

## تصميم المرشحات الرقمية ذات

### الاستجابة الاندفاعية غير محددة الطول

#### Design of Infinite Impulse Response IIR Digital Filters

##### (٧.١) مقدمة

لقد عرضنا في الفصل السابق شرحاً سريعاً للمرشحات التناظرية analog filters وذكرنا أن ذلك كان خطوة ضرورية لسببين، السبب الأول: أن هناك بعض المواقف أو التطبيقات لا بد فيها من استخدام المرشحات التناظرية مثل مرشحات تحديد التردد التي توضع في بداية أي نظام رقمي وقبل التحويل التماثلي الرقمي A/D ويسمى هذا المرشح بالمرشح المضاد للتزوير الترددي antialiasing filter. التطبيق الثاني الذي لا بد فيه من استخدام المرشحات التناظرية هو في نهاية أي نظام رقمي لتنعيم الإشارة التناظرية قبل الاستفادة منها كإشارة تناظرية. السبب الثاني: هو أن بعض طرق تصميم المرشحات الرقمية تعتمد على تصميم المرشح التناظري أولاً ثم تحويل هذا المرشح التناظري إلى مرشح رقمي، وهذا ما سنراه في هذا الفصل.

المقصود من تصميم المرشح الرقمي أياً كان نوعه هو الحصول على دالة الانتقال

transfer function لهذا المرشح  $H(Z)$  التي تُعطى أقرب استجابة ترددية  $H(w)$  للمواصفات المطلوبة من هذا المرشح. إذا كان المرشح الذي سيتم تصميمه من النوع IIR، فمن الضروري التأكد من أن هذا المرشح مستقر stable فتكون جميع أقطابه (أقطاب الدالة  $H(Z)$ ) تقع داخل دائرة الوحدة. بعد الحصول على دالة الانتقال  $H(Z)$  (تصميمه) تكون الخطوة التالية هي بناء هذا المرشح implementation بأحد أشكال البناء المعروفة التي سندرسها في فصل قادم.

عودة إلى تحويل فورير للإشارات المعينة DTFT حيث أمكن كتابة المعادلتين

التاليتين :

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jwn} \quad (٧.١)$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{jw})e^{jwn} dw \quad (٧.٢)$$

حيث المعادلة رقم (٧.٢) قد عبرت عن الإشارة  $x[n]$  كمجموع تكاملي من الإشارات الجيبية  $e^{jwn}$  مقدار كل منها  $X(e^{jw})$ . وعلى ذلك فإنه يمكن تصميم نظام (رقمي) تكون له خاصية الاختيار الترددي frequency selection بحيث يسمح بمرور بعض هذه الترددات ويحبط أو يمنع الترددات الأخرى، وهذا بالضبط هو ما نسميه بالمرشح filter وهذه هي وظيفته. أي أن المرشح عبارة عن نظام (رقمي أو تماثلي) مهمته هي السماح بمرور بعض الترددات المرغوب فيها وإحباط الترددات الأخرى غير المرغوب فيها مثل الضوضاء noise كما في الشكل رقم (٧.١).



الشكل رقم (٧.١). وظيفة المرشح هي التخلص من الضوضاء.

عودة إلى الاستجابة الترددية للأنظمة الرقمية حيث قد رأينا سابقاً أن خرج أي نظام رقمي يمكن التعبير عنه كدالة في تتابع من الإشارات الجيبية كما يلي :

$$(٧.٣) \quad y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$$

حيث الكمية  $H(e^{j\omega})$  تسمى الاستجابة الترددية للنظام ، وهي عبارة عن تحويل فوريير لاستجابة عينة الوحدة unit sample response التي يمكن التعبير عنها كما يلي :

$$(٧.٤) \quad H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

حيث  $h[n]$  هي استجابة الصدمة أو استجابة وحدة العينة كما ذكرنا. الكمية  $H(e^{j\omega})$  تسمى الاستجابة الترددية للنظام كما ذكرنا وهي تعبر عن استجابة النظام لإشارات الدخل عند الترددات المختلفة وهي كمية مركبة يمكن التعبير عنها بأكثر من طريقة كما يلي :

$$(٧.٥) \quad H(e^{j\omega}) = Hr(e^{j\omega}) + jHi(e^{j\omega})$$

حيث  $Hr(e^{j\omega})$  هي المركبة الحقيقية Real component و  $Hi(e^{j\omega})$  هي المركبة التخيلية imaginary component للاستجابة  $H(e^{j\omega})$ . يمكن أيضاً التعبير عن هذه الاستجابة كمقدار وزاوية كما يلي :

$$(٧.٦) \quad H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\theta(\omega)}$$

حيث  $\theta(\omega)$  هي الزاوية و  $|H(e^{j\omega})|$  هي مقدار الاستجابة الترددية. يمكن التعبير عن الاستجابة الترددية بالديسبل كما يلي :

$$(٧.٧) \quad G(\omega) = 20 \log_{10} |H(e^{j\omega})|$$

تذكر أن مقدار الاستجابة الترددية تكون دائماً دالة زوجية even في المتغير  $\omega$ ، أي أن :

$$(٧.٨) \quad |H(e^{j\omega})| = |H(e^{-j\omega})|$$

بينما الزاوية تكون دائماً دالة فردية في المتغير  $\omega$ ، أي أن :

$$(٧.٩) \quad \theta(\omega) = -\theta(-\omega)$$

استجابة (خرج) المرشح لأي إشارة دخل جيئية تكون إشارة جيئية أيضاً لها

نفس التردد أما مقدارها فيكون مضروباً في مقدار الاستجابة الترددية للمرشح عند هذا التردد.

في العادة يتم ذكر أو تحديد الاستجابة الترددية للمرشح المثالي كما يلي :

$$(٧.١٠) \quad |H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & \text{for } |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{for } \omega_c \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

حيث  $\omega_c$  هي تردد القطع التي عندها يتوقف المرشح عن السماح بمرور الإشارة ومن بعدها يبدأ في قطع أو إحباط الإشارات التي ترددها أعلى من  $\omega_c$ . على فرض أن إشارة الدخل المرشح تعطى بالعلاقة التالية :

$$(٧.١١) \quad x[n] = A \cos(\omega_1 n) + B \cos(\omega_2 n), \quad 0 < \omega_1 < \omega_c < \omega_2 < \pi$$

فإن خرج المرشح في هذه الحالة يعطى بالمعادلة التالية :

$$(٧.١٢) \quad y[n] = A |H(e^{j\omega_1})| \cos(\omega_1 n + \theta(\omega_1)) + B |H(e^{j\omega_2})| \cos(\omega_2 n + \theta(\omega_2))$$

وحيث  $\omega_2 > \omega_c$  فإن استجابة المرشح لهذا التردد ستكون صفراً، وعلى ذلك سيكون خرج المرشح كالتالي :

$$(٧.١٣) \quad y[n] = A |H(e^{j\omega_1})| \cos(\omega_1 n + \theta(\omega_1))$$

المثال التالي عبارة عن مثال تقديمي لطرق تصميم المرشحات الرقمية نفهم منه

فقط ما هو المقصود بالاستجابة الترددية. المطلوب في هذا المثال هو تصميم مرشح رقمي منفذ للترددات العالية بحيث يسمح للتردد  $0.4\text{rad/sec}$  بالنفاذ أو المرور بينما يحبط أو يوقف أو يمنع التردد  $0.1\text{rad/sec}$ . سنفترض أن استجابة الصدمة لهذا المرشح تعطى بالعلاقة التالية :

$$(٧.١٤) \quad h[n]=[a \ b \ a]$$

حيث كل من  $a$  و  $b$  مجهولان ومطلوب حساب قيمة كل منهما لأنه بتحديد هذين العاملين يكون قد تم تحديد المرشح. أما لماذا فرضنا استجابة الاندفاع لهذا المرشح بهذا الشكل فإنه سيأتي تفصيل ذلك فيما بعد عند الحديث عن المرشحات ذات الاستجابة الاندفاعية محددة الطول *Finite Impulse Response, FIR*. خرج هذا المرشح هو المجموع الالتفافي للدخل  $x[n]$  واستجابة الصدمة  $h[n]$  وعلى ذلك يمكن كتابة الخرج كالتالي :

$$(٧.١٥) \quad y[n]=h[n]*x[n]$$

والتي يمكن كتابتها كالتالي :

$$(٧.١٦) \quad \begin{aligned} y[n]&=h[0]x[n]+h[1]x[n-1]+h[2]x[n-2] \\ &=ax[n]+bx[n-1]+ax[n-2] \end{aligned}$$

تحويل فورير لاستجابة الصدمة  $h[n]$  يمكن كتابته كما يلي :

$$H(e^{j\omega}) = h[0] + h[1]e^{-j\omega} + h[2]e^{-j2\omega}$$

بالتعويض بالقيم  $h[0]=h[2]=a$  و  $h[1]=b$  فإن المعادلة السابقة يمكن كتابتها

كالتالي:

$$\begin{aligned} H(e^{jw}) &= a(1 + e^{-j2w}) + be^{-jw} \\ &- 2a \left( \frac{e^{jw} + e^{-jw}}{2} \right) e^{-jw} + be^{-jw} \\ (٧,١٧) \quad &= (2a \cos(w) + b)e^{-jw} \end{aligned}$$

ومنها يمكن كتابة مقدار وزاوية الاستجابة الترددية كما يلي:

$$\begin{aligned} (٧,١٨) \quad |H(e^{jw})| &= 2a \cos(w) + b \\ \theta(w) &= -w \end{aligned}$$

بالتعويض  $|H(e^{jw})| = 0$  عندما  $w=0.1$  و  $|H(e^{jw})| = 1$  عندما  $w=0.4$

نحصل على معادلتين في المجهولين  $a$  و  $b$  كما يلي:

$$(٧,١٩) \quad |H(e^{j0.1})| = 2a \cos(0.1) + b = 0$$

$$(٧,٢٠) \quad |H(e^{j0.4})| = 2a \cos(0.4) + b = 0$$

بحل المعادلتين رقمي (٧,١٩) و (٧,٢٠) نحصل على قيمة كل من المجهولين  $a$  و  $b$

كما يلي:

$$\begin{aligned} a &= -6.76195 \\ b &= 13.456335 \end{aligned}$$

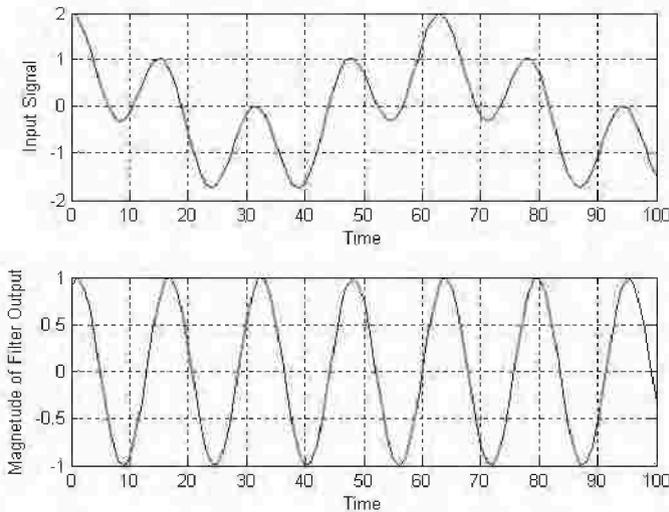
وعلى ذلك يمكن كتابة معادلة خرج المرشح كما يلي:

$$(٧.٢١) \quad y[n] = -6.76195(x[n] + x[n-2]) + 13.456335x[n-1]$$

الآن بوضع إشارة الدخل كإشارة مركبة من الترددين  $0.1\text{rad/sec}$  و  $0.4\text{rad/sec}$  كما يلي في المعادلة رقم (٧.٢١) فماذا ستكون إشارة الخرج.

$$(٧.٢٢) \quad x[n] = \{\cos(0.1n) + \cos(0.4n)\}u[n]$$

بالتعويض عن قيم  $x[n]$  من المعادلة رقم (٧.٢٢) في المعادلة رقم (٧.٢١) عند قيم  $n$  المختلفة يمكن رسم خرج المرشح كما في الشكل رقم (٧.٢) الذي يوضح أيضاً شكل إشارة الدخل للمقارنة بها حيث نلاحظ أن الخرج يتبع تماماً التردد الأعلى  $0.4\text{rad/sec}$ .



الشكل رقم (٧.٢). مخرج المرشح في المعادلة رقم (٧.٢١).

الترشيح الرقمي للإشارات يستخدم في الكثير من التطبيقات والتي منها على سبيل المثال لا الحصر، المعالجة الرقمية للكلام والصور، والاتصالات بكل أنواعها وطرقها، والتطبيقات الطبية وبالذات التصوير بالموجات فوق الصوتية وغيرها، والرادار، والتنقيب عن البترول، والإلكترونيات بكل تطبيقاتها، وغير ذلك الكثير. هناك نوع مهم من المرشحات هو الذي سيكون موضوعنا في هذا الكتاب وهي المرشحات الخطية الثابتة إزاحياً Linear Shift Invariant, LSI وذلك لكثرة استخدامها وشيوعها، أما الأنواع الأخرى مثل المرشحات المهايئة adaptive filters فليست موضوع هذا الكتاب ولكن في العادة يفرد لها كتب منفصلة.

### (٧.٢) تصميم المرشحات الرقمية

تصميم المرشح الرقمي يمر بالمراحل الأساسية التالية:

- ١- التحديد الفعلي لمواصفات المرشح مثل تردد القطع cutoff frequency ومجال المرور أو السماح passband، ومجال القطع أو المنع stopband، ومجال الانتقال transition band. مقدار استجابة المرشح في كل من هذه المجالات يجب تحديده بدقة مع أن تحديد نسبة خطأ error في كل مجال يجب ألا يتم تخطيها.
- ٢- كل هذه المواصفات والشروط المعطاة في الخطوة الأولى يتم على أساسها تحديد نوع المرشح هل هو IIR أم FIR وسنرى في هذا الفصل ماذا يعني كل نوع من هذين النوعين ومميزاته وعيوبه. من هذه المواصفات أيضاً يتم تحديد درجة المرشح filter order.
- ٣- بناء على الخطوة الثانية يتم تصميم المرشح والمقصود بتصميمه هو حساب معاملات والاستجابة الترددية له كما سنرى، ويجب أن تكون الاستجابة الترددية التي

سنحصل عليها بهذه الخطوة أقرب ما يكون من الاستجابة الترددية المرغوبة ويكون الخطأ أقل ما يمكن وحسب ما هو محدد في الخطوة الأولى.

٤- بعد تصميم المرشح يتم بناؤه implementation ، وهذه الخطوة سيتم شرحها في فصل قادم.

هناك الكثير من البرمجيات التي تساعد وتسهل عملية تصميم هذه المرشحات بدرجة كبيرة جداً ومن هذه البرمجيات برنامج MATLAB الذي استخدمناه في تصميم وتنفيذ جميع أمثلة هذا الكتاب.

#### (٧.٢.١) تحديد مواصفات المرشح

لقد رأينا مسبقاً أن الاستجابة الترددية للمرشح الرقمي تكون دائماً دورية periodical بالنسبة لتغير التردد  $w$  وتتكرر كل  $2\pi$  على محور التردد. لذلك فإنه يكفي أن ندرس هذه الاستجابة في مدى ترددي مقداره  $2\pi$  فقط وليكن من  $-\pi$  حتى  $\pi$ . ولقد رأينا أيضاً أن مقدار هذه الاستجابة الترددية يكون دالة زوجية في المتغير  $w$ ، لذلك فإننا نكتفي بدراسة هذه الاستجابة في المدى من  $w=0$  حتى  $w=\pi$ .

إن أبسط مواصفات يمكن أن نبدأ بها هي مواصفات المرشح الرقمي المثالي المنفذ للترددات المنخفضة digital ideal low pass filter والذي تتحدد مواصفاته بالعلاقة التالية والموضحة في الشكل رقم (٧.٣).

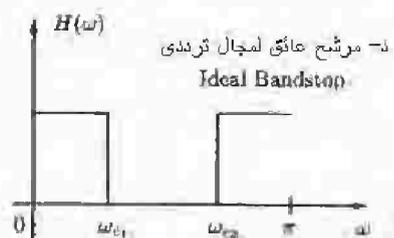
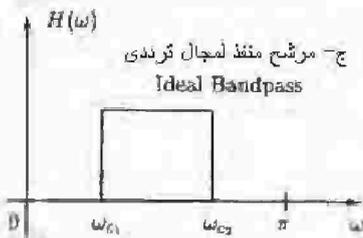
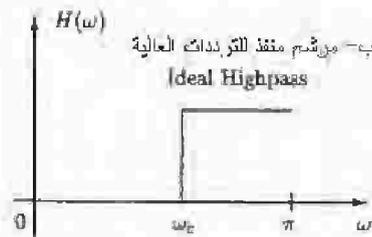
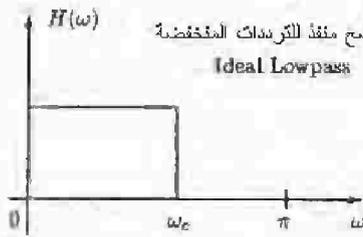
$$D(w) = \begin{cases} 1 & |w| < w_c \\ 0 & w_c < |w| < \pi \end{cases} \quad (٧.٢٣)$$

حيث  $w_c$  هي تردد القطع cutoff frequency ، ولقد رمزنا للاستجابة الترددية في المعادلة رقم (٧.٢٣) بالرمز  $D(w)$  وليس  $H(w)$  لأن الاستجابة الموضحة في المعادلة رقم

(٧.٢٣) هي استجابة مثالية نرغب فيها *desired* ولكننا لا نستطيع الحصول عليها عملياً لأن مجال الانتقال *transition band* يساوى صفرًا وهذا مستحيل الحصول عليه عملياً إذ لا بد أن يكون هناك مجال انتقال نحاول أن نجعله أقل ما يمكن. الشكل رقم (٧.٣) يبين هذا المرشح المثالي، وأنواع أخرى من المرشحات المثالية التي تم ذكرها في معرض الحديث عن المرشحات التناظرية.

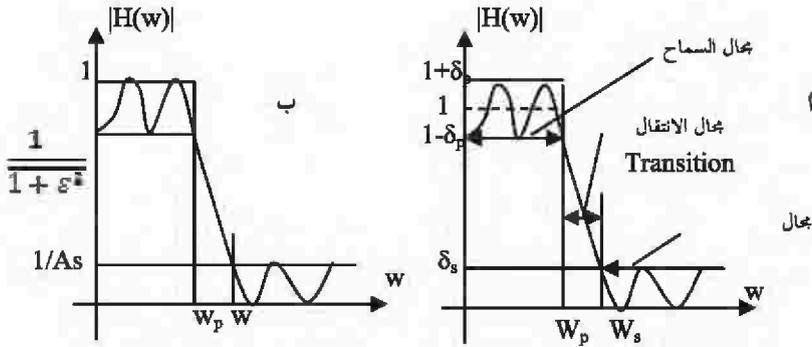
الشكل رقم (٧.٤) يبين الاستجابة الترددية الفعلية لمرشح رقمي متفد للترددات المنخفضة. من هذا الشكل نلاحظ المعاملات التالية والتي يجب أن نتذكرها جيداً:

- ١-  $\omega_p$  نهاية مجال المرور أو السماح *pass band cutoff frequency*.
- ٢-  $\omega_s$  تردد القطع لمجال المنع *stop band cutoff frequency*.



الشكل رقم (٧.٤). الاستجابة المثالية لأنواع عديدة من المرشحات.

- ٣- تردد القطع cutoff frequency وهذه تكون في العادة أكبر من  $W_p$  وأقل من  $W_s$  في حالة المرشحات المنفذة للترددات المنخفضة وهي تحدد بأنها التردد الذي ينزل عنده مقدار الاستجابة الترددية بمقدار ٣ ديسبل من قيمتها في مجال السماح pass band.
- ٤-  $W_t = W_s - W_p$  تسمى مجال الانتقال transition band وهو مجال الانتقال من مجال السماح إلى مجال المنع.



الشكل رقم (٧.٤). الاستجابة الترددية لمرشح منفذ للترددات المنخفضة. (أ) الشكل العام (ب) شكل خاص يستخدم في تقدير درجة المرشح.

- ٥-  $\delta_p$  تموجات مجال السماح pass band ripples وهي تمثل أكبر خطأ يمكن السماح به في مقدار الاستجابة في مجال السماح.
- ٦-  $\delta_s$  تموجات مجال المنع stop band ripples وهي تمثل أكبر خطأ يمكن السماح به في مقدار الاستجابة في مجال المنع. لاحظ في الشكل رقم (٧.٤) حيث تم إعادة التعبير عن الترددات الحرجة والتموجات بطريقة تستخدم عادة في تقدير درجة المرشح كما سنرى عند الحديث عن المرشحات من النوع IIR.
- عند تصميم المرشح الرقمي فإن الترددات الحرجة له تعطى في العادة في المجال

التناظري ( $\Omega_p$  و  $\Omega_s$  أو  $F_p$  و  $F_s$ ) ، أي بالهرتز ، وتعطى معه تردد العينة  $\text{sampling frequency, } F_s$ . قبل البدء في تصميم المرشح الرقمي لابد من تحويل هذه الترددات إلى المجال الرقمي  $w$  في المدى من  $w=0$  إلى  $w=\pi$ . عملية التحويل هذه تتم كما يلي :

$$(٧.٢٤) \quad w_p = \frac{\Omega_p}{F_s} = \frac{2\pi f_p}{F_s} = 2\pi f_p T_s$$

$$w_s = \frac{\Omega_s}{F_s} = \frac{2\pi f_s}{F_s} = 2\pi f_s T_s$$

حيث  $T_s=1/F_s$  هي زمن وتردد العينة.

كمثال على ذلك نفترض أن الترددات الحرجة لأحد المرشحات هي  $f_p=3\text{KHz}$  و  $f_s=7\text{KHz}$  ومعدل العينة هو  $F_s=25\text{KHz}$  ، بالتعويض في المعادلات السابقة نحصل على الترددات الرقمية  $w_p=0.24\pi$  و  $w_s=0.56\pi$ .

أول خطوة من خطوات تصميم أي مرشح هي تحديد نوع هذا المرشح هل سيكون  $\text{Finite Impulse Response, FIR}$  أم سيكون  $\text{Infinite Impulse Response, IIR}$  ؟ كل نوع من هذه المرشحات له مواصفاته ومميزاته وعيوبه التي تجعل أياً من النوعين مناسباً لبعض التطبيقات ولا يناسب التطبيقات الأخرى. لذلك كان من الضروري أن نركز على مواصفات كل واحد من هذه الأنواع في الجزء التالي. كذلك بعد تحديد نوع المرشح علينا تحديد درجته وهذا ما سنراه أيضاً في الجزء التالي.

### (٧.٣) مواصفات المرشحات من النوع IIR

١- من اسم هذا النوع من المرشحات  $\text{Infinite Impulse Response}$  والذي يعني أن استجابة الاندفاع أو الصدمة  $\text{Impulse Response}$  تكون غير محددة الطول  $\text{Infinite}$  ، مما يعني أن عدد عينات هذه الاستجابة يمتد إلى ما لانهاية ، وبالنسبة للمرشحات السببية

causal فإنه يمكن كتابة هذه العلاقة لهذا النوع من المرشحات :

$$h[n] = 0 \text{ for } 0 \leq n \leq \infty$$

والذي يعني أنه للمرشحات السببية فإن طول الاستجابة يمتد من الصفر إلى ما لانهاية.

٢- الاستجابة الترددية للمرشحات أو الأنظمة الرقمية من النوع IIR تكون كسرية rational أي لها بسط ومقام وكل منهما عبارة عن كثيرة الحدود polynomial ، ويمكن كتابتها على الصورة التالية :

$$H(w) = \frac{B(w)}{A(w)} = e^{-jwN_0} \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jwk}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jwk}} \quad (٧.٢٥)$$

حيث  $N_0$  عبارة عن ثابت صحيح. درجة المرشح من هذا النوع هي  $N$  التي هي أعلى أس في المقام ، وفي العادة تكون درجة البسط  $M$  أقل من درجة المقام  $N$ . الدرجة  $N$  في المقام تحدد عدد عينات الخرج السابقة التي يتم استخدامها لحساب قيمة الخرج الحالية ، لذلك فإن هذا العدد من عينات الخرج السابقة يتم تخزينه أو الاحتفاظ به واستخدامه كتغذية عكسية feed back لحساب قيمة الخرج الحالية. المعاملات  $b_k$  و  $a_k$  هي معاملات المرشح أو مجاهيله المراد حسابها.

٣- تصميم المرشح الرقمي تكون كما ذكرنا سابقاً إيجاد قيم المعاملات  $a_k$  و  $b_k$  في المعادلة رقم (٧.٢٥) بحيث تجعل  $H(w)$  تكون أقرب ما يكون من المواصفات المطلوبة للمرشح. درجة المرشح  $N$  في هذه المعادلة تستخدم أيضاً كمتغير للحصول على المواصفات المثلى للمرشح.

٤ - دالة الانتقال transfer function هي تحويل  $Z$  لاستجابة الصدمة  $h[n]$  ورمزنا لها بالرمز  $H(z)$  وتعطى بالعلاقة التالية كما رأينا سابقاً:

$$(٧.٤) \quad H(Z) = H(e^{j\omega}) \Big|_{e^{j\omega} = z} = Z^{-N_0} \frac{\sum_{k=0}^M b_k Z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k Z^{-k}}$$

جذور المقام في المعادلة رقم (٧.٢٦) تمثل أقطاب النظام أو المرشح، والقطب كما رأينا هو قيمة  $|z|$  التي عندها تؤول دالة الانتقال إلى المالا نهاية، ولقد رأينا سابقاً أن شرط الاستقرار لأي نظام أن تكون جميع أقطابه داخل دائرة الوحدة. لذلك فإن المرشحات من النوع IIR لا بد من حساب جميع أقطابها لأنه من الممكن بعد أن نصمم المرشح أن نجد أنه غير مستقر unstable، ولذلك فإن المرشحات من النوع IIR تكون حساسة جداً للضوضاء حيث إن هذه الضوضاء من الممكن أن تغير من قيم المعاملات  $a_k$  فتجعل المرشح يصبح غير مستقر لأن أحد أقطابه يخرج خارج دائرة الوحدة نتيجة هذه الضوضاء.

٥ - المرشحات السببية causal أو القابلة للتحقيق من النوع IIR لا يمكن أن تكون زاوية الطور  $\theta(\omega)$  لها خطية مما يحد من تطبيقاتها.

٦ - بما أن استجابة الصدمة للمرشحات IIR تمتد إلى المالا نهاية، فإن استخدام الجمع الالتفافي convolution لتحقيق هذا النوع من المرشحات يكون غير ممكن.

٧ - كما ذكرنا فإن المرشحات IIR تكون حساسة للضوضاء ومنها الضوضاء الناتجة عن تحديد quantization خرج التحويل التماثلي الرقمي A/D عند كميات أو مستويات محددة وهذا يتوقف على العدد المحدد للبتات المستخدمة لتمثيل ثوابت المرشح مما ينتج عنه تقريب في هذه الثوابت عند تمثيلها على الحاسب. كل هذه المصادر

للضوضاء من الممكن أن تجعل المرشح غير مستقر *unstable*.

٨- كما سنرى عند تحقيق هذا النوع من المرشحات فإنه من مميزاته أنه يمكن تحقيق المواصفات المطلوبة للمرشح بدرجة  $N$  أقل إذا ما قورن بالنوع الآخر من المرشحات FIR. أي أنه لتحقيق مواصفات معينة لأي مرشح فإن هذا المرشح إذا تم بناؤه باستخدام النوع IIR فإن درجة المرشح المطلوبة ستكون أقل عما لو تم بناؤه باستخدام النوع FIR.

#### (٧،٤) مواصفات المرشحات من النوع FIR

١- استجابة الدفعة للمرشحات من النوع FIR تكون محددة الطول ويمكن التعبير عنها بالمعادلة التالية:

$$(٧،٢٧) \quad h[n] = 0 \quad \text{for } N_1 \leq n \leq (N_2 = N_1 + N - 1)$$

حيث  $N$  هي طول استجابة الصدمة والذي يمتد من  $N_1$  إلى  $N_2$  و  $N_1$  من الممكن أن تكون صفراً أو هكذا تكون في العادة.

٢- الاستجابة الترددية  $H(w)$  للمرشحات FIR تكون كثيرة حدود في  $e^{jw}$  ومحددة الطول ويمكن كتابتها على الصورة التالية:

$$(٧،٢٨) \quad H(w) = \sum_{n=N_1}^{N_2} h[n](e^{jw})^{-n}$$

حيث  $N_1$  و  $N_2$  أرقام صحيحة تمثل أرقام أول وآخر عينة في استجابة الصدمة  $h[n]$ . معاملات استجابة الصدمة التي عددها  $N$  هي المعاملات المطلوب تحديدها عند

تصميم هذا النوع من المرشحات.

٣- تصميم المرشح من النوع FIR هو حساب الاستجابة الترددية  $H(w)$  التي تكون أقرب ما يمكن من الاستجابة الترددية المطلوبة، ويتم ذلك عن طريق إيجاد أو حساب معاملات استجابة الصدمة  $h[n]$  التي تحقق ذلك. درجة المرشح أيضا التي طوله  $N$  تعد أحد المتغيرات المستخدمة للحصول على الاستجابة الترددية المطلوبة.

٤- دالة الانتقال transfer function هي تحويل  $Z$  لاستجابة الصدمة وهي كثيرة الحدود في المتغير المركب  $Z$  محدودة الطول وليس لها مقام ويمكن كتابتها على الصورة التالية:

$$H(z) = H(e^{jw})|_{e^{jw}=z} = \sum_{n=N_1}^{N_2} h[n]z^{-n} \quad (٧,٢٩)$$

ونستنتج من ذلك أن هذا النوع من المرشحات يكون دائماً مستقراً لعدم وجود أقطاب في دالة الانتقال.

٥- هذا النوع من المرشحات FIR تكون زاوية الطور له  $\theta(w)$  خطية دائماً على العكس من المرشحات IIR التي كانت زاوية الطور لها غير خطية. خطية زاوية الطور تجعل هذا النوع من المرشحات مناسباً جداً للكثير من التطبيقات كما سنرى في الفصول القادمة.

٦- بما أن طول استجابة الصدمة يكون محدوداً فإنه يمكن في هذه الحالة استخدام عملية الجمع الالتفافي convolution لتحقيق هذا النوع من المرشحات.

٧- هذه المرشحات ليست حساسة للضوضاء لعدم وجود تغذية عكسية، وعدم وجود أقطاب في معادلة دالة الانتقال كما كان في حالة المرشحات IIR.

٨- درجات هذه المرشحات  $N$  قد تمتد إلى قيم كبيرة جداً للحصول على مواصفات معينة للمرشح، فقد تمتد إلى ٥٠٠ مثلاً، وهذا يجعل هذه المرشحات معقدة وتحتاج إلى وقت كبير لحساب معاملاتها calculation time كما أنها تسبب زمن تأخير كبير.

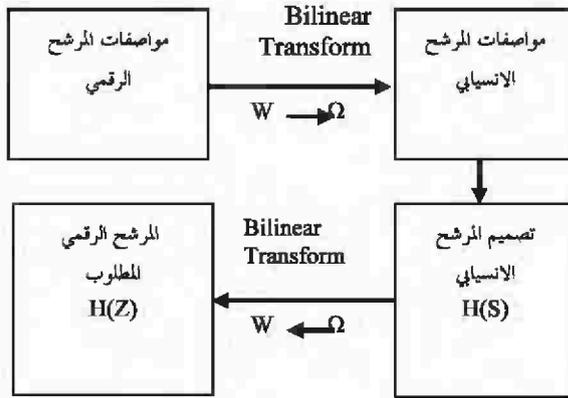
### (٧,٥) طرق تصميم المرشحات الرقمية من النوع IIR

المقصود بتصميم المرشح الرقمي من النوع IIR هو الحصول على المعاملات  $a_k$  و  $b_k$  في معادلة الاستجابة الترددية رقم (٧,٢٥) لكي تكون أقرب ما يمكن من مواصفات المرشح المطلوب تصميمه. سنسوق هنا أكثر من طريقة لتصميم هذا النوع من المرشحات. قبل تصميم المرشح من هذا النوع لابد من معرفة درجته أولاً وقد رأينا ذلك في معرض الحديث عن المرشحات التناظرية.

### (٧,٥,١) التحويل الخطي المزدوج Bilinear Transformation

تعتمد هذه الطريقة على نقل مسألة تصميم المرشح الرقمي من الوسط الرقمي digital domain إلى الوسط التناظري analog domain حيث في الوسط التناظري يتم تصميم المرشح بالطرق المعروفة مسبقاً لتصميم المرشحات التناظرية، ثم يتم نقل المرشح الذي تم تصميمه مرة أخرى إلى الوسط الرقمي بطرق تحويل معروفة كما سنرى وكما هو موضح في الشكل رقم (٧,٥).

افترض أن  $H(z)$  هي معادلة دالة الانتقال transfer function للمرشح الرقمي حيث  $H(z)$  كما رأينا هي تحويل  $Z$  لاستجابة الدفعة  $h[n]$ . كذلك تذكر أن دالة الانتقال للمرشح التناظري هي  $H(s)$  حيث  $H(s)$  هي تحويل لابلاس لاستجابة الصدمة في



الشكل رقم (٧.٥). تصميم المرشحات الرقمية بطريقة التحويل الخطي

## المزدوج Bilinear Transform

النطاق الزمني  $h(t)$ . التحويل الخطي المزدوج bilinear transformation عبارة عن نقل متبادل أو مزدوج من الوسط التناظري أو النطاق  $S$  إلى النطاق الرقمي أو النطاق  $Z$  باستخدام المعادلة التالية:

$$S = \frac{z}{T} \left( \frac{1 - Z^{-1}}{1 + Z^{-1}} \right) \quad (٧.٣٠)$$

حيث  $T$  هي زمن عينة الإشارة التناظرية sampling time . بنفس الطريقة يمكن

كتابة المتغير  $Z$  بدلالة المتغير  $S$  كما يلي:

$$Z = \left( \frac{1 + \frac{ST}{2}}{1 - \frac{ST}{2}} \right) \quad (٧.٣١)$$

وعلى ذلك يمكن تحويل دالة الانتقال في النطاق التناظري إلى دالة انتقال في النطاق الرقمي أو العكس باستخدام المعادلتين رقمي (٧.٣٠) و (٧.٣١) كما يلي :

$$(٧.٣٢) \quad H(z) = H(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \left( \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)}$$

وبنفس الطريقة يمكن كتابة :

$$(٧.٣٣) \quad H(s) = H(z) \Big|_{z = \left( \frac{1 + \frac{sT}{2}}{1 - \frac{sT}{2}} \right)}$$

بوضع  $T=2$  لتسهيل الحسابات فقط ، ووضع  $s = \sigma + j\Omega$  في المعادلة رقم (٧.٣١)

يمكن إعادة كتابتها كما يلي :

$$z = \frac{1 + \sigma + j\Omega}{1 - \sigma - j\Omega}$$

حيث يمكن حساب القيمة المطلقة للمتغير  $Z$  كما يلي :

$$(٧.٣٤) \quad |z|^2 = \frac{(1 + \sigma)^2 + \Omega^2}{(1 - \sigma)^2 + \Omega^2}$$

من المعادلة رقم (٧.٣٤) يمكن أن نستنتج الخواص المهمة التالية لهذا التحويل :

١- بوضع  $\sigma = 0$  في المعادلة رقم (٧.٣٤) فإن  $|z| < 1$  وهذا يعني أننا عندما

نتحرك على المحور  $\Omega$  من  $\infty = \Omega$  إلى  $\infty = \Omega$  في المستوى  $S$  فإننا في الحقيقة نتحرك

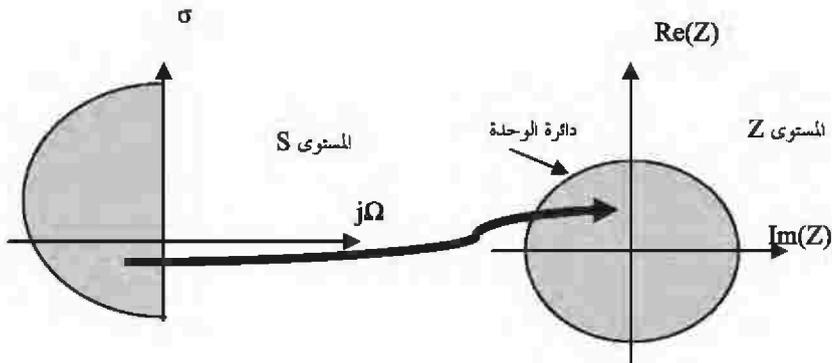
على محيط دائرة الوحدة في المستوى  $Z$ .

- ٢- بوضع  $\sigma < 0$  في المعادلة رقم (٧,٣٤) فإن  $|Z| < 1$  ، لاحظ أن  $\sigma < 0$  في المستوى S هو النصف الأيسر من هذا المستوى ، وهذا يعني أن النصف الأيسر من المستوى S يؤول بهذا التحويل إلى داخل دائرة الوحدة  $|Z| < 1$  في المستوى Z.
- ٣- بوضع  $\sigma > 0$  في المعادلة رقم (٧,٣٤) فإن  $|Z| < 1$  ، لاحظ أن  $\sigma > 0$  في المستوى S هو النصف الأيمن من هذا المستوى ، وهذا يعني أن النصف الأيمن من المستوى S يؤول بهذا التحويل إلى خارج دائرة الوحدة  $|Z| < 1$  في المستوى Z.
- ٤- من الخواص السابقة نستنتج أن أي مرشح تناظري مستقر (كل أقطابه في النصف الأيسر من المستوى S) بهذا التحويل (التحويل الخطي المزدوج) يؤول إلى مرشح رقمي مستقر أيضاً (كل أقطابه داخل دائرة الوحدة).
- ٥- خاصية مهمة أيضاً يمكن أن نستنتجها وهي أن كل نقطة في المستوى S تؤول إلى نقطة وحيدة في المستوى Z وهذا ما يطلق عليه تحويل القيم المتناظرة أو الأحادية one to one transformation والعكس صحيح أيضاً عند التحويل من المستوى Z إلى المستوى S. الشكل رقم (٧,٦) يبين هذه الخواص.
- بوضع  $Z=e^{wT}$  في المعادلة رقم (٧,٣٠) ، وهذا يعني أننا نتحرك على دائرة الوحدة فإننا نحصل على العلاقة بين التردد التناظري  $\Omega$  والتردد الرقمي  $w$  كما يلي :

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{wT}{2}\right) \quad (٧,٣٥)$$

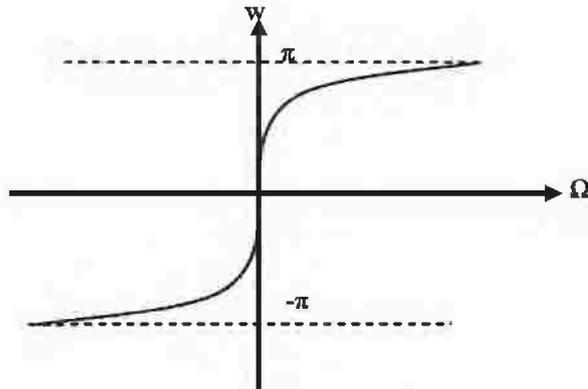
بنفس الطريقة يمكن كتابة:

$$w = 2 \arctan\left(\frac{\Omega T}{2}\right) \quad (٧,٣٦)$$



الشكل رقم (٧،٦). التحويل الخطي المزدوج bilinear transformation بين المستوى S والمستوى Z.

العلاقتان رقما (٧،٣٥) و (٧،٣٦) تبينان أن العلاقة بين المتغير  $\Omega$  والمتغير  $w$  هي علاقة غير خطية تماما تضغط كل المحور  $j\Omega$  في المستوى S إلى محيط دائرة الوحدة في المستوى Z، وهذه العلاقة يمكن رسمها كما في الشكل رقم (٧،٧).



الشكل رقم (٧،٧). العلاقة بين  $w$  و  $\Omega$  في التحويل الخطي المزدوج.

مثال رقم (٧.٧): حول الاستجابة الترددية التماثلية للمرشح:

$$H_a(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 5s + 6}$$

إلى استجابة ترددية رقمية مستخدماً طريقة التحويل الخطي المزدوج. افترض  $T=1$ . باستخدام المعادلة رقم (٧.٣٠) وبعد الكثير من الاختصارات والعمليات الحسابية يمكن كتابة الاستجابة الرقمية كما يلي:

$$(٧.٣٧) \quad H(z) = \frac{3 + 2z^{-1} - z^{-2}}{20 + 4z^{-1}} = \frac{0.15 + 0.1z^{-1} - 0.05z^{-2}}{1 + 0.2z^{-1}}$$

### المدالة ( ) Bilinear

لحسن الحظ فإن MATLAB يوفر هذه المدالة للتحويل المباشر من النطاق التماثلي إلى النطاق الرقمي بطريقة التحويل الخطي المزدوج لتوفير مجهود الاختصارات والحسابات التي قد نكون لسناها في المثال السابق. الصورة العامة لهذه المدالة هي:

$$\begin{aligned} [zd, pd, kd] &= \text{bilinear}(z, p, k, fs) \\ [numd, dend] &= \text{bilinear}(num, den, fs) \end{aligned}$$

حيث  $z$  هي الأصفار و  $p$  هي الأقطاب و  $k$  معامل التكبير و  $fs$  تردد العينة، وكل ذلك في النطاق التناظري أو التماثلي. أما  $zd$  و  $pd$  و  $kd$  فهي نظيرها في النطاق الرقمي. الصورة الثانية للمدالة هي نفسها الصورة الأولى سوى أنه تم التعبير بصورة كثيرات الحدود للسط  $num$  وكثيرات حدود للمقام  $den$ . البرنامج التالي سيحول الاستجابة الترددية السابقة إلى النطاق الرقمي باستخدام التحويل الخطي:

```
%example 7-1
b=[1,1]; a=[1,5,6]; T=1; Fs=1/T;
[bd,ad]=bilinear(b,a,Fs);
disp('digital numerator polynomial');disp(bd);
disp('digital denominator polynomial');disp(ad);
```

ونتيجة هذا البرنامج كالتالي :

```
digital numerator polynomial
0.1500 0.1000 -0.0500
```

```
digital denominator polynomial
1.0000 0.2000 -0.0000
```

حيث من هذه المعاملات يمكن كتابة المعادلة رقم (٧.٣٧).

الآن وعلى ضوء ما سبق وما هو موضح في الشكل الشكل رقم (٧.٥) يمكن أن نضع خطوات تصميم المرشح الرقمي باستخدام طريقة التحويل الخطي المزدوج bilinear transformation كما يلي :

١- إبدأ من مواصفات المرشح الرقمي المعطاه كما في الشكل رقم (٧.٤) فى صورة ترددات القطع  $w_c$  و  $w_s$  وغيرها.

٢- حول هذه الترددات الرقمية إلى ترددات تناظرية باستخدام المعادلة رقم (٧.٣٥).

٣- صمم مرشح تناظري يحقق هذه المطالب في الخطوة الثانية باستخدام أحد الصور المعروفة مثل البترورث أو الشيبشيف أو القطع الناقص التي درسناها في فصل تصميم المرشحات التناظرية . هنا ستحصل على الاستجابة الترددية التناظرية  $H(S)$ .

٤- استخدم التحويل الخطي المزدوج bilinear transform للحصول على دالة

الانتقال transfer function في النطاق الرقمي  $H(Z)$  وذلك باستخدام المعادلة رقم (٧.٣٧).

٥- بعد ذلك يمكن الحصول على الاستجابة الترددية  $H(w)$  وذلك بوضع  $Z=e^{jw}$  في دالة الانتقال في الخطوة السابقة.

مثال رقم (٧.٢): صمم مرشح رقمي منفذاً للترددات المنخفضة LPF بالمواصفات التالية:  $w_p=0.2\pi$  و  $w_s=0.3\pi$  و  $R_p=1\text{dB}$  و  $A_s=15\text{dB}$ . البرنامج التالي يبين خطوات هذا التصميم:

أولاً: مواصفات المرشح الرقمي

```
%Example 7-2 Butterworth LPF using bilinear transformation
wp=0.2*pi; ws=0.3*pi; Rp=1; As=15;
T=1; Fs=1/T;
```

ثانياً: تحويل هذه المواصفات إلى النطاق التناظري

```
omegap=(2/T)*tan(wp/2);
omegas=(2/T)*tan(ws/2);
```

سنستخدم مرشحاً من النوع بتروث ونحتاج لمعرفة درجته، لذلك سنستخدم

الدالة buttord للحصول على هذه الدرجة وكذلك تردد القطع  $w_n$ .

```
[N,wn]=buttord(omegap,omegas,Rp,As,'s');
```

تصميم المرشح التناظري باستخدام الدالة butter والمعاملات السابقة.

```
[bs,as]=butter(N,wn,'s');
```

استخدام التحويل الخطي للحصول على التصميم في النطاق الرقمي.

```
[bz,az]=bilinear(bs,as,Fs);
disp('Numerator coefficients'); disp(bz);
disp('Denominator coefficients'); disp(az);
```

```
w=0:pi/255:pi; h=freqz(bz,az,w);
db=20*log10(abs(h)/max(abs(h)));
set(gcf,'color','white');
subplot(2,1,1);
plot(w/pi,db);grid;
axis([0,1,-30,0]);xlabel('Freq. in pi units');
```

```
ylabel('Magnitude in dB');
title('Frequency response');
subplot(2,1,2);
zplane(bz,az,'k'); title('Z plane representation');
```

من هذا البرنامج كانت معاملات البسط والمقام في دالة الانتقال لهذا المرشح

كالتالي :

Numerator coefficients

0.0007 0.0044 0.0111 0.0148 0.0111 0.0044 0.0007

Denominator coefficients

1.0000 -3.1836 4.6222 -3.7795 1.8136 -0.4800 0.0544

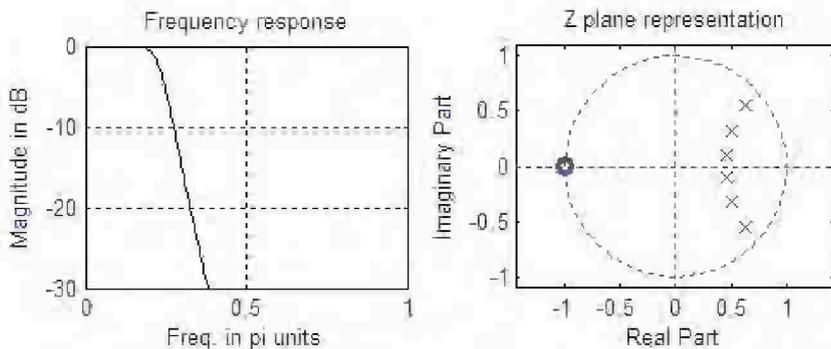
وعلى ذلك يمكن كتابة دالة الانتقال لهذا المرشح كما يلي :

$$H(z) = \frac{0.0007 + 0.0044z^{-1} + 0.0111z^{-2} + 0.0148z^{-3} + 0.0111z^{-4} + 0.0044z^{-5} + 0.0007z^{-6}}{1 - 3.1836z^{-1} + 4.6222z^{-2} - 3.7795z^{-3} + 1.8136z^{-4} - 0.4800z^{-5} + 0.0544z^{-6}}$$

الشكل رقم (٧.٨) يبين الاستجابة الترددية للمرشح وتمثيل المرشح في المستوى

Z حيث نلاحظ أن جميع أقطاب المرشح تقع داخل دائرة الوحدة مما يعني أن المرشح

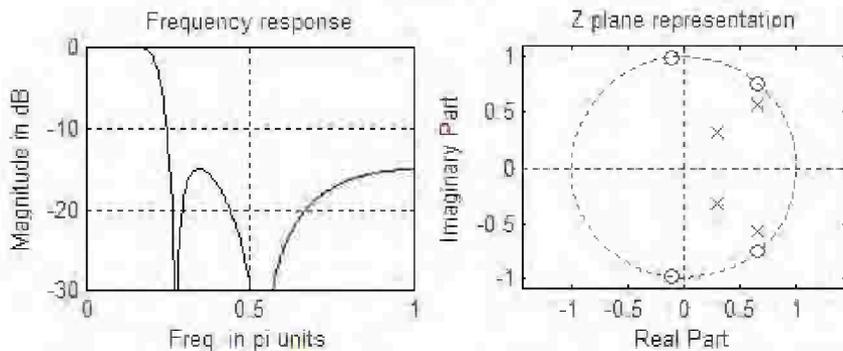
مستقر.



الشكل رقم (٧.٩). تصميم مرشح المقلد رقم (٧.٣) بطريقة المحوّل الخطّي المزدوج.

مثال رقم (٧.٧) : سنعيد المثال رقم (٧.٢) ولكن هذه المرة سنستخدم طريقة المرشح شيبشيف ٢ في التصميم بدلاً من طريقة البرورث. البرنامج التالي هو نفس برنامج المثال (٧ - ٢) مع تعديلات بسيطة والشكل رقم (٧.٩) يبين الاستجابة الترددية وتمثيل المرشح في المستوى Z.

```
%Example 7-3 cheby2 LPF using bilinear transformation
wp=0.2*pi; ws=0.3*pi; Rp=1; As=15;
T=1; Fs=1/T;
omegap=(2/T)*tan(wp/2);
omegas=(2/T)*tan(ws/2);
[N,wn]=cheb2ord(omegap,omegas,Rp,As,'s');
[bs,as]=cheby2(N,As,wn,'s');
[bz,az]=bilinear(bs,as,Fs);
disp('Numerator coefficients'); disp(bz);
disp('Denominator coefficients'); disp(az);
w=0:pi/255:pi; h=freqz(bz,az,w);
db=20*log10(abs(h)/max(abs(h)));
set(gcf,'color','white');
subplot(2,1,1);
plot(w/pi,db,'k');grid;
axis([0,1,-30,0]);xlabel('Freq. in pi units');
ylabel('Magnitude in dB');
title('Frequency response');
subplot(2,1,2);
zplane(bz,az,'k');
title('Z plane representation');
```



الشكل رقم (٧.٩). تصميم مرشح المثال رقم (٧.٣).

**Impulse Invariant Method, IIM طريقة تساوي استجابة الدفعة (٧.٥.٢)**

هذه هي الطريقة الثانية لتصميم المرشحات الرقمية IIR بعد أن رأينا طريقة التحويل الخطي المزدوج والتي تعد الأكثر استخداماً وشيوعاً. فى هذه الطريقة يتم مساواة استجابة الصدمة  $h_s(t)$  للمرشح التناظري بعد عينتها لتصبح  $h_s(nT)$  مع استجابة الصدمة للمرشح الرقمي  $h[n]$ . معنى ذلك أنه يتم مساواة استجابتي الصدمة للمرشح التناظري والرقمي كما يلي:

$$(٧.٣٨) \quad h[n] = h_s(nT)$$

أو بمعنى آخر، أن استجابة الصدمة للمرشح الرقمي تساوى، أو هي استجابة الدفعة للمرشح التناظري بعد عينتها  $\text{sampling}$ .

لقد رأينا مسبقاً أن العلاقة بين دالة الانتقال الرقمية  $H(Z)$  ودالة الانتقال التناظرية يمكن كتابتها على الصورة التالية:

$$(٧.٣٩) \quad H(Z) = Z(h[n]) = Z(h_s(nT))$$

وأما العلاقة بين الاستجابة الترددية فى النطاق الرقمي والنطاق التناظري فيمكن الحصول عليها بوضع  $Z = e^{sT}$  و  $s = j\Omega$  فنحصل على المعادلة التالية:

$$(٧.٤٠) \quad H(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(j\frac{\omega}{T} + j\frac{2\pi k}{T}\right)$$

التحويل  $s = (1/T)\ln(Z)$  يستحق وقفة. هذه المعادلة يمكن كتابتها على الصورة

$$Z = e^{sT} \text{ و بوضع } s = \sigma + j\Omega \text{ فنحصل على الآتي:}$$

$$(٧.٤١) \quad Z = r e^{j\omega} = e^{\sigma_0 T} e^{j\Omega_0 T}$$

ومنها يمكن كتابة :

$$(٧.٤٢) \quad |Z| = r = e^{\sigma_0 T}$$

من المعادلة رقم (٧.٤٢) نلاحظ أنه عندما  $\sigma_0 = 0$  أي أننا نتحرك على المحور  $j\Omega$  في المستوى  $S$  فإنه في هذه الحالة تكون  $r=1$  أي أننا نتحرك على محيط دائرة الوحدة في المستوى  $Z$ . وعلى ذلك فإنه عندما تكون  $\sigma_0$  سالبة ، أي النصف الأيسر من المستوى  $S$  ، فإن ذلك يقابل  $r < 1$  أي داخل دائرة الوحدة ، أي أن ذلك يعنى أن المرشح التناظري المستقر سيتحول إلى مرشح رقمى مستقر أيضا. وبنفس الطريقة يمكن أن نرى أن النصف الأيمن من المستوى  $S$  سيتقابل مع خارج دائرة الوحدة في المستوى  $Z$ . هناك خاصية أخرى مهمة في هذا التحويل وهى أنه يحول كل النقط المعطاه بالمعادلة التالية :

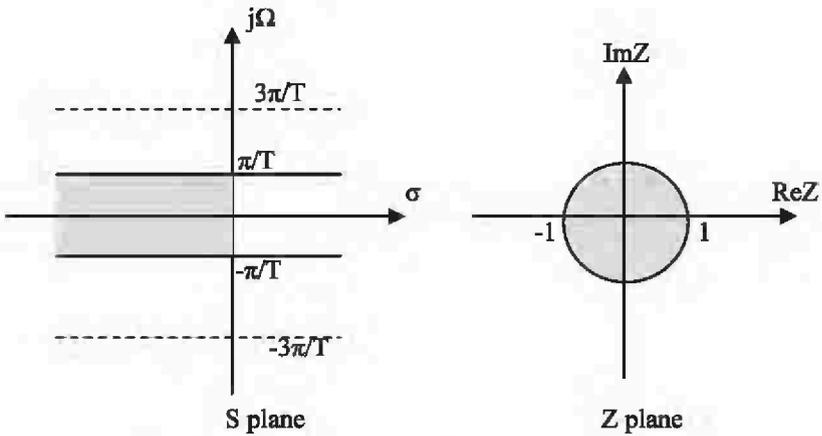
$$(٧.٤٣) \quad S = \sigma_0 + j\Omega_0 + j \frac{2\pi k}{T}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

إلى نقطة واحدة في المستوى  $Z$  حيث أن :

$$(٧.٣٨) \quad e^{\sigma_0 T} e^{j\Omega_0 T + \frac{2\pi k}{T} T} = e^{\sigma_0 T} e^{j\Omega_0 T}$$

وهذا يعني أن الشريط strip الذي عرضه  $\pi/T$  في المستوى  $S$  والذي يقع في المدى الذي يحدد بما يلى :  $\pi/T \leq \Omega \leq \pi/T -$  يتحول إلى كل المستوى  $Z$  كما في الشكل

رقم (٧.١٠) بحيث إن النصف الأيسر من هذا الشريط يؤول إلى داخل دائرة الوحدة في المستوى  $Z$ ، والنصف الأيمن منها يؤول إلى خارج دائرة الوحدة. وبنفس الطريقة كما في الشكل رقم (٧.١٠) سنرى أن المحور  $j\Omega$  يقسم إلى شرائح عرض كل منها  $\pi/T$ ، وكلها تؤول بنفس الطريق إلى كل المستوى  $Z$  كما أشرنا سابقاً. وهذا التحويل يطلق عليه many to one transformation أي تحويل نقاط عديده إلى نقطة واحدة.



الشكل رقم (٧.١٠). تحويل استجابة الصدمة الموحدة IIR.

نلاحظ من المعادلة رقم (٧.٣٩) أن الاستجابة الترددية الرقمية  $H(w)$  للمرشح الرقمي المطلوب تصميمه بهذه الطريقة هي عبارة عن مجموع الاستجابات الترددية للمرشح التناظري الأصلي  $H_s(\Omega)$  مع نفس الاستجابات المزاحة لها بمقدار  $\pm 2\pi k/T$ ، مع ضرب هذا المجموع في المعامل  $1/T$  كما في المعادلة رقم (٧.٤٠). معنى ذلك أن كل شريط من هذه الشرائح، النصف الأيسر منه فقط، يؤول إلى دائرة الوحدة، وهذه الشرائح فوق بعضها.

نستنتج أيضاً من هذه المعادلة ومن الشكل رقم (٧.١٠) ومن نظرية العيننة التي

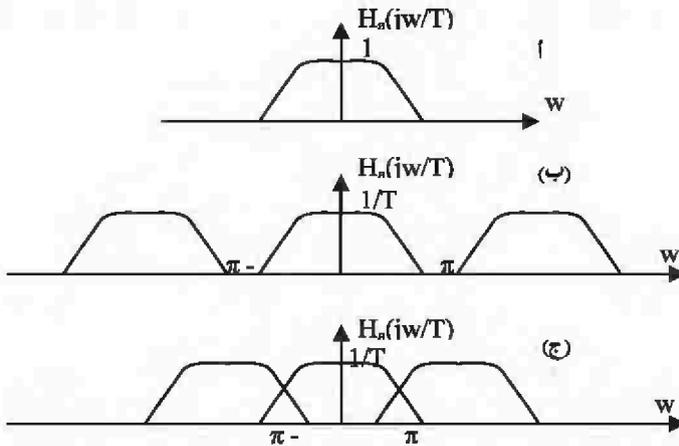
سبق دراستها أن الاستجابة الترددية التناظرية  $H_a(\Omega)$  إذا كانت محددة النطاق بحيث إن:

$$(٧.٤٤) \quad |\Omega| \geq \frac{\pi}{T} \quad H_a(j\Omega) = 0 \quad \text{for}$$

فإن:

$$(٧.٤٥) \quad H(w) = \frac{1}{T} H_a\left(j\frac{w}{T}\right) \quad \text{for } |w| \leq \pi$$

ولن يكون هناك تداخل أو تزوير ترددي aliasing، أما إذا كان الشرط رقم (٧.٤٥) غير محقق فسوف يكون هناك تداخل ترددي كما في الشكل رقم (٧.١١). الشكل رقم (٧.١١) يبين الاستجابة الترددية للمرشح التناظري، وفي الشكل رقم (٧.١١ب) نرى الاستجابة الترددية للمرشح الرقمي عندما كانت الاستجابة الترددية محددة النطاق حيث نلاحظ عدم وجود تداخل ترددي بينما نلاحظ هذا التداخل في الشكل رقم (٧.١١ج) وهذا التداخل نتيجة أن نطاق المرشح التناظري أكبر من  $\pi$ .



الشكل رقم (٧.١١). العلاقة بين الاستجابة الترددية للمرشح التناظري والمرشح الرقمي.

مثال رقم (٧,١٠): افترض المرشح التناظري التالي من الدرجة الأولى:

$$H_c(s) = \frac{A}{s + \alpha}$$

استجابة الدفعة لهذا المرشح يمكن كتابتها كالتالي:

$$h_c(t) = A e^{-\alpha t} u(t)$$

حيث  $u(t)$  هي دالة الخطوة. الآن يمكن كتابة استجابة الصدمة للمرشح الرقمي باستخدام المعادلة رقم (٧,٣٨) كما يلي:

$$h[n] = h_c(nT) = A e^{-\alpha nT} u[n]$$

وعلى ذلك يمكن كتابة دالة الانتقال لهذا المرشح كما يلي:

$$H(z) = A \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha nT} z^{-n} = \frac{A}{1 - e^{-\alpha T} z^{-1}}$$

لاحظ لكي يكون هذا المرشح مستقراً فإن  $|\alpha| > 1$  ومن ثم فإن  $|e^{-\alpha T}| < 1$  أي أن هذا القطب سيكون داخل دائرة الوحدة.

مثال رقم (٧,٥): مطلوب تصميم مرشح رقمي منفذ للترددات المنخفضة من

النوع IIR. تردد حافة مجال السماح هو  $\omega_p=0.25\pi$  على ألا تزيد التموجات في مجال الانتقال عن 0.5db. تردد بداية مجال الوقف هو  $\omega_s=0.55\pi$  ومقدار الاستجابة عند هذا التردد هو 15db. وعلى ذلك يمكن كتابة استجابة هذا المرشح كما يلي:

$$\begin{aligned} 20 \log_{10} |H(j0.25\pi)| &\geq -0.5 \text{db} \\ 20 \log_{10} |H(j0.55\pi)| &\leq -15 \text{db} \end{aligned}$$

على أن يكون التصميم مرة باستخدام طريقة استجابة الصدمة الموحدة ، ومرة باستخدام التحويل الخطي المزدوج.

أولاً: باستخدام طريقة استجابة الدفعة الموحدة

سنفترض أولاً عدم وجود تداخل ترددي باختيار معدل عينة عال وسنفترض التصميم للمرشح التناظري من النوع بتروث. أول خطوات تصميم المرشح هي تقدير درجة هذا المرشح N. من الصور المختصرة التي تستخدم لتقدير هذه الدرجة المعادلة التالية:

$$N = \frac{\log_{10} \left( \frac{1}{k_1} \right)}{\log_{10} \left( \frac{1}{k} \right)} \quad (٧.١٠)$$

حيث k و k<sub>1</sub> يعطيان بالمعادلتين التاليتين وبالاستعانة بالشكل رقم (٧.٤). كما

يلي:

$$k = \frac{\Omega_p}{\Omega_s} \quad (٧.٤٨)$$

$$k_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{A_s^2 - 1}} \quad (٧.٤٩)$$

من المعادلات السابقة والشكل رقم (٧.٤) يمكننا كتابة ما يلي :

$$20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} = 0.5 \text{db}$$

ومنها يمكن حساب  $\varepsilon^2 = 0.1220185$  ، وبنفس الطريقة يمكن حساب  $A_s^2 = 31.62277$  ، ومن ذلك يمكن حساب قيمة  $k_1 = 15.841979/1$  و  $k = 2.2/1$  ، وباستخدام المعادلة رقم (٧.٤) يمكن تقدير درجة المرشح  $N = 3.503885$  والتي يتم تقريبها إلى  $N = 4$ . معادلة المرشح بتروث سبق أن درسناها ويمكن أن نكتبها الآن عند تردد السماح  $\Omega_p$  كما يلي :

$$|H_a(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \quad (٧.٥٠)$$

وبالتعويض في هذه المعادلة بقيم كل المتغيرات التي سبق الحصول عليها يمكن حساب قيمة تردد القطع  $\Omega_c = 0.3251892\pi = 1.021612 \text{rad/sec}$  وهو التردد الذي تنزل عنده الاستجابة الترددية بمقدار 3db من قيمتها عند التردد صفر. بمعرفة قيمة تردد القطع  $\Omega_c$  ودرجة المرشح  $N$  يمكن استخدام إحدى دوال الـ MATLAB المتاحة لتصميم المرشحات من النوع بتروث والتي منها :

$$[z,p,k]=\text{buttap}(N);$$

التي تعطي الأصفار Z والأقطاب P ومعامل التكبير K للمرشح التناظري الذي درجته N وتردد القطع له  $\Omega_c=1\text{rad/sec}$ . كما أن هناك الدالة:

$$[\text{num},\text{den}]=\text{butter}(N,W_n,'S');$$

التي تعطي معاملات المتغير S في البسط num وفي المقام den بقوى تنازلية للمرشح التناظري من النوع بترورث الذي درجته N وتردد القطع له  $W_n$  والـ S دلالة على العمل في المجال التناظري. باستخدام هذه الدالة من MATLAB يمكن الحصول على معادلة المرشح التناظري كما يلي:

$$H_a(s) = \frac{-0.943839s - 0.7380277}{(s + 0.39097)^2 + (0.943839)^2} \cdot \frac{0.943839s + 1.7817187}{(s + 0.9438673)^2 + (0.3909035)^2}$$

باستخدام التحويل  $Z=e^{sT}$  (التحويل IIR) نحصل على دالة الانتقال للمرشح الرقمي كما يلي:

$$H(Z) = \frac{-0.943839 + 0.16038789z^{-1}}{1 - 0.7936648z^{-1} + 0.4575167z^{-2}} + \frac{0.943839 - 0.001667z^{-1}}{1 - 0.719533z^{-1} + 0.1514144z^{-2}}$$

ثانياً: باستخدام التحويل الخطي المزدوج Bilinear transformation

في هذه الطريقة نبدأ بتحويل مواصفات المرشح الرقمي من النطاق الرقمي إلى النطاق التناظري باستخدام التحويل الخطي واعتبار  $T=2$  كما يلي:

$$\Omega_p = \tan\left(\frac{W_p}{2}\right) = \tan\left(\frac{0.25\pi}{2}\right) = 0.4142135$$

$$\Omega_s = \tan\left(\frac{W_s}{2}\right) = \tan\left(\frac{0.55\pi}{2}\right) = 1.1708496$$

الآن لتقدير درجة المرشح التناظري نحتاج لحساب كل من:

$$\frac{1}{k_1} = 15.841979 \quad , \quad \frac{1}{k} = \frac{\Omega_s}{\Omega_p} = 2.8266814$$

ومن ذلك يمكن حساب  $N$  كما يلي:

$$N = \frac{\log_{10}\left(\frac{1}{k_1}\right)}{\log_{10}\left(\frac{1}{k}\right)} = 2.6586$$

والتي يتم تقريبها إلى  $N=3$ ، حيث نلاحظ أن درجة المرشح التناظري في حالة التحويل الخطي تكون أقل منها في حالة استجابة الصدمة ويرجع ذلك إلى أن طريقة استجابة الصدمة تضغط المدى الترددي للمرشح مما يجعله يحتاج إلى درجة أعلى. بالتعويض بقيم  $N$  و  $\Omega_p$  في المعادلة رقم (٧.٥٠) نحصل على تردد القطع  $\Omega_c=0.588148$ . الآن يمكن استخدام MATLAB للحصول على دالة الانتقال للمرشح التناظري الذي له تردد القطع السابق ومن الدرجة الثالثة كما يلي:

$$H_a(s) = \frac{0.203451}{(s + 0.500148)(s^2 + 0.500148s + 0.345918)}$$

بوضع  $s=(1-z^{-1})/(1+z^{-1})$  نحصل على دالة الانتقال للمرشح الرقمي كما يلي:

$$H(z) = \frac{0.066227z(1+z^{-1})^3}{(1-0.2593284z^{-1})(1-0.676285z^{-1}+0.3917468z^{-2})} \quad (٧.٥١)$$

## (٧.٦) تصميم المرشحات الرقمية IIR في برنامج MATLAB

يحتوي برنامج MATLAB على العديد من الدوال المستخدمة في تصميم المرشحات الرقمية من النوع IIR. أول هذه الدوال هي المجموعة التالية التي تستخدم لتحديد درجة المرشح على حسب طريقة التصميم:

$$\begin{aligned} [N, Wn] &= \text{buttord}(Wp, Ws, Rp, Rs) \\ [N, Wn] &= \text{cheby1ord}(Wp, Ws, Rp, Rs) \\ [N, Wn] &= \text{cheby2ord}(Wp, Ws, Rp, Rs) \\ [N, Wn] &= \text{ellipord}(Wp, Ws, Rp, Rs) \end{aligned}$$

حيث الدالة الأولى تعطي درجة المرشح الرقمي  $N$ ، وتردد القطع  $Wn$  للمرشح الرقمي من النوع بتزورث الذي تردد مجال السماح له هو  $Wp$ ، ومقدار الاستجابة في هذا المجال هو  $Rp$ ، بينما تردد مجال القطع هو  $Ws$ ، ومقدار الاستجابة في هذا المجال هو  $Rs$ . الدوال الثانية حتى الرابعة تعمل بنفس الطريقة ولكن مع أنواع المرشحات الشيبشيف بنوعيتها ومع القطع الناقص. التردد  $Wn$  هو تردد القطع (rad/sample)، أو تردد الثلاث ديسبل (الذي ينزل عنده مقدار الاستجابة ثلاثة ديسبل من قيمته عند التردد صفر). هذا التردد يتراوح من صفر حتى واحد حيث القيمة واحد تقابل نصف تردد العينة  $\text{sampling frequency}$ .

الدالة:

$$[B,A] = \text{BUTTER}(N,Wn)$$

تصمم مرشح رقمي من النوع بتزورث حيث تعطى معاملات البسط  $B$  ومعاملات المقام  $A$  في قوى تنازلية للمتغير  $Z$ . درجة المرشح هي  $N$  التي سبق حسابها بالدالة  $\text{buttord}$ ، و  $Wn$  هي تردد القطع كما سبق.

الدالة :

$$[Bz,Az] = \text{IMPINVAR}(B,A,Fs)$$

تعطى مرشح رقمي بمعاملات البسط Bz ومعاملات المقام Az باستخدام طريقة استجابة الدفعة impulse invariant method لتحويل المرشح التناظري الذي معاملات البسط له هي B ومعاملات المقام هي A وتردد العينة هي Fs هرتز. إذا لم يتم ذكر Fs فإنها توضع تلقائياً بهرتز واحد. المعاملات B و A تكون مضروبة في الكمية 1/Fs. المثال التالي يبين ذلك فحاول تنفيذه (انظر في برنامج MATLAB الأمر (help impinvar).

```
% EXAMPLE: Illustrate the relationship between digital and analog
% frequency responses.
[b,a] = butter(4,0.3,'s');
[bz,az] = impinvar(b,a,10);
[Ha,Wa] = freqs(b,a,512);
[Hz,Wz] = freqz(bz,az,512,10);
plot(Wa/(2*pi),20*log10(abs(Ha))); hold on;
plot(Wz,20*log10(abs(Hz)))
```

الدالة :

$$[Zd,Pd,Kd] = \text{BILINEAR}(Z,P,K,Fs)$$

تعطى الأصفار Zd والأقطاب Pd ومعامل التكبير Kd لمرشح رقمي بطريقة التحويل الخطي المزدوج bilinear للمرشح التناظري الذي أصفاره Z وأقطابه P ومعامل التكبير له هو K وتردد العينة هو Fs. يمكن استخدام الصورة البديلة التالية :

$$[\text{Numd},\text{Dend}] = \text{BILINEAR}(\text{Num},\text{Den},Fs)$$

التي تحول المرشح التناظري الذي معاملات البسط له هي Num ومعاملات

المقام هي Den وذلك كقوى للمتغير S، وتردد العينة له هو Fs إلى المرشح الرقمي الذي معاملات البسط له هي Numd ومعاملات المقام له هي Dend وذلك كقوى للمتغير Z.

مثال رقم (٧,٦): حدد دالة الانتقال وارسم الاستجابة لمرشح رقمي LPF من الدرجة الخامسة من نوع القطع الناقص elliptic. تردد حافة الانتقال لهذا المرشح هو  $\omega_p=0.4$  وتموجات مجال الانتقال  $R_p=0.5\text{db}$  وأقل اضمحلال في مجال الوقف هو  $R_s=40\text{db}$ . المرشح من النوع IIR. استخدم MATLAB في تصميم هذا المرشح. البرنامج التالي تم تنفيذه على MATLAB لتصميم هذا المرشح:

```
%elliptic IIR LP digital filter design
N=5;
Rp=0.5;
Rs=40;
wn=0.4;
[b,a]=ellip(5,0.5,40,0.4);
disp('Numerator polynomial');
disp(b);
disp('Denominator polynomial');
disp(a);
w=0:0.01/pi:pi;
h=freqz(b,a,w);
gain=20*log10(abs(h));
plot(w/pi,gain);
grid;
xlabel('normalized frequency');
ylabel('gain in dB');
```

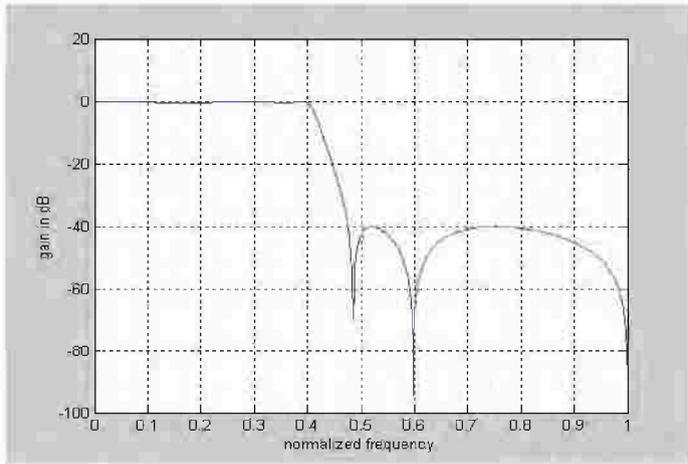
خرج هذا البرنامج هو:

```
Numerator polynomial
0.0528 0.0797 0.1295 0.1295 0.0797 0.0528
Denominator polynomial
1.0000 -1.8107 2.4947 -1.8801 0.9537 -0.2336
```

وعلى ذلك يمكن كتابة معادلة دالة الانتقال لهذا المرشح كالتالي :

$$(٧.٤) \quad H(z) = \frac{0.0528 + 0.079z^{-1} + 0.129z^{-2} + 0.129z^{-3} + 0.079z^{-4} + 0.0528z^{-5}}{1 - 1.81z^{-1} + 2.49z^{-2} - 1.88z^{-3} + 0.953z^{-4} - 0.233z^{-5}}$$

الشكل رقم (٧.١٢) يبين الاستجابة الترددية لهذا المرشح.



الشكل رقم (٧.١٢). استجابة مرشح المثال رقم (٧.٦).

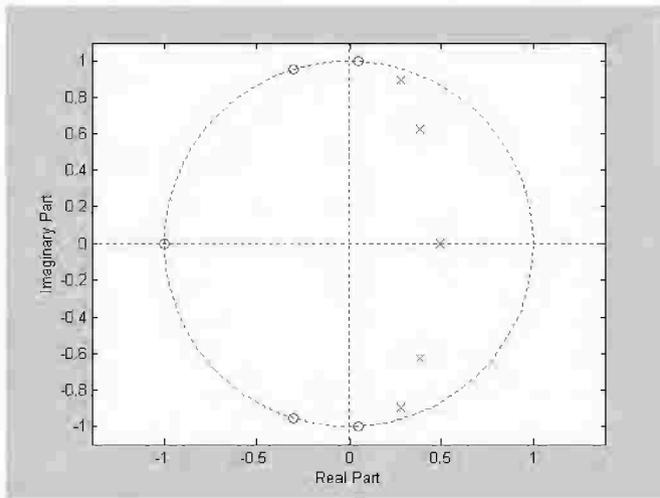
البرنامج التالي يبين طريقة رسم أصفار وأقطاب هذا المرشح :

```
%elliptic IIR LP digital filter design (poles and zeros)
N=5;
Rp=0.5;
Rs=40;
wn=0.4;
[b,a]=ellip(5,0.5,40,0.4);
[z,p,k]=tf2zp(b,a);
disp('Zeros are:');
disp(z);
disp('Poles are:');
disp(p);
disp('Gain constant is');
```

```
disp(k);
zplane(b,a);
```

خرج هذا البرنامج سيكون كالتالي :

```
Zeros are:
-1.0000
-0.3020 + 0.9533i
-0.3020 - 0.9533i
0.0474 + 0.9989i
0.0474 - 0.9989i
Poles are:
0.2787 + 0.8973i
0.2787 - 0.8973i
0.3812 + 0.6274i
0.3812 - 0.6274i
0.4909
Gain constant is
0.0528
```



الشكل رقم (٧.١٣). أقطاب وأصفار مرشح المثال رقم (٧.٦).

مثال (٧.٧). حدد دالة الانتقال وارسم الاستجابة لمرشح رقمي BPF من الدرجة الثامنة من النوع Butterworth. تردد  $h_j$  حافة الانتقال لهذا المرشح هو  $wp=0.4$

حتى  $wp=0.7$ . المرشح من النوع IIR. استخدم MATLAB في تصميم هذا المرشح.  
البرنامج التالي تم تنفيذه على MATLAB لتصميم هذا المرشح:

```
%butterworth IIR BP digital filter
N=8;
M=N/2;
w1=0.4;
w2=0.7;
wn=[w1 w2];
[b,a]=butter(M,wn);
disp('numerator polynomial');disp(b);
disp('denominator polynomial');disp(a);
w=0.2*pi:0.01/pi:0.85*pi;
h=freqz(b,a,w);
gain=20*log10(abs(h));
plot(w/pi,gain);
grid;
xlabel('normalized frequency');
ylabel('gain in dB');
```

خرج هذا البرنامج هو:

```
numerator polynomial
0.0186    0 -0.0743    0 0.1114    0 -0.0743 0 0.0186
denominator polynomial
1.0000 0.9780 1.9399 1.3386 1.6271 0.7349 0.5826
0.1386 0.0762
```

الشكل رقم (٧، ١٤) يبين دالة الانتقال لهذا المرشح.

البرنامج التالي يبين كيفية الحصول على أقطاب وأصفار هذا المرشح والشكل

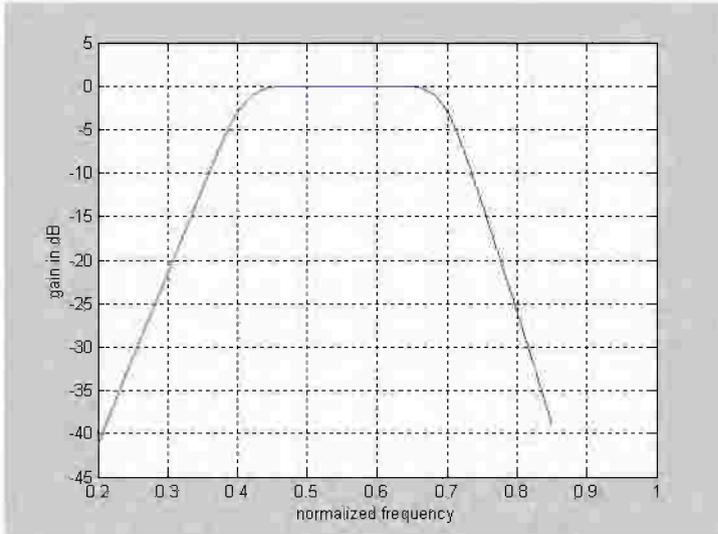
رقم (٧، ١٥) يبين هذه الأقطاب والأصفار.

```
%butterworth IIR BP digital filter design (poles and
zeros)
N=8;
w1=0.4;
w2=0.7;
```

```

wn=[w1 w2];
[b,a]=butter(N/2,wn);
[z,p,k]=tf2zp(b,a);
disp('Zeros are:');disp(z);
disp('Poles are:');disp(p);
disp('Gain constant is');disp(k);
zplane(b,a);

```



الشكل رقم (٧.١٤). دالة الانتقال لمروشح المثال رقم (٧.٧).

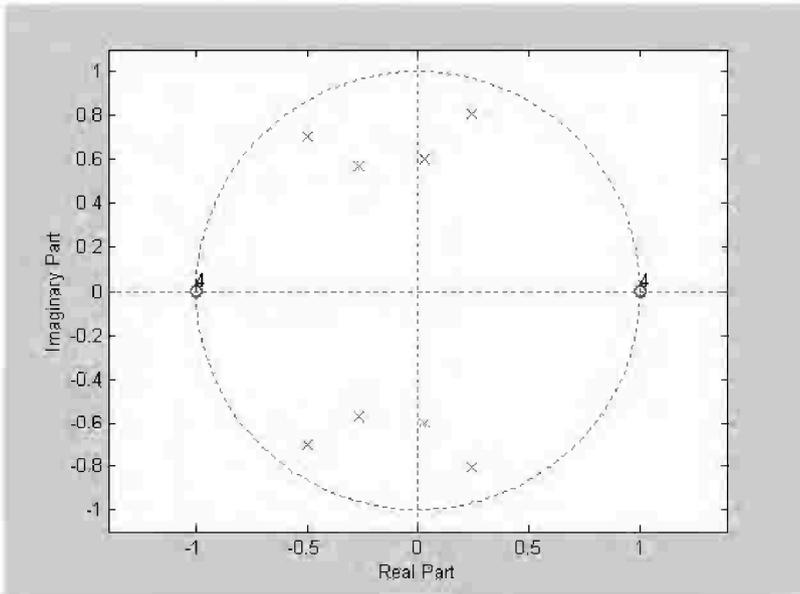
خرج هذا البرنامج هو:

```

Zeros are:
1.0001
1.0000 + 0.0001i
1.000 - 0.0001i
0.9999
- 1.0001
-1.0000 + 0.0001i
-1.0000 - 0.0001i
-0.9999
Poles are:
-0.4963 + 0.7058i
-0.4963 - 0.7058i

```

$0.2419 + 0.8060i$   
 $0.2419 - 0.8060i$   
 $-0.2651 + 0.5715i$   
 $-0.2651 - 0.5715i$   
 $0.0305 + 0.6027i$   
 $0.0305 - 0.6027i$   
 Gain constant is  
 0.0186



الشكل رقم (٧.١٥). أصفار وأقطاب مرشح المال رقم (٧.٧).

### (٧.٧) التحويل الطيفي للمرشحات

#### Spectral Transformation of Filters

لقد رأينا فيما سبق أن كل ما تم عرضه أو شرحه كان يتعلق بالمرشحات المنفذة للترددات المنخفضة LPF، فماذا عن الأنواع الأخرى، HPF و BPF و BSF؟ بل إنه أحياناً نقوم بتصميم مرشح LPF بتردد قطع معين، ثم بعد قليل نريد تصميم مرشح

آخر LPF مثل السابق تماماً سوى أنه يختلف معه فقط في تردد القطع  $w_c$ ، فهل نقوم بتصميم هذا المرشح من البداية مرة أخرى أم أنه يمكننا الاستفادة بالمرشح الذي تم تصميمه وعن طريق تحويله بسيطة يمكننا الحصول على المرشح الجديد. هذا ما سنراه في هذا الجزء حيث سنرى كيف أنه بدءاً من مرشح نموذجي أو مبدئي Prototype LPF يمكننا الحصول على كل أنواع المرشحات الأخرى بما فيها LPF آخر، و HPF و BPF و BSF. سنذكر هنا هذه التحويلات بدون برهان أو إثبات حيث البراهين موجودة في العديد من المراجع المتخصصة ثم إنها لن تضيف الكثير ولذلك سنكتفي بذكرها فقط. سنفترض هنا أننا صممنا مرشح النموذج من النوع LPF له تردد قطع  $w_c$  ونريد الحصول منه على إحدى الصور الأخرى.

(٧.٧.١) أولاً: الحصول على مرشح LPF بتردد قطع مختلف عن المرشح

النموذجي

كما ذكرنا أن لدينا مرشح LPF تردد القطع له هو  $w_c$  ونريد الحصول منه على مرشح آخر LPF بتردد قطع آخر  $w_{c1}$ ، وبالطبع فإن مقدار الاستجابة الترددية سيكون هو نفسه لكل من المرشحين. في هذه الحالة يتم استخدام التحويل التالي:

$$Z^{-1} = \frac{Z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha Z^{-1}} \quad (٧.٥٣)$$

حيث:

$$\alpha = \frac{\sin\left(\frac{w_c - w_{c1}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{w_c + w_{c1}}{2}\right)} \quad (٧.٥٤)$$

كمثال على ذلك سنفترض المرشح الرقمي من الدرجة الثالثة والذي تم تصميمه بطريقة التحويل الخطي المزدوج bilinear transformation وكان تردد القطع له هو  $w_c=0.25\pi$  ونريد تغيير تردد القطع إلى  $0.35\pi$ . باستخدام المعادلة رقم (٧.٥٤) ووضع  $w_c=0.25\pi$  و  $w_{c1}=0.35\pi$  نحصل على قيمة  $\alpha=0.1933636$ . الآن بالتعويض بقيمة  $\alpha$  في المعادلة رقم (٧.٥٣) ثم التعويض بهذه القيمة للمتغير  $Z$  في معادلة المرشح الأصلي في المعادلة رقم (٧.٥١) نحصل على معادلة المرشح الجديد كما يلي:

$$H(z) = \frac{0.2172235(1 + z^{-1})^3}{(1 - 0.0694472z^{-1})(1 - 0.1848053z^{-2} + 0.337568z^{-4})}$$

(٧.٧.٢) تالياً: الحصول على مرشح HPF من مرشح LFF

في هذه الحالة سنستخدم التحويل التالي:

$$(٧.٥٥) \quad Z^{-1} = \frac{Z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha Z^{-1}}$$

$$(٧.٥٦) \quad \alpha = \frac{\sin\left(\frac{w_c + w_{c1}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{w_c - w_{c1}}{2}\right)}$$

حيث  $w_{c1}$  هي تردد القطع للمرشح HPF.

(٧.٧.٣) تالياً: الحصول على مرشح BPF من مرشح LFF

في هذه الحالة نستخدم التحويل التالي:

$$Z^{-1} = - \frac{Z^{-2} - \frac{2\alpha\beta}{\beta+1}Z^{-1} + \frac{\beta-1}{\beta+1}}{\frac{\beta-1}{\beta+1}Z^{-2} - \frac{2\alpha\beta}{\beta+1}Z^{-1} + 1} \quad (٧.٥٧)$$

حيث:

$$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{w_{c2} + w_{c1}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{w_{c2} - w_{c1}}{2}\right)}$$

$$\beta = \cot\left(\frac{w_{c2} - w_{c1}}{2}\right) \tan\left(\frac{w_c}{2}\right) \quad (٧.٥٨)$$

حيث  $w_{c2}$  هي تردد القطع الأعلى و  $w_{c1}$  هي تردد القطع الأسفل للمرشح

.BPF

(٧.٧، ٤) رابعاً: الحصول على مرشح BSF من مرشح LPF

في هذه الحالة نستخدم التحويلة التالية:

$$Z^{-1} = - \frac{Z^{-2} - \frac{2\alpha}{1+\beta}Z^{-1} + \frac{1-\beta}{1+\beta}}{\frac{1-\beta}{1+\beta}Z^{-2} - \frac{2\alpha}{1+\beta}Z^{-1} + 1} \quad (٧.٥٩)$$

$$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{w_{c2} + w_{c1}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{w_{c2} - w_{c1}}{2}\right)}$$

$$\beta = \tan\left(\frac{w_{c2} - w_{c1}}{2}\right) \tan\left(\frac{w_c}{2}\right) \quad (٧.٦٠)$$

حيث  $w_{c2}$  هي تردد القطع الأعلى و  $w_{c1}$  هي تردد القطع الأسفل للمرشح BSF.

## (٧.٨) تمارين

١- افترض  $H(z)$  دالة الانتقال لمرشح منفذ للترددات المنخفضة LPF ، تردد حافة مجال الانتقال  $\omega_p$  ، وتردد حافة مجال الوقف  $\omega_s$  ، التموجات في مجال الانتقال هي  $\delta_p$  ، والتموجات في مجال الوقف  $\delta_s$ . افترض توصيل مرشحين متماثلين تماماً وكل منهم له دالة الانتقال  $H(z)$  وتم توصيلهم على التوالي. ما هو مقدار التموجات في مجال انتقال والوقف عند التردد  $\omega_p$  و  $\omega_s$  على التوالي. عمم إجابتك بفرض توالي من  $M$  من المرشحات السابقة.

٢- افترض أن  $HLP(z)$  تمثل دالة الانتقال لمرشح منفذ للترددات المنخفضة معاملاته حقيقية وله تردد حافة مجال الانتقال هي  $\omega_p$  ، وتردد حافة مجال الوقف هي  $\omega_s$  ، التموجات في مجال الانتقال هي  $\delta_p$  ، والتموجات في مجال الوقف هي  $\delta_s$ . ارسم شكل مقدار استجابة المرشح المنفذ للترددات المرتفعة  $HLP(-z)$  على المدى  $-\pi \leq \omega \leq \pi$  وحدد ترددات الحافة لكل من مجال الانتقال والوقف  $\omega_p$  و  $\omega_s$ .

٣- استنتج دالة الانتقال الرقمية  $H(z)$  من دالة الانتقال السببية causal التالية :

$$H_a(s) = \frac{3s^3 + 7s^2 + 10s + 7}{(s^2 + s + 1)(s^2 + 2s + 3)}$$

استخدم طريقة تساوي الصدمة impulse invariant حيث  $T=0.1$ .

٤- استنتج دالة الانتقال الرقمية  $H(z)$  من دالة الانتقال السببية causal التالية :

$$H_a(s) = \frac{4s^2 + 10s + 8}{(s^2 + 2s + 3)(s + 1)}$$

استخدم طريقة تساوي الصدمة impulse invariant حيث  $T=0.2$ .

استخدم مقلاب في حل التمارين التالية

٥- صمم LPF بالمواصفات التالية :

أ) معدل العينة  $\text{sampling rate}=8000\text{sample/sec}$ .

ب) حافة مجال المرور عند التردد  $1500\text{Hz}$  مع السماح بتموجات ripples في هذا المجال مقدارها  $3\text{dB}$ .

ج) حافة مجال الوقف عند التردد  $2000\text{Hz}$  مع اضمحلال مقداره  $40\text{dB}$ .

د) تموجات متساوية في مجال المرور واضمحلال ثابت في مجال الوقف.

هـ) استخدم طريقة تساوي الصدمة Impulse Invariant Method IIM.

• استخدم  $T=1$  واحسب دالة الانتقال للمرشح ، وارسم مقدار الاستجابة

الترددية magnitude frequency response واستجابة الصدمة  $h[n]$ .

• استخدم  $T=1/8000$  وأعد الجزء أ.

• قارن بين التصميمين وعلق على الناتج.

٦- أعد التمرين الأول مستخدماً طريقة التحويل الخطي المزدوج bilinear

transformation.

٧- صمم مرشح LPF من النوع بتروث بالمواصفات التالية:

أ) حافة مجال الانتقال عند التردد  $\omega_p=0.4\pi$  و  $R_p=0.5\text{dB}$ .

ب) حافة مجال الوقف عند التردد  $\omega_s=0.6\pi$  و  $A_s=50\text{dB}$ .

صمم المرشح بطريقة تساوي استجابة الصدمة IIM مستخدماً  $T=2$ . احسب دالة

الانتقال ومقدار الاستجابة الترددية وكذلك استجابة الصدمة للمرشح  $h[n]$ .

٨- أعد التمرين السابق مستخدماً طريقة التحويل الخطي المزدوج.

٩- أعد التمرينين الثالث والرابع مستخدماً المرشحات تشيبيشيف ١

وتشيبيشيف ٢.

١٠- أعد التمرينين الثالث والرابع مستخدماً مرشح القطع الناقص elliptic.

١١- صمم مرشح LPF بالمواصفات التالية :

( أ ) حافة مجال الانتقال عند التردد  $\omega_p=0.3\pi$  و  $R_p=0.5\text{dB}$  .

( ب ) حافة مجال الوقف عند التردد  $\omega_s=0.4\pi$  و  $A_s=50\text{dB}$  .

• استخدم الدالة buttord لحساب درجة المرشح إذا صمم كمرشح بترورث.  
إرسم مقدار استجابة المرشح الترددية وأوجد مقدار أقل اضمحلال في مجال الوقف بالديسبل.

• استخدم الدالة cheby1ord لحساب درجة المرشح إذا صمم كمرشح تشيبيشيف ١ . ارسم مقدار استجابة المرشح الترددية وأوجد مقدار أقل اضمحلال في مجال الوقف بالديسبل.

• استخدم الدالة cheby2ord لحساب درجة المرشح إذا صمم كمرشح تشيبيشيف ٢ . ارسم مقدار استجابة المرشح الترددية وأوجد مقدار أقل اضمحلال في مجال الوقف بالديسبل.

• استخدم الدالة ellipord لحساب درجة المرشح إذا صمم كمرشح قطع ناقص elliptic . ارسم مقدار استجابة المرشح الترددية وأوجد مقدار أقل اضمحلال في مجال الوقف بالديسبل.

• قارن درجات المرشحات السابقة ، وقيمة أقل اضمحلال في المرشحات السابقة.

١٢- صمم مرشح منفذ لمجال من الترددات BPF مستخدماً طريقة تشيبيشيف ٢

وبالمواصفات التالية :

( أ ) حافة مجال الوقف الأولى  $\omega_{p1}=0.3\pi$  و حافة مجال الوقف الثانية  $\omega_{s2}=0.6\pi$  .

( ب ) حافة مجال المرور الأولى  $\omega_{p1}=0.4\pi$  و حافة مجال المرور الثانية  $\omega_{p2}=0.5\pi$  .

ج)  $As=50\text{dB}$  و  $Rp=0.5\text{dB}$ .

ارسم مقدار الاستجابة الترددية واستجابة الصدمة للمرشح.

١٣- أعد التمرين الثامن مستخدماً طريقة تشيبيشيف ١.

١٤- أعد التمرين الثامن مستخدماً طريقة القطع الناقص elliptic.