الفصل التاسع

تأمين الدفعات الدورية

Assurances de Rentes

تناولنا في الفصل الرابع من هذا الكتاب دراسة الدفعات الدورية التي لم تعد تسدد بصفة مؤكدة، وفي هذا الفصل سوف نتناول بالدراسة الدفعات الدورية التي لم تعد تسدد على مدى الحياة. القيمة الحالية لدخل عمري أو مؤكد تقابل العلاوة الوحيدة (PU) وهو الثمن المطلوب دفعه للتمتع بهذا الدخل. في الرياضيات، يمكن اعتبار العلاوة الوحيدة (PU) على أنها توقعا رياضيا (انظر الفقرة (17.3.3)). كل ما يتغير هنا هو أن يتم ضرب كل عبارة في قاعدة الدخل باحتمال تسديدها.

مثال رقم (1): تعهدت شركة تأمين بصرف مبلغ 50000 فرنك سويسري إلى عميل في صورة بقائه على قيد الحياة خلال عشر سنوات، بالرجوع إلى جداول الوفاة المرفقة في الملاحق، ما العلاوة الوحيدة (PU) التي يجب على العميل دفعها إذا استعملنا نسبة فائدة تساوي 3%؟

الحل

احتمال البقاء على قيد الحياة إلى سن الخمسين لرجل عمره 40 سنة هو:

$${}_{10}p_{40} = \frac{l_{50}}{l_{40}} = \frac{92659}{95257} = 0.972726$$

القيمة الحالية لاستثمار قدره 50000 فرنك سويسري (frs) يدفع بعد عشر سنوات هي:

$$50000\frac{1}{(1.03)^{10}} = 37204.70\ frs$$

بتركيب احتمال البقاء على قيد الحياة مع القيمة الحالية، نستطيع تعريف العلاوة الوحيدة للخدمة المقدمة على أنها:

$$PU = 37204{,}70 \times 0{,}972726 = 36189.98\ frs$$

بالحصول على هذا المبلغ يمكن للمؤمن أن يستثمره لمدة عشر سنوات بنسبة فائدة لا تقل عن 3%. إذا بقي المؤمن له على قيد الحياة بعد عشر سنوات فإنه سيكسب المباراة، وفي حال حدوث عكس ذلك فإن المؤمن هو الذي سيكسب، وبطبيعة الحال في الواقع فإن المؤمن ليس لديه عميل واحد بل مجموعة من العملاء. وبذلك يكون المؤمن قد وازن مخاطره وفي المعدل لا المؤمن ولا المؤمن له يمكنه أن يكسب المباراة.

مثال رقم (2): نرغب في صرف دخل ما بعد العد بقيمة 10000 يورو لرجل عمره 40 سنة وذلك لفترة 3 سنوات. احسب العلاوة المطلوبة في كل حالة من الحالات الآتية:

لا يأخذ بالفائدة ولا بالوفيات في العمليات الحسابية.

الفائدة فقط هي التي يقع إدراجها في العمليات الحسابية.

الفائدة والوفيات يقع إدراجها في العمليات الحسابية.

الحل

$$PU = 1'000 + 1'000 + 1'000 = 1'000 \times 3$$

$$PU = 1'000v + 1'000v^2 + 1'000v^3 = 1'000 \times a_{\overline{3|}}$$

$$PU = 1'000v\frac{l_{41}}{l_{40}} + 1'000v^2\frac{l_{42}}{l_{40}} + 1'000v^3\frac{l_{43}}{l_{40}} = 1'000 \times \ddot{a}_{40:3}$$

(9.1) تركيبات كلاسيكية

(9.1.1) دخل عمري فوري

رموز:

$\ddot{a}_x$: القيمة الحالية (PU) للدخل العمري الوحدة تدفع مسبقا (ʼما قبل العدʼ preanumerando) إلى حين وفاة المؤمن له.

a_x : القيمة الحالية (PU) للدخل العمري الوحدة تدفع مؤخرا (ʼما بعد العدʼ postnumerando) إلى حين وفاة المؤمن له.

w : آخر قيمة في جدول الوفاة.

الدخل المسبق (ʼما قبل العدʼ preanumerando)

$$\boxed{\ddot{a}_x = 1 + v\frac{l_{x+1}}{l_x} + v^2\frac{l_{x+2}}{l_x} + \cdots + v^{w-x}\frac{l_w}{l_x} = \sum_{t=0}^{w-x} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x}} \qquad (9.1)$$

الدخل المؤخر (ʼما بعد العدʼ postnumerando)

$$\boxed{a_x = v\frac{l_{x+1}}{l_x} + v^2\frac{l_{x+2}}{l_x} + \cdots + v^{w-x}\frac{l_w}{l_x} = \sum_{t=1}^{w-x} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x}} \qquad (9.2)$$

العلاقة تربط بين $\ddot{a}$ و a_x :

$$\boxed{a_x = \ddot{a}_x - 1} \qquad (9.3)$$

ملاحظة: على عكس الدخل المؤكد فإن الدخل العمري (المعاش) لا توجد له قواعد سهلة تمكّن من احتسابه سريعا. وهو ما يدفع إلى استخدام الجداول الإلكترونية أو البرمجة لتتمكن من حساب سريع للقيم الحالية للخدمات العمرية.

قبل دخول الحواسيب في العمليات الحسابية، كان لا بد من تصميم جداول مساعدة سميت بـ"عدد التبديلات" لكي تسمح بحساب مبسط للمداخيل العمرية. سوف نستعرض ذلك في الفصل الحادي عشر.

(9.1.2) الدخل العمري المؤجل

الرموز:

${}_{k|}\ddot{a}_x$: القيمة الحالية (PU) لدخل عمري "وحدة" مؤجل بعدد k من السنوات ومدفوع "ما قبل العد" إلى حين وفاة المؤمن له.

${}_{k|}a_x$: القيمة الحالية (PU) لدخل عمري "وحدة" مؤجل بعدد k من السنوات ومدفوع "ما بعد العد" إلى حين وفاة المؤمن له.

المداخيل العمرية المؤجلة تمثل أكثر عقود المعاشات استخداما؛ حيث يدفع المؤمن له علاوة وحيدة في مقابل حصوله على دخل عمري إذا بقي على قيد الحياة في سن معينة (عند بلوغه سن التقاعد مثلا).

الدخل المسبق (ما قبل العد« « preanumerando)

$$ {}_{k|}\ddot{a}_x = v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} + v^{k+1} \frac{l_{x+k+1}}{l_x} + \dots + v^{w-x} \frac{l_w}{l_x} = \sum_{t=k}^{w-x} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x} \qquad (9.4) $$

الدخل المؤخر (ما بعد العد« «postnumerando)

$$ {}_{k|}a_x = v^{k+1} \frac{l_{x+k+1}}{l_x} + v^{k+2} \frac{l_{x+k+2}}{l_x} + \dots + v^{w-x} \frac{l_w}{l_x} = \sum_{t=k+1}^{w-x} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x} \qquad (9.5) $$

(9.1.3) الدخل العمري المؤقت

الدخل العمري المؤقت يتمثل في دفع أقسام الرواتب للمؤمن له، ما دام على قيد الحياة وذلك لمدة أقصاها n سنة.

وهذا الدخل يستفاد منه في حساب العلاوات بالقيمة الحالية الذي سنستعرضه في الفصل الثاني عشر. حيث إن الدخل العمري للمؤمن له يصرف عادة ما دام هذا الأخير على قيد الحياة ولكن ذلك محدد بعدد أقصى من السنوات يساويn .

الرموز:

$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ القيمة الحالية (PU)لدخل عمري وحدة مدفوع مسبقا (في بداية الفترة) ما دام المؤمن له على قيد الحياة ولمدة قصوى قدرها n سنة.

$a_{x:\overline{n}|}$ القيمة الحالية (PU) لدخل عمري وحدة مدفوع مؤخرا (في نهاية الفترة) ما دام المؤمن له على قيد الحياة ولمدة قصوى قدرها n سنة.

القواعد التالية يتم إنشاؤها قياسا على القواعد المبينة أعلاه:

الدخل المسبق ('ما قبل العد' preanumerando)

$$\boxed{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=1+v\frac{l_{x+1}}{l_x}+v^2\frac{l_{x+2}}{l_x}+\cdots+v^{n-1}\frac{l_{x+n-1}}{l_x}=\sum_{t=0}^{n-1}v^t\frac{l_{x+t}}{l_x}} \qquad (9.6)$$

الدخل المؤخر (ما بعد العد« postnumerando»)

$$\boxed{a_{x:\overline{n}|}=v\frac{l_{x+1}}{l_x}+v^2\frac{l_{x+2}}{l_x}+\cdots+v^{n}\frac{l_{x+n}}{l_x}=\sum_{t=1}^{n}v^t\frac{l_{x+t}}{l_x}} \qquad (9.7)$$

مثال:حددت العلاوات السنوية لأحد العملاء الذي يبلغ 25 سنة من عمره بـ € 1500 تدفع كلها مسبقا طالما بقي العميل على قيد الحياة وحتى بلوغه 65 سنة من عمره. احسب القيمة الحالية لتلك العلاوات.

الحل

القيمة الحالية (PV) تحسب من خلال القاعدة التالية:

$$VA = 1500\ddot{a}_{25:\overline{65-25|}} = 1000\ddot{a}_{25:\overline{40|}}$$

(9.1.4) الدخل العمري المؤجل والمؤقت

الدخل العمري والمؤقت يتمثل في صرف راتب إنزال شهري مؤجل طالما المؤمن له على قيد الحياة ولمدة أقصاها n سنة، وهذا الراتب يصرف بعد عدد k من الفترات تسمى الفترات المؤجلة.

الرموز:

${}_{k|}\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$: القيمة الحالية (أو PU) لدخل عمري وحدة ومؤجل بعدد k من السنوات ومدفوع مسبقا قبل العد (preanumerando) طالما أن المؤمن له باق على قيد الحياة وذلك لمدة أقصاها n سنة.

${}_{k|}a_{x:\overline{n|}}$: القيمة الحالية (أو PU) لدخل عمري وحدة ومؤجل بعدد k من السنوات ومدفوع مؤخرا بعد العد (postnumerando) طالما المؤمن له باق على قيد الحياة وذلك لمدة أقصاها n سنة.

قياسا بالقواعد المبينة أعلاه نورد فيما يلي القواعد المناسبة بشكلها المختزل:

الدخل المسبق ('ما قبل العد' preanumerando)

$$\boxed{{}_{k|}\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=k}^{k+n-1} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x}} \qquad (9.8)$$

الدخل المؤخر ('ما بعد العد' postnumerando)

$$\boxed{{}_{k|}a_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=k+1}^{k+n} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x}} \qquad (9.9)$$

(9.1.5) الدخل العمري للاستمرار في الحياة:

في هذه الحالة يتم دمج الدخل المؤكد مع الدخل العمري.

$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$:القيمة الحالية (أو PU) لدخل ٱلاستمرار في الحياةْ الوحدة ومدفوع مسبقا قبل العد (preanumerando) إثر وفاة المؤمن له وذلك خلال المدة المتبقية في العقد.

$a_{x:\overline{n}|}$: القيمة الحالية (أو PU) لدخل ٱلاستمرار في الحياةْ الوحدة ومدفوع مؤخرا بعد العد (postnumerando)إثر وفاة المؤمن له وذلك خلال المدة المتبقية في العقد.

الدخل المسبق (ْما قبل العدْ preanumerando)

$$\boxed{\ddot{a}_{x|\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \qquad (9.10)$$

الدخل المؤخر (ْما بعد العدْ postnumerando)

$$\boxed{a_{x|\overline{n}|} = a_{\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|}} \qquad (9.11)$$

مثال: تقدّم مؤمن له بطلب قرض مشفوع برهن إلى إحدى البنوك وتعهد بتسديد مبلغ القرض خلال فترة 20 سنة بحساب 15000€ في السنة.في حالة الوفاة يرغب المؤمن له أن تدفع شركة التأمين عنه المبلغ المذكور. احسب العلاوة الوحيدة لهذا العقد؟

الحل

القيمة الحالية (PV) أو العلاوة الوحيدة ((PU تكتب على النحو التالي:

$$UP = 15000a_{x|\overline{20}|} = 15000a_{\overline{n}|} - 15000a_{x:\overline{n}|}$$

يحصل المؤمن له على مبلغ (15000−15000=0) طالما بقي على قيد الحياة، وفي حالة الوفاة، يصرف له الدخل المؤكد فقط المقدر بـ15000.

(9.2) الإيرادات المجزأة

تدرج في بنود عقد التأمين عادة ما يسمى بالعلاوات المجزأة في حالة السداد أو القبض. سوف نستخدم قواعد مشابهة للقواعد رقم (4.31) ورقم (4.32).

الرموز:

$\ddot{a}^{(m)}{}_{\overline{x:n|}}$: القيمة الحالية (أوUP) لدخل الوحدة العمري والمدفوع مسبقا قبل العد (preanumerando) بصورة مجزأة بحساب $\frac{1}{m}$ في كل جزء.

سوف نبين فيما يلي نوعين فقط من القيم الحالية، حيث بالإمكان الحصول على القيم الحالية الأخرى بنفس الطريقة.

الدخل المسبق (ما قبل العد) ولمدى الحياة

$$\boxed{\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{m(w-x)} v\left(\frac{t}{m}\right)\frac{l_{x+\frac{1}{m}}}{l_x}} \qquad (9.12)$$

الدخل المؤخر (ما بعد العد) والمؤقت

$$\boxed{a_{x:\overline{n|}}^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{nm} v\left(\frac{t}{m}\right)\frac{l_{x+\frac{1}{m}}}{l_x}} \qquad (9.13)$$

لإيجاد قيمة $_{x+\frac{1}{m}}$ نستخدم طريقة التوليد الخطي بين عمرين صحيحين متتاليين:

$$l_{x+\frac{1}{m}} = \left(1-\frac{t}{m}\right)l_x + \frac{t}{m}l_{x+1}$$

بشكل عام يمكن حساب الأعمار غير الصحيحة $_x$ بالطريقة التالية:

$$\boxed{l_{x+\theta} = (1-\theta)l_x + \theta l_{x+1}} \qquad (9.14)$$

يمكن للقارئ مراجعة الفقرة 17.2 من هذا الكتاب للتعرف عن كثب على طريقة التوليد الخطي.

مثال: احسب القيمة ${}_{24,3}$ بالنسبة لامرأة وذلك باستخدام جدول الوفاة الموجود بالملحق.

الحل

$$l_{24} = 98'778, l_{25} = 98'727$$

وبالتالي فإن: $l_{24,3} = 0{,}7 l_{24} + 0{,}3 l_{25} = 98'762$

(9.3) الدخل لشخصين

نستخدم نفس القوانين المبينة أعلاه ولكن بالأخذ في الاعتبار الشخص الثاني، حيث إن الخدمات التأمينية المقدمة لشخصين تميز بين الخدمات المقدمة عند وفاة الشخص الأول من الخدمات المقدمة عند وفاة الشخص الثاني.

الرموز:

$\ddot{a}_{xy}$: القيمة الحالية (UP) لدخل عمري فوري لشخصين يصرف في حالة بقاء أحدهما على قيد الحياة.

$\ddot{a}_{\overline{xy}}$ القيمة الحالية (UP) لدخل عمري فوري لشخصين يصرف بعد الوفاة الثانية (أي بعد وفاة الشخصين).

القواعد

$$\boxed{\ddot{a}_{xy} = \sum_{t=0}^{w-x} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x} \frac{l_{y+t}}{l_y}} \tag{9.15}$$

$$\boxed{\ddot{a}_{\overline{xy}} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy}} \tag{9.16}$$

وبنفس الطريقة نحسب المداخيل الأخرى، حيث نحصل على:

$$\boxed{\ddot{a}_{\overline{xy}:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \ddot{a}_{y:\overline{n}|} - \ddot{a}_{xy:\overline{n}|}} \tag{9.17}$$

(9.3.1) دخل البقاء على قيد الحياة

نعرّف الرموز التالية:

$\ddot{a}_{x|y}$: القيمة الحالية لدخل عمري ما قبل العد لشخصين يصرف في حال بقاء y فقط على قيد الحياة.

$\ddot{a}_{y|x}$: القيمة الحالية لدخل عمري ما قبل العد لشخصين يصرف في حال بقاء x فقط على قيد الحياة.

القواعد المناسبة لهذه الرموز هي:

$$\boxed{\ddot{a}_{x|y} = \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy}} \tag{9.18}$$

$$\boxed{\ddot{a}_{y|x} = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{xy}} \tag{9.19}$$

(9.3.2) تركيبات عقود التأمين

يمكن للمؤمن له أن يرغب في تأمين شامل لشخصين من خلال عدة تركيبات حياة- وفاة. من أجل ذلك فإن حساب القيمة الحالية (**PV**) يجب أن يتبع القانون العام الآتي:

$$\boxed{PV = (A-D)PV_x + (B-D)PV_y + (C-B-A+D)PV_{xy} + DPV_{\overline{xy}}} \tag{9.20}$$

حيث:

A: المبالغ المصروفة في حال بقاءx فقط على قيد الحياة.

B: المبالغ المصروفة في حال بقاء y فقط على قيد الحياة.

C: المبالغ المصروفة في حال بقاء الزوجين x و y على قيد الحياة.

D: المبالغ المصروفة في حال وفاة الزوجين x و y .

مثال: لدينا زوجان يعولان طفلا عمره 5 سنوات، طالما بقيا الزوجان على قيد الحياة فإنه لا ضرورة لصرف أي دخل. في حال وفاة الزوج يصرف مبلغ 15000 ف.س. طيلة 20 سنة. وفي حال وفاة الزوجة يصرف 10000 ف.س. وفي حال وفاة الزوجين يصرف 30000 ف.س طيلة عشرين سنة للمساهمة في العناية بالطفل. أوجد القيمة الحالية لهذه التركيبة من التأمينات.

الحل

A: المبالغ المصروفة في حال بقاءx فقط على قيد الحياة:10000 ف.س.

B: المبالغ المصروفة في حال بقاء y فقط على قيد الحياة:15000 ف.س.

C: المبالغ المصروفة في حال بقاء الزوجين x وy على قيد الحياة: 0 ف.س.

D :المبالغ المصروفة في حال وفاة الزوجين x و y :30000 ف.س.

وبالتالي:

$$\text{VA} = -20'000\,\ddot{a}_{x:\overline{20}|} - 15'000\,\ddot{a}_{y:\overline{20}|} + 5'000\,\ddot{a}_{xy:20|} + 30'000\,\ddot{a}_{\overline{20}|}$$

ملاحظة:

إذا كانت $A = 1; B = 1, C = 1, D = 0$ فذلك يعني أن:$\ddot{a}_{\overline{xy}} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy}$.

إذا كانت $A = 1; B = 0, C = 0, D = 0$ فذلك يعني أن:$\ddot{a}_{\overline{x|y}} = \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy}$.

(9.4) تمارين

1- استخدم جدول الوفاة المرفق بالملحق لإيجاد القيمة الحالية لدخل عمري ما قبل العد تم صرفه لمؤمن لها عمرها 105 سنوات طالما بقيت على قيد الحياة. نسبة الفائدة المستعملة: 4%.

2- باستخدام جدول الوفاة في الملحق، أوجد القيمة الحالية لدخل عمري ما بعد العد صرف لمؤمن لها عمرها 105 سنوات طالما بقيت على قيد الحياة. نسبة الفائدة المستعملة: 4%.

3- استخدم نتائج التمرينين الأول والثاني للتاكد من المعادلة التالية:

$$a_x = \ddot{a}_x - 1$$

4- استخدم جدول الوفاة المرفق بالملحق لإيجاد القيمة الحالية لدخل عمري ما بعد العد تم صرفه لمؤمن له عمره 40 سنة لمدة 4 سنوات طالما بقي على قيد الحياة. نسبة الفائدة المستعملة: 3%.

5- اكتب العبارة الأكتوارية لدخل ما قبل العد سنوي يقدر بـ 250 € ، تم صرفه طيلة 25 سنة لمؤمن لها عمرها 18 سنة.

6- سوف يصرف لمؤمن له عمره 35 سنة مبلغ 100000 € إذا بقي على قيد الحياة إلى حين بلوغه 65 سنة. ما هي القيمة الحالية لهذه التغطية التأمينية إذا اعتبرنا نسبة فائدة 2% وجدول الوفاة المرفق بالملحق.

7- اكتب العبارة الأكتوارية للقيمة الحالية لدخل سنوي ما بعد العد يقدر بـ 5000 ف.س يصرف لمؤمن له حال بلوغه سن 65. علما بأن عمره حاليا هو 18 سنة.

8- حددت علاوات بقيمة 4000 € وجب صرفها لمدة عامين ما قبل العد إذا بقي المؤمن له (30 سنة حاليا) على قيد الحياة.

(أ) احسب القيمة الحالية لتلك العلاوات دون اعتبار نسبة الفائدة ولا الوفيات.

(ب) احسب القيمة الحالية باعتبار الفائدة فقط التي تقدر نسبتها بـ3%.

(جـ) احسب القيمة الحالية باعتبار نسبة فائدة 3% وجدول الوفاة المرفق بالملحق.

9- استخدم الرموز الأكتوارية للتعبير عن القيمة الحالية لدخل مدى الحياة مبين في الشكل التالي. علما بأن المؤمن له عمره حاليا 40 سنة.

10- إذا علمت أن :

$$l_x = 1'000\,(1-\frac{x}{120})$$

أوجد القيمة الحالية التالية باستخدام نسبة فائدة 5%:

$$a^{(2)}_{30:\overline{1|}}$$

11- فسر القاعدة التالية:

$$12'000\;{}_{25|}\ddot{a}_{40:\overline{8|}}$$

12- فسر القاعدة التالية:

$$12000\;{}_{5|}\ddot{a}^{(12)}_{25:30:\overline{10|}}$$

13- ■رأى زوجان في سن التقاعد أنه من الضروري لهما أن يحصلا على دخل سنوي يساوي 20000 ف.س طالما بقيا الاثنان على قيد الحياة وذلك بالإضافة إلى المعاش. إذا أصبحت الزوجة أرملة بفقدان زوجها فهي بحاجة إلى دخل يساوي 15000 ف.س. أما في صورة بقاء الزوج على قيد الحياة فهو يرغب في الحصول على مبلغ يساوي 8000 ف.س سنويا إضافة إلى راتبه التقاعدي. أوجد القيمة الحالية لهذه التركيبة التأمينية.