

تحويل فوريير

Fourier Transform

(٥.١) مقدمة

لقد كان العالم فوريير عمره ٣٠ عاماً عندما كان أحد أعضاء الحملة الفرنسية على مصر عام ١٧٩٨م وعين حاكماً على مصر العليا، وتقدم بعدة أبحاث علمية للمعهد العلمي المصري الذي أنشأه نابليون في مصر. ثم عاد بعد ذلك إلى فرنسا حيث قدم أفكاره لحل مشاكل الانتقال الحراري للمعهد الفرنسي عام ١٨٠٧. لقد تركزت أفكاره على أن الإشارة الدورية يمكن تمثيلها بمجموعة محدودة من الإشارات الجيبية المتوافقة. كما أوضح أيضاً أن الإشارة غير الدورية يمكن تمثيلها بالمجموع التكاملية من الإشارات الجيبية غير المتوافقة. هاتين الفكرتين هما الأساس لما عرف فيما بعد ويعرف الآن بتتابع فوريير Fourier series وتحويل فوريير Fourier transform اللذين كان لهما أكبر الأثر على كل فروع الهندسة وبالذات هندسة الاتصالات والإلكترونيات ومعالجة الإشارات. من الأشياء الظريفة أن اللذين حكموا هذا البحث الخاص بفوريير هما لابلاس Laplace وقد وافق على نشر البحث في حينه، ولاجرانج Lagrange الذي اعترض على البحث وقال إنه غير قابل للتطبيق عند نقاط الانكسار أو عدم الاتصال في الدوال مثل الموجة

المربعة. وعلى ذلك لم ينشر بحث فوريير إلا بعد ١٥ عاماً عند وفاة لاجرانج.

لقد تم استخدام تتابع فوريير وتحويل فوريير لما يقرب من ٢٠٠ عام لتمثيل الظواهر التناظرية في الزمن التناظري analog time. مع ظهور الأنظمة الرقمية وأزمنة الزمن المتفاصل أو المعينين ظهرت الحاجة إلى تحويل فوريير المتفاصل Discrete Fourier Transform, DFT أيضاً.

لقد رأينا في الفصل السابق أن أي نظام خطي ثابت إزاحياً يمكن التعبير عنه بأكثر من طريقة من الطرق التالية:

١- معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة linear constant coefficients differential equation وذلك للأنظمة التناظرية، أما الأنظمة الرقمية فبدلاً من المعادلات التفاضلية الخطية نستخدم المعادلات الفرقية الخطية ذات المعاملات الثابتة linear constant coefficients difference equation .

٢- دالة العبور أو الانتقال transfer function أو دالة النظام system function وهي علاقة الخرج بالدخل معبراً عنها في النطاق S بعد أخذ تحويل لابلاس للمعادلة التفاضلية وذلك للأنظمة التناظرية، أما الأنظمة الرقمية فدالة العبور أو معادلة النظام لها فهي علاقة الخرج بالدخل معبراً عنها في النطاق Z بعد أخذ تحويل Z للمعادلة الفرقية.

٣- استجابة الدفعة أو الصدمة impulse response وهي استجابة النظام أو خرجه عندما يكون دخله عبارة عن دفعة أو صدمة وذلك للأنظمة التناظرية، بالنسبة للأنظمة الرقمية فهذه الاستجابة تسمى استجابة العينة الواحدة unit sample response وإن كان مجازاً يطلق عليها أيضاً استجابة الصدمة، وهي تمثل خرج النظام عندما يكون دخله يساوى تتابع العينة الواحدة.

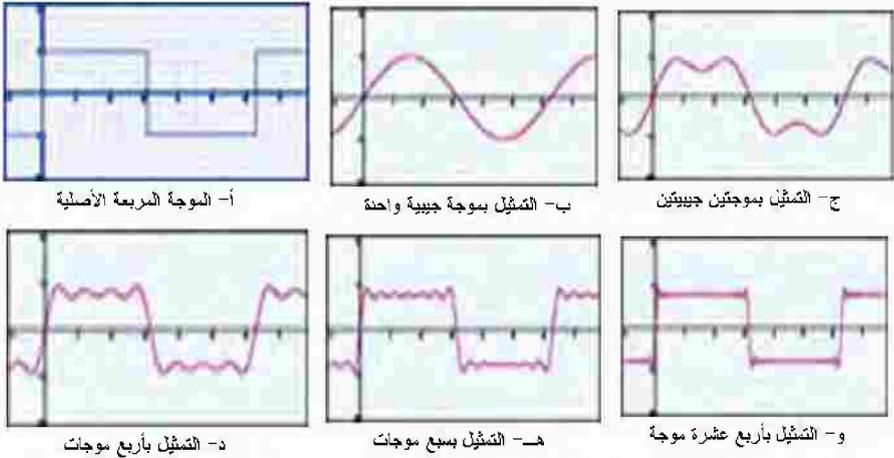
٤ - الاستجابة الترددية frequency response وهي علاقة الخرج بالدخل أو دالة العبور معبراً عنها في النطاق الترددي ويتم ذلك عن طريق إجراء تحويل فورير على دالة العبور وذلك للأنظمة التناظرية، بالنسبة للأنظمة الرقمية فإننا نجري تحويل فورير المعين على دالة الانتقال كما سنرى في هذا الفصل لأن "تحويل فورير" هو موضوع الدراسة هنا.

إن عملية تحويل الإشارات من صورة إلى صورة أخرى أو من نطاق إلى نطاق آخر تعد عملية شائعة جداً لما لها من فوائد. فأنت مثلاً عندما تجرى عملية حسابية على الحاسب فإن أي رقم تدخله من على لوحة المفاتيح يكون في صورته العشرية (٥ أو ٩ مثلاً) ولكن هذه الأرقام بهذه الصورة غير مناسبة للتعامل معها، داخل إلكترونيات الحاسب لذلك لا بد من تحويلها إلى الصورة الثنائية، ثم بعد ذلك يتم إجراء العمليات الحسابية عليها داخل الحاسب، ثم تؤخذ النتيجة في صورتها الثنائية وتحول إلى الصورة العشرية مرة أخرى حتى يستطيع القارئ العادي التعامل معها. هكذا حولنا البيانات من الصورة العشرية إلى الصورة الثنائية لنتمكن من التعامل معها داخل الحاسب، ثم حولت مرة أخرى إلى الصورة العشرية حتى يمكن قراءتها عن طريق المستخدم، وهكذا عمليات تحويل الإشارات من نطاق إلى نطاق آخر، الغرض منها هو الاستفادة من وجود الإشارة في النطاق الآخر لاستخلاص بعض الخواص التي لا يمكن استخلاصها في النطاق الأول.

لقد رأينا في الفصل الأول ما هو المقصود بالنطاق الزمني والنطاق الترددي لأي إشارة، وقلنا إنه في النطاق الزمني نصف الإشارة بعلاقة بين تغير مقدارها مع الزمن ورأينا أن الجهاز الذي نستطيع به أن نرى الإشارة في هذا النطاق هو الأوسيلوسكوب oscilloscope. أما في النطاق الترددي فيتم عرض تغير مقدار الإشارة مع التردد. والجهاز

الذي يبين ذلك هو المحلل الطيفي spectrum analyzer. أما تحويل فورير فهو التحويل الذي ننقل به الإشارة بين هذين النطاقين. إن تحويل فورير كما رأينا من فكرته الأساسية، وكما سنرى بالتفصيل في هذا الفصل، يقوم بتمثيل أي إشارة في صورة مجموعة من الإشارات الجيبية الأساسية. إذن ما هي الفائدة من تحويل أو وضع إشارة مركبة في صورة مجموعة من الإشارات الجيبية؟ ولماذا الإشارة الجيبية بالذات ولم تكن الإشارة المربعة مثلاً؟

في الكثير من الأحيان يصعب التعامل مع الإشارات المركبة، فلا يمكن مثلاً حساب استجابة (خرج) نظام لمثل هذه الإشارات، من الإشارات المركبة مثل إشارة الصوت أو صورة أو رسم قلب أو حتى إشارة مربعة. عند وضع مثل هذه الإشارة المركبة في صورة مجموعة من الإشارات البسيطة يسهل حساب استجابة النظام لكل واحدة من هذه الإشارات البسيطة على حده، ثم تجميع هذه الاستجابات فنحصل على استجابة النظام للإشارة المركبة. هذا ما يسمى بنظرية التجميع Superposition، أو بمعنى آخر صفة الخطية وهذا هو السبب في التعامل مع الأنظمة الخطية فقط. أما لماذا الإشارة الجيبية بالذات فلأن الإشارة الجيبية لها ميزة ليست موجودة في أي إشارة أخرى وهي أن استجابة أي نظام خطي للإشارة الجيبية هي إشارة جيبية أيضاً تختلف فقط في المقدار والزاوية ولها نفس التردد. لكي نرى كيف أن أي إشارة مركبة يمكن تمثيلها بمجموعة من الإشارات الجيبية أنظر إلى الشكل رقم (٥,١) الذي يعرض إشارة مربعة وهذه الإشارة تم تمثيلها بعدد من الإشارات الجيبية بترددات ومقادير مختلفة بدءاً من إشارة جيبية واحدة حتى ١٤ إشارة جيبية مجمعة. انظر إلى هذا الشكل لترى كيف أنه مع زيادة عدد الإشارات الجيبية تقترب الإشارة المجمعة من الإشارة المربعة الأصلية.



الشكل رقم (٥.١). تمثيل موجة مربعة بالعديد من الموجات الجيبية.

يوجد تحويل فوريير في الكثير من الصور التي منها تتابع فوريير Fourier series وتحويل فوريير Fourier transform وكل منها له صورة تطبق على الإشارات والأنظمة التناظرية وصورة أخرى تطبق على الإشارات والأنظمة الرقمية. ولقد رأينا في هذا الكتاب أن نبدأ الموضوع من أوله فنلقي نظرة سريعة على تحويل فوريير في الأنظمة والإشارات التناظرية ولا ندخل في الصورة الرقمية منه مباشرة حتى تكتمل الفائدة.

(٥.٢) تتابع فوريير للإشارات التناظرية الدورية

Fourier Series Representation of Continuous Periodic Signals

أي إشارة تناظرية دورية $x(t)$ لها زمن دوري T يمكن كتابة تتابع فوريير لها على

الصورة التالية:

$$(٥.١) \quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{j\Omega_0 n t}$$

حيث $\Omega_0 = 2\pi/T$ هي التردد الأساسي fundamental frequency في الإشارة $x(t)$

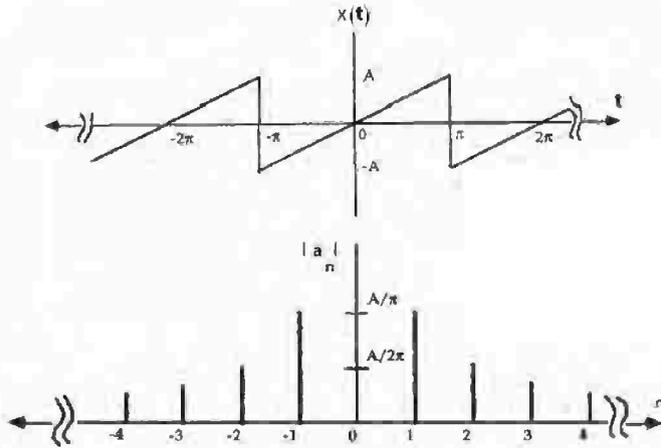
و a_n هي معاملات فوريير المركبة وتعطى بالعلاقة التالية:

$$(٥.٢) \quad a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\Omega_0 n t} dt$$

المعادلة رقم (٥.١) تضع الإشارة $x(t)$ في صورة عدد لانهاثي من الإشارات المركبة (بدءاً من $n = -\infty$ حتى $n = \infty$) مقدار كل إشارة يعطى بالمعادلة رقم (٥.٢). كما نلاحظ فإن هذه الإشارات موجودة عند ترددات محددة $\Omega_0 n$ وليس عند قيم مستمرة من التردد Ω وهذا هو السبب في تسميتها بالتتابع. التردد Ω_0 كما سبق يسمى التردد الأساسي وأحياناً التوافق الأول first harmonic وأما باقي الترددات فتسمى التوافقات harmonics من التوافق الثاني $2\Omega_0$ second harmonic، عندما $n=2$ حتى التوافق اللانهائي عند $n = \infty$. مقدار هذه التوافقات عندما يرسم مع المتغير Ω نحصل على طيف spectrum الإشارة $x(t)$. المقادير a_n كلها كميات مركبة لذلك تعرف بمقدار وزاوية وهذا يعطي طيف المقدار magnitude spectrum وهو تغير مقدار المعاملات a_n مع تغير Ω ، وطيف الزاوية وهو عبارة عن تغير زاوية المعاملات a_n مع تغير Ω .

الشكل رقم (٥.٢) يبين إشارة سن المنشار والطيف أو التوافقات الناتجة عنها والتي نحصل عليها بالتعويض في المعادلة رقم (٥.٢) بقيمة $n=0$ سنجد أن $a_0=0$ وبالتعويض بعد ذلك بالقيم المختلفة $n=1, 2, 3, \dots$ سنجد أن

$$.a_n = a_{-n} = (A/jn\pi) \cos(n\pi)$$



الشكل رقم (٥.٢). إشارة سن المنشار والطيف الناتج عنها.

في المعادلة رقم (٥.١) يمكن التعبير عن الأس المركب بالصورة الجيبية

كما يلي:

$$(٥.٣) \quad x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos(\Omega_0 n t) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin(\Omega_0 n t)$$

حيث:

$$(٥.٤) \quad b_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(n \Omega_0 t) dt, \quad c_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(n \Omega_0 t) dt,$$

$n=1,2$

أي دالة حقيقية $x(t)$ يمكن التعبير عنها بمركبتين أو جزأين، المركبة الأولى هي

المركبة الزوجية $x_{\text{even}}(t)$ ، والمركبة الثانية هي المركبة الفردية $x_{\text{odd}}(t)$ بحيث تكتب الإشارة

الكلية كما يلي:

$$(٥.٥) \quad x(t) = x_{\text{even}}(t) + x_{\text{odd}}(t)$$

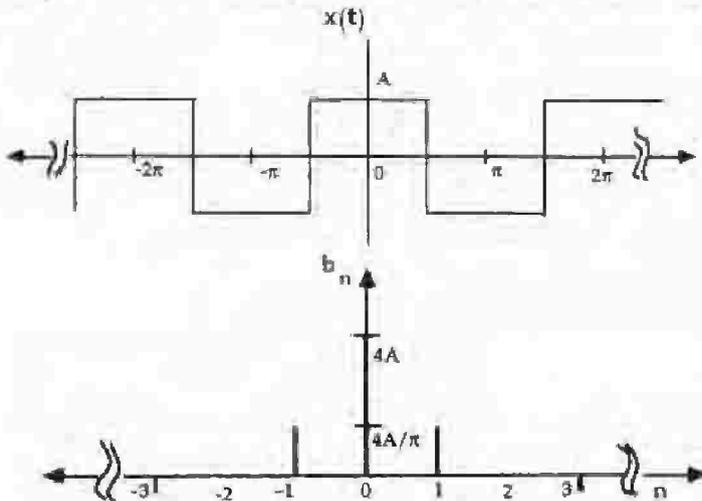
حيث الجزء الزوجي يتميز بالآتي: $x_{\text{even}}(t) = x_{\text{even}}(-t)$ أي أن الجزء الزوجي يكون متماثلاً حول المحور الرأسي. وأما الجزء الفردي فيتميز بالتالي: $x_{\text{odd}}(t) = -x_{\text{odd}}(-t)$ أي أن هذا الجزء يتميز بأنه متماثل حول نقطة الأصل. كما نعلم فإن الدالة $\cos()$ تعد دالة زوجية بينما الدالة $\sin()$ تعتبر دالة فردية، لذلك فإن تتابع فوريير لأي دالة حقيقية يتكون من مركبة زوجية مقاديرها هي المركبات b_n في المعادلة رقم (٥.٤)، ومركبة فردية مقاديرها هي المركبات c_n في نفس المعادلة. يمكن حساب كل من المركبة الزوجية والمركبة الفردية لأي دالة باستخدام المعادلتين التاليتين:

$$(٥.٦) \quad x_{\text{even}}(t) = [x(t) + x(-t)]/2$$

$$(٥.٧) \quad x_{\text{odd}}(t) = [x(t) - x(-t)]/2$$

وعلى ذلك فإنه بالنظر لموجة سن المنشار في شكل رقم (٥.٢) نجد أنها موجة

فردية متعائلة حول نقطة الأصل ومتوسطها أو المركبة dc لها تساوى صفراً لذلك فإن



الشكل رقم (٥.٣). تتابع فوريير لموجة مربعة (زوجية).

تتابع فوريير لها في صورته الجيبية سيحتوي فقط ، المركبات الفردية $\sin(\)$ بينما الموجة المربعة في الشكل رقم (٥.٣) نجد أنها متماثلة حول المحور الرأسي وأن المركبة dc لها تساوى صفرأ لذلك فإن تتابع فوريير لها سيتكون من المركبات الزوجية $\cos(\)$ فقط في المعادلة رقم (٥.٤).

(٥.٣) تحويل فوريير للإشارات التناظرية غير الدورية

Fourier Transform Representation of Continuous Aperiodic Signals

يمكن الاستغناء عن شرط الدورية الذي فرضناه على الإشارة $x(t)$ في المعادلتين رقمي (٥.١) و (٥.٢) وذلك بفرض أن الزمن الدوري T للإشارة يمتد إلى المالا نهائية. في هذه الحالة فإن التجميع في المعادلة رقم (٥.١) يؤول إلى تكامل ويمكن كتابة ما يسمى بتحويل فوريير وليس تتابع فوريير في هذه الحالة كما يلي :

$$(٥.٨) \quad X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt$$

$$(٥.٩) \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega$$

المعادلة رقم (٥.٨) يطلق عليها تحويل فوريير لأنها تنقل أي إشارة $x(t)$ من النطاق الزمني إلى النطاق الترددي $x(j\Omega)$ ، بينما المعادلة رقم (٥.٩) تسمى تحويل فوريير العكسي inverse Fourier transform لأنها تنقل الإشارة $x(j\Omega)$ من النطاق الترددي إلى النطاق الزمني $x(t)$. لاحظ أن الإشارة $x(j\Omega)$ معرفة عند جميع قيم Ω المستمرة من $-\infty$ إلى ∞ وليس عند قيم محددة لها أو عند توافقات معينة للتردد الأساسي كما كان الحال في تتابع فوريير ، وهذا يتضح من العلاقة $\Omega = 2\pi/T$ فعندما تؤول T إلى المالا نهائية

فإن Ω تؤول إلى الصفر أي أنها تصبح معرفة عند جميع القيم المستمرة للمتغير Ω .

الجدول رقم (٥.٩). تحويل فورير لبعض الإشارات الشهيرة.

الإشارة	تحويل فورير
$x(t)=1$	$2\pi\delta(\Omega)$
$(t)\delta$	1
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\Omega t_0}$
$u(t)$	$(1/j\Omega)+\pi\delta(\Omega)$
$e^{-at}u(t), a >0$	$1/(a+j\Omega)$
$te^{-at}u(t), a >0$	$1/(a+j\Omega)^2$
$t^{n-1}/(n-1)! \cdot e^{-at}u(t), a >0$	$1/(a+j\Omega)^n$
$e^{j\Omega_0 t}$	$2\pi\delta(\Omega+\Omega_0)$
$\cos(\Omega_0 t)$	$\pi[\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)]$
$\sin(\Omega_0 t)$	$(\pi/j)[\delta(\Omega-\Omega_0)-\delta(\Omega+\Omega_0)]$
$x(t)=$ 1, $ t <T_1$ 0 $T_1< t <T_0/2$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin(k\Omega_0 T_1)}{k} \delta(\Omega_k - \Omega_0)$
$x(t)=$ 1, $ t <T_1$ 0 $T_1< t <T_0/2$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin(k\Omega_0 T_1)}{k} \delta(\Omega_k - \Omega_0)$
$x(t)=$ 1, $ t <T_1$ 0, $ t >T_1$	$2T_1 \text{sinc}(\Omega T_1/\pi)$ $=2\sin(\Omega T_1)/\Omega$
$(\Omega_1/\pi)\text{sinc}(\Omega_1 t/\pi)$ $=\sin(\Omega_1 t)/\pi t$	$X(\Omega)=$ 1 $ \Omega <\Omega_1$ 0 $ \Omega >\Omega_1$

سنرمز لتحويل فورير بالرمز F وتحويل فورير العكسي بالرمز IF. الجدول رقم (٥.٢) يبين تحويل فورير لبعض الإشارات الشهيرة نسوقها هنا دون تفاصيل استنتاجها حيث يمكن للقارئ استنتاجها بالتعويض المباشر في معادلة تحويل فورير الأساسية مع الاستعانة بخواص هذا التحويل التي سنسوقها في الجدول رقم (٥.٢). والذي يبين بعض الخواص المهمة والمستخدمة كثيراً مع هذا التحويل مع العلم أن هذه الخواص رأينا ما يناظرها عند دراسة تحويل Z. من أهم هذه الخواص خاصية الالتفاف

في النطاق الزمني والتي تقابل حاصل ضرب في النطاق الترددي. خرج أي مرشح يتم حسابه عن طريق الضرب الالتفافي لإشارة الدخل مع استجابة الصدمة لهذا التحويل. في الكثير من الأحيان يكون من الصعب حساب هذا المضروب. لذا في هذه الحالة نحسب تحويل فوريير لكل من الإشارتين، ثم نضرب هذين التحويلين، ثم نحسب تحويل فوريير العكسي لحاصل الضرب فيعطينا إشارة الخرج في النطاق الزمني. تذكر أننا فعلنا نفس الشيء مع تحويل Z . الإزاحة في الزمن بمقدار a يقابلها ضرب في الكمية الأسية e^{as} في النطاق الترددي. أيضاً الإزاحة في التردد بمقدار Ω_0 يقابلها ضرب في الكمية الأسية $e^{j\Omega_0 t}$ في النطاق الزمني. حاول دراسة باقي الخواص بتأني وحاول أيضاً إثبات كل منها.

لقد رأينا فيما سبق كيف تم تمثيل الإشارة الدورية الانسيابية في النطاق الترددي في صورة تتابع فوريير Fourier series وذلك باستخدام المعادلتين رقمي (٥.١) و (٥.٢). بتطبيق تحويل فوريير على الإشارة $x(t)$ الموجودة في المعادلة رقم (٥.١) نحصل على التالي:

$$(٥.١٠) \quad F\{x(t)\} = F\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jn\Omega_0 t}\right\} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta(\Omega - n\Omega_0)$$

حيث تم استخدام خاصية التعديل، انظر الجدول رقم (٥.٢)، التي تنص على أن الإزاحة في النطاق الترددي يقابلها ضرب في الكمية الأسية $e^{jn\Omega_0 t}$. نلاحظ أن المعادلة رقم (٥.١٠) تعطي تحويل فوريير للدالة $x(t)$ الدورية في صورة مجموعة من دوال الصدمة مقدارها هو a_n وموجودة عند تناوبات محددة من التردد الأساسي Ω_0 وهو نفس ما حصلنا عليه من معادلة تناوبات فوريير السابقة.

الشكل رقم (٥.٤) يبين الناتج من المعادلة رقم (٥.١٠).

الجدول رقم (٥.٢). خواص تحويل فوريير.

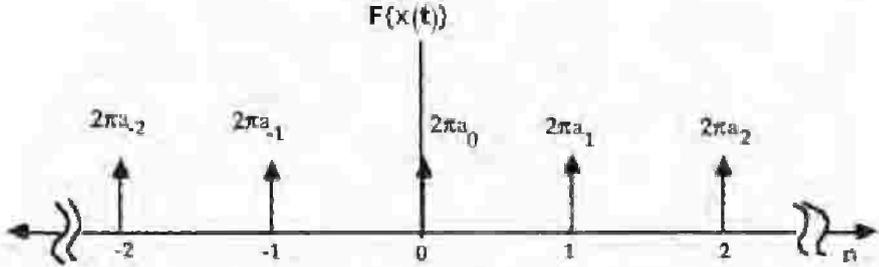
الخاصية	تأثير هذه الخاصية
الخطية أو التجميع Superposition	$F[ax_1(t)+bx_2(t)]=aX_1(j\Omega)+bX_2(j\Omega)$
إذا كانت $x(t)$ زوجية	$X(j\Omega) = 2 \int_0^{\infty} x(t) \cos(\Omega t) dt$
إذا كانت $x(t)$ فردية	$X(j\Omega) = 2j \int_0^{\infty} x(t) \sin(\Omega t) dt$
ضرب المقدار في ثابت	$F[ax(t)]=aX(j\Omega)$
ضرب الزمن في ثابت	$F[x(at)]=\frac{1}{ a }X(j\Omega/a)$
الضرب الالتفافي في الزمن	$F[x_1(t)*x_2(t)]=X_1(j\Omega)X_2(j\Omega)$
الضرب الالتفافي في النطاق الترددي	$F[x_1(t)x_2(t)]=X_1(j\Omega)*X_2(j\Omega)$
التعديل modulation	$F[x(t)e^{j\Omega_0 t}]=X[j(\Omega-\Omega_0)]$ $F[x(t)\cos(\Omega_0 t)]=0.5\{X[j(\Omega-\Omega_0)]+X[j(\Omega+\Omega_0)]\}$ $F[x(t)\sin(\Omega_0 t)]=0.5j\{X[j(\Omega-\Omega_0)]-X[j(\Omega+\Omega_0)]\}$
الإزاحة في الزمن	$F[x(t-a)]=X(j\Omega)e^{-j\Omega a}$
التفاضل	$F[d^n x(t)/dt^n]=(j\Omega)^n X(j\Omega)$
التكامل	$F[\int_{-\infty}^t x(t) dt] = \frac{1}{j\Omega} X(j\Omega) + \pi X(0)\delta(\Omega)$

(٥.٤) تحويل فوريير للإشارات المعينة أو المتفاصلة زمنياً (التتابعات)

The Discrete Time Fourier Transform, DTFT

بعد أن رأينا في الأجزاء السابقة من هذا الفصل كيفية تحويل أي إشارة تناظرية من النطاق الزمني time domain إلى النطاق الترددي frequency domain ، حان الوقت لنرى كيفية إجراء ذلك على الإشارات الرقمية أو المقطعة أو المتفاصلة زمنياً time sampled. الإشارات من هذا النوع يتم التعبير عنها في صورة تتابعات $x[n]$ حيث المتغير x يمثل الإشارة نفسها والمتغير n يمثل الفهرس الزمني time index الذي يأخذ جميع القيم الصحيحة الموجبة والسالبة. لقد رأينا أيضاً في الفصل الثالث العلاقة بين

متغير التردد الانسيابي Ω ومتغير التردد الرقمي w حيث تم وضع هذه العلاقة كما يلي:



الشكل رقم (٥.٤). تحويل فوريير لدالة دورية المتساوية.

(٥.١١)

$$w = \Omega T_s$$

حيث $f_s = 1/T_s$ هي معدل عينة الإشارة التناظرية **sampling rate or sampling frequency**. الآن سنفترض أن لدينا التسايع $x[n]$ ونريد وضعه في النطاق الترددي الرقمي، أو بمعنى آخر نريد حساب $x[n]$ بدلالة التردد w . إن ذلك يتم باستخدام تحويل فوريير للتسايعات والذي يعطى بالعلاقة التالية:

(٥.١٣)

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jwn}$$

حيث $X(e^{jw})$ عبارة عن كمية مركبة **complex** تمثل الإشارة x في النطاق الترددي. هذه الكمية يمكن وضعها في صورة مركبتين إحداها مركبة حقيقية **real** والأخرى مركبة تخيلية **imaginary** كما يلي:

(٥.١٣)

$$X(e^{jw}) = X_{re}(e^{jw}) + jX_{im}(e^{jw})$$

حيث $X_m(e^{j\omega})$ هي المركبة الحقيقية، و $X_m(e^{j\omega})$ هي المركبة التخيلية للإشارة $X(e^{j\omega})$. يمكن وضع المعادلة رقم (٥.١٢) في صورة مقدار وزاوية كما يلي:

$$(٥.١٤) \quad X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\theta(\omega)}$$

حيث $|X(e^{j\omega})|$ هي المقدار magnitude و $\theta(\omega)$ هي دالة الطور أو الزاوية angle للإشارة $X(e^{j\omega})$ وكليهما كما نرى دالة في المتغير ω . أحياناً تسمى الإشارة $X(e^{j\omega})$ بأنها طيف signal spectrum الإشارة أو التابع $x[n]$ وتسمى الكمية $|X(e^{j\omega})|$ مقدار الطيف magnitude spectrum والكمية $\theta(\omega)$ تسمى زاوية الطيف phase angle.

بالنظر للمعادلة رقم (٥.١٢) يمكن استنتاج خاصيتين مهمتين لتحويل فورير للإشارات المتفصلة وهما:

١- على الرغم من أننا نحسب تحويل فورير لتتابع أو إشارة مقطعة إلا أن الطيف $X(e^{j\omega})$ عبارة عن دالة متصلة أو انسيابية، أي لها قيمة عند جميع قيم ω الممكنة وهذا واضح من المعادلة رقم (٥.١٢).

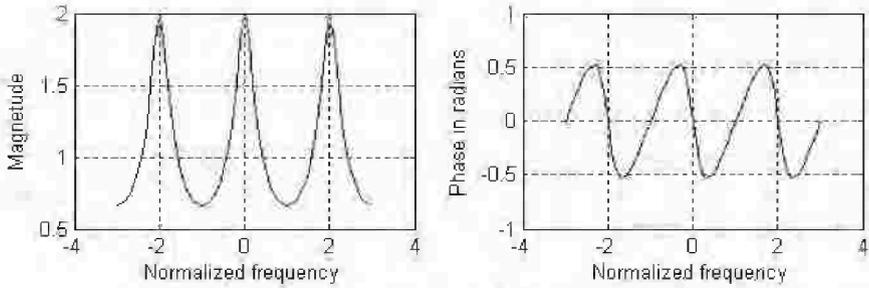
٢- في المعادلة رقم (٥.١٢)، إذا وضعنا $z\omega + 2\pi k$ بدلا من $z\omega$ حيث k أي رقم صحيح سالب أو موجب، فإننا نحصل على نفس الكمية $X(e^{j\omega})$ وهذا يعني بالطبع أن الكمية $X(e^{j\omega})$ تكون دالة دورية periodical في المتغير ω .

مثال رقم (٥.١٢): افترض التابع $x[n] = (0.5)^n u[n]$ والمطلوب حساب تحويل فورير المتواصل DTFT لهذا التابع. بتطبيق المعادلة رقم (٥.١٢) على هذا التابع يمكن كتابة ما يلي:

$$(٥.١٥) \quad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (0.5)^n u[n] e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (0.5)^n e^{jn\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} (0.5e^{-j\omega})^n = \frac{1}{1-0.5e^{-j\omega}}$$

الشكل رقم (٥.٥) يبين مقدار وزاوية الطور للطيف الناتج في المعادلة رقم (٥.١٥) حيث نلاحظ من هذا الشكل تحقق الخاصيتين السابقتين وهما خاصية الاتصال والدورية للتحويل DTFT.



الشكل رقم (٥.٥). تحويل فوريير المفصل للمعادلة رقم (٥.١٥).

البرنامج المقترح لرسم المقدار والزاوية للمعادلة رقم (٥.١٥) كما في الشكل رقم (٥.٥) هو كالتالي:

```
%Drawing magnitude and phase for equation (5-15)
w=-3*pi:0.1*pi:3*pi;
x=1./(1-0.5*exp(-i*w));
subplot(2,1,1);
plot(w/pi,abs(x),'k');
grid;
xlabel('Normalized frequency');
ylabel('Magnitude');
```

```
subplot(2,1,2);
plot(w/pi,angle(x),'k');grid;
xlabel('Normalized frequency');
ylabel('Phase in radians');
```

إذا كانت المعادلة رقم (٥.١٢) تعطى تحويل فورير للتتابعات أو الإشارات المتفاصلة DTFT، فإن تحويل فورير العكسي للتتابعات يمكن حسابه كما في المعادلة التالية :

$$(٥.١٦) \quad x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

حيث $x[n]$ هو التابع (النطاق الزمني) الذي نحصل عليه بمعلومية تحويل فورير لهذا التابع، أي أن المعادلة رقم (٥.١٦) تعطى التحويل العكسي IDTFT. وعلى ذلك فالمعادلة رقم (٥.١٥) والمعادلة رقم (٥.١٦) تمثلان التحويل وعكسه أو كما يطلق عليهما بأنهما يمثلان تحويل مزدوج transform pair.

المعادلة رقم (٥.١٢) تمثل مجموع من $-\infty$ حتى ∞ وعلى ذلك فهناك احتمال ألا تتقارب هذه المعادلة، أي أنها لن تؤول إلى صورة مغلقة closed form عند البحث عن حل لها. يمكن إثبات تقارب المعادلة رقم (٥.١٢) عندما يكون التابع $x[n]$ قابلاً للجمع summable ويمكن التعبير عن ذلك كما يلي :

$$(٥.١٧) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

أي أن $|X(e^{j\omega})|$ ستؤول إلى قيمة محددة أقل من المالا نهائية (تتقارب) إذا تحقق شرط المعادلة رقم (٥.١٧).

هناك العديد من الخواص لتحويل فورير للتتابعات DTFT نسوقها في جدول رقم (٥.٣) دون إثبات لها حيث يمكن للقارئ أن يثبتها كلها ببساطة وسنترك بعض

هذه الإثباتات كتمارين في نهاية الفصل.

من أهم الخواص الموجودة في جدول رقم (٥.٣) الخاصة الخامسة والتي تنص على أن تحويل فوريير للمجموع الالتفافي convolution sum لإشارتين $h[n]$ و $g[n]$ يساوي حاصل ضرب تحويل فوريير للإشارتين. هذه الخاصية تفيد في الحالات التي يصعب فيها حساب المجموع الالتفافي لتتابعين وبالذات عندما تكون هذه التتابعات لانهائية الطول. في هذه الحالة يتم حساب تحويل فوريير لكل من التتابعين على حده، بعد ذلك يتم ضرب التحويلين، ثم نحسب تحويل فوريير العكسي لهذا المضروب فيكون هو حاصل الجمع الالتفافي المطلوب.

(٥.٥) تحويل فوريير المعين

Discrete Fourier Transform, DFT

لقد رأينا في الجزء السابق كيف أن التحويل DTFT هو نفسة عبارة عن دالة مستمرة في متغير التردد w مما يعني أن هذا الطيف تكون له قيمة محددة عند جميع القيم الممكنة للمتغير w . الآن نريد الحصول على طيف رقمي digital أو معين أو متفاصل discrete يكون معرفاً فقط عند قيم محددة للمتغير w لأن هذا الطيف الرقمي هو الذي نستطيع التعامل معه داخل الحاسب أو على أي شريحة للمعالجة الرقمية. لكي يتم ذلك سنقوم بعينة التحويل DTFT إلى عدد N من العينات samples المتساوية الأبعاد على المحور w والمحصورة في دورة واحدة من دورات التحويل DTFT أو بمعنى آخر على محيط دائرة الوحدة في المستوى z لأن الدورة الواحدة حول محيط دائرة الوحدة في المستوى z تكافئ تغير w من صفر حتى 2π على المحور w ، راجع العلاقة بين تحويل فوريير وتحويل z . يمكن التعبير عن قيمة كل عينة على المحور w بالمعادلة التالية:

(٥.١٨)

$$X[k] = X(e^{jw}) \Big|_{w=2\pi k/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}$$

الجدول رقم (٥.٣). خواص تحويل فوريير للإشارات المقطعة DTFT.

الخاصية، التابع في النطاق الزمني $x[n]$	تحويل فوريير DTFT
الخطية linearity $ag[n]+bh[n]$	$aG(e^{jw}) + bH(e^{jw})$
الإزاحة الزمنية Time shift $g[n-n_0]$	$e^{-jw n_0} G(e^{jw})$
الإزاحة الترددية $e^{jw_0 n} x[n]$	$G(e^{j(w-w_0)})$
التفاضل في النطاق الترددي $ng[n]$	$j \frac{dG(e^{jw})}{dw}$
الالطاف Convolution $g[n]*h[n]$	$G(e^{jw})H(e^{jw})$
التعديل modulation $g[n]b[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(e^{j\theta}) H(e^{j(w-\theta)}) d\theta$ التفاف في النطاق الترددي
$x[n]$	$X(e^{jw})$
$x^*[-n]$ Complex conjugate of $x[n]$	$X^*(e^{-jw})$
$\text{Re}\{x[n]\}$	$X_{cs}(e^{jw}) = \frac{1}{2} [X(e^{jw}) + X^*(e^{-jw})]$ X_{cs} —Conjugate symmetric part
$j\text{Im}\{x[n]\}$	$X_{ca}(e^{jw}) = \frac{1}{2} [X(e^{jw}) - X^*(e^{-jw})]$ X_{ca} —Conjugate antisymmetric part
$x_{cs}[n]$	$X_{re}(e^{jw})$
$x_{ca}[n]$	$jX_{im}(e^{jw})$

مما يعني أننا أخذنا دورة كاملة 2π من التحويل DTFT وقمنا بأخذ عينات فيها sampling إلى N عينة بدءاً من العينة صفر w_0 حتى العينة w_{N-1} . تذكر جيداً أن N تمثل طول التابع $x[n]$ إذا كان هذا التابع محدد الطول وغير دوري، وتمثل عدد العينات في الدورة الواحدة إذا كان هذا التابع دورياً. تحويل فوريير المعين DFT ومعكوسه يمكن التعبير عنهما بالمعادلتين التاليتين:

$$(٥,١٩) \quad X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} \quad k = 0,1,\dots,N-1$$

$$(٥,٢٠) \quad x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi kn/N} \quad n = 0,1,\dots,N-1$$

تذكر أنه بصرف النظر عن كون الإشارة $x[n]$ دورية أو محددة الطول فإن الرقم N يمثل عدد العينات في تتابع يفترض أنه دوري. الكثير من المراجع تضع $W_N = e^{-j2\pi/N}$ في المعادلات السابقة، وعلى ذلك يمكن كتابة المعادلتين رقمي (٥,١٩) و (٥,٢٠) كما يلي:

$$(٥,٢١) \quad X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \quad k = 0,1,\dots,N-1$$

$$(٥,٢٢) \quad x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn} \quad n = 0,1,\dots,N-1$$

الجدول رقم (٥,٤) يبين الكثير من خواص تحويل فوريير المعين DFT. معظم هذه الخواص مشابهة لخواص تحويل z والتحويل DTFT مع بعض الخلافات البسيطة. مثلاً في الخاصية الخامسة وهي خاصية الإزاحة في النطاق الزمني فإنه يتم عمل إزاحة دورانية وليس إزاحة خطية على عينات الإشارة $x[n]$ ، وهذا بالطبع يتطابق مع حقيقة أن التحويل DFT يتعامل مع الإشارة $x[n]$ كما لو كانت دورة واحدة من إشارة دورية. كما أن عملية الجمع الالتفافي convolution تكون جمع التفافي دوري circular وليس جمع التفافي خطي linear convolution كما في حالة التحويل DTFT.

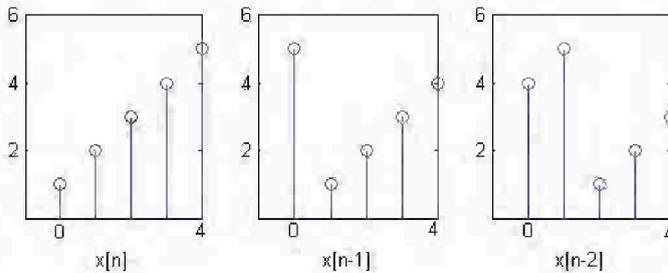
الجمع الالتفافي الدوراني circular convolution

إننا نتعامل هنا مع تتابع $x[n]$ به N من العينات تتراوح من $x[0]$ حتى $x[N-1]$ ، وأما

خارج هذا النطاق ($n < 0$ أو $n > N$) فإن عينات هذا التابع تكون صفراً. لكي تتخيل الإزاحة الدورانية على هذا التابع تخيل أن هذه العينات موجودة على سطح أسطوانة وموزعة على هذا السطح على مسافات متساوية. الإزاحة الدورانية هي دوران هذه الأسطوانة مع أو عكس عقارب الساعة، أي أن العينة التي تخرج من أقصى اليمين في حالة الدوران ناحية اليمين تدور وتدخل من ناحية اليسار. الشكل رقم (٥.٦) يوضح الإزاحة الدورانية على تتابع مكون من خمس عينات ويمكن التعبير عن ذلك كما في المعادلة التالية:

$$(٥.٢٣) \quad x_c[n] = \begin{cases} x[n-n_0] & \text{for } n_0 \leq n \leq N-1 \\ x[N-n_0+n] & \text{for } 0 \leq n < n_0 \end{cases}$$

كما نعلم فإن الجمع الالتصافي الخطي linear convolution على التتابعين $x[n]$ و $h[n]$ ما هو إلا تكرار من عمليات الإزاحة على أحد التتابعين ثم ضرب التتابعين كل عينة فيما يناظرها. الجمع الالتصافي الدوري circular convolution يشبه تماماً الجمع الالتصافي الخطي سوى أن الإزاحة هنا تكون إزاحة دورانية بدلاً من الإزاحة الخطية. وعلى ذلك فإنه يمكن كتابة الجمع الالتصافي الدوراني كما في المعادلة رقم (٥.٤).



الشكل رقم (٥.٦). الإزاحة الدورانية على التتابعات.

$$(٥.٢٤) \quad y_c[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]h[n-m]_N$$

لاحظ أن كلا المتابعين $x[n]$ و $h[n]$ يجب أن يكون لهما نفس الطول N . وعلى ذلك فإن التابع الناتج من الجمع الالتفافي الدوراني يكون هو أيضاً له نفس الطول N ، وذلك على العكس من الجمع الالتفافي الخطي الذي يعطي تابع طوله $2N-1$ كما رأينا سابقاً.

مثال رقم (٥.٣). احسب المجموع الالتفافي الدوراني circular convolution للمتابعين التاليين:

$$x[n]=[1 \ 2 \ 0 \ 1], \quad h[n]=[2 \ 2 \ 1 \ 1]$$

الناتج $y_c[n]$ سيكون تابع طوله ٤ ويعطى بالمعادلة التالية:

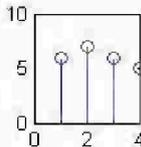
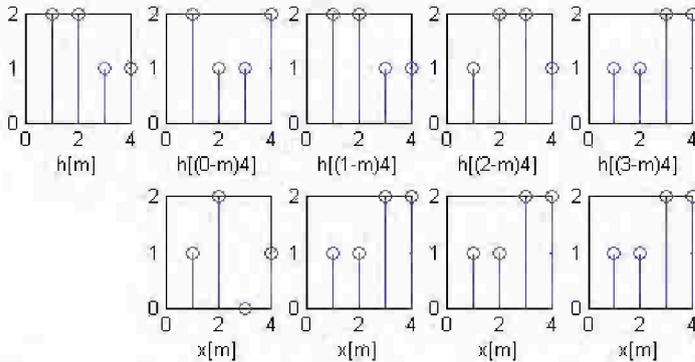
$$(٥.٢٥) \quad y_c[n] = \sum_{m=0}^3 x[m]h[n-m]_4, \quad n=0,1,2,3$$

بوضع $n=0$ في المعادلة رقم (٥.٢٣) نحصل على العينة الأولى من الخرج:

$$(٥.٢٦) \quad \begin{aligned} y_c[0] &= x[0]h[0] + x[1]h[3] + x[2]h[2] + x[3]h[1] \\ &= 1x_2 + 2x_1 + 0x_1 + 1x_2 = 6 \end{aligned}$$

الجدول رقم (٥.٤). خواص تحويل فورييه المقطع.

الخاصية والتتابع في النطاق الزمني	التحويل DFT
$Ax[n]+Bh[n]$ الخطية	$AX[k]+BH[k]$
$x[(n-n_0)N]$ إزاحة دورانية في نطاق الزمن	$X[k]e^{-j2\pi k n_0/N}$
$e^{j2\pi k n_0/N} x[n]$ إزاحة دورانية في نطاق التردد	$X[(k-k_0)N]$
$\sum_{m=0}^{N-1} x[m]h[(n-m)N]$ جمع النطاق دوراني	$X[k]H[k]$
$x[n]h[n]$ التعديل modulation	$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[m]H[(k-m)N]$
$x^*[n]$	$X^*[-k]_N$
$x^*[-n]_N$	$X^*[k]$



$y_c[m]$, circular convolution

الانطاف الدوراني

الشكل رقم (٥.٧). الجمع الانطافي الدوراني.

بنفس الطريقة يمكن حساب العينات الأخرى $y_c[1]$ و $y_c[2]$ و $y_c[3]$ بالاستعانة

بالتتابع $x[n]$ و $h[n]$ والإزاحات الدورانية للتتابع $h[n]$ والتتابع الناتج $y_c[n]=[6 \ 7 \ 6 \ 5]$

سيكون كما في الشكل رقم (٥.٧).

مثال رقم (٥.٣). احسب تحويل فوريير المقطع DFT إذا كان $x[n]$ عبارة عن تتابع طوله N من العينات التي كلها أصفار ما عدا عينة واحدة قيمتها تساوي واحد عند $n=0$ ، تتابع عينة الوحدة unit sample.

بالتعويض عن $x[n]$ في المعادلة رقم (٥.١٩) نحصل على $X[k]=1$ لكل قيم k التي تتراوح من $k=0$ حتى $k=N$. وهذا يناظر تحويل فوريير لإشارة الدفعة impulse signal التناظرية أو الانسيابية حيث إن تحويل فوريير لها يكون ثابتاً ويساوي واحداً عند جميع الترددات.

(٥.٥.١) حسابات تحويل فوريير المعين DFT

المعادلة رقم (٥.١٩) التي تحسب التحويل DFT يمكن إعادة كتابتها في صورة مصفوفات كما يلي:

$$(٥.٢٧) \quad X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$$

$$(٥.٢٨) \quad \begin{pmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{pmatrix}$$

$$X = D x$$

حيث X متجه عناصره هي قيم تحويل فوريير المقطع DFT وعددها N عنصر، بينما x هي متجه عناصره هي عينات الإشارة x المطلوب حساب التحويل DFT لها وعددها N من العناصر أيضاً. D عبارة عن مصفوفة مربعة عدد عناصرها هو $N \times N$ من العناصر.

لتعميم الحسابات سنفترض أن الإشارة $x[n]$ في المعادلة رقم (٥.٢٧) هي إشارة

مركبة complex أي لها مركبة حقيقية $\text{Re}(x[n])$ ومركبة تخيلية $\text{Im}(x[n])$. كذلك فإن الكمية W_N^{kn} هي أيضاً كمية مركبة تتكون من مركبة حقيقية $\text{Re}(W_N^{kn})$ ومركبة تخيلية $\text{Im}(W_N^{kn})$ وعلى ذلك فإنه يمكن كتابة المعادلة رقم (٥.٢٧) مرة أخرى في صورتها العامة وبدلالة المركبات الحقيقية والتخيلية كما يلي :

$$(٥.٢٩) \quad X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \{ \text{Re}(x[n]) + j \text{Im}(x[n]) \} \{ \text{Re}(W_N^{kn}) + j \text{Im}(W_N^{kn}) \}$$

بفك الأقواس لهذه المعادلة يمكن كتابتها كما يلي :

$$(٥.٣٠) \quad X[k] = \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \text{Re}(x[n]) \cdot \text{Re}(W_N^{kn}) - \sum_{n=0}^{N-1} \text{Im}(x[n]) \cdot \text{Im}(W_N^{kn}) \right\} \\ + j \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \text{Re}(x[n]) \cdot \text{Im}(W_N^{kn}) + \sum_{n=0}^{N-1} \text{Im}(x[n]) \cdot \text{Re}(W_N^{kn}) \right\}$$

بالنظر في المعادلة رقم (٥.٣٠) نجد أنه لحساب كل عنصر من عناصر المتجه $X[k]$

فإننا نحتاج إلى $4N$ من عمليات الضرب ، وبما أن المتجه $X[k]$ يحوى عدد N من العناصر حيث k تتغير من صفر إلى $N-1$ ، فإننا سنحتاج لعدد $4N \times N = 4N^2$ من عمليات الضرب الحقيقي real multiplication. كذلك فإن حساب عنصر واحد من عناصر $X[k]$ يحتاج إلى $4(N-1)+2=4N-2$ من عمليات الجمع ، وبما أننا نحتاج لعدد N من هذه العناصر فإننا سنحتاج إلى $N(4N-2)$ من عمليات الجمع. من ذلك نرى أنه للحصول على تحويل فوريير المعين DFT لأي إشارة فإننا نحتاج لعدد مهول من عمليات الضرب والجمع يتناسب تقريباً مع مربع عدد عينات الإشارة التي نجري عليها التحويل DFT. كمثال على ذلك فإنه لو أن عدد عناصر الإشارة $x[n]$ كان $N=256$ فإن عدد عمليات الضرب

اللازمة يكون 65536 عملية ضرب ومثلها تقريبا لعمليات الجمع. هذا الكم المهول من الحسابات بالطبع سيأخذ الوقت الكثير على الحاسب عند تنفيذه. لذلك كانت هناك الحاجة الدائمة لتقليل هذا الكم من الحسابات والوقت اللازم لها وظلت الأبحاث وما زالت في كيفية تقليل هذه الحسابات والبحث عن خواريزم سريع يقوم بهذه الحسابات. المشكلة الأخرى في الحساب المباشر للمعادلة رقم (٥,٣٠) هي المقدار الأسّي والذي هو في الأصل دالة جيبية وهذا في حد ذاته يحتاج لوقت كبير على الحاسب بالمقارنة مع الكثير من العمليات الحسابية الأخرى. لحسن الحظ فإنه أمكن التوصل إلى خواريزم أو طريقة أمكن باستخدامها تقليل عدد عمليات الحساب اللازمة إلى $N \log_2 N$ وهذا يعد تخفيضاً كبيراً في كمية الحسابات ومن ثم في الوقت اللازم لإجراء هذا التحويل، هذه الطريقة أو هذا الخواريزم هو ما أطلق عليه خواريزم تحويل فوريير السريع Fast Fourier Transform Algorithm أو ما عرف اختصاراً بخواريزم FFT والذي سيكون موضوع الجزء التالي.

(٥,٦) خواريزم تحويل فوريير السريع

Fast Fourier Transform Algorithm, FFT

إنه لمن حسن الحظ أن الكثير جدا من عناصر المعادلة رقم (٥,٢٧) مكرر ويمكن حسابه لمرة واحدة فقط، ولو تم أخذ ذلك في الاعتبار لأمكن الاستغناء عن الكثير جدا من الحسابات المباشرة لمعادلة هذا التحويل. إن ذلك يرجع لطبيعة الكمية الأسية $e^{-j2\pi kn/N}$ ، فهذه الكمية دورية وتكرر نفسها كلما كانت الكمية $kn > N$ ولذلك فإنه لن يكون لها سوى N من القيم المختلفة مع تغير كل من n و k من صفر حتى $N-1$. لكي نشعر بذلك ونرى كيف أنه مع تغير كل من n و k من صفر إلى $N-1$ فإنه سيكون هناك الكثير من القيم المكررة لذا فإننا سنحسب الكمية الأسية $e^{-j2\pi kn/N}$ كمثال بفرض

$N=8$ وعلى ذلك فإن n و k كل منهما ستتغير من $0 - 7$. الجدول رقم (٥,٥) يبين جميع القيم الممكنة لهذه الكمية الأسية في هذه الحالة ($N=8$). نلاحظ من هذا الجدول أن القيمة ١ مثلا تكررت ١٥ مرة والقيمة - ١ تكررت ثمان مرات والقيمة j تكررت ثمان مرات والقيمة $-j$ تكررت سبع مرات وهكذا. أهم ما نلاحظه في هذا الجدول هو وجود ثمان كميات فقط لها قيم مختلفة وهي القيمة - ١ و ١ والقيمة j و $-j$ والقيمة $(-1 - \sqrt{2}j)/2$ و $(-1 + \sqrt{2}j)/2$ وكذلك القيمة $(1 + \sqrt{2}j)/2$ و $(1 - \sqrt{2}j)/2$.

الجدول رقم (٥,٥). جميع القيم الممكنة للكمية W_N^{kn} عندما $K=N=8$.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	$(1-j)/\sqrt{2}$	$-j$	$-(1+j)/\sqrt{2}$	-1	$-(1-j)/\sqrt{2}$	j	$(1+j)/\sqrt{2}$
2	1	$-j$	-1	j	1	$-j$	-1	j
3	1	$-(1+j)/\sqrt{2}$	j	$(1-j)/\sqrt{2}$	-1	$(1+j)/\sqrt{2}$	$-j$	$-(1-j)/\sqrt{2}$
4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
5	1	$-(1-j)/\sqrt{2}$	$-j$	$(1+j)/\sqrt{2}$	-1	$(1-j)/\sqrt{2}$	j	$-(1+j)/\sqrt{2}$
6	1	j	-1	$-j$	1	j	-1	$-j$
7	1	$(1+j)/\sqrt{2}$	j	$-(1-j)/\sqrt{2}$	-1	$-(1+j)/\sqrt{2}$	$-j$	$(1-j)/\sqrt{2}$

هناك العديد من طرق تخفيض كمية الحسابات المطلوبة لحساب التحويل DFT ومنذ حوالي ٥٠ سنة والأبحاث مكثفة في هذا الموضوع ولقد تم استخدام التحويل FFT وكان أول استخدام له في عام ١٩٧٦ ، ولقد كان لظهور هذه الصور السريعة لحساب

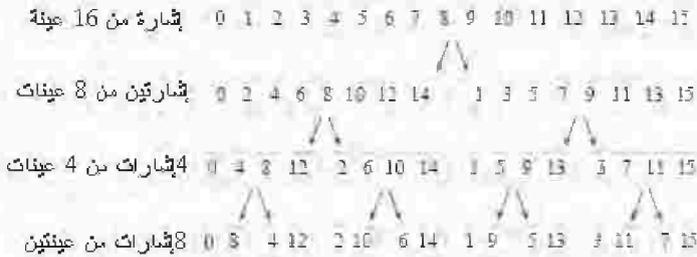
ال DFT الأثر الكبير في شيوع استخدام الـ FFT في الكثير من التطبيقات ومنها الرادار وكل تقنيات الاتصالات والإلكترونيات الطبية والكثير من التطبيقات الأخرى وسنعرض هنا بعض هذه الطرق الشائعة الاستخدام.

(٥.٦.١) طريقة التقسيم في الزمن Decimation in Time لحساب التحويل DFT

كما سنرى فإن التحويل FFT هو طريقة أخرى لحساب التحويل DFT ويعطي نفس النتائج النهائية تماماً ويسرعة كبيرة جداً عند مقارنته بالحساب المباشر من خلال المعادلة رقم (٥.٣٠) ولولا استخدام التحويل FFT لما كان من الممكن استخدام تقنيات المعالجة الرقمية في الكثير من التطبيقات المنتشرة في شتى أنحاء الحياة.

في طريقة التقسيم الزمني يتم تقسيم عينات الإشارة وهي في النطاق الزمني على مراحل متتابعة وسنفترض في البداية أن عدد عينات الإشارة $x[n]$ في النطاق الزمني هو N كما ذكرنا وأن N هي إحدى قوى الرقم ٢ أي أن $N=2^v$ حيث v أي رقم صحيح. يبدأ خواريزم التقسيم الزمني بتقسيم عينات الإشارة $x[n]$ إلى جزأين، الجزء الأول يحتوي على العينات ذات الأرقام الزوجية $x[0], x[2], x[4], \dots, x[N-2]$ والجزء الثاني يحتوي على العينات ذات الأرقام الفردية $x[1], x[3], x[5], \dots, x[N-1]$. بعد ذلك يتم تقسيم كل جزء من الأجزاء السابقة إلى جزأين مرة أخرى، الجزء الأول يحتوي على العينات الزوجية في الجزء الأول $x[0], x[4], \dots$ والجزء الثاني يحتوي على العينات الفردية في الجزء الأول $x[2], x[6], \dots$ ، ثم بنفس الطريقة نقوم بتقسيم عينات الجزء الثاني إلى العينات الزوجية في هذا الجزء $x[1], x[5], \dots$ والعينات الفردية فيه وهي $x[3], x[7], \dots$ تستمر عملية التقسيم هذه حتى أن نصل إلى أن كل جزء سيحتوي على نقطتان فقط وبالطبع فإن عدد مراحل التقسيم هذه ستكون $v = \log_2(N)$ لأن N كما ذكرنا هي 2^v مرفوعة

مرفوعة للقوة ٧. شكل رقم (٥.٨) يبين رسماً توضيحياً لعملية التقسيم السابقة حيث تم تقسيم إشارة من ١٦ عينة على ثلاث مراحل تقسيم إلى أن وصلنا إلى ثمان إشارات كل منها تتكون من عيتين فقط في المرحلة الأخيرة.



الشكل رقم (٥.٨). التقسيم المتعالي لعينات الإشارة في النطاق الزمني.

السؤال المهم هنا هو ماذا سنستفيد من هذا التقسيم؟ سنعرض هنا كيف أن كل عملية تقسيم ستوفر كثيراً في الحسابات اللازمة للحصول على التحويل. سنبدأ من المعادلة رقم (٥.٢١) التي تحدد تحويل فوريير الرقمي DFT للتابع $x[n]$ المكون من عدد N من العينات، وسنعيد كتابتها كما يلي:

$$(٥.٣١) \quad X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

مع أول خطوة تقسيم في النطاق الزمني يتم تقسيم التبع $x[n]$ إلى جزأين الأول يحتوي العينات الزوجية والثاني يحتوي على العينات الفردية وعلى ذلك يمكن إعادة كتابة المعادلة رقم (٥.٣١) كما يلي:

$$(٥,٣٢) \quad X[k] = \sum_{n=0,even}^{N-1} x[n]W_N^{kn} + \sum_{n=1,odd}^{N-1} x[n]W_N^{kn}$$

بوضع $n=2r$ في الجزء الأول من المعادلة رقم (٥,٣٢) و $n=2r+1$ في الجزء الثاني من نفس المعادلة يمكن إعادة كتابة المعادلة رقم (٥,٣٢) كما يلي :

$$(٥,٣٣) \quad X[k] = \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r]W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1]W_N^{(2r+1)k}$$

يمكن إعادة كتابة المعادلة رقم (٥,٣٣) ليكون كل جزء فيها بدلالة $N/2$ من النقاط وذلك بالاستعانة بالمعادلة التالية :

$$(٥,٣٤) \quad W_N^{2rk} = (W_N^2)^{rk} = e^{-j(2\pi/N)2rk} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}rk} = W_{N/2}^{rk}$$

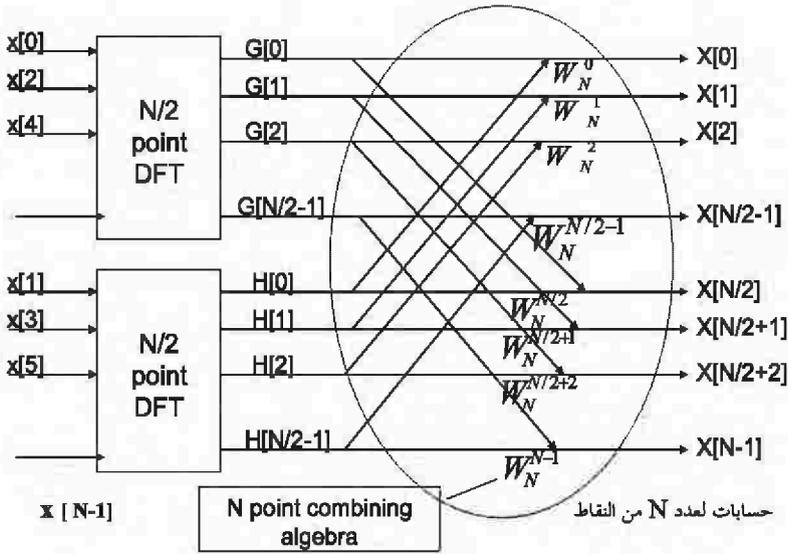
بالتعويض من المعادلة رقم (٥,٣٤) في المعادلة رقم (٥,٣٣) يمكن كتابة المعادلة التالية :

$$(٥,٣٥) \quad X[k] = \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r]W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1]W_{N/2}^{rk}$$

والتي يمكن كتابتها باختصار كما يلي :

$$(٥,٣٦) \quad X[k] = G[k] + W_N^k H[k] \quad , \quad k=0, 1, 2, 3, \dots, (N/2)-1$$

بهذه الخطوة الأولى من التقسيم نكون قد قسمنا تحويل فوريير الرقمي $X[k]$ للعدد N من النقاط إلى تحويلين أو جزأين ، الجزء الأول منهما هو $G[k]$ الذي يمثل تحويل فوريير الرقمي للجزء الزوجي والجزء الثاني $H[k]$ الذي يمثل تحويل فوير للجزء الفردي من التسابع $x[n]$ ، والجزأين يتم تجميعهما كما في المعادلة رقم (٥,٣٦) والموضحة في الشكل رقم (٥,٩).



الشكل رقم (٥,٩) . أول خطوة في التقسيم في النطاق الزمني للحصول على FFT.

كما علمنا من قبل فإن عدد عمليات الضرب المركب اللازمة لحساب التحويل DFT يساوي تقريباً N^2 وعلى ذلك فإنه يمكننا كتابة عدد عمليات الضرب المركب اللازمة لحساب $X[k]$ في المعادلة رقم (٥,٣٦) كما يلي :

$$(٥,٣٧) \quad m = (N/2)^2 + (N/2)^2 + N = N + N^2/2$$

حيث أول كمية $(N/2)^2$ تمثل عدد عمليات الضرب المركب اللازمة لحساب التحويل DFT للنقاط الزوجية، والكمية الثانية $(N/2)^2$ تمثل عدد عمليات الضرب المركب اللازمة لحساب التحويل DFT للنقاط الفردية، والكمية N تمثل عدد عمليات الضرب اللازمة لحساب الكمية $W_N^k H[k]$. في المعادلة رقم (٥,٣٦) k تتغير من 0 حتى $N-1$ ، بينما كل من $H[k]$ و $G[k]$ تحتوي $N/2$ فقط من النقاط ولكن كل منهما عبارة عن تتابع دوري، أي يتكرر كل $N/2$ من النقاط. لذلك يجب مراعاة أنه عند حساب كل من $G[k]$ و $H[k]$ لقيم k أكبر من $N/2$ وأقل من $N-1$ فإن $G[N/2+1]=G[1]$ و $G[N/2]=G[0]$ وهكذا ونفس الشيء يطبق على التتابع $H[k]$.

بنفس الطريقة يمكن تقسيم كل جزء من الأجزاء السابقة إلى جزأين آخرين، الجزء الأول يحتوي على النقاط الزوجية والثاني يحتوي النقاط الفردية في كل جزء ويتم حساب التحويل DFT لكل جزء من الأجزاء الأربعة الناتجة كما في الشكل رقم (٥,١٠). يمكن كتابة التحويل $X[k]$ في هذه الحالة كما في المعادلة رقم (٥,٣٨) التالية:

$$(٥,٣٨) \quad X[k] = Ge[k] + W_{N/2}^k Go[k] + He[k] + W_{N/2}^k Ho[k]$$

في المعادلة رقم (٥,٣٨) $Ge[k]$ تمثل التحويل DFT للنقاط الزوجية في الجزء الزوجي $G[k]$ ، و $Go[k]$ تمثل التحويل DFT للجزء الفردي من $G[k]$ ، ونفس الكلام مطبق على التحويلات $He[k]$ و $Ho[k]$.

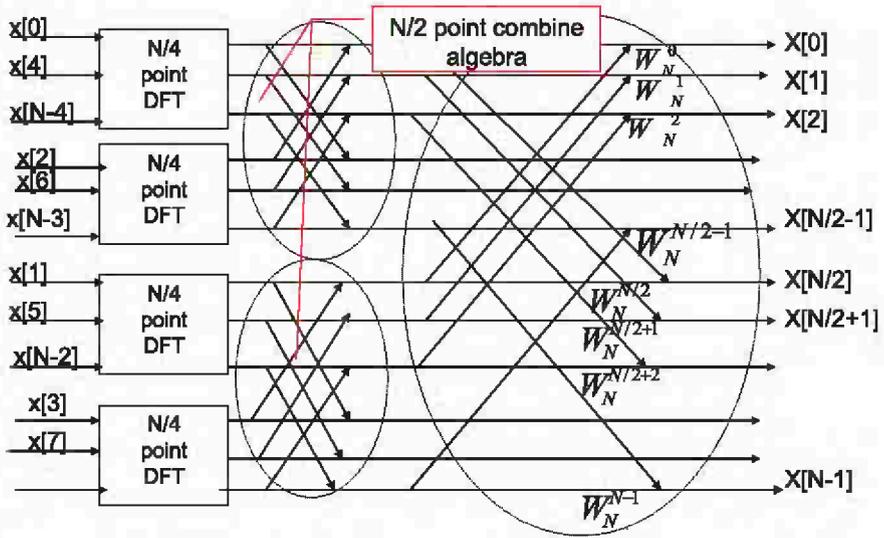
بنفس الطريقة يمكن حساب عدد عمليات الضرب المركب في هذه الحالة والذي يمكن كتابته كما في المعادلة رقم (٥,٣٩):

$$(٥,٣٩) \quad P = 4(N/4)^2 + 2(N/2) + N = N^2/4 + 2N$$

وتستمر عملية التقسيم بحيث في المرحلة التالية يتم تقسيم كل مجموعة من الـ $N/4$ من النقاط إلى مجموعتين من النقاط الزوجية والفردية أيضاً والتي تحتوي كل منها على $N/8$ من النقاط. وتستمر عمليات التقسيم إلى أن تنتهي في المرحلة الأخيرة حيث تؤول عملية التقسيم إلى نقطتين فقط في كل مجموعة. بالطبع عندما يكون عدد النقاط الكلي أو في أول مرحلة إحدى قوى الرقم ٢ ($N=2^r$) فإن عدد مراحل التقسيم سيكون $\log_2 N=r$. فإذا كان عدد النقاط مثلاً هو $N=2^3=8$ فإن عدد مراحل التقسيم في هذه الحالة سيكون ٣ مراحل. أما عدد عمليات الضرب المركب الناتج فيمكن استنتاجه من تتابع عمليات التقسيم في الأشكال رقم (٥.٩) و (٥.١٠) و (٥.١١). في أول عملية تقسيم كان عدد عمليات الضرب المستخدمة في ربط جزئي التحويل هو N كما في شكل رقم (٥.٩). في المرحلة الثانية والتي تحتوي على أربعة أجزاء كان عدد عمليات الضرب المستخدمة في الربط هو $2N$ كما في الشكل رقم (٥.١٠). بنفس الطريقة يمكن استنتاج عدد عمليات الضرب الكلي في المرحلة الأخيرة والذي يمكن كتابته كما يلي:

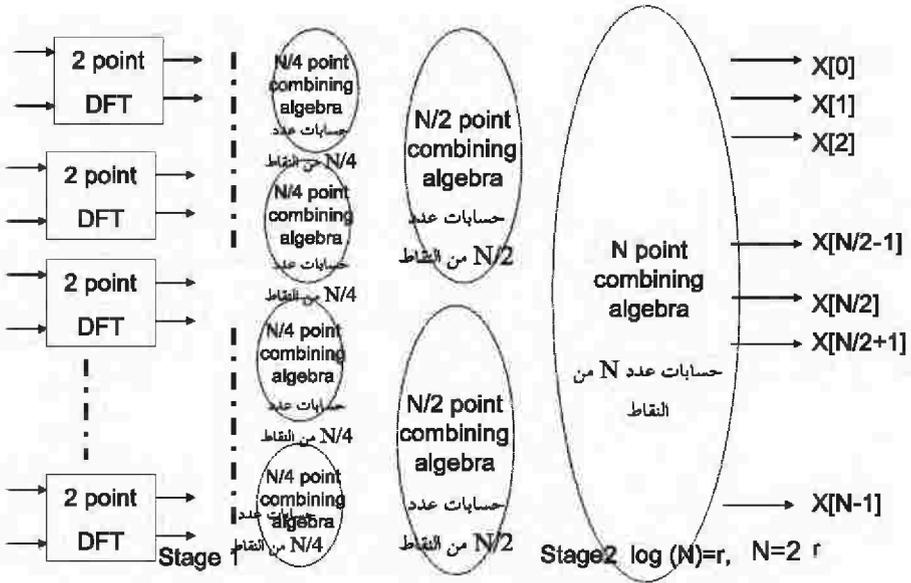
$$P = N \cdot \log_2(N) \quad (٥.٤٠)$$

كمثال على ذلك سنفترض $N=2^3=8$ ، وعلى ذلك سيكون هناك ثلاث مراحل تقسيم إلى أن نصل إلى المرحلة الأخيرة التي ستحتوي على أربع مجموعات كل مجموعة تحتوي على نقطتين فقط سيتم حساب الـ DFT لهما كما في الشكل رقم (٥.١٢). في هذه الحالة سيكون عدد عمليات الضرب المركب يساوي $8 \log_2 8 = 24$ ، وهذا يعد تخفيضاً كبيراً في عمليات الضرب إذا ما قورن بالعدد المطلوب في حالة الحساب المباشر للـ DFT الذي يساوي في هذه الحالة $N^2=64$ عملية ضرب مركب. من الشكل رقم (٥.١٢) يمكن أن نلاحظ أكثر من ملاحظة:



الشكل رقم (٥،١٠). الخطوة الثانية من التقسيم في النطاق الزمني للحصول على FFT.

- ١ - مركبات ال DFT الناتجة في هذه الحالة $X[0]$, $X[1]$, $X[N]$ تكون مرتبة ترتيباً تصاعدياً كما في الشكل ولا تحتاج لإعادة ترتيب مثل نقاط الدخل $x[n]$ التي يتم إعادة ترتيبها إلى نقاط زوجية ونقاط فردية كما في الشكل رقم (٥،١٢).
- ٢ - نقاط الدخل $x[n]$ يتم إعادة ترتيبها داخل كل مجموعة مع كل عملية تقسيم إلى نقاط زوجية وأخرى فردية. هذه العملية ليست سهلة وبالذات في التتابعات ذات النقاط العديدة، ولكن هناك ملاحظة جميلة جداً جعلت عملية إعادة ترتيب تتابع الدخل $x[n]$ للحصول على مجموعات النقاط النهائية عملية سهلة جداً. يتم ذلك عن طريق التعبير عن رقم كل نقطة في النظام الثنائي في الترتيب الطبيعي التصاعدي للنقاط كما في العمود الثاني من اليسار في الجدول رقم (٥،٦)، ثم يتم عكس بتات كل رقم (عكس مرآة) فنحصل على العمود الثالث من اليسار في نفس الجدول. الأرقام



الشكل رقم (٥.١١). المرحلة الأخيرة من مراحل التقسيم في النطاق الزمني للحصول على FFT.

النتيجة في العمود الثالث يتم أخذها اثنين باثنين من القمة لنحصل على مجموعات المرحلة الأخيرة من التقسيم. فمثلاً في هذا الجدول وفي حالة $N=8$ وكما في العمود الأيمن من الجدول رقم (٥.٤) سيتم أخذ النقطة رقم 0(000) مع النقطة رقم 4(100)، والنقطة 2(010) مع النقطة التالية لها في هذا العمود وهي النقطة 6(110) وهكذا إلى أن نأخذ النقطة 3(110) مع النقطة 7(111).

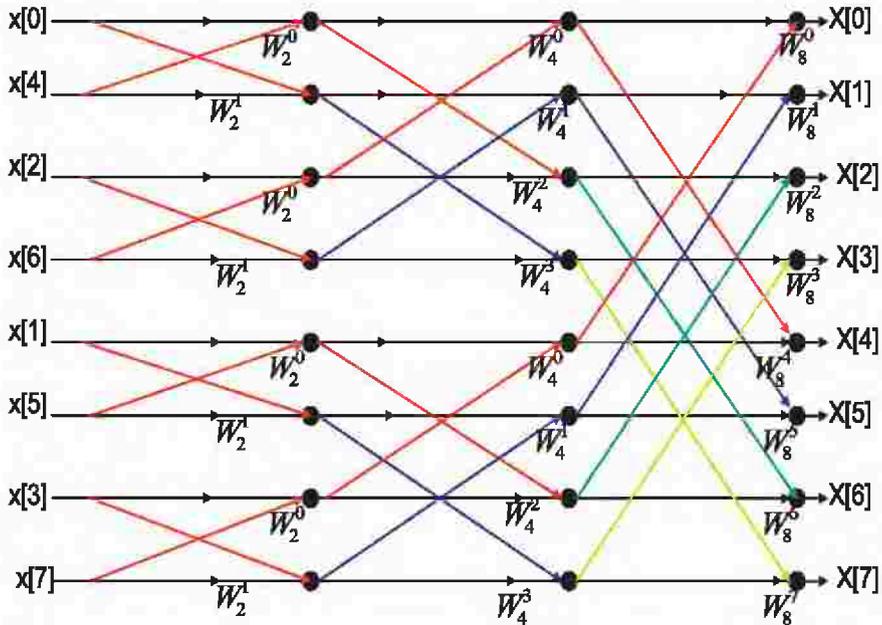
٣- نلاحظ في الشكل رقم (٥.١٢) أنه عبارة عن تكرار من شكل الفراشة بأبعاد مختلفة وفي كل فراشة هناك عمليتي ضرب، عملية في أحد القطرين والأخرى في الضلع الأفقي الأسفل من الفراشة. عمليتي الضرب في كل فراشة فيهما خاصية مهمة جدا وهي أن ناتج كل منهما متساوي مع اختلاف في الإشارة فقط. فمثلاً الكميتين

W_2^0 و W_2^1 يمكن كتابتهما كما يلي:

$$W_2^0 = 1$$

$$W_2^1 = e^{-j2\pi/2} = e^{-j\pi} = -1$$

حيث نلاحظ أنهما متساويتان سوى أن الإشارة في إحداهما عكس الأخرى.
بنفس الطريقة يمكن أن نكتب معاملات الضرب التالية في إحدى الفراشات الأخرى في
الشكل رقم (٥.١٢):



الشكل رقم (٥.١٢). تحويل فوريير FFT لتابع من ثمان نقاط.

نلاحظ أيضاً أن الكميتين متساويتان غير أن الإشارة مختلفة بينهما. بنفس الطريقة يمكن كتابة كل معاملات الضرب في كل الفراشات الموجودة في الشكل رقم (٥.١٢). وعلى ذلك يمكن إعادة رسم الشكل رقم (٥.١٢) كما في الشكل رقم (٥.١٣) حيث نلاحظ أن عدد عمليات الضرب المركب في هذه الحالة قد تم تخفيضها إلى النصف بحيث يمكن كتابة عدد عمليات الضرب الناتجة كما يلي :

الجدول رقم (٥.٦).

تتابع الدخل x[n]	الترقيم الثاني	عكس الترقيم الثاني	المجموعات الناتجة
x[0]	000	000	X[0]
x[1]	001	100	X[4]
x[2]	010	010	X[2]
x[3]	011	110	X[6]
x[4]	100	001	X[1]
x[5]	101	101	X[5]
x[6]	110	011	X[3]
x[7]	111	111	X[7]

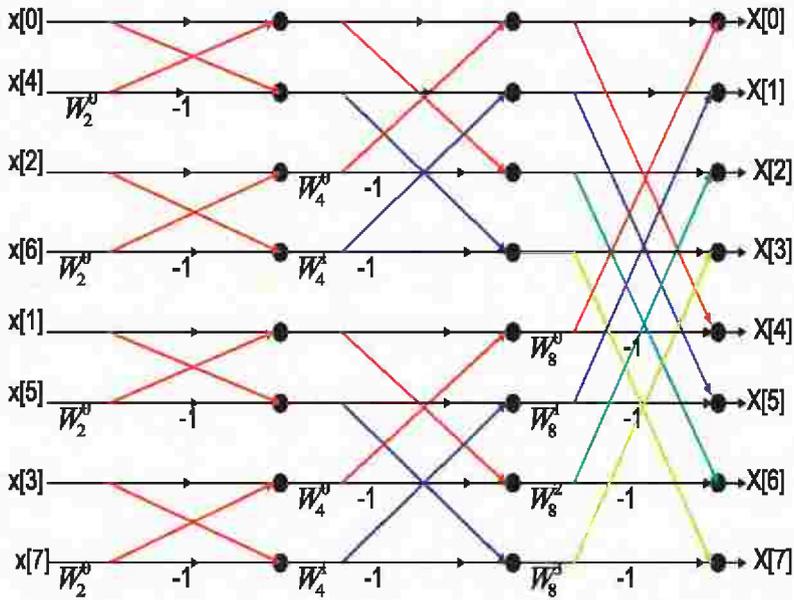
$$W_8^7 = W_8^{8-1} = W_8^8 \cdot W_8^{-1} = 1 \cdot W_8^{-1} = W_8^{-1} \quad W_8^3 = W_8^{4-1} = W_8^4 \cdot W_8^{-1} = -1 \cdot W_8^{-1} = -W_8^{-1}$$

(٥.٤١)

$$P=(N/2) \cdot \log_2(N)$$

بتطبيق هذه المعادلة حينما تكون N=8 فإن عدد عمليات الضرب سيصبح ١٢

عملية بدلاً من ٢٤ كما سبق.



الشكل رقم (٥،١٣). تحويل فوريير FFT لسابع من ثمان نقاط بعد تخفيض عمليات الضرب.

٣- الجدول رقم (٥،٧) يبين التخفيض في عدد عمليات الضرب المركب اللازمة لحساب التحويل FFT عند القيم المختلفة للمتغير N والتي يتضح منها القيمة الحقيقية للتخفيض وبالذات عند قيم N العالية والتي تكون هي القيم الطبيعية في جميع التطبيقات تقريباً.

(٥،٦،٢) حسابات تحويل فوريير السريع باستخدام MATLAB

يستخدم برنامج MATLAB طريقة التقسيم في الزمن لحساب هذه التحويلات.

يتم ذلك من خلال الدوال الآتية المتاحة مباشرة:

```
fft(x)
ifft(X)
fft(x,N)
ifft(X,N)
```

الجدول رقم (٥.٧).

عدد مراحل التقسيم r	عدد النقاط N	N^2	$(N/2)\log_2(N)$	Ratio of N^2 to $(N/2)\log_2(N)$
2	4	16	4	4
3	8	64	12	5.333
4	16	256	32	8
5	32	1024	80	12.8
6	64	4096	192	21.33
7	128	16384	448	36.57
8	256	65536	1024	64
9	512	262144	2304	113.77
10	1024	1048576	5120	204.8

حيث الدالة الأولى تحسب التحويل fft للمتجه أو التابع x من العينات ، بينما الدالة الثانية تحسب التحويل العكسي للمتجه X . الدالة الثالثة $fft(x,N)$ تعطي أو تحسب التحويل fft للعدد N من عينات من المتجه x بحيث إذا كانت $x < N$ فإن المتجه x يتم إضافة أصفار في نهايته إلى أن يصبح طوله هو N ، بينما إذا كانت $N < x$ فإنه يتم استقطاع العدد N فقط من عينات المتجه x ويتم حساب التحويل fft لها. الدالة الأخيرة $ifft(x,N)$ تحسب التحويل العكسي بنفس الطريقة كما في الدالة $fft(x,N)$.

مثال رقم (٥.٤). سنقدم هنا مثلاً لإشارة مكونة من التردد ٥٠ هرتزاً والتردد ١٢٠ هرتزاً بمجموعان سوياً ومعهما إشارة ضوضاء (عشوائية) متوسطها صفر ثم سنحسب fft لهذه الإشارة لنرى المحتويات الترددية أو طيف هذه الإشارة. معدل عيننة هذه الإشارة هو ١٠٠٠ هرتز. مشكلة الـ fft أنه مركب، أي يتكون من مركبة حقيقية وأخرى تخيلية. لذلك بدلاً من أن نرسم الـ fft سنرسم متوسط قدرة الطيف Average

power spectrum والتي تعطى بالعلاقة التالية :

$$P = \text{FFT} * (\text{conj}(\text{FFT})) / N \quad (٥.٤٢)$$

حيث P هي متوسط قدرة الطيف ، و conj تعني المرافق المركب complex conjugate للـ fft و N هي عدد النقاط التي سنحسب لها الـ fft.

برنامج MATLAB التالي سيحدد هذه الإشارة ونرسم ٥٠ ميلي ثانية منها كما

يلي :

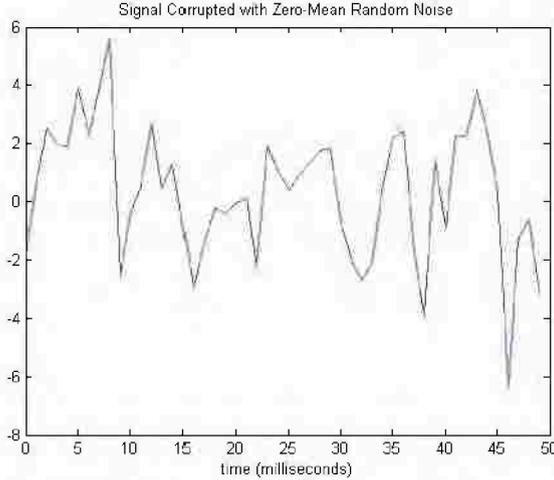
```
%Calculation of the average power spectrum
t = 0:0.001:0.6;%sampling rate 0.001 sec
x = sin(2*pi*50*t)+sin(2*pi*120*t);
y = x + 2*randn(size(t));
plot(1000*t(1:50),y(1:50))
title('Signal Corrupted with Zero-Mean Random Noise')
xlabel('time (milliseconds)')
```

الدالة randn تعطي قيماً عشوائية random متوسطها صفر وتباعدها يساوي واحداً ، والدالة randn(size(t)) ستعطي متجهاً من هذه القيم العشوائية وحجم هذا المتجه (عدد عناصره) هو نفس حجم المتجه t. الشكل رقم (٥.١٤) يبين رسماً لهذه الإشارة في النطاق الزمني حيث لا نستطيع أن نحدد المحتويات الترددية لهذه الإشارة. الآن سنحسب الـ fft لهذه الإشارة ونرسم متوسط قدرة الطيف لها بالأوامر

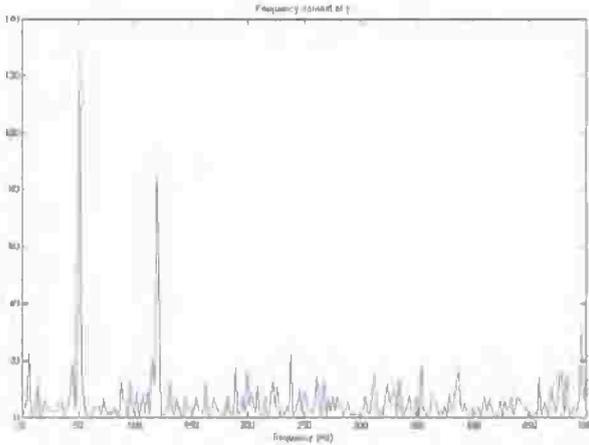
التالية :

```
Y = fft(y,512);
Pyy = Y.* conj(Y) / 512;
f = 1000*(0:256)/512;
plot(f,Pyy(1:257))
title('Frequency content of y')
xlabel('frequency (Hz)')
```

الشكل رقم (٥.١٥) يبين متوسط قدرة الطيف (ومن ثم المحتويات الترددية) للإشارة السابقة حيث نلاحظ وجود قمتين عند التردد ٥٠ هرتزاً والتردد ١٢٠ هرتزاً وأما باقي الإشارة فهي ضوضاء كما نرى في هذا الشكل.



الشكل رقم (٥.١٤). إشارة مخفية داخل ضوضاء.



الشكل رقم (٥.١٥). المحتويات الترددية لإشارة المثال (٥.٤).

(٥.٧) تمارين

١- افترض أن $X(e^{j\omega})$ تمثل التحويل DTFT للتابع الحقيقي $x[n]$:

أ) أثبت أن $x[n]$ يمكن استنتاجها من $X(e^{j\omega})$ بالعلاقة التالية إذا كانت $x[n]$ تمثل تتابعاً زوجياً:

$$x[n] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} X(e^{j\omega}) \cos(\omega n) d\omega$$

ب) أثبت أن $x[n]$ يمكن استنتاجها من $X(e^{j\omega})$ بالعلاقة التالية إذا كانت $x[n]$ تمثل تتابعاً فردياً:

$$x[n] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} X(e^{j\omega}) \sin(\omega n) d\omega$$

٢- احسب التحويل DTFT للتابع السببي التالي:

$$x[n] = A\alpha^n \cos(\omega_0 n + \phi)u[n]$$

٣- احسب التحويل DTFT لكل من التتابعات التالية:

$$x_1[n] = \alpha^n u[n], \dots, |\alpha| < 1$$

$$x_2[n] = \alpha^n u[-n], \dots, |\alpha| > 1$$

$$x_3[n] = \begin{cases} \alpha^{|n|} & \dots, |n| \leq M \\ 0 & \dots, \text{Otherwise} \end{cases}$$

$$x_4[n] = \alpha^n u[n+3], \dots, |\alpha| < 1$$

$$x_5[n] = n\alpha^n u[n], \dots, |\alpha| < 1$$

$$x_6[n] = \begin{cases} 1 & \dots, -N \leq n \leq N \\ 0 & \dots, \text{Otherwise} \end{cases}$$

$$x_7[n] = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{N}, & \dots\dots -N \leq n \leq N \\ 0, & \dots\dots \text{Otherwise} \end{cases}$$

٤- افترض التابع التالي :

$$x[n] = \{2 \ 1 \ \underline{-1} \ 0 \ 3 \ 2 \ 0 \ -3 \ 4\}$$

حيث العينة $n=0$ تم تمييزها بالخط أسفلها. بافتراض التحويل DTFT لهذا التابع هو

$X(e^{j\omega})$ ، احسب الدوال التالية دون حساب التحويل DTFT :

$$X(e^{j0})$$

$$X(e^{j\pi})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega$$

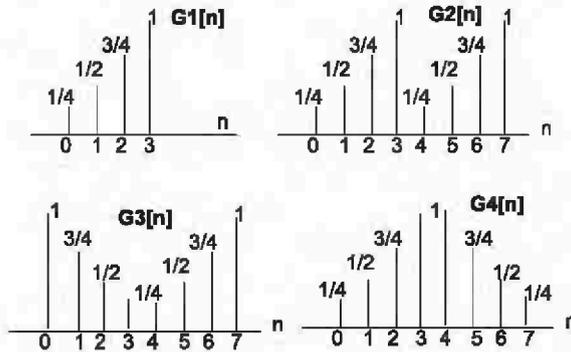
$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \right|^2 d\omega$$

٥- أعد التمرين رقم (٤) ولكن على التابع التالي :

$$x[n] = \{1 \ 5 \ -2 \ 1 \ \underline{3} \ 4 \ 2 \ 0 \ 5\}$$

٦- افترض أن $G1(e^{j\omega})$ هو التحويل DTFT للتابع $g1[n]$ الموضح في الشكل رقم

(٥.٦)، عبر عن التحويل DTFT للتابعات الموضحة في نفس الشكل بدلالة $G1(e^{j\omega})$.



الشكل رقم (٥.٦)

٧- افترض أن $X[k]$ هي التحويل DFT للتتابع $x[n]$ حيث N هي طول هذا التتابع،
 أثبت معادلة بارسيفال Parseval's relation التالية:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$$