

المرشحات التناظرية (التماثلية)

Analog Filters

(٦.١) مقدمة

إحدى الطرق المهمة في تصميم المرشحات الرقمية digital filters هي تحويل المرشحات التناظرية أو التماثلية إلى مرشحات رقمية باستخدام معادلات تحويل معينة. هناك مواقف لا بد فيها من استخدام المرشحات التناظرية، من هذه المواقف المرشح المضاد للتزيف antialiasing filter الذي يحدد المجال الترددي للإشارة الداخلة للمحول التناظري/الرقمي A/D عند تردد معين أقل من نصف تردد العينة. هناك كذلك مرشح بناء الإشارة التناظرية reconstruction filter الذي نضعه في آخر أي نظام رقمي وبعد المحول الرقمي/التناظري D/A الذي يحول الإشارة الرقمية إلى الصورة التناظرية. لذلك كان لزاماً أن نخصص هذا الفصل لإلقاء الضوء على أشهر الطرق المتبعة لتصميم المرشحات التناظرية تمهيداً لاستخدامها في تصميم المرشحات الرقمية. سنقدم في هذا الفصل ثلاث طرق شهيرة لتصميم المرشحات التناظرية وهي:

١- مرشح بترورث Butterworth filter: وهذه التسمية نسبة للعالم المهندس

الإنجليزي S. Butterworth الذي وصف معادلة هذا المرشح عام ١٩٣٠.

٢- مرشح شيبشيف **Chebyshev filter**: وهذه التسمية نسبة للعالم الرياضي

الروسي Pafnuti Chebyshev الذي وضع معادلة هذا المرشح.

٣- المرشح التناقصي **Elliptic filter**: كل واحد من هذه المرشحات يتميز

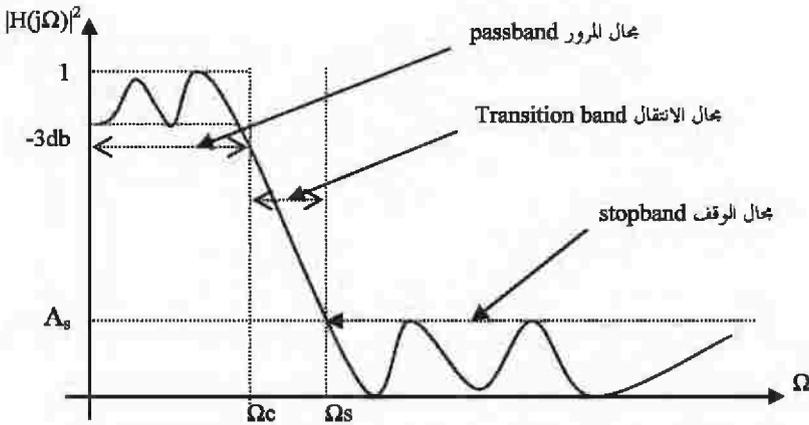
بمواصفات معينة تجعله مرشحاً لبعض التطبيقات عن الأنواع الأخرى وهذا ما سنراه في هذا الفصل.

الغرض من أي مرشح من أي نوع هو السماح لترددات معينة من الإشارة بالمرور عبر المرشح ، أما الترددات الأخرى فلا يسمح لها بالمرور ويتم وقفها أو منعها أو إحباطها. مجال الترددات الذي يسمح له بالمرور يسمى مجال المرور **passband** ، أما مجال الترددات التي يتم وقفها أو إحباطها فيسمى مجال الوقف **stopband**. لذلك فإن طرق تصميم أي مرشح تبدأ في العادة بوضع مواصفات لهذا المرشح توضح المجالات السابقة. الشكل رقم (٦.١) يبين استجابة حقيقية لأحد المرشحات حيث يقصد بالاستجابة أنها نسبة قدرة إشارة خرج المرشح إلى قدرة الإشارة الداخلة له ، وهذه النسبة يمكن التعبير عنها بالديسبل. مثل هذه الاستجابة نطلق عليها الاستجابة الترددية للمرشح حيث إنها توضح كيف يستجيب المرشح لإشارة داخله له عند الترددات المختلفة من صفر هرتز DC إلى ما لانهاية.

المنحنى الموجود في الشكل رقم (٦.١) يسمح بمرور الترددات من صفر هرتز

حتى التردد Ω_c الذي يطلق عليه تردد القطع **cutoff frequency**. إن الاستجابة الترددية تقل تدريجياً ابتداءً من القيمة واحد (صفر ديسبل) حتى تصل إلى النصف (-3db) عند تردد القطع ، وعنده تصبح قدرة إشارة الخرج نسبة إلى إشارة دخل المرشح تساوي النصف تماماً. هذا المجال (من صفر هرتز حتى Ω_c) يسمى مجال المرور **passband** . بعض أنواع المرشحات تسمح بتموج منحنى الاستجابة في هذا المدى كما في الشكل رقم

(٦.١) والبعض الآخر لا يسمح بهذا التمرج تبعاً لطريقة التصميم. المدى الترددي من Ω_c حتى Ω_s (بداية تردد مجال الوقف stopband) يسمى مجال الانتقال transition band حيث إنه مرحلة متوسطة أو مرحلة انتقال من مجال المرور إلى مجال الوقف. بالطبع فإن هذا المجال يفضل أن يكون عرضه $(\Omega_s - \Omega_c)$ أصغر ما يمكن وفي الحالة المثالية يعتبر عرض هذا المجال صفراً، وهذه الحالة بالطبع لا يمكن الوصول إليها أو تحقيقها. يعد الثالث هو المجال الممتد من التردد Ω_s (بداية مجال الوقف) حتى ما لا نهاية، وفيه يتم إخماد إشارة الدخل بدرجة كبيرة يمكن معها اعتبار أن الإشارة وصلت للصفر في الحالة المثالية. بعض أنواع المرشحات يسمح بتموج منحني الاستجابة في هذا المجال كما في الشكل رقم (٦.١) والبعض الآخر لا يسمح تبعاً لطريقة التصميم كما سنرى.



الشكل رقم (٦.١). منحني الاستجابة لمرشح منصف للترددات المنخفضة LPF.

منحنى الاستجابة الموضح في الشكل رقم (٦.١) يطلق على نوع من المرشحات يسمى المرشحات المنفذة للترددات المنخفضة Low Pass Filter, LPF. وتبعاً لذلك يمكن تقسيم المرشحات على حسب مجال السماح أو النفاذ إلى الأنواع التالية:

١- المرشحات المنفذة للترددات المنخفضة Low Pass Filters, LPF: وهي المرشحات التي تسمح للترددات من صفر DC حتى تردد معين (تردد القطع Ω_c) بالنفاذ من خلالها وتوقف جميع الترددات الأخرى.

٢- المرشحات المنفذة للترددات المرتفعة High Pass Filters, HPF: وهي المرشحات التي تسمح للترددات من تردد معين (تردد القطع Ω_c) حتى مالانهاية بالنفاذ أو المرور، أما الترددات من صفر حتى تردد القطع فيتم وقفها أو إحباطها.

٣- المرشحات المنفذة لمجال ترددي Band Pass Filters, BPF: وهي المرشحات التي تسمح للترددات في مجال معين من Ω_{c1} حتى Ω_{c2} بالمرور من خلالها وتوقف باقي الترددات من صفر حتى Ω_{c1} ومن Ω_{c2} حتى مالانهاية.

٤- المرشحات المحيطة لمجال ترددي Band Stop Filters, BSF: هذه المرشحات توقف الترددات في مجال معين من Ω_{c1} حتى Ω_{c2} أو تحببها، وتسمح لباقي الترددات من صفر حتى Ω_{c1} ومن Ω_{c2} حتى مالانهاية بالمرور من خلالها.

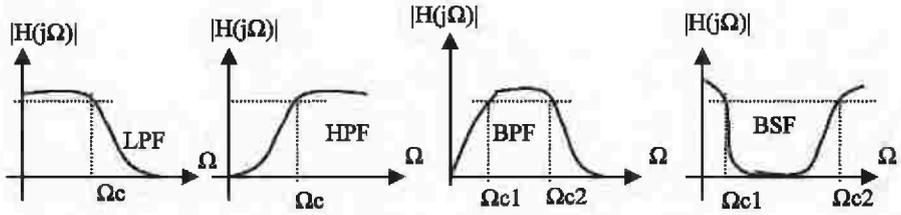
كل هذه المرشحات لها تطبيقاتها في الحياة العملية ولا بد من دراستها وأن نكون على دراية بها. سنرى في هذا الفصل أن كل أنواع المرشحات السابقة يمكن استنتاجها من النوع الأول عن طريق تحويل معين. فمثلاً يمكننا أن نصمم مرشح ترددات منخفضة، ثم عن طريق تحويل معين يمكن تحويله إلى مرشح منفذ للترددات العالية أو أي نوع آخر من أنواع المرشحات. الشكل رقم (٦.٢) يبين منحنى الاستجابة المثالي والواقعي لكل أنواع المرشحات التي ذكرناها سابقاً.

Butterworth Filter موشح بتوروث (٦.٢)

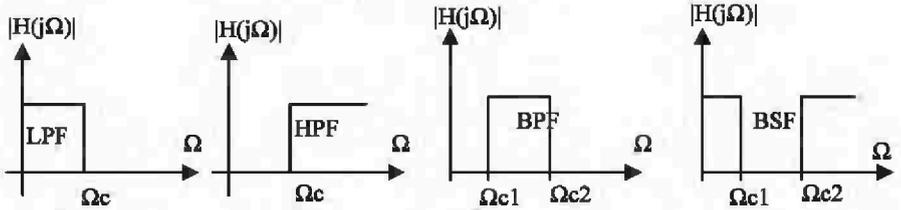
معادلة الاستجابة للمرشح بتوروث من الدرجة n تعطى بالعلاقة التالية :

$$(٦.١) \quad |Ha(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2n}}$$

الشكل رقم (٦.٣) يبين منحنى الاستجابة الترددية لهذا المرشح لأكثر من قيمة للدرجة n ومن هذا الشكل يمكن استنتاج أكثر من خاصية لهذا المرشح :

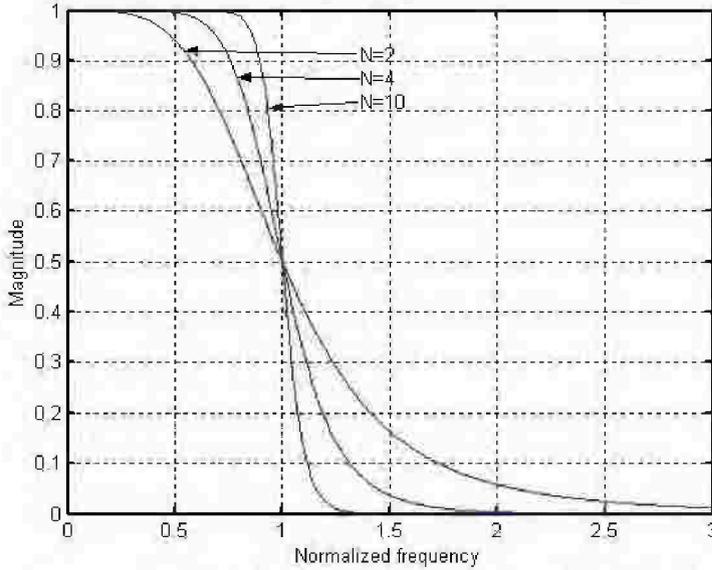


الشكل الواقعي أو الحقيقي



الشكل المثالي

الشكل رقم (٦.٢). الشكل الواقعي والشكل المثالي لأنواع الاستجابة الترددية للمرشحات.



الشكل رقم (٦.٣). الاستجابة الترددية لمرشح بترووث Butterworth.

- ١- مربع مقدار الاستجابة $|Ha(j\Omega)|^2$ يساوي واحداً عند التردد $\Omega=0$ لجميع قيم n ، $|Ha(j\Omega)|_{\Omega=0}^2 = 1$ لكل قيم n .
- ٢- مربع مقدار الاستجابة $|Ha(j\Omega)|^2$ يساوي نصف عند تردد القطع $\Omega=\Omega_c$ لجميع قيم n أيضاً. وهذا يعني الآتي: $|Ha(j\Omega)|_{\Omega=\Omega_c}^2 = \frac{1}{2}$ ولذلك فإن $|Ha(j\Omega)|_{\Omega=\Omega_c} = 0.707$ والتي يمكن التعبير عنها بالديسيبل كما يلي:

$$20 \log |Ha(j\Omega)|_{\Omega=\Omega_c} = -3.0103 \text{ dB}$$
- ٣- المنحنى $|Ha(j\Omega)|^2$ يقل بترتابة أو انتظام *monotonically decreasing* مع زيادة التردد Ω .
- ٤- مع زيادة درجة المرشح n فإن شكل المنحنى $|Ha(j\Omega)|^2$ يقترب من

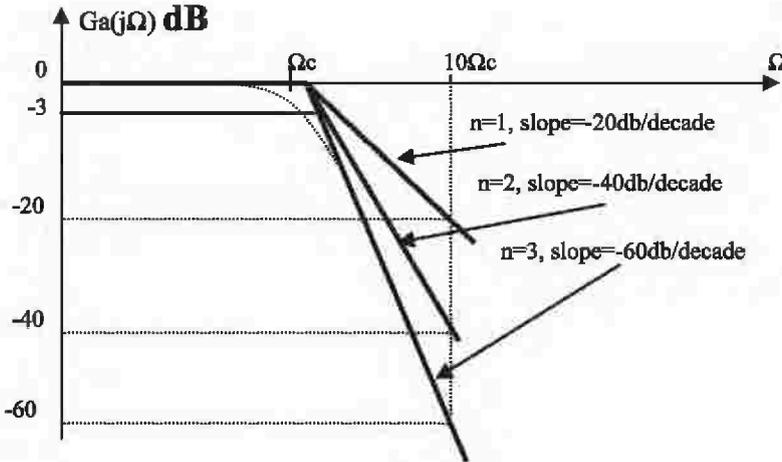
الشكل المثالي ويمكن ملاحظة ذلك من خلال الشكل رقم (٦.٣) حيث عندما $n=10$ فإن المنحنى يكون أكثر حدية.

٥- هذا المنحنى يطلق عليه أنه في أقصى درجات التسطیح أو الاستواء أو الرتبة maximally flat response عند نقطة الأصل $\Omega=0$ حيث إن جميع تفاضلات هذا المنحنى عند هذه النقطة موجودة وكلها أصفار.

في كل تطبيقات المرشحات يكون في الغالب من المريح جداً أن نعبر عن منحنى الاستجابة بالديسبل. الشكل رقم (٦.٤) يبين منحنى الاستجابة للمرشح بترورث معبراً عنه بالديسبل ، ويمكن استنتاج ذلك كما يلي :

$$Ga(j\Omega) = 20 \log |Ha(j\Omega)| = 10 \log |Ha(j\Omega)|^2$$

$$(٦.٢) = 10 \log \left| \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2n}} \right| = -10 \log |1 + (\Omega/\Omega_c)^{2n}|$$



الشكل رقم (٦.٢). استجابة المرشح بترورث بالديسبل لقيم مختلفة لدرجة المرشح n.

في المعادلة رقم (٦،٢) عندما تكون Ω أقل بكثير من Ω_c ($\Omega \ll \Omega_c$)، يمكن اعتبار القيمة $\Omega/\Omega_c=0$ وفي هذه الحالة فإن $Ga(j\Omega)=0$. أما عندما تكون Ω أكبر بكثير من Ω_c ($\Omega \gg \Omega_c$) فإن $Ga(j\Omega) = -20n \log|\Omega/\Omega_c|$ وهذه معادلة خط مستقيم ميله كما في الشكل رقم (٦،٤) هو -20db/decade . معنى decade هو العقد (أو عشر سنوات) وهى في هذا الموضع تعنى عشرة أضعاف، بمعنى مع تضاعف التردد Ω عشرة مرات فإن الاستجابة $Ga(j\Omega)$ تقل بمقدار $20n$ ديسبل. في الشكل رقم (٦،٤) عندما $\Omega=\Omega_c$ فإن $Ga(j\Omega)=0$ 3dB ، حاول التعويض في المعادلة رقم (٦،٤) وحساب هذه القيمة.

معادلة النظام System function أو معادلة الانتقال أو الانتقال transfer function هي منحى الاستجابة الترددية معبراً عنها في المستوى s . كما نعلم فإن $s=j\Omega$ وبالتعويض بذلك في معادلة بترورث، المعادلة رقم (٦،١)، يمكن كتابة معادلة الانتقال مع اعتبار $\Omega_c=1$ كما يلي:

$$(٦،٣) \quad |Ha(s)|^2 = H(s).H(-s) = \frac{1}{1+(s/j)^{2n}}$$

يمكن حساب أقطاب المعادلة رقم (٦،٣) بوضع المقام فيها يساوي صفراً كما

يلي:

$$(٦،٤) \quad \begin{aligned} 1+(s/j)^{2n} &= 0 \\ (s/j)^{2n} &= -1 \\ s^{2n} &= -1(j)^{2n} = -1(j^2)^n = (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

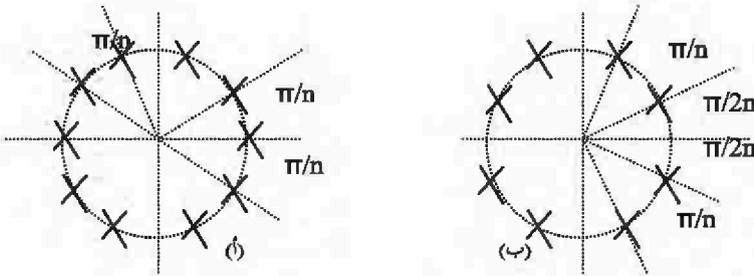
المعادلة رقم (٦.٤) لها عدد $2n$ من الأقطاب موزعة حول دائرة نصف قطرها 1 بحيث إذا كانت n رقم فردي، فإن $s^{2n} = 1$ ، وهذا يعني أن عدداً من الأقطاب مقداره $n/2$ موزعة على دائرة الوحدة عند الزوايا:

$$2k\pi/2n = k\pi/n, k=0, 1, 2, \dots, 2n-1$$

أي أنه سيكون هناك قطب عند $s=0$ كما في الشكل رقم (٦.٥). أما إذا كانت n رقماً زوجياً، فإن $s^{2n} = -1$ ، وهذا يعني عدداً من الأقطاب مقداره $n/2$ موزعة على دائرة الوحدة عند الزوايا:

$$\pi/2n + k\pi/n, k=0, 1, 2, \dots, 2n-1$$

وهذا يعني أنه لن يكون هناك قطب عند $s=0$ ولكن أول قطب يكون موجوداً عند الزاوية $\pi/2n$ وبعد ذلك توزع الأقطاب على زوايا متساوية $k\pi/n$ كما في الشكل رقم (٦.٥) ب).



الشكل رقم (٦.٥). توزيع الأقطاب للمرشح بتروث للدرجات الفردية والزوجية.

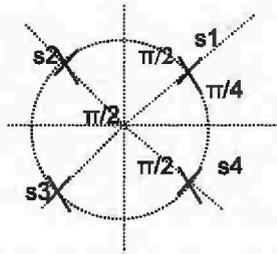
مثال رقم (٦.١). احسب معادلة الانتقال أو الانتقال لمرشح بتروث من الدرجة الأولى، وآخر من الدرجة الثانية. حيث إن $n=1$ فإن معادلة الاستجابة الترددية رقم (٦.٤) يمكن كتابتها كالتالي :

$$H(s).H(-s) = \frac{1}{1+(s/j)^2} = \frac{1}{1+s} \frac{1}{1-s}$$

وهي تمثل قطباً عند الزاوية صفر، وآخر عند الزاوية π وكل منهما مقداره واحد. بوضع $n=2$ في المعادلة رقم (٦.٣) يمكن كتابة الاستجابة الترددية كما يلي :

$$H(s).H(-s) = \frac{1}{1+(s/j)^4} = \frac{1}{(1+s_1)(1+s_4)(1-s_2)(1-s_3)}$$

والتي تمثل أربعة أقطاب توزع على دائرة الوحدة بحيث يكون أول قطب عند الزاوية $\pi/4$ وستوزع باقي الأقطاب على زوايا $\pi/2$ بين كل منها كما في الشكل رقم (٦.٦). باعتبار الأقطاب الموجودة في النصف الأيسر من المستوى S فإن المعادلة السابقة يمكن كتابتها كما يلي :



الشكل رقم (٦.٦). توزيع الأقطاب للمرشح بتروث من الدرجة الثانية.

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{1}{(s - s_2)(s - s_3)} \\
 &= \frac{1}{\{s - (-0.707 - 0.707j)\} \{s - (-0.707 + 0.707j)\}} \\
 &= \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}
 \end{aligned}$$

بنفس الطريقة يمكن كتابة معادلات الانتقال للدرجات المختلفة لهذا النوع من المرشحات. المعادلة رقم (٦,٥) تبين الصورة العامة لهذه المعادلة، وجدول رقم (٦,١) يبين معاملات معادلة المقام B(s) لهذه المعادلة.

$$(٦,٥) \quad H(s) = \frac{1}{B(s)} = \frac{1}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}$$

تحتوى الكثير من المراجع على جداول ممتدة لدرجات أعلى من الدرجة الثامنة الموضحة في جدول الشكل رقم (٦,١) وإن كانت مثل هذه الجداول لا تمثل أهمية في

الجدول رقم (٦,١). معاملات معادلة المقام للمرشح بتروث.

$B(s) = b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0$									
b8	b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1	b0	N
							1	1	1
						1	$\sqrt{2}$	1	2
					1	2	2	1	3
				1	2.613	3.414	2.613	1	4
			1	3.236	5.236	5.236	3.236	1	5
		1	3.864	7.464	9.141	7.464	3.864	1	6
	1	4.494	10.103	14.606	14.606	10.103	4.494	1	7
1	5.126	13.138	21.848	25.691	21.848	13.138	5.126	1	8

هذه الأيام وفي عصر الحاسبات حيث أنه يمكن إدخال درجة المرشح لبرنامج MATLAB وهو يرد عليك فوراً بكل هذه المعاملات، بل ويرسم لك المستوى s للمرشح موضعاً عليه مكان الأصفار والأقطاب لهذه المعادلة وهذا ما سنراه بعد قليل. هناك أيضاً جداول تضع معادلة المرشح في الصورة التحليلية التي تبين أقطاب المعادلة كما يلي:

$$(٦.٦) \quad B(s) = (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)$$

في كل المعادلات السابقة تم افتراض تردد القطع Ω_c cut off frequency، كما في المعادلة على أنها تساوي واحداً، أي $\Omega_c = 1 \text{ rad/sec}$ ، وهذا بالطبع كان لتبسيط المعادلات حيث وصلنا للصورة القياسية لمعادلة الانتقال $H(s)$ لهذا النوع من المرشحات كما في المعادلات أرقام (٦.٦)، (٦.٥)، (٦.٤). هذا المرشح يسمى المرشح الأولي prototype أو المرشح النموذجي. يمكن الحصول على معادلة الانتقال $H(s)$ للمرشح عند أي تردد قطع مختلف عن الوحدة بوضع $s = s/\Omega_0$ حيث Ω_0 تمثل تردد القطع الجديد المختلف عن الواحد. على ذلك يمكن كتابة معادلة الانتقال الجديدة كما يلي:

$$Hx(s) = H(s) \Big|_{s=s/\Omega_0} = H(s/\Omega_0)$$

ومنها يمكن كتابة الاستجابة الترددية الجديدة لهذا المرشح كما يلي:

$$(٦.٧) \quad |Hx(j\Omega)| = |H(j\Omega/\Omega_0)|$$

لاحظ أنه بوضع $\Omega = \Omega_0$ نحصل على $H(j1)$ وهي معادلة الاستجابة الترددية

للمرشح الأولي ، عند $\Omega=1$. لاحظ أن هذه العملية (نقل تردد القطع من 1rad/sec) إلى Ω_0 تمثل تعديلاً في قيم المحور Ω حيث يتم سحبه أو ضغطه على حسب قيمة التردد Ω_0 . بنفس الطريقة يمكن باستخدام تحويلات بسيطة تحويل معادلة الانتقال لمرشح منفذ للترددات المنخفضة LPF إلى أي صورة أخرى من المرشحات كما يلي:

١- بوضع $s=\Omega_0/s$ في معادلة مرشح الترددات المنخفضة نحصل على مرشح منفذ للترددات المرتفعة. كمثال على ذلك افترض مرشح الدرجة الأولى $H(s)=1/(1+s)$ حيث بوضع $s=\Omega_0/s$ ، ثم وضع $s=j\Omega$ نحصل على الاستجابة الترددية لهذا المرشح كالتالي:

$$(٦.٨) \quad |H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+(\Omega_0/\Omega)^2}$$

وهذه كما نرى تمثل استجابة مرشح منفذ للترددات المرتفعة. Ω_0 في المعادلة السابقة تمثل تردد القطع cutoff frequency.

٢- التعويض التالي يحول من مرشح منفذ للترددات المنخفضة إلى مرشح منفذ لمجال ترددي BPF:

$$(٦.٩) \quad s = \frac{s^2 + \Omega_L \Omega_H}{s(\Omega_H - \Omega_L)}$$

حاول استخدام هذا التحويل لمرشح LPF لترى إذا كان ذلك سيعطي مرشح BPF أم لا. Ω_L تمثل تردد القطع الأسفل Lower cutoff frequency ، و Ω_H تمثل تردد القطع الأعلى Higher cutoff frequency كما في الشكل رقم (٦.٧).

٣- التعويض التالي يحول من مرشح منفذ للترددات المنخفضة إلى مرشح موقف لمجال ترددي BSF:

$$(٦.١٠) \quad s = \frac{s(\Omega_H - \Omega_L)}{s^2 + \Omega_L \Omega_H}$$

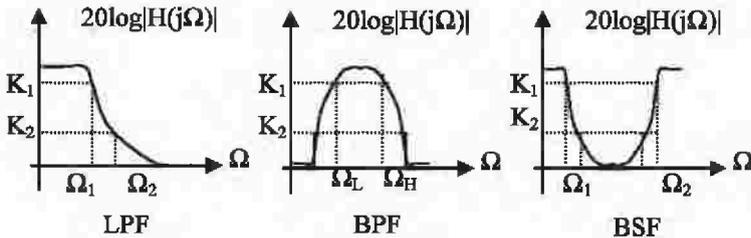
حاول استخدام هذا التحويل لمرشح LPF لترى إذا كان ذلك سيعطى مرشح BSF أم لا. Ω_L تمثل تردد القطع الأسفل Lower cutoff frequency، و Ω_H تمثل تردد القطع الأعلى Higher cutoff frequency كما في الشكل رقم (٦.٧).

(٦.٢.١) تصميم مرشح بتورث منفذ للترددات المنخفضة LPF

في العادة يتم إعطاء متطلبات المرشح في صورة مجموعة من الترددات الحرجة من وجهة نظر المستخدم مثل الاستجابة K_1 و K_2 عند الترددات Ω_1 و Ω_2 كما في الشكل رقم (٦.٧). هذه الاستجابات والترددات يمكن وضعها في صورة معادلات كما يلي:

$$(٦.١١) \quad 0 \geq 20 \log |H(j\Omega)| \geq K_1 \quad \Omega \leq \Omega_1$$

$$(٦.١٢) \quad 20 \log |H(j\Omega)| \leq K_2 \quad \Omega \geq \Omega_2$$



الشكل رقم (٦.٧). الاستجابة الترددية لأنواع المختلفة من المرشحات.

بالتعويض من المعادلتين رقمي (٦.١١) و (٦.١٢) فى معادلة المرشح بتروث
وهى المعادلة (٦ - ١) نحصل على الآتى :

$$(٦.١٣) \quad 10\log\left[\frac{1}{1+(\Omega_1/\Omega_c)^{2n}}\right] = K_1$$

$$(٦.١٤) \quad 10\log\left[\frac{1}{1+(\Omega_2/\Omega_c)^{2n}}\right] = K_2$$

يمكن حل المعادلتين رقمي (٦.١٣) و (٦.١٤) لإيجاد قيمة n التي تحقق
مواصفات المرشحات المعطاة في المعادلتين رقمي (٦.١١) و (٦.١٢) كما يلي :

$$(٦.١٥) \quad n = \frac{\log_{10}[(10^{-k_1/10} - 1)/(10^{-k_2/10} - 1)]}{2\log_{10}(\Omega_2/\Omega_1)}$$

حيث إذا جاءت n رقماً صحيحاً فهي تمثل درجة المرشح كما هي ، أما إذا
جاءت n رقماً صحيحاً وكسر فإنها تقرب لأقرب رقم أعلى من هذه القيمة الصحيحة.
مثال (٦.٢) : مطلوب تصميم مرشح منفذ للترددات المنخفضة يعطي استجابة
مقدارها -2dB أو أحسن عند التردد 20rad/sec ، واستجابته هي -10dB عند التردد
30rad/sec.

في هذه المثال $\Omega_1=20\text{rad/sec}$ و $K_1=-2$ ، $\Omega_2=30\text{rad/sec}$ و $K_2=-10$. بالتعويض في
المعادلة رقم (٦.١٥) نحصل على درجة المرشح $n=3.3709$ وعلى ذلك سنأخذ $n=4$.
يمكن حساب قيمة تردد القطع Ω_c بالتعويض في المعادلة رقم (٦.١٣) نحصل على
 $\Omega_c=21.3868$. من جدول رقم (٦.١) يمكن كتابة معادلة الانتقال الأولية (حيث $\Omega_c=1$)
لهذا المرشح كما يلي :

$$H(s) = \frac{1}{s^4 + 2.613s^3 + 3.414s^2 + 2.613s + 1}$$

ومنها يمكن كتابة معادلة الانتقال الحقيقية للمرشح باستخدام التعويض $s=s/\Omega c$ حيث $\Omega c=21.3868$ فنحصل على ما يلي :

$$H(s) = \frac{0.209210 \times 10^6}{s^4 + 55.88370s^3 + 1561.5472s^2 + 25560.94s + 0.20921 \times 10^6}$$

(٦.٣) مرشحات شيبشيف

Chebyshev Filters

هناك نوعان من هذه المرشحات، النوع الأول ويطلق عليه Type 1 يسمح بوجود تموجات في مجال مرور الإشارة فقط، بينما النوع الثاني Type 2 يسمح بوجود التموجات في مجال وقف الإشارة فقط. معادلة النوع الأول من هذه المرشحات تعطى بالعلاقة التالية :

$$(٦.١٥) \quad |Ha(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\Omega)}$$

حيث الكمية $T_n(\Omega)$ كثيرة حدود شيبشيف Chebyshev polynomial ويمكن حسابها من المعادلة الدوارة recursive التالية :

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad n > 2$$

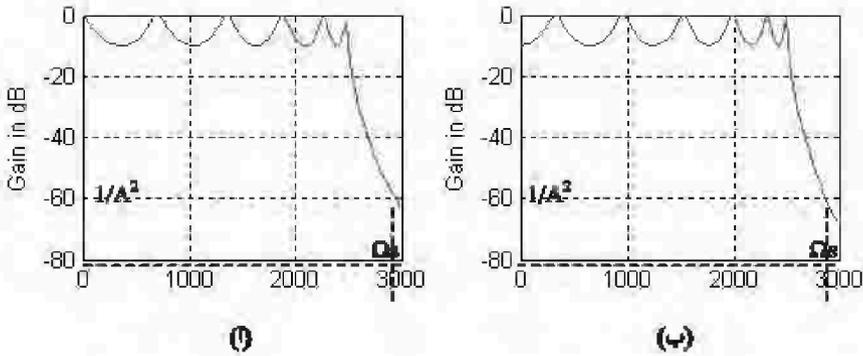
حيث $T_0(x)=1$ و $T_1(x)=x$. الشكل رقم (٦.٨) يبين رسماً توضيحياً للاستجابة

الترددية لهذا النوع من المرشحات. من هذا الشكل يمكن أن ندون الملاحظات التالية :

١- الاستجابة الترددية في مجال مرور الإشارة تتراوح بين القيمة 1 والقيمة

$\frac{1}{1+\epsilon^2}$ وذلك مع تغير التردد Ω من صفر حتى تردد القطع cutoff frequency أو نهاية

مجال المرور.



الشكل رقم (٦.٨). الاستجابة الترددية لمرشح شبيشيف من النوع الأول.

(أ) درجة المرشح فردية. (ب) درجة المرشح زوجية.

٢- مقدار هذه التموجات ثابت في كل مجال مرور الإشارة ولكن الزمن

الدوري لهذه التموجات غير ثابت أو متغير.

٣- مقدار الاستجابة يقل تدريجياً monotonically حتى يصل إلى الصفر عندما

تصل Ω إلى ما لانهاية.

٤- مقدار الاستجابة يساوي واحد (صفر db) عندما $\Omega = 0$ إذا كانت درجة

المرشح n فردية كما في الشكل رقم (٦.٨) ، بينما يكون مقدار الاستجابة يساوي

$20 \log\left(\frac{1}{1+\epsilon^2}\right)$ إذا كانت درجة المرشح n زوجية كما في الشكل رقم (٦.٨) (ب).

٥- مقدار الاستجابة الترددية عند بداية مجال توقف الإشارة ($\Omega = \Omega_s$) يساوي الكمية ($1/A^2$).

من المعادلة رقم (٦.١٦) نلاحظ أنه يلزم تحديد ثابتين أساسيين لكي يتم تصميم مرشح من هذا النوع. هذين الثابتين هما ε التي يمكن حسابها بمعرفة مقدار التموجات المسموح بها في مجال مرور الإشارة والتي تساوي $\frac{1}{1+\varepsilon^2}$ كما ذكرنا. الثابت الثاني هو n درجة المرشح التي يمكن تحديدها من المعادلات التالية:

$$(٦.١٧) \quad n = \frac{\log_{10} \left(g + \sqrt{g^2 - 1} \right)}{\log_{10} \left(\Omega + \sqrt{\Omega^2 - 1} \right)}$$

$$g = \sqrt{\frac{A^2 - 1}{\varepsilon^2}}$$

$$A = 1/|H_d(j\Omega_s)|$$

حيث Ω_s هي تردد بداية مجال وقف الإشارة.

(٦.٤) مرشحات القطع الناقص

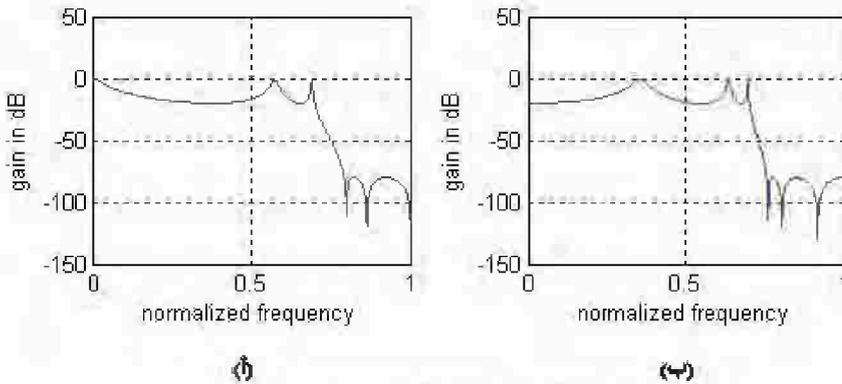
Elliptic Filters

تتميز مرشحات شيبشيف عن مرشحات بتورث بأنه لنفس درجة المرشح فإن مرشحات شيبشيف يكون نطاق الانتقال transition band فيها أقل أو أسرع أو أكثر حدية منه في مرشحات بتورث. ولقد رأينا أن مرشحات شيبشيف تسمح بالتموجات في مجال المرور فقط ، بينما النوع الثاني يسمح بالتموجات في مجال الوقف فقط. فهل إذا سمحنا بالتموجات في المجالين (المرور والوقف) سيكون نطاق الانتقال أسرع أو أكثر حدية من النوعين السابقين؟ الإجابة هي نعم ، وهو ما حدث في مرشحات القطع الناقص elliptic filters.

الاستجابة الترددية لهذه المرشحات تعطى بالمعادلة التالية :

$$(٦.١٨) \quad |Ha(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 R_n^2(\Omega)}$$

حيث R_n تمثل معادلة شيبشيف وهي دالة في Ω . الشكل رقم (٦.٩) يبين منحنى الاستجابة الترددية لهذا النوع من المرشحات حيث من هذا الشكل يمكن أن نلاحظ ما يلي :



الشكل رقم (٦.٩). الاستجابة الترددية لمرشح المنحنى.
(أ) درجة فردية. (ب) درجة زوجية.

- ١- وجود التموجات في مجالي المرور والوقف.
- ٢- مقدار التموجات في مجال المرور هو $\frac{1}{1 + \epsilon^2}$.
- ٣- قيمة الاستجابة هي 1 (صفر db) عندما $\Omega=0$ إذا كانت درجة المرشح n

فردية، وتكون قيمة الاستجابة $\frac{1}{1+\varepsilon^2}$ أو $(\frac{1}{1+\varepsilon^2} 20\log)$ ديسبل عندما $\Omega=0$ إذا كانت درجة المرشح n زوجية.

٤- قيمة هذه الاستجابة هي $(1/A^2)$ أو ما يعادلها بالديسبل عند بداية مجال الوقف، $(\Omega=\Omega_s)$.

٥- يقل المنحنى تدريجياً monotonically خلال مجال الانتقال من مجال المرور إلى مجال الوقف.

بوضع $s=j\Omega$ في المعادلة رقم (٦،١٨) يمكن كتابة معادلة الانتقال كدالة في المتغير s كما يلي:

$$(٦،١٩) \quad Ha(s) = \frac{K}{(s+s_0)} \prod_{i=1}^{(n-1)/2} \frac{s^2 + A_{0i}}{s^2 + B_{1i}s + B_{0i}} \quad \text{فردية } n$$

$$(٦،١٩) \quad Ha(s) = K \prod_{i=1}^{n/2} \frac{s^2 + A_{0i}}{s^2 + B_{1i}s + B_{0i}} \quad \text{زوجية } n$$

العوامل المهمة في تحديد درجة المرشح هي R_1 التي تمثل مقدار التموجات في مجال الانتقال، و R_2 التي تمثل مقدار التموجات في مجال الوقف، وكذلك الكمية $1/A^2$ التي تمثل مقدار الاستجابة عند بداية مجال الوقف $(\Omega=\Omega_s)$.

بعد الحصول على معادلة الانتقال لأي واحد من المرشحات السابقة فإنه يمكن بسهولة ترجمة هذه المعاملات إلى قيم مقاومات ومكثفات يمكن استخدامها في عملية بناء هذه المرشحات كدوائر إلكترونية. من العوامل المهمة في تحديد خواص المرشح الكمية Ω_2/Ω_1 والتي تمثل النسبة بين تردد الوقف وتردد القطع cutoff frequency. هذه النسبة تعكس عرض مجال الانتقال، فكلما كبرت هذه النسبة عن الواحد كلما كان

مجال الانتقال أعرض والعكس.

نكتفي بهذا القدر عن المرشحات التناظرية لندخل بعد ذلك في استخدام برنامج ماتلاب MATLAB في تصميم هذه المرشحات.

(٦.٥) استخدام برنامج ماتلاب MATLAB في تصميم المرشحات التناظرية
يحتوي برنامج الماتلاب على صندوق أدوات toolbox خاص بمعالجة الإشارات التناظرية والرقمية وهذا الصندوق يحتوي العديد من الدوال التي يمكن استخدامها في تصميم كل أنواع مرشحات البترورث السابقة. من هذه الدوال مايلي :

$$(٦.٥.١) \text{ الدالة } [b,a]=\text{butter}(n,wn,'s')$$

هذه الدالة تصمم مرشح تناظري من النوع بترورث من الدرجة n بتردد قطع مقداره wn rad/sec. و 's' تعنى أننا نعمل فى النطاق S أو s domain أو بمعنى آخر نتعامل مع مرشح تناظري أو تماثلي. الدالة تعطى معاملات المرشح فى صورة متجه صف b يمثل البسط ومتجه صف a يمثل المقام لدالة الانتقال transfer function وطول كل من المتجهين هو n+1 من العناصر ، وكل من المتجهين b و a تعطى بترتيب تنازلي لقوى المتغير s كما فى دالة الانتقال للمرشح التي يمكن كتابتها كما يلي :

$$(٦.٢١) \quad H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b(1)s^n + b(2)s^{n-1} + \dots + b(n+1)}{s^n + a(2)s^{n-1} + \dots + a(n+1)}$$

تردد القطع cutoff frequency يجب أن تكون أكبر من الصفر. إذا كانت wn متجه من عنصرين w₁ و w₂ وكانت w₁ < w₂ فإن الدالة 'butter(n,wn,'s)' تعطى معاملات مرشح من الدرجة 2*n منفذ لمجال من الترددات bandpass filter حيث مجال الانتقال له سيكون w₁ < w < w₂.

(٦.٥.٢) الدالة $[b,a]=\text{butter}(n,wn,'ftype','s')$

حيث 'ftype' هنا عبارة عن كلمة أو نص يبين نوع المرشح المطلوب تصميمه مثل highpass أو lowpass أو bandpass أو bandstop .

(٦.٥.٣) الدوال $[z,p,k]=\text{butter}(n,wn,'s')$ و $[z,p,k]=\text{butter}(n,wn,'ftype','s')$

هي نفس الدوال السابقة سوى أنها تعطي معاملات المرشح المطلوب تنفيذه في صورة أصفار z وأقطاب p ومعامل تكبير k لدالة الانتقال .

(٦.٥.٤) الدالة $[n,wn]=\text{buttord}(wp,ws,Rp,Rs,'s')$

هذه الدالة تعطي أقل درجة n للمرشح من النوع بتروث ، كما تعطي تردد القطع لهذا المرشح wn ، معاملات هذه الدالة هي تردد حافة مجال الانتقال wp وتردد حافة مجال الوقف ws والاضمحلال عند حافة مجال الانتقال Rp والاضمحلال عند حافة مجال الوقف Rs .

نفس الدوال السابقة يمكن تكرارها لباقي أنواع المرشحات ، للمرشحات شبيشيف ١ يمكن كتابة الدوال التالية :

(٦.٥.٥) الدالة $[b,a]=\text{cheby1}(n,wn,'s')$

(٦.٥.٦) الدالة $[b,a]=\text{cheby1}(n,wn,'ftype','s')$

(٦.٥.٧) الدوال $[z,p,k]=\text{cheby1}(n,wn,'s')$ و $[z,p,k]=\text{cheby1}(n,wn,'ftype','s')$

(٦.٥.٨) الدالة $[n,wn]=\text{cheby1ord}(wp,ws,Rp,Rs,'s')$

للمرشحات شبيشيف ٢ يمكن كتابة الدوال التالية :

(٦.٥.٩) الدالة $[b,a]=\text{cheby2}(n,wn,'s')$

(٦.٥.١٠) الدالة $[b,a]=\text{cheby2}(n,wn,'ftype','s')$

(٦.٥.١١) لدوال $[z,p,k]=\text{cheby2}(n,wn,'s')$ و $[z,p,k]=\text{cheby2}(n,wn,'ftype','s')$

(٦.٥, ١٢) الدالة $[n, wn]=cheby2ord(wp, ws, Rp, Rs, 's')$

لمرشحات القطع الناقص يمكن كتابة الدوال التالية :

(٦.٥, ١٣) الدالة $[b, a]=ellip(n, wn, 's')$

(٦.٥, ١٤) الدالة $[b, a]=ellip(n, wn, 'ftype', 's')$

(٦.٥, ١٥) الدوال $[z, p, k]=ellip(n, wn, 's')$ و $[z, p, k]=ellip(n, wn, 'ftype', 's')$

(٦.٥, ١٦) الدالة $[n, wn]=ellipord(wp, ws, Rp, Rs, 's')$

مثال (٦.٣): في مثال رقم (٦.٢) كان المطلوب هو تصميم مرشح منفذ للترددات المنخفضة يعطى استجابة مقدارها -2dB أو أحسن عند التردد 20rad/sec ، وأيضا استجابة مقدارها -10dB عند التردد 30rad/sec باستخدام برنامج ماتلاب وبالتعويض في الدالة :

$[n, wn]=buttord(wp, ws, Rp, Rs, 's')$

$[n, Wn] = buttord(20,30,-2,-10,'s')$

$n =$

4

$Wn =$

22.7951

حيث درجة المرشح ستكون أربع وهي نفس الدرجة التي حصلنا عليها في المثال رقم (٦.٢) وأما تردد القطع فهو 22.7951 rad/sec وإن اختلف قليلاً عما في المثال رقم (٦.٢). الآن يمكن استخدام الدالة

(٦.٥, ١٧) الدالة $[b, a]=butter(n, wn, 's')$

لكتابة دالة الانتقال transfer function لهذا المرشح كما يلي :

```
[b,a]=butter(4,22.7951,'s')
b =
  1.0e+005 *
    0    0    0    0  2.7000
a =
  1.0e+005 *
  0.0000  0.0006  0.0177  0.3095  2.7000
```

حيث يمكن كتابة دالة الانتقال كما يلي :

$$H(s) = \frac{2.7}{s^4 + 0.0006s^3 + 0.0177s^2 + 0.3095s + 2.7}$$

يمكن أيضاً استخدام الدالة:

```
[z, p, k]=butter(n,wn,'s')
```

للحصول على دالة الانتقال في صورة أصفار وأقطاب كما يلي :

```
[z, p, k]=butter(4,22.7951,'s')
z =
  Empty matrix: 0-by-1
p =
  -21.0599 + 8.7233i
  -21.0599 - 8.7233i
  -8.7233 +21.0599i
  -8.7233 -21.0599i
k =
  2.7000e+005
```

بذلك يمكن كتابة دالة الانتقال كما يلي :

$$H(s) = \frac{1}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

وبنفس الطريقة يمكن استخدام باقي الدوال في الماتلاب لتصميم أي نوع من المرشحات.

(٦.٦) تمارين

١- وضع أن دائرة الانتقال التالية تمثل مقدار استجابة مرشح منفلد للترددات المنخفضة LPF:

$$H1(s) = \frac{\omega}{s + a} \quad a > 0$$

حدد تردد القطع ω_c الذي ينخفض الكسب عنده بمقدار ثلاثة ديسبل عن أكبر كسب عند $\omega = 0$.

٢- وضع أن دائرة الانتقال التالية تمثل مقدار استجابة مرشح منفلد للترددات العالية HPF:

$$H2(s) = \frac{s}{s + a} \quad a > 0$$

حدد تردد القطع ω_c الذي عنده ينخفض الكسب عنده بمقدار ثلاثة ديسبل عن أكبر كسب عند $\omega = \infty$.

٣- وضع أن دائرة الانتقال التالية تمثل مقدار استجابة مرشح منفلد للترددات المتوسطة BPF:

$$H1(s) = \frac{bs}{s^2 + bs + \omega_0^2} \quad b > 0$$

حدد ترددي القطع Ω_{c1} , Ω_{c2} اللذين عندهما ينخفض الكسب بمقدار ثلاثة
ديسبل عن أكبر كسب عند Ω_0 . ووضح أيضاً أن $\Omega_{c1} \Omega_{c2} = \Omega_0^2$ وأن $b = \Omega_{c2} - \Omega_{c1}$
حيث b عرض المجال للمرشح bandwidth .
٤- وضح أن دالة الانتقال التالية تمثل مقدار استجابة مرشح محبط للترددات
المتوسطة BSF:

$$H1(s) = \frac{s^2 + \Omega_0^2}{s^2 + bs + \Omega_0^2} \quad b > 0$$

حدد ترددي القطع Ω_{c1} , Ω_{c2} اللذين عندهما ينخفض الكسب بمقدار ثلاثة
ديسبل عن أكبر كسب عند $\Omega = 0$. ووضح أيضاً أن $\Omega_{c1} \Omega_{c2} = \Omega_0^2$ وأن $b = \Omega_{c2} - \Omega_{c1}$
حيث b عرض المجال للمرشح bandwidth .

٥- وضح أن أول $2N-1$ من التفاضلات لمعادلة مقدار الاستجابة $|H(j\Omega)|^2$
للمرشح من النوع بترورث من الدرجة N تساوي صفرأ عند التردد $\Omega = 0$.
٦- حدد أقل درجة لمرشح بترورث له تردد قطع عند 2.1 kHz والكسب عند
هذا التردد يساوى 0.5 dB وأقل اضمحلال له مقداره 30 dB عند التردد 8 kHz . ثم أوجد
دالة الانتقال للمرشح مرة في صورة كثيرة الحدود في البسط والمقام ومرة في صورة
أصفار وأقطاب. استخدم ماتلاب .

٧- أعد التمرين السابق لمرشح من النوع تشيبيشيف.

تصميم المرشحات الرقمية ذات

الاستجابة الاندفاعية غير محددة الطول

Design of Infinite Impulse Response IIR Digital Filters

(٧.١) مقدمة

لقد عرضنا في الفصل السابق شرحاً سريعاً للمرشحات التناظرية analog filters وذكرنا أن ذلك كان خطوة ضرورية لسببين، السبب الأول: أن هناك بعض المواقف أو التطبيقات لا بد فيها من استخدام المرشحات التناظرية مثل مرشحات تحديد التردد التي توضع في بداية أي نظام رقمي وقبل التحويل التماثلي الرقمي A/D ويسمى هذا المرشح بالمرشح المضاد للتزوير الترددي antialiasing filter. التطبيق الثاني الذي لا بد فيه من استخدام المرشحات التناظرية هو في نهاية أي نظام رقمي لتنعيم الإشارة التناظرية قبل الاستفادة منها كإشارة تناظرية. السبب الثاني: هو أن بعض طرق تصميم المرشحات الرقمية تعتمد على تصميم المرشح التناظري أولاً ثم تحويل هذا المرشح التناظري إلى مرشح رقمي، وهذا ما سنراه في هذا الفصل.

المقصود من تصميم المرشح الرقمي أياً كان نوعه هو الحصول على دالة الانتقال

transfer function لهذا المرشح $H(Z)$ التي تُعطى أقرب استجابة ترددية $H(w)$ للمواصفات المطلوبة من هذا المرشح. إذا كان المرشح الذي سيتم تصميمه من النوع IIR، فمن الضروري التأكد من أن هذا المرشح مستقر stable فتكون جميع أقطابه (أقطاب الدالة $H(Z)$) تقع داخل دائرة الوحدة. بعد الحصول على دالة الانتقال $H(Z)$ (تصميمه) تكون الخطوة التالية هي بناء هذا المرشح implementation بأحد أشكال البناء المعروفة التي سندرسها في فصل قادم.

عودة إلى تحويل فورير للإشارات المعينة DTFT حيث أمكن كتابة المعادلتين

التاليتين :

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jwn} \quad (٧.١)$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{jw})e^{jwn} dw \quad (٧.٢)$$

حيث المعادلة رقم (٧.٢) قد عبرت عن الإشارة $x[n]$ كمجموع تكاملي من الإشارات الجيبية e^{jwn} مقدار كل منها $X(e^{jw})$. وعلى ذلك فإنه يمكن تصميم نظام (رقمي) تكون له خاصية الاختيار الترددي frequency selection بحيث يسمح بمرور بعض هذه الترددات ويحبط أو يمنع الترددات الأخرى، وهذا بالضبط هو ما نسميه بالمرشح filter وهذه هي وظيفته. أي أن المرشح عبارة عن نظام (رقمي أو تماثلي) مهمته هي السماح بمرور بعض الترددات المرغوب فيها وإحباط الترددات الأخرى غير المرغوب فيها مثل الضوضاء noise كما في الشكل رقم (٧.١).



الشكل رقم (٧.١). وظيفة المرشح هي التخلص من الضوضاء.

عودة إلى الاستجابة الترددية للأنظمة الرقمية حيث قد رأينا سابقاً أن خرج أي نظام رقمي يمكن التعبير عنه كدالة في تتابع من الإشارات الجيبية كما يلي :

$$(٧.٣) \quad y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$$

حيث الكمية $H(e^{j\omega})$ تسمى الاستجابة الترددية للنظام ، وهي عبارة عن تحويل فوريير لاستجابة عينة الوحدة unit sample response التي يمكن التعبير عنها كما يلي :

$$(٧.٤) \quad H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

حيث $h[n]$ هي استجابة الصدمة أو استجابة وحدة العينة كما ذكرنا. الكمية $H(e^{j\omega})$ تسمى الاستجابة الترددية للنظام كما ذكرنا وهي تعبر عن استجابة النظام لإشارات الدخل عند الترددات المختلفة وهي كمية مركبة يمكن التعبير عنها بأكثر من طريقة كما يلي :

$$(٧.٥) \quad H(e^{j\omega}) = Hr(e^{j\omega}) + jHi(e^{j\omega})$$

حيث $Hr(e^{j\omega})$ هي المركبة الحقيقية Real component و $Hi(e^{j\omega})$ هي المركبة التخيلية imaginary component للاستجابة $H(e^{j\omega})$. يمكن أيضاً التعبير عن هذه الاستجابة كمقدار وزاوية كما يلي :

$$(٧.٦) \quad H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\theta(\omega)}$$

حيث $\theta(\omega)$ هي الزاوية و $|H(e^{j\omega})|$ هي مقدار الاستجابة الترددية. يمكن التعبير عن الاستجابة الترددية بالديسبل كما يلي :

$$(٧.٧) \quad G(\omega) = 20 \log_{10} |H(e^{j\omega})|$$

تذكر أن مقدار الاستجابة الترددية تكون دائماً دالة زوجية even في المتغير ω ، أي أن :

$$(٧.٨) \quad |H(e^{j\omega})| = |H(e^{-j\omega})|$$

بينما الزاوية تكون دائماً دالة فردية في المتغير ω ، أي أن :

$$(٧.٩) \quad \theta(\omega) = -\theta(-\omega)$$

استجابة (خرج) المرشح لأي إشارة دخل جيئية تكون إشارة جيئية أيضاً لها

نفس التردد أما مقدارها فيكون مضروباً في مقدار الاستجابة الترددية للمرشح عند هذا التردد.

في العادة يتم ذكر أو تحديد الاستجابة الترددية للمرشح المثالي كما يلي :

$$(٧.١٠) \quad |H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & \text{for } |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{for } \omega_c \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

حيث ω_c هي تردد القطع التي عندها يتوقف المرشح عن السماح بمرور الإشارة ومن بعدها يبدأ في قطع أو إحباط الإشارات التي ترددها أعلى من ω_c . على فرض أن إشارة الدخل المرشح تعطى بالعلاقة التالية :

$$(٧.١١) \quad x[n] = A \cos(\omega_1 n) + B \cos(\omega_2 n), \quad 0 < \omega_1 < \omega_c < \omega_2 < \pi$$

فإن خرج المرشح في هذه الحالة يعطى بالمعادلة التالية :

$$(٧.١٢) \quad y[n] = A |H(e^{j\omega_1})| \cos(\omega_1 n + \theta(\omega_1)) + B |H(e^{j\omega_2})| \cos(\omega_2 n + \theta(\omega_2))$$

وحيث $\omega_2 > \omega_c$ فإن استجابة المرشح لهذا التردد ستكون صفراً، وعلى ذلك سيكون خرج المرشح كالتالي :

$$(٧.١٣) \quad y[n] = A |H(e^{j\omega_1})| \cos(\omega_1 n + \theta(\omega_1))$$

المثال التالي عبارة عن مثال تقديمي لطرق تصميم المرشحات الرقمية نفهم منه

فقط ما هو المقصود بالاستجابة الترددية. المطلوب في هذا المثال هو تصميم مرشح رقمي منفذ للترددات العالية بحيث يسمح للتردد 0.4rad/sec بالنفاذ أو المرور بينما يحبط أو يوقف أو يمنع التردد 0.1rad/sec . سنفترض أن استجابة الصدمة لهذا المرشح تعطى بالعلاقة التالية :

$$(٧.١٤) \quad h[n]=[a \ b \ a]$$

حيث كل من a و b مجهولان ومطلوب حساب قيمة كل منهما لأنه بتحديد هذين العاملين يكون قد تم تحديد المرشح. أما لماذا فرضنا استجابة الاندفاع لهذا المرشح بهذا الشكل فإنه سيأتي تفصيل ذلك فيما بعد عند الحديث عن المرشحات ذات الاستجابة الاندفاعية محددة الطول *Finite Impulse Response, FIR*. خرج هذا المرشح هو المجموع الالتفافي للدخل $x[n]$ واستجابة الصدمة $h[n]$ وعلى ذلك يمكن كتابة الخرج كالتالي :

$$(٧.١٥) \quad y[n]=h[n]*x[n]$$

والتي يمكن كتابتها كالتالي :

$$(٧.١٦) \quad \begin{aligned} y[n]&=h[0]x[n]+h[1]x[n-1]+h[2]x[n-2] \\ &=ax[n]+bx[n-1]+ax[n-2] \end{aligned}$$

تحويل فورير لاستجابة الصدمة $h[n]$ يمكن كتابته كما يلي :

$$H(e^{j\omega}) = h[0] + h[1]e^{-j\omega} + h[2]e^{-j2\omega}$$

بالتعويض بالقيم $h[0]=h[2]=a$ و $h[1]=b$ فإن المعادلة السابقة يمكن كتابتها

كالتالي:

$$\begin{aligned} H(e^{jw}) &= a(1 + e^{-j2w}) + be^{-jw} \\ &- 2a \left(\frac{e^{jw} + e^{-jw}}{2} \right) e^{-jw} + be^{-jw} \\ (٧,١٧) \quad &= (2a \cos(w) + b)e^{-jw} \end{aligned}$$

ومنها يمكن كتابة مقدار وزاوية الاستجابة الترددية كما يلي:

$$\begin{aligned} (٧,١٨) \quad |H(e^{jw})| &= 2a \cos(w) + b \\ \theta(w) &= -w \end{aligned}$$

بالتعويض $|H(e^{jw})| = 0$ عندما $w=0.1$ و $|H(e^{jw})| = 1$ عندما $w=0.4$

نحصل على معادلتين في المجهولين a و b كما يلي:

$$(٧,١٩) \quad |H(e^{j0.1})| = 2a \cos(0.1) + b = 0$$

$$(٧,٢٠) \quad |H(e^{j0.4})| = 2a \cos(0.4) + b = 0$$

بحل المعادلتين رقمي (٧,١٩) و (٧,٢٠) نحصل على قيمة كل من المجهولين a و b

كما يلي:

$$\begin{aligned} a &= -6.76195 \\ b &= 13.456335 \end{aligned}$$

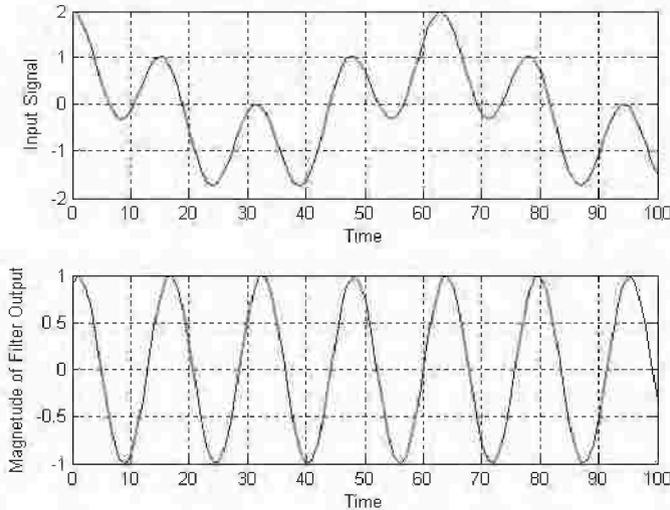
وعلى ذلك يمكن كتابة معادلة خرج المرشح كما يلي:

$$(٧.٢١) \quad y[n] = -6.76195(x[n] + x[n-2]) + 13.456335x[n-1]$$

الآن بوضع إشارة الدخل كإشارة مركبة من الترددين 0.1rad/sec و 0.4rad/sec كما يلي في المعادلة رقم (٧.٢١) فماذا ستكون إشارة الخرج.

$$(٧.٢٢) \quad x[n] = \{\cos(0.1n) + \cos(0.4n)\}u[n]$$

بالتعويض عن قيم $x[n]$ من المعادلة رقم (٧.٢٢) في المعادلة رقم (٧.٢١) عند قيم n المختلفة يمكن رسم خرج المرشح كما في الشكل رقم (٧.٢) الذي يوضح أيضاً شكل إشارة الدخل للمقارنة بها حيث نلاحظ أن الخرج يتبع تماماً التردد الأعلى 0.4rad/sec .



الشكل رقم (٧.٢). مخرج المرشح في المعادلة رقم (٧.٢١).

الترشيح الرقمي للإشارات يستخدم في الكثير من التطبيقات والتي منها على سبيل المثال لا الحصر، المعالجة الرقمية للكلام والصور، والاتصالات بكل أنواعها وطرقها، والتطبيقات الطبية وبالذات التصوير بالموجات فوق الصوتية وغيرها، والرادار، والتنقيب عن البترول، والإلكترونيات بكل تطبيقاتها، وغير ذلك الكثير. هناك نوع مهم من المرشحات هو الذي سيكون موضوعنا في هذا الكتاب وهي المرشحات الخطية الثابتة إزاحياً Linear Shift Invariant, LSI وذلك لكثرة استخدامها وشيوعها، أما الأنواع الأخرى مثل المرشحات المهايئة adaptive filters فليست موضوع هذا الكتاب ولكن في العادة يفرد لها كتب منفصلة.

(٧.٢) تصميم المرشحات الرقمية

تصميم المرشح الرقمي يمر بالمراحل الأساسية التالية:

- ١- التحديد الفعلي لمواصفات المرشح مثل تردد القطع cutoff frequency ومجال المرور أو السماح passband، ومجال القطع أو المنع stopband، ومجال الانتقال transition band. مقدار استجابة المرشح في كل من هذه المجالات يجب تحديده بدقة مع أن تحديد نسبة خطأ error في كل مجال يجب ألا يتم تخطيها.
- ٢- كل هذه المواصفات والشروط المعطاة في الخطوة الأولى يتم على أساسها تحديد نوع المرشح هل هو IIR أم FIR وسنرى في هذا الفصل ماذا يعني كل نوع من هذين النوعين ومميزاته وعيوبه. من هذه المواصفات أيضاً يتم تحديد درجة المرشح filter order.
- ٣- بناء على الخطوة الثانية يتم تصميم المرشح والمقصود بتصميمه هو حساب معاملات والاستجابة الترددية له كما سنرى، ويجب أن تكون الاستجابة الترددية التي

سنحصل عليها بهذه الخطوة أقرب ما يكون من الاستجابة الترددية المرغوبة ويكون الخطأ أقل ما يمكن وحسب ما هو محدد في الخطوة الأولى.

٤- بعد تصميم المرشح يتم بناؤه implementation ، وهذه الخطوة سيتم شرحها في فصل قادم.

هناك الكثير من البرمجيات التي تساعد وتسهل عملية تصميم هذه المرشحات بدرجة كبيرة جداً ومن هذه البرمجيات برنامج MATLAB الذي استخدمناه في تصميم وتنفيذ جميع أمثلة هذا الكتاب.

(٧.٢.١) تحديد مواصفات المرشح

لقد رأينا مسبقاً أن الاستجابة الترددية للمرشح الرقمي تكون دائماً دورية periodical بالنسبة لتغير التردد w وتتكرر كل 2π على محور التردد. لذلك فإنه يكفي أن ندرس هذه الاستجابة في مدى ترددي مقداره 2π فقط وليكن من $-\pi$ حتى π . ولقد رأينا أيضاً أن مقدار هذه الاستجابة الترددية يكون دالة زوجية في المتغير w ، لذلك فإننا نكتفي بدراسة هذه الاستجابة في المدى من $w=0$ حتى $w=\pi$.

إن أبسط مواصفات يمكن أن نبدأ بها هي مواصفات المرشح الرقمي المثالي المنفذ للترددات المنخفضة digital ideal low pass filter والذي تتحدد مواصفاته بالعلاقة التالية والموضحة في الشكل رقم (٧.٣).

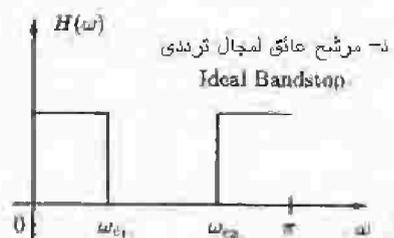
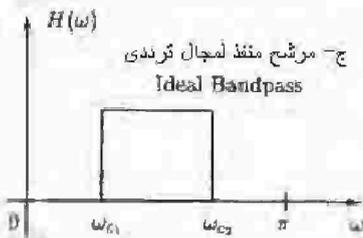
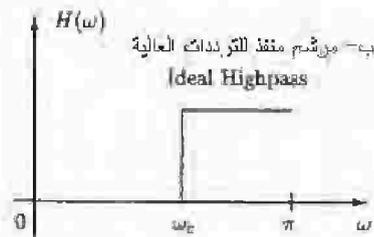
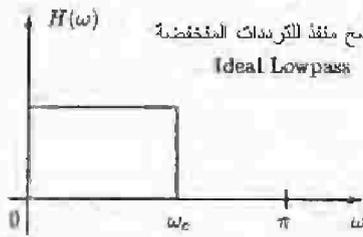
$$D(w) = \begin{cases} 1 & |w| < w_c \\ 0 & w_c < |w| < \pi \end{cases} \quad (٧.٢٣)$$

حيث w_c هي تردد القطع cutoff frequency ، ولقد رمزنا للاستجابة الترددية في المعادلة رقم (٧.٢٣) بالرمز $D(w)$ وليس $H(w)$ لأن الاستجابة الموضحة في المعادلة رقم

(٧.٢٣) هي استجابة مثالية نرغب فيها *desired* ولكننا لا نستطيع الحصول عليها عملياً لأن مجال الانتقال *transition band* يساوى صفرًا وهذا مستحيل الحصول عليه عملياً إذ لا بد أن يكون هناك مجال انتقال نحاول أن نجعله أقل ما يمكن. الشكل رقم (٧.٣) يبين هذا المرشح المثالي، وأنواع أخرى من المرشحات المثالية التي تم ذكرها في معرض الحديث عن المرشحات التناظرية.

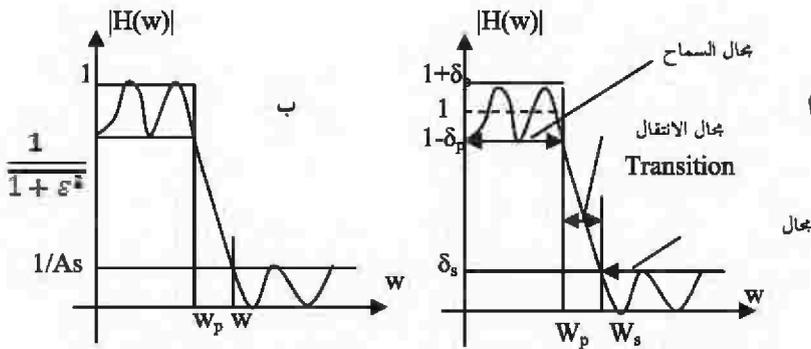
الشكل رقم (٧.٤) يبين الاستجابة الترددية الفعلية لمرشح رقمي متفد للترددات المنخفضة. من هذا الشكل نلاحظ المعاملات التالية والتي يجب أن نتذكرها جيداً:

- ١- ω_p نهاية مجال المرور أو السماح *pass band cutoff frequency*.
- ٢- ω_s تردد القطع لمجال المنع *stop band cutoff frequency*.



الشكل رقم (٧.٤). الاستجابة المثالية لأنواع عديدة من المرشحات.

- ٣- تردد القطع cutoff frequency وهذه تكون في العادة أكبر من W_p وأقل من W_s في حالة المرشحات المنفذة للترددات المنخفضة وهي تحدد بأنها التردد الذي ينزل عنده مقدار الاستجابة الترددية بمقدار ٣ ديسبل من قيمتها في مجال السماح pass band.
- ٤- $W_t = W_s - W_p$ تسمى مجال الانتقال transition band وهو مجال الانتقال من مجال السماح إلى مجال المنع.



الشكل رقم (٧.٤). الاستجابة الترددية لمرشح منفذ للترددات المنخفضة.
 (أ) الشكل العام (ب) شكل خاص يستخدم في تقدير درجة المرشح.

- ٥- δ_p تموجات مجال السماح pass band ripples وهي تمثل أكبر خطأ يمكن السماح به في مقدار الاستجابة في مجال السماح.
- ٦- δ_s تموجات مجال المنع stop band ripples وهي تمثل أكبر خطأ يمكن السماح به في مقدار الاستجابة في مجال المنع. لاحظ في الشكل رقم (٧.٤) حيث تم إعادة التعبير عن الترددات الحرجة والتموجات بطريقة تستخدم عادة في تقدير درجة المرشح كما سنرى عند الحديث عن المرشحات من النوع IIR.
- عند تصميم المرشح الرقمي فإن الترددات الحرجة له تعطى في العادة في المجال

التناظري (Ω_p و Ω_s أو F_p و F_s) ، أي بالهرتز ، وتعطى معه تردد العينة $\text{sampling frequency, } F_s$. قبل البدء في تصميم المرشح الرقمي لابد من تحويل هذه الترددات إلى المجال الرقمي w في المدى من $w=0$ إلى $w=\pi$. عملية التحويل هذه تتم كما يلي :

$$(٧.٢٤) \quad w_p = \frac{\Omega_p}{F_s} = \frac{2\pi f_p}{F_s} = 2\pi f_p T_s$$

$$w_s = \frac{\Omega_s}{F_s} = \frac{2\pi f_s}{F_s} = 2\pi f_s T_s$$

حيث $T_s=1/F_s$ هي زمن وتردد العينة.

كمثال على ذلك نفترض أن الترددات الحرجة لأحد المرشحات هي $f_p=3\text{KHz}$ و $f_s=7\text{KHz}$ ومعدل العينة هو $F_s=25\text{KHz}$ ، بالتعويض في المعادلات السابقة نحصل على الترددات الرقمية $w_p=0.24\pi$ و $w_s=0.56\pi$.

أول خطوة من خطوات تصميم أي مرشح هي تحديد نوع هذا المرشح هل سيكون $\text{Finite Impulse Response, FIR}$ أم سيكون $\text{Infinite Impulse Response, IIR}$ ؟ كل نوع من هذه المرشحات له مواصفاته ومميزاته وعيوبه التي تجعل أياً من النوعين مناسباً لبعض التطبيقات ولا يناسب التطبيقات الأخرى. لذلك كان من الضروري أن نركز على مواصفات كل واحد من هذه الأنواع في الجزء التالي. كذلك بعد تحديد نوع المرشح علينا تحديد درجته وهذا ما سنراه أيضاً في الجزء التالي.

(٧.٣) مواصفات المرشحات من النوع IIR

١- من اسم هذا النوع من المرشحات $\text{Infinite Impulse Response}$ والذي يعني أن استجابة الاندفاع أو الصدمة Impulse Response تكون غير محددة الطول Infinite ، مما يعني أن عدد عينات هذه الاستجابة يمتد إلى ما لانهاية ، وبالنسبة للمرشحات السببية

causal فإنه يمكن كتابة هذه العلاقة لهذا النوع من المرشحات :

$$h[n] = 0 \text{ for } 0 \leq n \leq \infty$$

والذي يعني أنه للمرشحات السببية فإن طول الاستجابة يمتد من الصفر إلى ما لانهاية.

٢- الاستجابة الترددية للمرشحات أو الأنظمة الرقمية من النوع IIR تكون كسرية rational أي لها بسط ومقام وكل منهما عبارة عن كثيرة الحدود polynomial ، ويمكن كتابتها على الصورة التالية :

$$H(w) = \frac{B(w)}{A(w)} = e^{-jwN_0} \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jwk}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jwk}} \quad (٧.٢٥)$$

حيث N_0 عبارة عن ثابت صحيح. درجة المرشح من هذا النوع هي N التي هي أعلى أس في المقام ، وفي العادة تكون درجة البسط M أقل من درجة المقام N . الدرجة N في المقام تحدد عدد عينات الخرج السابقة التي يتم استخدامها لحساب قيمة الخرج الحالية ، لذلك فإن هذا العدد من عينات الخرج السابقة يتم تخزينه أو الاحتفاظ به واستخدامه كتغذية عكسية feed back لحساب قيمة الخرج الحالية. المعاملات b_k و a_k هي معاملات المرشح أو مجاهيله المراد حسابها.

٣- تصميم المرشح الرقمي تكون كما ذكرنا سابقاً إيجاد قيم المعاملات a_k و b_k في المعادلة رقم (٧.٢٥) بحيث تجعل $H(w)$ تكون أقرب ما يكون من المواصفات المطلوبة للمرشح. درجة المرشح N في هذه المعادلة تستخدم أيضاً كمتغير للحصول على المواصفات المثلى للمرشح.

٤- دالة الانتقال transfer function هي تحويل Z لاستجابة الصدمة $h[n]$ ورمزنا لها بالرمز $H(z)$ وتعطى بالعلاقة التالية كما رأينا سابقاً:

$$(٧.٤) \quad H(Z) = H(e^{jw}) \Big|_{e^{jw}=z} = Z^{-N_0} \frac{\sum_{k=0}^M b_k Z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k Z^{-k}}$$

جذور المقام في المعادلة رقم (٧.٢٦) تمثل أقطاب النظام أو المرشح، والقطب كما رأينا هو قيمة $|z|$ التي عندها تؤول دالة الانتقال إلى المالا نهاية، ولقد رأينا سابقاً أن شرط الاستقرار لأي نظام أن تكون جميع أقطابه داخل دائرة الوحدة. لذلك فإن المرشحات من النوع IIR لا بد من حساب جميع أقطابها لأنه من الممكن بعد أن نصمم المرشح أن نجد أنه غير مستقر unstable، ولذلك فإن المرشحات من النوع IIR تكون حساسة جداً للضوضاء حيث إن هذه الضوضاء من الممكن أن تغير من قيم المعاملات a_k فتجعل المرشح يصبح غير مستقر لأن أحد أقطابه يخرج خارج دائرة الوحدة نتيجة هذه الضوضاء.

٥- المرشحات السببية causal أو القابلة للتحقيق من النوع IIR لا يمكن أن تكون زاوية الطور $\theta(w)$ لها خطية مما يحد من تطبيقاتها.

٦- بما أن استجابة الصدمة للمرشحات IIR تمتد إلى المالا نهاية، فإن استخدام الجمع الالتفافي convolution لتحقيق هذا النوع من المرشحات يكون غير ممكن.

٧- كما ذكرنا فإن المرشحات IIR تكون حساسة للضوضاء ومنها الضوضاء الناتجة عن تحديد quantization خرج التحويل التماثلي الرقمي A/D عند كميات أو مستويات محددة وهذا يتوقف على العدد المحدد للبتات المستخدمة لتمثيل ثوابت المرشح مما ينتج عنه تقريب في هذه الثوابت عند تمثيلها على الحاسب. كل هذه المصادر

للضوضاء من الممكن أن تجعل المرشح غير مستقر *unstable*.

٨- كما سنرى عند تحقيق هذا النوع من المرشحات فإنه من مميزاته أنه يمكن تحقيق المواصفات المطلوبة للمرشح بدرجة N أقل إذا ما قورن بالنوع الآخر من المرشحات FIR. أي أنه لتحقيق مواصفات معينة لأي مرشح فإن هذا المرشح إذا تم بناؤه باستخدام النوع IIR فإن درجة المرشح المطلوبة ستكون أقل عما لو تم بناؤه باستخدام النوع FIR.

(٧،٤) مواصفات المرشحات من النوع FIR

١- استجابة الدفعة للمرشحات من النوع FIR تكون محددة الطول ويمكن التعبير عنها بالمعادلة التالية:

$$(٧،٢٧) \quad h[n] = 0 \quad \text{for } N_1 \leq n \leq (N_2 = N_1 + N - 1)$$

حيث N هي طول استجابة الصدمة والذي يمتد من N_1 إلى N_2 و N_1 من الممكن أن تكون صفراً أو هكذا تكون في العادة.

٢- الاستجابة الترددية $H(w)$ للمرشحات FIR تكون كثيرة حدود في e^{jw} ومحددة الطول ويمكن كتابتها على الصورة التالية:

$$(٧،٢٨) \quad H(w) = \sum_{n=N_1}^{N_2} h[n](e^{jw})^{-n}$$

حيث N_1 و N_2 أرقام صحيحة تمثل أرقام أول وآخر عينة في استجابة الصدمة $h[n]$. معاملات استجابة الصدمة التي عددها N هي المعاملات المطلوب تحديدها عند

تصميم هذا النوع من المرشحات.

٣- تصميم المرشح من النوع FIR هو حساب الاستجابة الترددية $H(w)$ التي تكون أقرب ما يمكن من الاستجابة الترددية المطلوبة، ويتم ذلك عن طريق إيجاد أو حساب معاملات استجابة الصدمة $h[n]$ التي تحقق ذلك. درجة المرشح أيضا التي طوله N تعد أحد المتغيرات المستخدمة للحصول على الاستجابة الترددية المطلوبة.

٤- دالة الانتقال transfer function هي تحويل Z لاستجابة الصدمة وهي كثيرة الحدود في المتغير المركب Z محدودة الطول وليس لها مقام ويمكن كتابتها على الصورة التالية:

$$H(z) = H(e^{jw})|_{e^{jw}=z} = \sum_{n=N_1}^{N_2} h[n]z^{-n} \quad (٧,٢٩)$$

ونستنتج من ذلك أن هذا النوع من المرشحات يكون دائماً مستقراً لعدم وجود أقطاب في دالة الانتقال.

٥- هذا النوع من المرشحات FIR تكون زاوية الطور له $\theta(w)$ خطية دائماً على العكس من المرشحات IIR التي كانت زاوية الطور لها غير خطية. خطية زاوية الطور تجعل هذا النوع من المرشحات مناسباً جداً للكثير من التطبيقات كما سنرى في الفصول القادمة.

٦- بما أن طول استجابة الصدمة يكون محدوداً فإنه يمكن في هذه الحالة استخدام عملية الجمع الالتفافي convolution لتحقيق هذا النوع من المرشحات.

٧- هذه المرشحات ليست حساسة للضوضاء لعدم وجود تغذية عكسية، وعدم وجود أقطاب في معادلة دالة الانتقال كما كان في حالة المرشحات IIR.

٨- درجات هذه المرشحات N قد تمتد إلى قيم كبيرة جداً للحصول على مواصفات معينة للمرشح، فقد تمتد إلى ٥٠٠ مثلاً، وهذا يجعل هذه المرشحات معقدة وتحتاج إلى وقت كبير لحساب معاملاتها calculation time كما أنها تسبب زمن تأخير كبير.

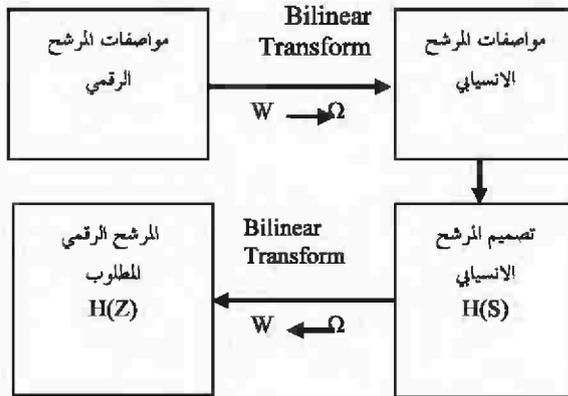
(٧,٥) طرق تصميم المرشحات الرقمية من النوع IIR

المقصود بتصميم المرشح الرقمي من النوع IIR هو الحصول على المعاملات a_k و b_k في معادلة الاستجابة الترددية رقم (٧,٢٥) لكي تكون أقرب ما يمكن من مواصفات المرشح المطلوب تصميمه. سنسوق هنا أكثر من طريقة لتصميم هذا النوع من المرشحات. قبل تصميم المرشح من هذا النوع لابد من معرفة درجته أولاً وقد رأينا ذلك في معرض الحديث عن المرشحات التناظرية.

(٧,٥,١) التحويل الخطي المزدوج Bilinear Transformation

تعتمد هذه الطريقة على نقل مسألة تصميم المرشح الرقمي من الوسط الرقمي digital domain إلى الوسط التناظري analog domain حيث في الوسط التناظري يتم تصميم المرشح بالطرق المعروفة مسبقاً لتصميم المرشحات التناظرية، ثم يتم نقل المرشح الذي تم تصميمه مرة أخرى إلى الوسط الرقمي بطرق تحويل معروفة كما سنرى وكما هو موضح في الشكل رقم (٧,٥).

افترض أن $H(z)$ هي معادلة دالة الانتقال transfer function للمرشح الرقمي حيث $H(z)$ كما رأينا هي تحويل Z لاستجابة الدفعة $h[n]$. كذلك تذكر أن دالة الانتقال للمرشح التناظري هي $H(s)$ حيث $H(s)$ هي تحويل لابلاس لاستجابة الصدمة في



الشكل رقم (٧.٥). تصميم المرشحات الرقمية بطريقة التحويل الخطي

المزدوج Bilinear Transform

النطاق الزمني $h(t)$. التحويل الخطي المزدوج bilinear transformation عبارة عن نقل متبادل أو مزدوج من الوسط التناظري أو النطاق S إلى النطاق الرقمي أو النطاق Z باستخدام المعادلة التالية:

$$S = \frac{z}{T} \left(\frac{1 - Z^{-1}}{1 + Z^{-1}} \right) \quad (٧.٣٠)$$

حيث T هي زمن عينة الإشارة التناظرية sampling time . بنفس الطريقة يمكن

كتابة المتغير Z بدلالة المتغير S كما يلي:

$$Z = \left(\frac{1 + \frac{ST}{2}}{1 - \frac{ST}{2}} \right) \quad (٧.٣١)$$

وعلى ذلك يمكن تحويل دالة الانتقال في النطاق التناظري إلى دالة انتقال في النطاق الرقمي أو العكس باستخدام المعادلتين رقمي (٧.٣٠) و (٧.٣١) كما يلي :

$$(٧.٣٢) \quad H(z) = H(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)}$$

وبنفس الطريقة يمكن كتابة :

$$(٧.٣٣) \quad H(s) = H(z) \Big|_{z=\left(\frac{1+\frac{sT}{2}}{1-\frac{sT}{2}} \right)}$$

بوضع $T=2$ لتسهيل الحسابات فقط ، ووضع $s=\sigma+j\Omega$ في المعادلة رقم (٧.٣١)

يمكن إعادة كتابتها كما يلي :

$$z = \frac{1 + \sigma + j\Omega}{1 - \sigma - j\Omega}$$

حيث يمكن حساب القيمة المطلقة للمتغير Z كما يلي :

$$(٧.٣٤) \quad |z|^2 = \frac{(1 + \sigma)^2 + \Omega^2}{(1 - \sigma)^2 + \Omega^2}$$

من المعادلة رقم (٧.٣٤) يمكن أن نستنتج الخواص المهمة التالية لهذا التحويل :

١- بوضع $\sigma = 0$ في المعادلة رقم (٧.٣٤) فإن $|z| < 1$ وهذا يعني أننا عندما

نتحرك على المحور Ω من $\infty = \Omega$ إلى $\infty = \Omega$ في المستوى S فإننا في الحقيقة نتحرك

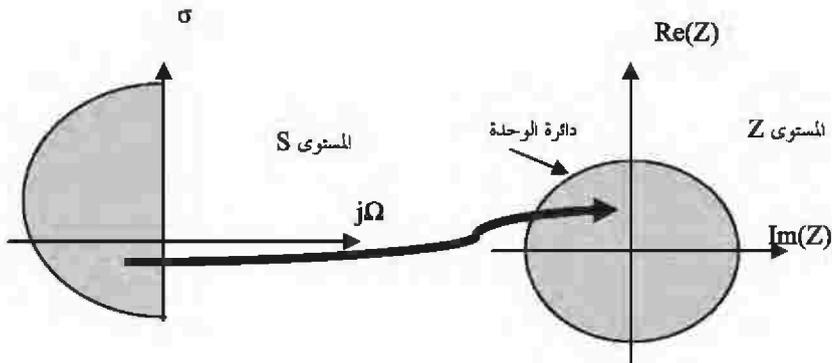
على محيط دائرة الوحدة في المستوى Z .

- ٢- بوضع $\sigma < 0$ في المعادلة رقم (٧,٣٤) فإن $|Z| < 1$ ، لاحظ أن $\sigma < 0$ في المستوى S هو النصف الأيسر من هذا المستوى ، وهذا يعني أن النصف الأيسر من المستوى S يؤول بهذا التحويل إلى داخل دائرة الوحدة $|Z| < 1$ في المستوى Z.
- ٣- بوضع $\sigma > 0$ في المعادلة رقم (٧,٣٤) فإن $|Z| < 1$ ، لاحظ أن $\sigma > 0$ في المستوى S هو النصف الأيمن من هذا المستوى ، وهذا يعني أن النصف الأيمن من المستوى S يؤول بهذا التحويل إلى خارج دائرة الوحدة $|Z| < 1$ في المستوى Z.
- ٤- من الخواص السابقة نستنتج أن أي مرشح تناظري مستقر (كل أقطابه في النصف الأيسر من المستوى S) بهذا التحويل (التحويل الخطي المزدوج) يؤول إلى مرشح رقمي مستقر أيضاً (كل أقطابه داخل دائرة الوحدة).
- ٥- خاصية مهمة أيضاً يمكن أن نستنتجها وهي أن كل نقطة في المستوى S تؤول إلى نقطة وحيدة في المستوى Z وهذا ما يطلق عليه تحويل القيم المتناظرة أو الأحادية one to one transformation والعكس صحيح أيضاً عند التحويل من المستوى Z إلى المستوى S. الشكل رقم (٧,٦) يبين هذه الخواص.
- بوضع $Z=e^{wT}$ في المعادلة رقم (٧,٣٠) ، وهذا يعني أننا نتحرك على دائرة الوحدة فإننا نحصل على العلاقة بين التردد التناظري Ω والتردد الرقمي w كما يلي :

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{wT}{2}\right) \quad (٧,٣٥)$$

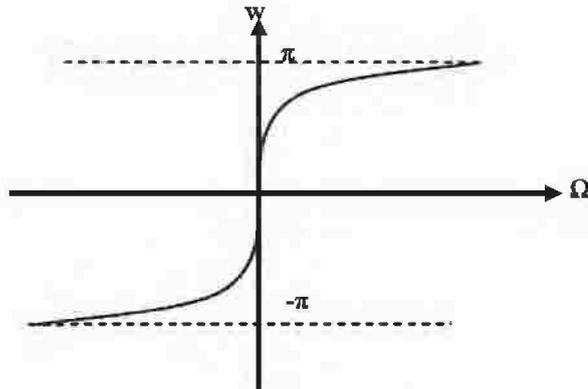
بنفس الطريقة يمكن كتابة:

$$w = 2 \arctan\left(\frac{\Omega T}{2}\right) \quad (٧,٣٦)$$



الشكل رقم (٧,٦). التحويل الخطي المزدوج bilinear transformation بين المستوى S والمستوى Z.

العلاقتان رقما (٧,٣٥) و (٧,٣٦) تبينان أن العلاقة بين المتغير Ω والمتغير w هي علاقة غير خطية تماما تضغط كل المحور $j\Omega$ في المستوى S إلى محيط دائرة الوحدة في المستوى Z، وهذه العلاقة يمكن رسمها كما في الشكل رقم (٧,٧).



الشكل رقم (٧,٧). العلاقة بين w و Ω في التحويل الخطي المزدوج.

مثال رقم (٧.٧): حول الاستجابة الترددية التماثلية للمرشح:

$$H_c(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 5s + 6}$$

إلى استجابة ترددية رقمية مستخدماً طريقة التحويل الخطي المزدوج. افترض $T=1$. باستخدام المعادلة رقم (٧.٣٠) وبعد الكثير من الاختصارات والعمليات الحسابية يمكن كتابة الاستجابة الرقمية كما يلي:

$$(٧.٣٧) \quad H(z) = \frac{3 + 2z^{-1} - z^{-2}}{20 + 4z^{-1}} = \frac{0.15 + 0.1z^{-1} - 0.05z^{-2}}{1 + 0.2z^{-1}}$$

المدالة () Bilinear

لحسن الحظ فإن MATLAB يوفر هذه المدالة للتحويل المباشر من النطاق التماثلي إلى النطاق الرقمي بطريقة التحويل الخطي المزدوج لتوفير مجهود الاختصارات والحسابات التي قد نكون لسناها في المثال السابق. الصورة العامة لهذه المدالة هي:

$$\begin{aligned} [zd, pd, kd] &= \text{bilinear}(z, p, k, fs) \\ [numd, dend] &= \text{bilinear}(num, den, fs) \end{aligned}$$

حيث z هي الأصفار و p هي الأقطاب و k معامل التكبير و fs تردد العينة، وكل ذلك في النطاق التناظري أو التماثلي. أما zd و pd و kd فهي نظيرها في النطاق الرقمي. الصورة الثانية للمدالة هي نفسها الصورة الأولى سوى أنه تم التعبير بصورة كثيرات الحدود للسط num وكثيرات حدود للمقام den . البرنامج التالي سيحول الاستجابة الترددية السابقة إلى النطاق الرقمي باستخدام التحويل الخطي:

```
%example 7-1
b=[1,1]; a=[1,5,6]; T=1; Fs=1/T;
[bd,ad]=bilinear(b,a,Fs);
disp('digital numerator polynomial');disp(bd);
disp('digital denominator polynomial');disp(ad);
```

ونتيجة هذا البرنامج كالتالي :

```
digital numerator polynomial
0.1500 0.1000 -0.0500
```

```
digital denominator polynomial
1.0000 0.2000 -0.0000
```

حيث من هذه المعاملات يمكن كتابة المعادلة رقم (٧.٣٧).

الآن وعلى ضوء ما سبق وما هو موضح في الشكل الشكل رقم (٧.٥) يمكن أن نضع خطوات تصميم المرشح الرقمي باستخدام طريقة التحويل الخطي المزدوج bilinear transformation كما يلي :

١- إبدأ من مواصفات المرشح الرقمي المعطاه كما في الشكل رقم (٧.٤) فى صورة ترددات القطع w_c و w_s وغيرها.

٢- حول هذه الترددات الرقمية إلى ترددات تناظرية باستخدام المعادلة رقم (٧.٣٥).

٣- صمم مرشح تناظري يحقق هذه المطالب في الخطوة الثانية باستخدام أحد الصور المعروفة مثل البترورث أو الشيبشيف أو القطع الناقص التي درسناها في فصل تصميم المرشحات التناظرية . هنا ستحصل على الاستجابة الترددية التناظرية $H(S)$.

٤- استخدم التحويل الخطي المزدوج bilinear transform للحصول على دالة

الانتقال transfer function في النطاق الرقمي $H(Z)$ وذلك باستخدام المعادلة رقم (٧.٣٧).

٥- بعد ذلك يمكن الحصول على الاستجابة الترددية $H(w)$ وذلك بوضع $Z=e^{jw}$ في دالة الانتقال في الخطوة السابقة.

مثال رقم (٧.٢): صمم مرشح رقمي منفذاً للترددات المنخفضة LPF بالمواصفات التالية: $w_p=0.2\pi$ و $w_s=0.3\pi$ و $R_p=1\text{dB}$ و $A_s=15\text{dB}$. البرنامج التالي يبين خطوات هذا التصميم:

أولاً: مواصفات المرشح الرقمي

```
%Example 7-2 Butterworth LPF using bilinear transformation
wp=0.2*pi; ws=0.3*pi; Rp=1; As=15;
T=1; Fs=1/T;
```

ثانياً: تحويل هذه المواصفات إلى النطاق التناظري

```
omegap=(2/T)*tan(wp/2);
omegas=(2/T)*tan(ws/2);
```

سنستخدم مرشحاً من النوع بتروث ونحتاج لمعرفة درجته، لذلك سنستخدم

الدالة buttord للحصول على هذه الدرجة وكذلك تردد القطع w_n .

```
[N,wn]=buttord(omegap,omegas,Rp,As,'s');
```

تصميم المرشح التناظري باستخدام الدالة butter والمعاملات السابقة.

```
[bs,as]=butter(N,wn,'s');
```

استخدام التحويل الخطي للحصول على التصميم في النطاق الرقمي.

```
[bz,az]=bilinear(bs,as,Fs);
disp('Numerator coefficients'); disp(bz);
disp('Denominator coefficients'); disp(az);
```

```
w=0:pi/255:pi; h=freqz(bz,az,w);
db=20*log10(abs(h)/max(abs(h)));
set(gcf,'color','white');
subplot(2,1,1);
plot(w/pi,db);grid;
axis([0,1,-30,0]);xlabel('Freq. in pi units');
```

```
ylabel('Magnitude in dB');
title('Frequency response');
subplot(2,1,2);
zplane(bz,az,'k'); title('Z plane representation');
```

من هذا البرنامج كانت معاملات البسط والمقام في دالة الانتقال لهذا المرشح

كالتالي :

Numerator coefficients

0.0007 0.0044 0.0111 0.0148 0.0111 0.0044 0.0007

Denominator coefficients

1.0000 -3.1836 4.6222 -3.7795 1.8136 -0.4800 0.0544

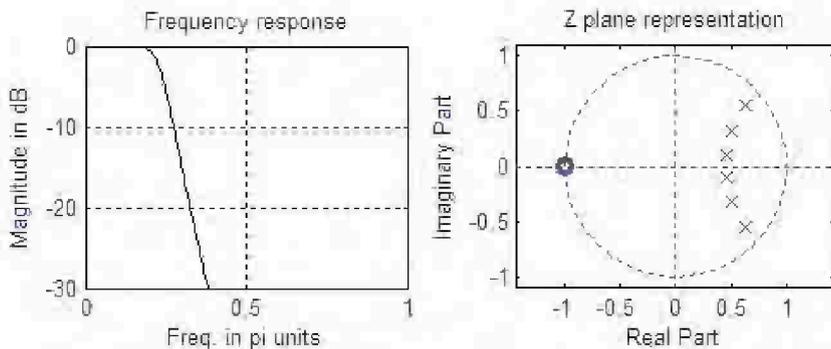
وعلى ذلك يمكن كتابة دالة الانتقال لهذا المرشح كما يلي :

$$H(z) = \frac{0.0007 + 0.0044z^{-1} + 0.0111z^{-2} + 0.0148z^{-3} + 0.0111z^{-4} + 0.0044z^{-5} + 0.0007z^{-6}}{1 - 3.1836z^{-1} + 4.6222z^{-2} - 3.7795z^{-3} + 1.8136z^{-4} - 0.4800z^{-5} + 0.0544z^{-6}}$$

الشكل رقم (٧.٨) يبين الاستجابة الترددية للمرشح وتمثيل المرشح في المستوى

Z حيث نلاحظ أن جميع أقطاب المرشح تقع داخل دائرة الوحدة مما يعني أن المرشح

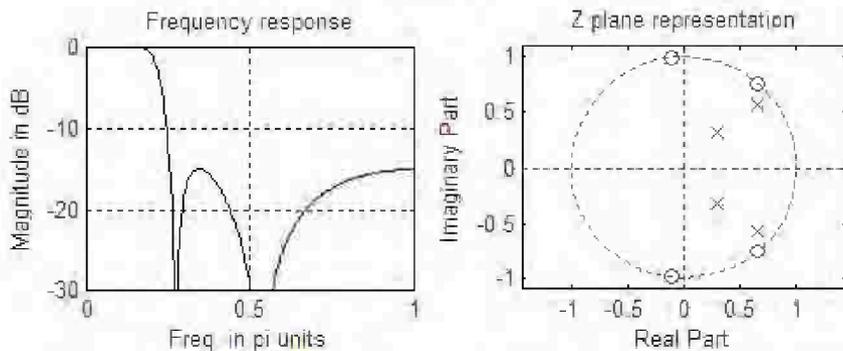
مستقر.



الشكل رقم (٧.٩). تصميم مرشح المقلد رقم (٧.٣) بطريقة المحوّل الخطّي المزدوج.

مثال رقم (٧.٧) : سنعيد المثال رقم (٧.٢) ولكن هذه المرة سنستخدم طريقة المرشح شيبشيف ٢ في التصميم بدلاً من طريقة البرورث. البرنامج التالي هو نفس برنامج المثال (٧ - ٢) مع تعديلات بسيطة والشكل رقم (٧.٩) يبين الاستجابة الترددية وتمثيل المرشح في المستوى Z.

```
%Example 7-3 cheby2 LPF using bilinear transformation
wp=0.2*pi; ws=0.3*pi; Rp=1; As=15;
T=1; Fs=1/T;
omegap=(2/T)*tan(wp/2);
omegas=(2/T)*tan(ws/2);
[N,wn]=cheb2ord(omegap,omegas,Rp,As,'s');
[bs,as]=cheby2(N,As,wn,'s');
[bz,az]=bilinear(bs,as,Fs);
disp('Numerator coefficients'); disp(bz);
disp('Denominator coefficients'); disp(az);
w=0:pi/255:pi; h=freqz(bz,az,w);
db=20*log10(abs(h)/max(abs(h)));
set(gcf,'color','white');
subplot(2,1,1);
plot(w/pi,db,'k');grid;
axis([0,1,-30,0]);xlabel('Freq. in pi units');
ylabel('Magnitude in dB');
title('Frequency response');
subplot(2,1,2);
zplane(bz,az,'k');
title('Z plane representation');
```



الشكل رقم (٧.٩). تصميم مرشح المثل رقم (٧.٢).

Impulse Invariant Method, IIM طريقة تساوي استجابة الدفعة (٧.٥.٢)

هذه هي الطريقة الثانية لتصميم المرشحات الرقمية IIR بعد أن رأينا طريقة التحويل الخطي المزدوج والتي تعد الأكثر استخداماً وشيوعاً. فى هذه الطريقة يتم مساواة استجابة الصدمة $h_s(t)$ للمرشح التناظري بعد عينتها لتصبح $h_s(nT)$ مع استجابة الصدمة للمرشح الرقمي $h[n]$. معنى ذلك أنه يتم مساواة استجابتي الصدمة للمرشح التناظري والرقمي كما يلي:

$$(٧.٣٨) \quad h[n]=h_s(nT)$$

أو بمعنى آخر، أن استجابة الصدمة للمرشح الرقمي تساوى ، أو هي استجابة الدفعة للمرشح التناظري بعد عينتها *sampling* .

لقد رأينا مسبقاً أن العلاقة بين دالة الانتقال الرقمية $H(Z)$ ودالة الانتقال التناظرية يمكن كتابتها على الصورة التالية:

$$(٧.٣٩) \quad H(Z)=Z(h[n])=Z(h_s(nT))$$

وأما العلاقة بين الاستجابة الترددية فى النطاق الرقمي والنطاق التناظري فيمكن الحصول عليها بوضع $Z=e^{sT}$ و $s=j\Omega$ فنحصل على المعادلة التالية:

$$(٧.٤٠) \quad H(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a \left(j \frac{\omega}{T} + j \frac{2\pi k}{T} \right)$$

التحويل $s=(1/T)\ln(Z)$ يستحق وقفة. هذه المعادلة يمكن كتابتها على الصورة $Z=e^{sT}$ وبوضع $s=\sigma+j\Omega_0$ نحصل على الآتي:

$$(٧.٤١) \quad Z = r e^{j\omega} = e^{\sigma_0 T} e^{j\Omega_0 T}$$

ومنها يمكن كتابة :

$$(٧.٤٢) \quad |Z| = r = e^{\sigma_0 T}$$

من المعادلة رقم (٧.٤٢) نلاحظ أنه عندما $\sigma_0 = 0$ أي أننا نتحرك على المحور $j\Omega$ في المستوى S فإنه في هذه الحالة تكون $r=1$ أي أننا نتحرك على محيط دائرة الوحدة في المستوى Z . وعلى ذلك فإنه عندما تكون σ_0 سالبة ، أي النصف الأيسر من المستوى S ، فإن ذلك يقابل $r < 1$ أي داخل دائرة الوحدة ، أي أن ذلك يعنى أن المرشح التناظري المستقر سيتحول إلى مرشح رقمى مستقر أيضا. وبنفس الطريقة يمكن أن نرى أن النصف الأيمن من المستوى S سيتقابل مع خارج دائرة الوحدة في المستوى Z . هناك خاصية أخرى مهمة في هذا التحويل وهى أنه يحول كل النقط المعطاه بالمعادلة التالية :

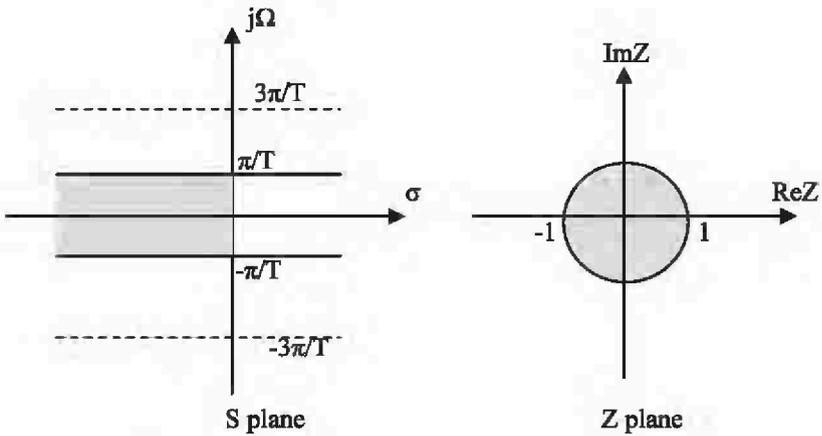
$$(٧.٤٣) \quad S = \sigma_0 + j\Omega_0 + j \frac{2\pi k}{T}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

إلى نقطة واحدة في المستوى Z حيث أن :

$$(٧.٣٨) \quad e^{\sigma_0 T} e^{j\Omega_0 T + \frac{2\pi k}{T} T} = e^{\sigma_0 T} e^{j\Omega_0 T}$$

وهذا يعني أن الشريط strip الذي عرضه π/T في المستوى S والذي يقع في المدى الذي يحدد بما يلى : $\pi/T \leq \Omega \leq \pi/T -$ يتحول إلى كل المستوى Z كما في الشكل

رقم (٧.١٠) بحيث إن النصف الأيسر من هذا الشريط يؤول إلى داخل دائرة الوحدة في المستوى Z ، والنصف الأيمن منها يؤول إلى خارج دائرة الوحدة. وبنفس الطريقة كما في الشكل رقم (٧.١٠) سنرى أن المحور $j\Omega$ يقسم إلى شرائح عرض كل منها π/T ، وكلها تؤول بنفس الطريق إلى كل المستوى Z كما أشرنا سابقاً. وهذا التحويل يطلق عليه many to one transformation أي تحويل نقاط عديده إلى نقطة واحدة.



الشكل رقم (٧.١٠). تحويل استجابة الصدمة الموحدة IIR.

نلاحظ من المعادلة رقم (٧.٣٩) أن الاستجابة الترددية الرقمية $H(w)$ للمرشح الرقمي المطلوب تصميمه بهذه الطريقة هي عبارة عن مجموع الاستجابات الترددية للمرشح التناظري الأصلي $H_s(\Omega)$ مع نفس الاستجابات المزاحة لها بمقدار $\pm 2\pi k/T$ ، مع ضرب هذا المجموع في المعامل $1/T$ كما في المعادلة رقم (٧.٤٠). معنى ذلك أن كل شريط من هذه الشرائح، النصف الأيسر منه فقط، يؤول إلى دائرة الوحدة، وهذه الشرائح فوق بعضها.

نستنتج أيضاً من هذه المعادلة ومن الشكل رقم (٧.١٠) ومن نظرية العيننة التي

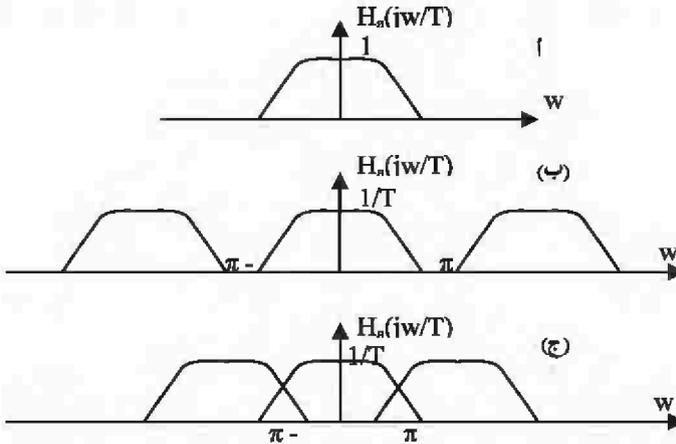
سبق دراستها أن الاستجابة الترددية التناظرية $H_a(\Omega)$ إذا كانت محددة النطاق بحيث إن:

$$(٧.٤٤) \quad |\Omega| \geq \frac{\pi}{T} \quad H_a(j\Omega) = 0 \quad \text{for}$$

فإن:

$$(٧.٤٥) \quad H(w) = \frac{1}{T} H_a\left(j\frac{w}{T}\right) \quad \text{for } |w| \leq \pi$$

ولن يكون هناك تداخل أو تزوير ترددي aliasing، أما إذا كان الشرط رقم (٧.٤٥) غير محقق فسوف يكون هناك تداخل ترددي كما في الشكل رقم (٧.١١). الشكل رقم (٧.١١) يبين الاستجابة الترددية للمرشح التناظري، وفي الشكل رقم (٧.١١ب) نرى الاستجابة الترددية للمرشح الرقمي عندما كانت الاستجابة الترددية محددة النطاق حيث نلاحظ عدم وجود تداخل ترددي بينما نلاحظ هذا التداخل في الشكل رقم (٧.١١ج) وهذا التداخل نتيجة أن نطاق المرشح التناظري أكبر من π .



الشكل رقم (٧.١١). العلاقة بين الاستجابة الترددية للمرشح التناظري والمرشح الرقمي.

مثال رقم (٧,١٠): افترض المرشح التناظري التالي من الدرجة الأولى:

$$H_c(s) = \frac{A}{s + \alpha}$$

استجابة الدفعة لهذا المرشح يمكن كتابتها كالتالي:

$$h_c(t) = A e^{-\alpha t} u(t)$$

حيث $u(t)$ هي دالة الخطوة. الآن يمكن كتابة استجابة الصدمة للمرشح الرقمي باستخدام المعادلة رقم (٧,٣٨) كما يلي:

$$h[n] = h_c(nT) = A e^{-\alpha nT} u[n]$$

وعلى ذلك يمكن كتابة دالة الانتقال لهذا المرشح كما يلي:

$$H(z) = A \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha nT} z^{-n} = \frac{A}{1 - e^{-\alpha T} z^{-1}}$$

لاحظ لكي يكون هذا المرشح مستقراً فإن $|\alpha| > 1$ ومن ثم فإن $|e^{-\alpha T}| < 1$ أي أن هذا القطب سيكون داخل دائرة الوحدة.

مثال رقم (٧,٥): مطلوب تصميم مرشح رقمي منفذ للترددات المنخفضة من

النوع IIR. تردد حافة مجال السماح هو $\omega_p=0.25\pi$ على ألا تزيد التموجات في مجال الانتقال عن 0.5db. تردد بداية مجال الوقف هو $\omega_s=0.55\pi$ ومقدار الاستجابة عند هذا التردد هو 15db. وعلى ذلك يمكن كتابة استجابة هذا المرشح كما يلي:

$$20 \log_{10} |H(j0.25\pi)| \geq -0.5 \text{db}$$

$$20 \log_{10} |H(j0.55\pi)| \leq -15 \text{db}$$

على أن يكون التصميم مرة باستخدام طريقة استجابة الصدمة الموحدة ، ومرة باستخدام التحويل الخطي المزدوج.

أولاً: باستخدام طريقة استجابة الدفعة الموحدة

سنفترض أولاً عدم وجود تداخل ترددي باختيار معدل عينة عال وسنفترض التصميم للمرشح التناظري من النوع بتروث. أول خطوات تصميم المرشح هي تقدير درجة هذا المرشح N. من الصور المختصرة التي تستخدم لتقدير هذه الدرجة المعادلة التالية:

$$N = \frac{\log_{10} \left(\frac{1}{k_1} \right)}{\log_{10} \left(\frac{1}{k} \right)} \quad (٧.١٠)$$

حيث k و k_1 يعطيان بالمعادلتين التاليتين وبالاستعانة بالشكل رقم (٧.٤). كما

يلي:

$$k = \frac{\Omega_p}{\Omega_s} \quad (٧.٤٨)$$

$$k_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{A_s^2 - 1}} \quad (٧.٤٩)$$

من المعادلات السابقة والشكل رقم (٧.٤) يمكننا كتابة ما يلي :

$$20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} = 0.5 \text{db}$$

ومنها يمكن حساب $\varepsilon^2 = 0.1220185$ ، وبنفس الطريقة يمكن حساب $A_s^2 = 31.62277$ ، ومن ذلك يمكن حساب قيمة $(k_1) = 15.841979/ (١)$ و $(k) = 2.2/ (١)$ ، وباستخدام المعادلة رقم (٧.٤) يمكن تقدير درجة المرشح $N = 3.503885$ والتي يتم تقريبها إلى $N = 4$. معادلة المرشح بتروث سبق أن درسناها ويمكن أن نكتبها الآن عند تردد السماح Ω_p كما يلي :

$$|H_a(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \quad (٧.٥٠)$$

وبالتعويض في هذه المعادلة بقيم كل المتغيرات التي سبق الحصول عليها يمكن حساب قيمة تردد القطع $\Omega_c = 0.3251892\pi = 1.021612 \text{rad/sec}$ وهو التردد الذي تنزل عنده الاستجابة الترددية بمقدار 3db من قيمتها عند التردد صفر. بمعرفة قيمة تردد القطع Ω_c ودرجة المرشح N يمكن استخدام إحدى دوال الـ MATLAB المتاحة لتصميم المرشحات من النوع بتروث والتي منها :

$$[z,p,k]=\text{buttap}(N);$$

التي تعطي الأصفار Z والأقطاب P ومعامل التكبير K للمرشح التناظري الذي درجته N وتردد القطع له $\Omega_c = 1 \text{ rad/sec}$. كما أن هناك الدالة:

$$[\text{num}, \text{den}] = \text{butter}(N, W_n, 'S');$$

التي تعطي معاملات المتغير S في البسط num وفي المقام den بقوى تنازلية للمرشح التناظري من النوع بترورث الذي درجته N وتردد القطع له W_n والـ S دلالة على العمل في المجال التناظري. باستخدام هذه الدالة من MATLAB يمكن الحصول على معادلة المرشح التناظري كما يلي:

$$H_a(s) = \frac{-0.943839s - 0.7380277}{(s + 0.39097)^2 + (0.943839)^2} \cdot \frac{0.943839s + 1.7817187}{(s + 0.9438673)^2 + (0.3909035)^2}$$

باستخدام التحويل $Z = e^{sT}$ (التحويل IIR) نحصل على دالة الانتقال للمرشح الرقمي كما يلي:

$$H(Z) = \frac{-0.943839 + 0.16038789z^{-1}}{1 - 0.7936648z^{-1} + 0.4575167z^{-2}} + \frac{0.943839 - 0.001667z^{-1}}{1 - 0.719533z^{-1} + 0.1514144z^{-2}}$$

ثانياً: باستخدام التحويل الخطي المزدوج Bilinear transformation

في هذه الطريقة نبدأ بتحويل مواصفات المرشح الرقمي من النطاق الرقمي إلى النطاق التناظري باستخدام التحويل الخطي واعتبار $T=2$ كما يلي:

$$\Omega_p = \tan\left(\frac{W_p}{2}\right) = \tan\left(\frac{0.25\pi}{2}\right) = 0.4142135$$

$$\Omega_s = \tan\left(\frac{W_s}{2}\right) = \tan\left(\frac{0.55\pi}{2}\right) = 1.1708496$$

الآن لتقدير درجة المرشح التناظري نحتاج لحساب كل من:

$$\frac{1}{k_1} = 15.841979, \quad \frac{1}{k} = \frac{\Omega_s}{\Omega_p} = 2.8266814$$

ومن ذلك يمكن حساب N كما يلي:

$$N = \frac{\log_{10}\left(\frac{1}{k_1}\right)}{\log_{10}\left(\frac{1}{k}\right)} = 2.6586$$

والتي يتم تقريبها إلى $N=3$ ، حيث نلاحظ أن درجة المرشح التناظري في حالة التحويل الخطي تكون أقل منها في حالة استجابة الصدمة ويرجع ذلك إلى أن طريقة استجابة الصدمة تضغط المدى الترددي للمرشح مما يجعله يحتاج إلى درجة أعلى. بالتعويض بقيم N و Ω_p في المعادلة رقم (٧.٥٠) نحصل على تردد القطع $\Omega_c=0.588148$. الآن يمكن استخدام MATLAB للحصول على دالة الانتقال للمرشح التناظري الذي له تردد القطع السابق ومن الدرجة الثالثة كما يلي:

$$H_a(s) = \frac{0.203451}{(s + 0.500148)(s^2 + 0.500148s + 0.345918)}$$

بوضع $s=(1-z^{-1})/(1+z^{-1})$ نحصل على دالة الانتقال للمرشح الرقمي كما يلي:

$$H(z) = \frac{0.066227z(1+z^{-1})^3}{(1-0.2593284z^{-1})(1-0.676285z^{-1}+0.3917468z^{-2})} \quad (٧.٥١)$$

(٧.٦) تصميم المرشحات الرقمية IIR في برنامج MATLAB

يحتوي برنامج MATLAB على العديد من الدوال المستخدمة في تصميم المرشحات الرقمية من النوع IIR. أول هذه الدوال هي المجموعة التالية التي تستخدم لتحديد درجة المرشح على حسب طريقة التصميم:

$$\begin{aligned} [N, Wn] &= \text{buttord}(Wp, Ws, Rp, Rs) \\ [N, Wn] &= \text{cheby1ord}(Wp, Ws, Rp, Rs) \\ [N, Wn] &= \text{cheby2ord}(Wp, Ws, Rp, Rs) \\ [N, Wn] &= \text{ellipord}(Wp, Ws, Rp, Rs) \end{aligned}$$

حيث الدالة الأولى تعطي درجة المرشح الرقمي N ، وتردد القطع Wn للمرشح الرقمي من النوع بتزورث الذي تردد مجال السماح له هو Wp ، ومقدار الاستجابة في هذا المجال هو Rp ، بينما تردد مجال القطع هو Ws ، ومقدار الاستجابة في هذا المجال هو Rs . الدوال الثانية حتى الرابعة تعمل بنفس الطريقة ولكن مع أنواع المرشحات الشيبشيف بنوعيتها ومع القطع الناقص. التردد Wn هو تردد القطع (rad/sample)، أو تردد الثلاث ديسبل (الذي ينزل عنده مقدار الاستجابة ثلاثة ديسبل من قيمته عند التردد صفر). هذا التردد يتراوح من صفر حتى واحد حيث القيمة واحد تقابل نصف تردد العينة sampling frequency.

الدالة:

$$[B,A] = \text{BUTTER}(N,Wn)$$

تصمم مرشح رقمي من النوع بتزورث حيث تعطى معاملات البسط B ومعاملات المقام A في قوى تنازلية للمتغير Z . درجة المرشح هي N التي سبق حسابها بالدالة buttord ، و Wn هي تردد القطع كما سبق.

الدالة :

$$[Bz,Az] = \text{IMPINVAR}(B,A,Fs)$$

تعطى مرشح رقمي بمعاملات البسط Bz ومعاملات المقام Az باستخدام طريقة استجابة الدفعة impulse invariant method لتحويل المرشح التناظري الذي معاملات البسط له هي B ومعاملات المقام هي A وتردد العينة هي Fs هرتز. إذا لم يتم ذكر Fs فإنها توضع تلقائياً بهرتز واحد. المعاملات B و A تكون مضروبة في الكمية 1/Fs. المثال التالي يبين ذلك فحاول تنفيذه (انظر في برنامج MATLAB الأمر (help impinvar).

```
% EXAMPLE: Illustrate the relationship between digital and analog
% frequency responses.
[b,a] = butter(4,0.3,'s');
[bz,az] = impinvar(b,a,10);
[Ha,Wa] = freqs(b,a,512);
[Hz,Wz] = freqz(bz,az,512,10);
plot(Wa/(2*pi),20*log10(abs(Ha))); hold on;
plot(Wz,20*log10(abs(Hz)))
```

الدالة :

$$[Zd,Pd,Kd] = \text{BILINEAR}(Z,P,K,Fs)$$

تعطى الأصفار Zd والأقطاب Pd ومعامل التكبير Kd لمرشح رقمي بطريقة التحويل الخطي المزدوج bilinear للمرشح التناظري الذي أصفاره Z وأقطابه P ومعامل التكبير له هو K وتردد العينة هو Fs. يمكن استخدام الصورة البديلة التالية :

$$[\text{Numd},\text{Dend}] = \text{BILINEAR}(\text{Num},\text{Den},Fs)$$

التي تحول المرشح التناظري الذي معاملات البسط له هي Num ومعاملات

المقام هي Den وذلك كقوى للمتغير S، وتردد العينة له هو Fs إلى المرشح الرقمي الذي معاملات البسط له هي Numd ومعاملات المقام له هي Dend وذلك كقوى للمتغير Z.

مثال رقم (٧,٦): حدد دالة الانتقال وارسم الاستجابة لمرشح رقمي LPF من الدرجة الخامسة من نوع القطع الناقص elliptic. تردد حافة الانتقال لهذا المرشح هو $\omega_p=0.4$ وتموجات مجال الانتقال $R_p=0.5\text{db}$ وأقل اضمحلال في مجال الوقف هو $R_s=40\text{db}$. المرشح من النوع IIR. استخدم MATLAB في تصميم هذا المرشح. البرنامج التالي تم تنفيذه على MATLAB لتصميم هذا المرشح:

```
%elliptic IIR LP digital filter design
N=5;
Rp=0.5;
Rs=40;
wn=0.4;
[b,a]=ellip(5,0.5,40,0.4);
disp('Numerator polynomial');
disp(b);
disp('Denominator polynomial');
disp(a);
w=0:0.01/pi:pi;
h=freqz(b,a,w);
gain=20*log10(abs(h));
plot(w/pi,gain);
grid;
xlabel('normalized frequency');
ylabel('gain in dB');
```

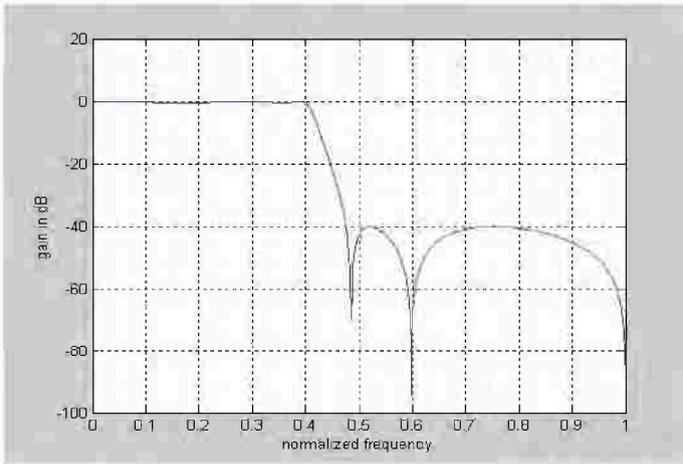
خرج هذا البرنامج هو:

```
Numerator polynomial
0.0528 0.0797 0.1295 0.1295 0.0797 0.0528
Denominator polynomial
1.0000 -1.8107 2.4947 -1.8801 0.9537 -0.2336
```

وعلى ذلك يمكن كتابة معادلة دالة الانتقال لهذا المرشح كالتالي :

$$(٧.٤) \quad H(z) = \frac{0.0528 + 0.079z^{-1} + 0.129z^{-2} + 0.129z^{-3} + 0.079z^{-4} + 0.0528z^{-5}}{1 - 1.81z^{-1} + 2.49z^{-2} - 1.88z^{-3} + 0.953z^{-4} - 0.233z^{-5}}$$

الشكل رقم (٧.١٢) يبين الاستجابة الترددية لهذا المرشح.



الشكل رقم (٧.١٢). استجابة مرشح المثال رقم (٧.٦).

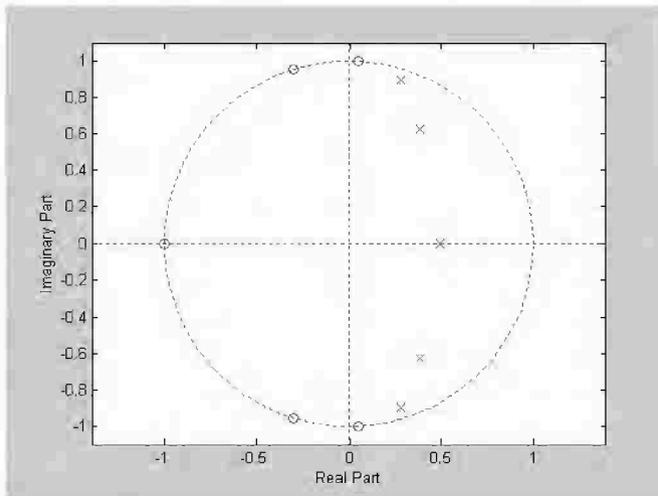
البرنامج التالي يبين طريقة رسم أصفار وأقطاب هذا المرشح :

```
%elliptic IIR LP digital filter design (poles and zeros)
N=5;
Rp=0.5;
Rs=40;
wn=0.4;
[b,a]=ellip(5,0.5,40,0.4);
[z,p,k]=tf2zp(b,a);
disp('Zeros are:');
disp(z);
disp('Poles are:');
disp(p);
disp('Gain constant is');
```

```
disp(k);
zplane(b,a);
```

خرج هذا البرنامج سيكون كالتالي :

```
Zeros are:
-1.0000
-0.3020 + 0.9533i
-0.3020 - 0.9533i
0.0474 + 0.9989i
0.0474 - 0.9989i
Poles are:
0.2787 + 0.8973i
0.2787 - 0.8973i
0.3812 + 0.6274i
0.3812 - 0.6274i
0.4909
Gain constant is
0.0528
```



الشكل رقم (٧.١٣). أقطاب وأصفار مرشح المثال رقم (٧.٦).

مثال (٧.٧). حدد دالة الانتقال وارسم الاستجابة لمرشح رقمي BPF من

الدرجة الثامنة من النوع Butterworth. تردد h_j حافة الانتقال لهذا المرشح هو $w_p=0.4$

حتى $wp=0.7$. المرشح من النوع IIR. استخدم MATLAB في تصميم هذا المرشح.
البرنامج التالي تم تنفيذه على MATLAB لتصميم هذا المرشح:

```
%butterworth IIR BP digital filter
N=8;
M=N/2;
w1=0.4;
w2=0.7;
wn=[w1 w2];
[b,a]=butter(M,wn);
disp('numerator polynomial');disp(b);
disp('denominator polynomial');disp(a);
w=0.2*pi:0.01/pi:0.85*pi;
h=freqz(b,a,w);
gain=20*log10(abs(h));
plot(w/pi,gain);
grid;
xlabel('normalized frequency');
ylabel('gain in dB');
```

خرج هذا البرنامج هو:

```
numerator polynomial
0.0186    0 -0.0743    0 0.1114    0 -0.0743 0 0.0186
denominator polynomial
1.0000 0.9780 1.9399 1.3386 1.6271 0.7349 0.5826
0.1386 0.0762
```

الشكل رقم (٧، ١٤) يبين دالة الانتقال لهذا المرشح.

البرنامج التالي يبين كيفية الحصول على أقطاب وأصفار هذا المرشح والشكل

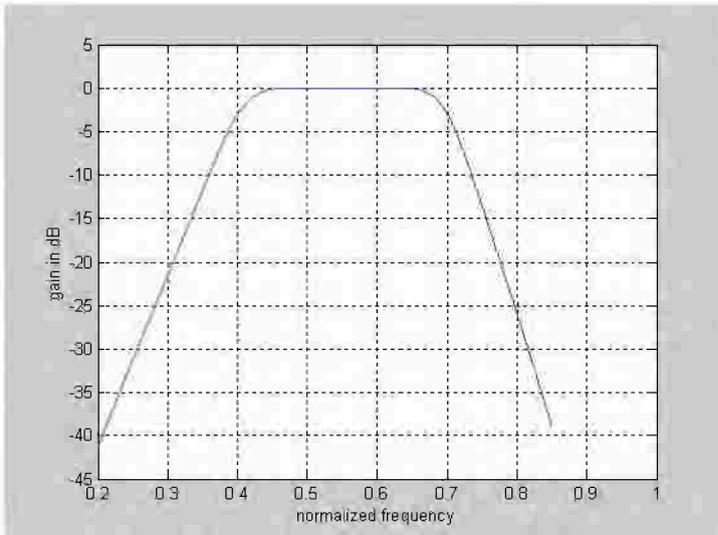
رقم (٧، ١٥) يبين هذه الأقطاب والأصفار.

```
%butterworth IIR BP digital filter design (poles and
zeros)
N=8;
w1=0.4;
w2=0.7;
```

```

wn=[w1 w2];
[b,a]=butter(N/2,wn);
[z,p,k]=tf2zp(b,a);
disp('Zeros are:');disp(z);
disp('Poles are:');disp(p);
disp('Gain constant is');disp(k);
zplane(b,a);

```



الشكل رقم (٧.١٤). دالة الانتقال لمروشح المثال رقم (٧.٧).

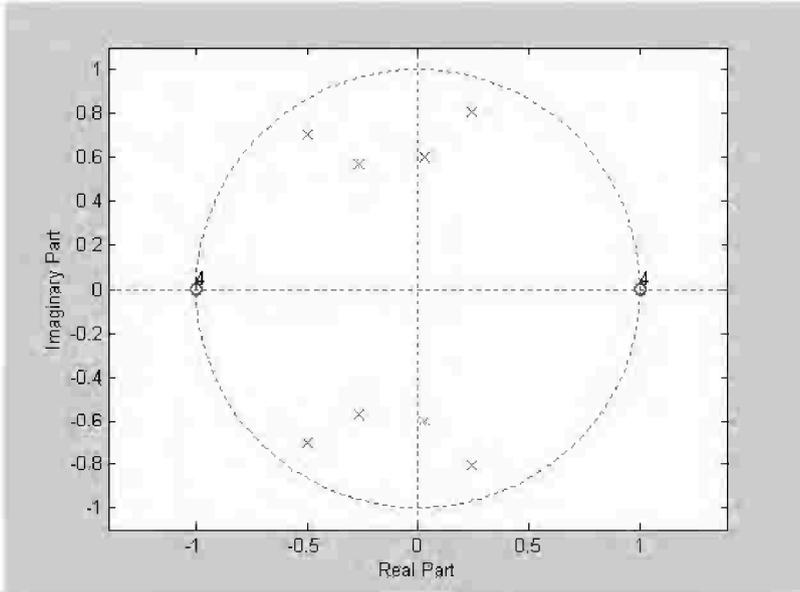
خرج هذا البرنامج هو:

```

Zeros are:
1.0001
1.0000 + 0.0001i
1.000 - 0.0001i
0.9999
- 1.0001
-1.0000 + 0.0001i
-1.0000 - 0.0001i
-0.9999
Poles are:
-0.4963 + 0.7058i
-0.4963 - 0.7058i

```

$0.2419 + 0.8060i$
 $0.2419 - 0.8060i$
 $-0.2651 + 0.5715i$
 $-0.2651 - 0.5715i$
 $0.0305 + 0.6027i$
 $0.0305 - 0.6027i$
 Gain constant is
 0.0186



الشكل رقم (٧.١٥). أصفار وأقطاب مرشح المال رقم (٧.٧).

(٧.٧) التحويل الطيفي للمرشحات

Spectral Transformation of Filters

لقد رأينا فيما سبق أن كل ما تم عرضه أو شرحه كان يتعلق بالمرشحات المنفذة للترددات المنخفضة LPF، فماذا عن الأنواع الأخرى، HPF و BPF و BSF؟ بل إنه أحياناً نقوم بتصميم مرشح LPF بتردد قطع معين، ثم بعد قليل نريد تصميم مرشح

آخر LPF مثل السابق تماماً سوى أنه يختلف معه فقط في تردد القطع w_c ، فهل نقوم بتصميم هذا المرشح من البداية مرة أخرى أم أنه يمكننا الاستفادة بالمرشح الذي تم تصميمه وعن طريق تحويلة بسيطة يمكننا الحصول على المرشح الجديد. هذا ما سنراه في هذا الجزء حيث سنرى كيف أنه بدءاً من مرشح نموذجي أو مبدئي Prototype LPF يمكننا الحصول على كل أنواع المرشحات الأخرى بما فيها LPF آخر، و HPF و BPF و BSF. سنذكر هنا هذه التحويلات بدون برهان أو إثبات حيث البراهين موجودة في العديد من المراجع المتخصصة ثم إنها لن تضيف الكثير ولذلك سنكتفي بذكرها فقط. سنفترض هنا أننا صممنا مرشح النموذج من النوع LPF له تردد قطع w_c ونريد الحصول منه على إحدى الصور الأخرى.

(٧.٧.١) أولاً: الحصول على مرشح LPF بتردد قطع مختلف عن المرشح

النموذجي

كما ذكرنا أن لدينا مرشح LPF تردد القطع له هو w_c ونريد الحصول منه على مرشح آخر LPF بتردد قطع آخر w_{c1} ، وبالطبع فإن مقدار الاستجابة الترددية سيكون هو نفسه لكل من المرشحين. في هذه الحالة يتم استخدام التحويل التالي:

$$Z^{-1} = \frac{Z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha Z^{-1}} \quad (٧.٥٣)$$

حيث:

$$\alpha = \frac{\sin\left(\frac{w_c - w_{c1}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{w_c + w_{c1}}{2}\right)} \quad (٧.٥٤)$$

كمثال على ذلك سنقترض المرشح الرقمي من الدرجة الثالثة والذي تم تصميمه بطريقة التحويل الخطي المزدوج bilinear transformation وكان تردد القطع له هو $w_c=0.25\pi$ ونريد تغيير تردد القطع إلى 0.35π . باستخدام المعادلة رقم (٧.٥٤) ووضع $w_c=0.25\pi$ و $w_{c1}=0.35\pi$ نحصل على قيمة $\alpha=0.1933636$. الآن بالتعويض بقيمة α في المعادلة رقم (٧.٥٣) ثم التعويض بهذه القيمة للمتغير Z في معادلة المرشح الأصلي في المعادلة رقم (٧.٥١) نحصل على معادلة المرشح الجديد كما يلي:

$$H(z) = \frac{0.2172235(1 + z^{-1})^3}{(1 - 0.0694472z^{-1})(1 - 0.1848053z^{-2} + 0.337568z^{-4})}$$

(٧.٧.٢) تالياً: الحصول على مرشح HPF من مرشح LFF

في هذه الحالة سنستخدم التحويل التالي:

$$(٧.٥٥) \quad Z^{-1} = \frac{Z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha Z^{-1}}$$

$$(٧.٥٦) \quad \alpha = \frac{\sin\left(\frac{w_c + w_{c1}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{w_c - w_{c1}}{2}\right)}$$

حيث w_{c1} هي تردد القطع للمرشح HPF.

(٧.٧.٣) تالياً: الحصول على مرشح BPF من مرشح LFF

في هذه الحالة نستخدم التحويل التالي:

$$Z^{-1} = - \frac{Z^{-2} - \frac{2\alpha\beta}{\beta+1}Z^{-1} + \frac{\beta-1}{\beta+1}}{\frac{\beta-1}{\beta+1}Z^{-2} - \frac{2\alpha\beta}{\beta+1}Z^{-1} + 1} \quad (٧.٥٧)$$

حيث:

$$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{w_{c2} + w_{c1}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{w_{c2} - w_{c1}}{2}\right)}$$

$$\beta = \cot\left(\frac{w_{c2} - w_{c1}}{2}\right) \tan\left(\frac{w_c}{2}\right) \quad (٧.٥٨)$$

حيث w_{c2} هي تردد القطع الأعلى و w_{c1} هي تردد القطع الأسفل للمرشح

.BPF

(٧.٧، ٤) رابعاً: الحصول على مرشح BSF من مرشح LPF

في هذه الحالة نستخدم التحويلة التالية:

$$Z^{-1} = - \frac{Z^{-2} - \frac{2\alpha}{1+\beta}Z^{-1} + \frac{1-\beta}{1+\beta}}{\frac{1-\beta}{1+\beta}Z^{-2} - \frac{2\alpha}{1+\beta}Z^{-1} + 1} \quad (٧.٥٩)$$

$$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{w_{c2} + w_{c1}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{w_{c2} - w_{c1}}{2}\right)}$$

$$\beta = \tan\left(\frac{w_{c2} - w_{c1}}{2}\right) \tan\left(\frac{w_c}{2}\right) \quad (٧.٦٠)$$

حيث w_{c2} هي تردد القطع الأعلى و w_{c1} هي تردد القطع الأسفل للمرشح BSF.

(٧.٨) تمارين

١- افترض $H(z)$ دالة الانتقال لمرشح منفذ للترددات المنخفضة LPF ، تردد حافة مجال الانتقال ω_p ، وتردد حافة مجال الوقف ω_s ، التموجات فد مجال الانتقال هي δ_p ، والتموجات فد مجال الوقف δ_s . افترض توصيل مرشحين متماثلين تماماً وكل منهم له دالة الانتقال $H(z)$ وتم توصيلهم على التوالي. ما هو مقدار التموجات فد مجالي الانتقال والوقف عند الترددين ω_p و ω_s على التوالي. عمم إجابتك بفرض توالي من M من المرشحات السابقة.

٢- افترض أن $HLP(z)$ تمثل دالة الانتقال لمرشح منفذ للترددات المنخفضة معاملاته حقيقية وله تردد حافة مجال الانتقال هي ω_p ، وتردد حافة مجال الوقف هي ω_s ، التموجات في مجال الانتقال هي δ_p ، والتموجات في مجال الوقف هي δ_s . ارسم شكل مقدار استجابة المرشح المنفذ للترددات المرتفعة $HLP(-z)$ على المدى $-\pi \leq \omega \leq \pi$ وحدد ترددات الحافة لكل من مجالي الانتقال والوقف ω_p و ω_s .

٣- استنتج دالة الانتقال الرقمية $H(z)$ من دالة الانتقال السببية causal التالية :

$$H_a(s) = \frac{3s^3 + 7s^2 + 10s + 7}{(s^2 + s + 1)(s^2 + 2s + 3)}$$

استخدم طريقة تساوي الصدمة impulse invariant حيث $T=0.1$.

٤- استنتج دالة الانتقال الرقمية $H(z)$ من دالة الانتقال السببية causal التالية :

$$H_a(s) = \frac{4s^2 + 10s + 8}{(s^2 + 2s + 3)(s + 1)}$$

استخدم طريقة تساوي الصدمة impulse invariant حيث $T=0.2$.

استخدم مقلاب في حل التمارين التالية

٥- صمم LPF بالمواصفات التالية :

أ) معدل العينة $\text{sampling rate} = 8000 \text{ sample/sec}$.

ب) حافة مجال المرور عند التردد 1500 Hz مع السماح بتموجات ripples في هذا المجال مقدارها 3 dB .

ج) حافة مجال الوقف عند التردد 2000 Hz مع اضمحلال مقداره 40 dB .

د) تموجات متساوية في مجال المرور واضمحلال ثابت في مجال الوقف.

هـ) استخدم طريقة تساوي الصدمة Impulse Invariant Method IIM.

• استخدم $T=1$ واحسب دالة الانتقال للمرشح ، وارسم مقدار الاستجابة

الترددية magnitude frequency response واستجابة الصدمة $h[n]$.

• استخدم $T=1/8000$ وأعد الجزء أ.

• قارن بين التصميمين وعلق على الناتج.

٦- أعد التمرين الأول مستخدماً طريقة التحويل الخطي المزدوج bilinear

transformation.

٧- صمم مرشح LPF من النوع بتروث بالمواصفات التالية:

أ) حافة مجال الانتقال عند التردد $\omega_p = 0.4\pi$ و $R_p = 0.5 \text{ dB}$.

ب) حافة مجال الوقف عند التردد $\omega_s = 0.6\pi$ و $A_s = 50 \text{ dB}$.

صمم المرشح بطريقة تساوي استجابة الصدمة IIM مستخدماً $T=2$. احسب دالة

الانتقال ومقدار الاستجابة الترددية وكذلك استجابة الصدمة للمرشح $h[n]$.

٨- أعد التمرين السابق مستخدماً طريقة التحويل الخطي المزدوج.

٩- أعد التمرينين الثالث والرابع مستخدماً المرشحات تشيبيشيف ١

وتشيبيشيف ٢.

١٠- أعد التمرينين الثالث والرابع مستخدماً مرشح القطع الناقص elliptic.

١١- صمم مرشح LPF بالمواصفات التالية :

(أ) حافة مجال الانتقال عند التردد $\omega_p=0.3\pi$ و $R_p=0.5\text{dB}$.

(ب) حافة مجال الوقف عند التردد $\omega_s=0.4\pi$ و $A_s=50\text{dB}$.

• استخدم الدالة buttord لحساب درجة المرشح إذا صمم كمرشح بترورث.
إرسم مقدار استجابة المرشح الترددية وأوجد مقدار أقل اضمحلال في مجال الوقف بالديسبل.

• استخدم الدالة cheby1ord لحساب درجة المرشح إذا صمم كمرشح تشيبيشيف ١ . ارسم مقدار استجابة المرشح الترددية وأوجد مقدار أقل اضمحلال في مجال الوقف بالديسبل.

• استخدم الدالة cheby2ord لحساب درجة المرشح إذا صمم كمرشح تشيبيشيف ٢ . ارسم مقدار استجابة المرشح الترددية وأوجد مقدار أقل اضمحلال في مجال الوقف بالديسبل.

• استخدم الدالة ellipord لحساب درجة المرشح إذا صمم كمرشح قطع ناقص elliptic . ارسم مقدار استجابة المرشح الترددية وأوجد مقدار أقل اضمحلال في مجال الوقف بالديسبل.

• قارن درجات المرشحات السابقة ، وقيمة أقل اضمحلال في المرشحات السابقة.

١٢- صمم مرشح منفذ لمجال من الترددات BPF مستخدماً طريقة تشيبيشيف ٢

وبالمواصفات التالية :

(أ) حافة مجال الوقف الأولى $\omega_{p1}=0.3\pi$ و حافة مجال الوقف الثانية $\omega_{s2}=0.6\pi$.

(ب) حافة مجال المرور الأولى $\omega_{p1}=0.4\pi$ و حافة مجال المرور الثانية $\omega_{p2}=0.5\pi$.

ج) $As=50dB$ و $Rp=0.5dB$.

ارسم مقدار الاستجابة الترددية واستجابة الصدمة للمرشح.

١٣- أعد التمرين الثامن مستخدماً طريقة تشيبيشيف ١.

١٤- أعد التمرين الثامن مستخدماً طريقة القطع الناقص elliptic.