة الحدود في المقام للرجوع مرة ثانية لصورة كثيرات الحدود.

مثال رقم (٤,١٠):

```
%determination of the rational z plane
zr=[-4 -2 -1+i -1-i];
pr=[-3.2361 1.2361 0.5+0.866i 0.5-0.866i];
z=zr';
p=pr';
k=1;
[num,den]=zp2tf(z, p, k);
disp('coeff. of num. polunomial'); disp(num);
disp('coeff. of den. polunomial'); disp(den);
```

بتنفيذ هذا البرنامج نحصل على معاملات كثيرة الحدود في البسط وكثيرة الحدود في المقام للمعادلة رقم (٤,٣٩) وهي كما يلي :

```
coeff. of num. polunomial
   1    8   22   28   16
coeff. of den. polunomial
   1.0000    1.0000   -5.0002    6.0001   -4.0000
```

لاحظ أن معاملات البسط مقسومة على ٢ ومعاملات المقام مقسومة على ٣ وبذلك فإن معامل التكبير هو ٢/٣=٠,٦٦٦٧ الذي هو نفس معامل التكبير الذي حصلنا عليه في المثال رقم (٤,٩).

٤- الدالة **Residuez()** : تستخدم هذه الدالة في الكسور الجزئية لتحويل أي معادلة من صور كثيرات الحدود في البسط والمقام إلى صورة الكسور الجزئية تمهيداً للحصول على تحويل Z العكسي.

مثال رقم (٤,١١): ضع المعادلة التالية في صورة الكسور الجزئية :

$$H(Z)=\frac{18z^3}{18z^3+3z^2-4z-1} \qquad (٤,٤٢)$$

البرنامج التالي يقوم بهذه المهمة :

```
% partial fraction expansion for rational z function
num=[18];
den=[18 3 -4 -1];
[r,p,k]=residuez(num,den);
disp('Residues are'); disp(r');
disp('Poles are'); disp(p');
disp('Constants are');disp(k);
```

نتيجة تنفيذ البرنامج هي :

```
Residues are
   0.3600    0.2400    0.4000
Poles are
   0.5000   -0.3333   -0.3333
Constants are
```

لاحظ أنه لا توجد كميات ثابتة حيث إن درجة البسط والمقام متساوية. لاحظ وجود قطبين كل منهما عند z=0.333 وهذا يعني وجود قطب مركب من الدرجة الثانية عند هذه النقطة ، لذلك فإن صورة الكسور الجزئية للمعادلة رقم (٤,٤٢) يمكن كتابتها كالتالي :

$$H(Z)=\frac{0.36}{1-0.5z^{-1}}+\frac{0.24}{1+0.333z^{-1}}+\frac{0.4}{(1+0.333z^{-1})^{2}} \qquad (٤,٤٣)$$

مثال رقم (٤,١٢) : نفس الدالة السابقة Residuez() يمكن أن ندخل لها المتبقيات residues والأقطاب والثوابت إن وجدت للحصول على معادلة النظام في النطاق Z في الصورة كثيرة الحدود كما في البرنامج التالي :

```
%Rational z transform from partial fraction expansion
r=[0.24  0.4  0.36];
p=[-0.333  -0.333  0.5];
k=[0];
[num, den]=residuez(r, p, k);
disp('numerator coefficients'); disp(num);
disp('denominator coefficients'); disp(den);
```

ونتيجة التنفيذ ستكون كالتالي :

```
numerator coefficients
   1.0000  -0.0003  -0.0000        0
denominator coefficients
   1.0000    0.1660   -0.2221   -0.0554
```

وهي نفس معاملات كثيرتي الحدود في البسط والمقام في المعادلة رقم (٤،٤٢)، فقط عليك ضرب كل معامل في الثابت 18.

٦- الدالة **Impz()** : هذه الدالة تحسب تحويل Z العكسي لأي دالة في صورة كثيرات الحدود في البسط والمقام. إننا عندما نقسم البسط على المقام نحصل على كثيرة الحدود في المتغير Z يمكن حساب تحويل Z العكسي لها كما رأينا في طريقة القسمة المطولة في حساب تحويل Z العكسي. الصورة العامة لهذه الدالة هي [h,t]=impz(num,den) حيث num هي معاملات كثيرة الحدود في البسط في المعادلة H(Z) و den هي معاملات كثيرة الحدود في المقام وh هي معاملات التتابع h[n] الناتج، أو تحويل z العكسي. أما t فتمثل نقاط العينة في الأزمنة الرقمية، n. يمكن وضع متغير L في الصورة العامة للدالة لوضع حد لطول التتابع الناتج، (h,t]=impz(num,den,L].
المثال التالي يوضح ذلك.

مثال رقم (٤،١٣): برنامج يحسب تحويل Z العكسي للدالة :

$$H(Z) = \frac{1+2z^{-1}}{1+0.4z^{-1}-0.12z^{-2}} \qquad (٤،٤٢)$$

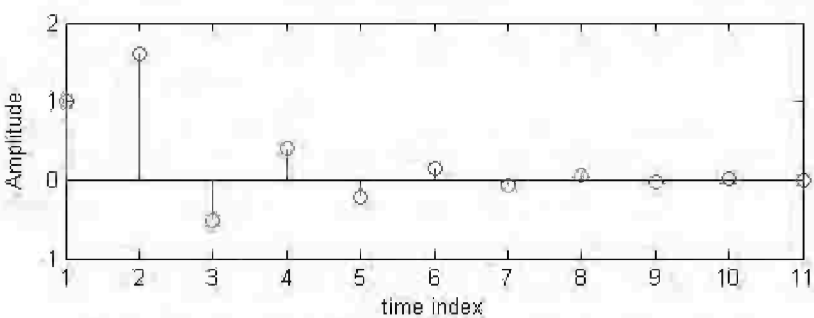
```
%Impulse response of a rational function
L=11; % length of output sequence
num=[1  2];
den=[1  0.4  -0.12];
[h t]=impz(num,den,L);
disp('Coefficients of the impulse response');
disp(y')
subplot(2,1,1);
stem(y);
xlabel('time index');
ylabel('Amplitude');
```

ناتج تنفيذ هذا البرنامج التابع h[n] كما يلي :

```
Coefficients of the impulse response
  Columns 1 through 9
    1.0000    1.6000   -0.5200    0.4000   -0.2224    0.1370   -0.0815
0.0490   -0.0294
  Columns 10 through 11
    0.0176   -0.0106
```

لاحظ أننا اكتفينا بعدد ١١ عنصراً فقط من عناصر هذه الاستجابة والشكل رقم (٤,٤٢) يبين رسماً لهذه الاستجابة.

٧- الدالة Filter(): يمكن استخدام هذه الدالة في حساب تحويل Z العكسي. الصورة العامة للدالة هي filter(num,den,x) حيث num هي معاملات كثيرة الحدود في البسط و den معاملات كثيرة الحدود في المقام، و x هي تتابع الدخل. لو وضعنا الدخل x يساوي عينة الوحدة فإن خرج الدالة يكون استجابة الدفعة لهذا النظام. وهذا ما سنفعله في البرنامج التالي لنفس المعادلة رقم (٤,٤٤).



الشكل رقم (٤,١٥). الاستجابة الإندفاعية أو الصدمية للمعادلة رقم (٤,٤٤).

مثال رقم (٤,١٤).

```
%Calculation of impulse response using the fiter function
L=11; % length of output sequence
num=[1  2];
den=[1 0.4  -0.12];
x=[1 zeros(1,L-1)];
y=filter(num, den, x);
disp('Coefficients of impulse response');
disp(y);
```

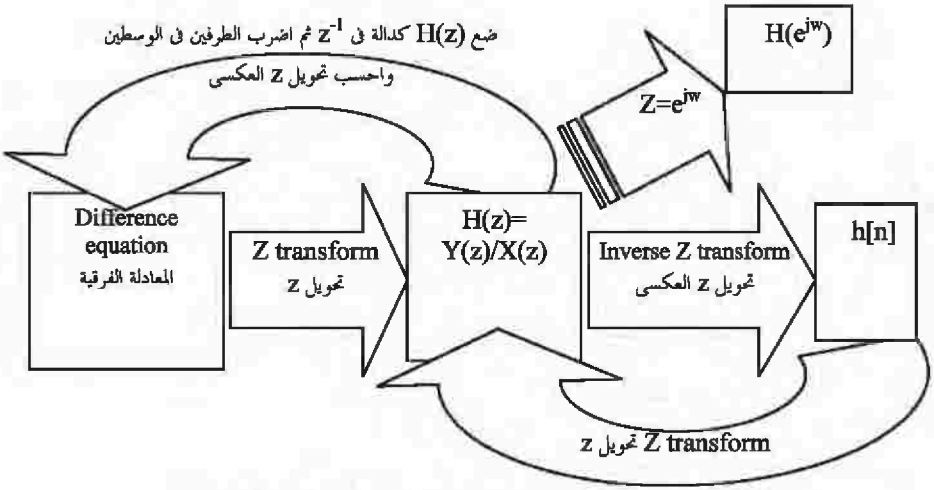
وكانت نتيجة تنفيذ البرنامج كالتالي :

```
Coefficients of impulse response
  Columns 1 through 9
    1.0000   1.6000   -0.5200    0.4000   -0.2224    0.1370   -0.0815
  0.0490   -0.0294
  Columns 10 through 11
   0.0176   -0.0106
```

لاحظ أنها نفس المعاملات التي حصلنا عليها باستخدام الدالة impz() .

(٤,٨) الطرق المختلفة للتعبير عن الأنظمة الرقمية

الأنظمة الرقمية الخطية الثابتة إزاحياً LTI يمكن التعبير عنها بأكثر من طريقة منها المعادلات الفرقية difference equations ، واستجابة الدفعة أو الصدمة أو استجابة العينة الواحدة unit sample or impulse response ، ودالة الانتقال أو العبور transfer function أو دالة النظام system function ، وأخيرا الاستجابة الترددية frequency response. ونقصد بكلمة التعبير أننا نضع علاقة بين خرج ودخل النظام. سنرى في هذا الجزء كيفية التعبير بكل هذه الطرق وكيفية الانتقال من طريقة لأخرى كما في الشكل رقم (٤,٤٤).



الشكل رقم (٤,١٦).الطرق المختلفة للتعبير عن الأنظمة الرقمية LTI

سنبدأ بالتعبير عن النظام بمعادلة فرقية في الحالة العامة كالتالي :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r] \qquad (٤,٤٥)$$

المعادلة السابقة عبارة عن علاقة بين خرج ودخل النظام في صورة معادلة فرقية. يمكن الحصول على دالة العبور أو معادلة النظام بإجراء تحويل Z على المعادلة رقم رقم (٤,٤٥) مستخدمين خواص تحويل Z كما سبق ، وبذلك سنحصل على المعادلة التالية :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(Z) = \sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r} X(Z) \qquad (٤,٤٦)$$

ومنها يمكن كتابة دالة العبور كما يلي :

$$H(Z)=\frac{Y(Z)}{X(Z)}=\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \tag{٤,٤٧}$$

وهى عبارة عن علاقة بين خرج ودخل النظام في النطاق Z.

يمكن الحصول على استجابة الصدمة impulse response لهذا النظام بإجراء تحويل Z العكسي للمعادلة رقم (٤,٤٧) كما يلي :

$$h[n]=Z^{-1}\{H(Z)\} \tag{٤,٤٨}$$

من دالة الانتقال أو العبور رقم (٤,٤٧) يمكن الرجوع مرة ثانية للمعادلة الفرقية بضرب الطرفين في الوسطين ثم إجراء تحويل Z العكسي.

يمكن الحصول على الاستجابة الترددية بوضع $z=e^{jw}$ في دالة العبور H(Z).

(٤,٩) تمارين

١- اكتب تحويل Z وحدد نطاق التقارب لكل من التتابعات التالية :

$x_1[n]=(0.3)^n u[n]$ $x_2[n]=(-0.5)^n u[n]$ $x_3[n]=(0.2)^n u[n-5]$ $x_4[n]=(-0.2)^n u[-n-1]$

٢- اكتب تحويل Z لكل من التتابعين التاليين :

$x_1[n]=\delta[n] - \delta[n-2] + \delta[n-3]$, $x_2[n]= 2\delta[n-1] + \delta[n-2] - \delta[n-3]$

إجر عملية الالتفاف على التتابعين السابقين لتكوين التتابع $x_3[n]=x1[n]*x2[n]$، ثم بين أن $X_3(Z)=X_1(Z)X_2(Z)$.

٣- التتابع $x_1[n]=[\underline{1}, 2, 3, 1, -1, 1]$ يمثل دخلاً لنظام خطى ثابت إزاحياً LTI، استجابة الصدمة له هي $h[n]=[\underline{1}, 1, 1]$. أحسب خرج هذا النظام $y[n]=x[n]*h[n]$ وأثبت أن $Y(Z)=X(Z)H(Z)$.

٤- احسب تحويل Z العكسي في صورة مغلقة closed form لكل مما يأتي :

$Y_1(Z)=1/(1-4z^{-1}) \quad |z|<1/4$
$Y_2(Z)=1/(1-z^{-1}+0.5z^{-2}) \quad |z|>1$
$Y_3(Z)=(12+8z^{-1}-3z^{-2})/(12-7z^{-1}+z^{-2}) \quad |z|>1/3$

٥- استخدم طريقة القسمة المطولة لحساب تحويل Z العكسي لكل دالة من الدوال التالية :

$$X(Z)=1/(z-0.5), \quad X(Z)=z/(z+1.1), \quad X(Z)=(z+1)/(Z-1)$$

٦- استخدم الكسور الجزئية لحساب تحويل Z العكسي لكل مما يأتي :

$$X_1(Z)=\frac{0.5z}{z^2-z+0.5} \quad X_2(Z)=\frac{(z-0.5)}{z(z-0.8)(z-1)} \quad X_3(Z)=\frac{(z+1)(z^2+1.5z+0.9)}{(z+0.7)(z^2-1.6z+0.95)}$$

تأكد من الإجابة مستخدماً برنامج MATLAB.

٧- استخدم القسمة المطولة لحساب تحويل Z العكسي للإشارات الموجودة في التمرين رقم (٦)..

٨- استخدم الدالة impz() لرسم استجابة الصدمة لكل من الإشارات الموجودة في التمرين رقم (٦).

٩- احسب أصفار وأقطاب المعادلات التالية ، استخدم برنامج MATLAB لرسم هذه الأصفار والأقطاب والتأكد من إجابتك ومعرفة هل النظام الممثل بهذه المعادلة مستقر أم لا :

$$H_1(Z)=\frac{z^2-z-2}{z^2-1.3z+0.4} \qquad H_2(Z)=\frac{z^2-z+1}{z^2+1}$$

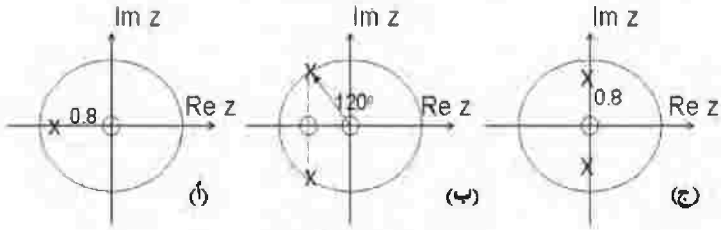
$$H_3(Z)=\frac{z^3-z^2+z-1}{z^2-0.25} \qquad H_4(Z)=\frac{z^9-1}{z^8(z-1)}$$

$$H_5(Z)=\frac{z^5-2}{z^{10}-0.8} \qquad H_6(Z)=\frac{z^2+1.5z+0.9}{z^2-1.5z+1.1}$$

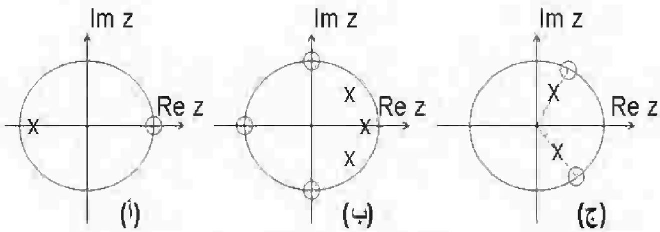
١٠- الشكل رقم (٤,١٠ت) يبين المستوى Z لبعض الأنظمة، اكتب معادلة النظام في كل حالة.

١١- ارسم منحنى الاستجابة الترددية التقريبي لكل نظام من الأنظمة الموضحة في الشكل رقم (٤,١٠ت).

١٢- أعد التمرين رقم (١١) للأنظمة الموضحة في شكل رقم (٤,١٢ت). وضح أي نوع من المرشحات يمكن أن يكون كل واحد من هذه الأنظمة.



الشكل رقم (٤,١٠ت).



الشكل رقم (٤,١٢ت).

١٣- ارسم المستوى Z لمعادلة الانتقال التالية موضحاً عليها الأصفار والأقطاب ثم ارسم شكلاً تقريبياً لمنحنى الاستجابة الترددية لهذا النظام موضحاً أي نوع من المرشحات يمكن أن يكون.

$$H(Z)=\frac{z^3-z^2+0.8z-0.8}{z^3+0.8z^2}$$

١٤- استخدم أقل عدد من الأصفار والأقطاب لتحقيق مرشح رقمي بالمواصفات التالية:

أ) منع كامل للترددات عند w=0 .

ب) منع كامل للترددات عند w=π/3 .

ج) مجال انتقال ضيق للترددات عند w=2π/3 نتيجة قطب عند r=0.92 في المستوى Z.

ارسم المستوى Z لهذا المرشح موضحاً أصفاره وأقطابه واكتب دالة العبور له وارسم شكلاً تقريبياً لمنحنى الاستجابة الترددية له.

١٥- المعادلة التالية تمثل معادلة فرقية لنظام من الدرجة الثانية:

$$y[n]=ay[n-1]-by[n-2]+x[n]$$

ما هي دالة العبور H(Z) لهذا النظام. ما هو مدى تغير a و b ليكون النظام مستقراً، ويكون المرشح له مجال انتقال عند w=π/3. استخدم الدالة filter() في MATLAB لحساب استجابة الصدمة h[n] لهذا النظام ورسمها.