الفصل الحادي عشر

عدد التبديلات
Nombres de Commutation

تعد الأعداد التبديلية أعدادا مساعدة تجمع بين معامل الخصم وقانون الأحياء بهدف تسهيل العمليات الحسابية. وفي زمن كان الحساب اليدوي يلعب دورا كبيرا كسبت هذه الأعداد أهمية قصوى. ولا تزال هذه الأعداد تستخدم اليوم في عمليات حسابية فردية أو كجداول مساعدة مدرجة في الحاسب الآلي. عمليا، تمكن هذه الأعداد من كتابة القيم الحالية العادية التي تم تعريفها في الفصلين 9 و10 بطريقة أسهل وكذلك تمكن من حساب سريع للقيم الحالية والعلاوات في العقود التأمينية على رأس المال في حالة الوفاة أو في حالة البقاء على قيد الحياة.

(11.1) تبديلات الحياة

تمكن هذه التبديلات من نسخ القيم الحالية المتعلقة بالمداخيل؛ لذلك فهي تطبق خصوصا في عقود التأمين في حالة البقاء على قيد الحياة. الرموز المستخدمة هي: D, N, S. لن نقدم تعريفا للحرف S الذي يستخدم للمداخيل التصاعدية والتي لم يتم التطرق إليها في هذا الكتاب. الحروف D، N تأخذ مفهوما ذاكريا كما هو مبين في تعريفها الآتي:

- D تدل على عدد يوضع في أكثر الأحيان في بسط الكسر.
- تدل على عدد يوضع في أكثر الأحيان في مقام الكسر.

من المساوئ الأساسية لأعداد التبديلات هي وجود جدول للتبديلات لكل نسبة فائدة. في المقابل فهي تسهل بشكل كبير عمليات حساب القيم الحالية للدخل (العمري وغيره) ولرؤوس الأموال.

(11.1.1) التبديلات لفرد واحد

$$D_x = l_x v^x \tag{11.1}$$

$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_w = \sum_{t=0}^{w-x} D_{x+t} \tag{11.2}$$

كتابة القيمة الحالية حسب عدد التبديلات يستدعي بعض العمليات الحسابية.

نبدأ أولا بضرب البسط والمقام بـv^x بهدف الحصول على عبارة من نوع $l_x v^x$ وهو ما يمكن من تعريف D_x.

مثال: اكتب عبارة القيمة الحالية التالية في شكل عدد التبديلات:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

الحل

$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ هي:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^x \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

نضرب البسط والمقام بـv^x وهو ما يعطينا بعد عمل الاختزالات اللازمة:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^x \frac{l_{x+t}}{l_x}\frac{v^x}{v^x} = \frac{1}{l_x v^x}\sum_{t=0}^{n-1} v^{x+t} l_{x+t} = \frac{1}{D_x}\sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}$$

وهو ما يمكن كتابته كذلك:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

(11.1.2) القيم الحالية الأساسية بدلالة الأعداد التبديلية

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} \tag{11.3}$$

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} \tag{11.4}$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \tag{11.5}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \tag{11.6}$$

$${}_{k|}a_x = \frac{N_{x+k+1}}{D_x} \tag{11.7}$$

$${}_{k|}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+k}}{D_x} \tag{11.8}$$

$${}_{k|}a_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+k+1} - N_{x+k+n+1}}{D_x} \tag{11.9}$$

$${}_{k|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{D_x} \tag{11.10}$$

$$a_x^{(m)} = \frac{N_{x+1} + \frac{m-1}{2m} D_x}{D_x} \tag{11.11}$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{N_x + \frac{m-1}{2m} D_x}{D_x} \tag{11.12}$$

$$a_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1} + \frac{m-1}{2m}(D_x - D_{x+n})}{D_x} \tag{11.13}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{N_x - N_{x+n} - \frac{m-1}{2m}(D_x - D_{x+n})}{D_x} \tag{11.14}$$

obeikandl.com

مثال: ما هي العلاوة الوحيدة (UP) التي يجب على مؤمن له دفعها لتمويل دخل تقاعدي يقدر بـ €12000 سنويا يدفع ما قبل العد حين يبلغ من العمر 65 سنة؟ استخدم جدول التبديلات المرفق بالملحق وذلك لنسبة فائدة تساوي 3%.

الحل

العلاوة الوحيدة التي يجب على المؤمن له دفعها مقابل هذه الخدمة تكتب على النحو التالي:

$$UP = 12'000_{29|}\ddot{a}_{36} = 12'000\frac{N_{65}}{D_{36}}$$

وهو ما يعطينا في الأخير:

$$12'000 \times \frac{144'27}{33'84} = 52'567{,}88€$$

(11.1.3) التبديلات لشخصين

أعداد التبديلات لشخصين تعرف على النحو التالي:

$$\boxed{D_{xy} = l_x l_y v^{\frac{x+y}{2}}} \qquad (11.15)$$

$$\boxed{N_{xy} = D_{xy} + D_{x+1y+1} + D_{ww} = \sum_{t=0}^{w-x} D_{x+ty+t}} \qquad (11.16)$$

(11.2) التبديلات للوفاة

تمكن هذه التبديلات من نسخ القيم الحالية لرؤوس الأموال، وبالتالي فهي تطبق خاصة على التأمينات في حالة الوفاة.تظهر الرموز ثلاثة أنواع من الحروف: C, M, R. سوف لن نعرف الحرف R المستخدم للمستحقات التزايدية والتي لم نتطرق إليها في هذا الكتاب.

الحروف C, M تنطوي على مفهوم ذاكري وفعليا هي تعرف كالآتي:

C تدل على أنها الحرف الذي يسبق حرف D في ترتيب الحروف الأبجدية وهو الحرف الذي نجده في التبديلات عند البقاء على قيد الحياة.

M تدل على أنها الحرف الذي يسبق حرف N في ترتيب الحروف الأبجدية وهو الحرف الذي نجده في التبديلات عند البقاء على قيد الحياة.

(11.2.1) التبديلات لشخص واحد

$$C_x = d_x v^{x+1} \tag{11.17}$$

$$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots + D_{w-1} = \sum_{t=0}^{w-x-1} C_{x+t} \tag{11.18}$$

لإيجاد القيم الحالية لرؤوس الأموال من خلال التبديلات نقوم ببعض التغييرات على القواعد المماثلة المبينة في الفقرات السابقة، نبدأ بضرب البسط والمقام بـv^x لكي نوجد في الأخير العبارة C_x.

مثال: حرر القيمة الحالية من خلال عدد التبديلات لرأس مال في حالة الوفاة وذلك لمؤمن له عمره x ولمدى الحياة.

الحل

A_x تحسب كالآتي:

$$A_x = \sum_{t=0}^{w-x} v^{t+1} \frac{d_{x+t}}{l_x}$$

نضرب البسط والمقام بـv^x وهو ما يعطينا بعد اختزال الكسر:

$$A_x = \sum_{t=0}^{w-x} v^{t+1} \frac{d_{x+t}}{l_x} \frac{v^x}{v^x} = \frac{1}{l_x v^x} \sum_{t=0}^{w-x} v^{x+t+1} d_{x+t} = \frac{1}{D_x} \sum_{t=0}^{w-x} C_{x+t}$$

وهو ما يكتب كذلك:

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

(11.2.2) القيم الحالية الأساسية بدلالة الأعداد التبديلية

$$A_x = \frac{M_x}{D_x} \tag{11.19}$$

$${}_{|n}A_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \tag{11.20}$$

$${}_{k|}A_x = \frac{M_{x+k}}{D_x} \tag{11.21}$$

$${}_{k|n}A_x = \frac{M_{x+k} - D_{x+n}}{D_x} \tag{11.22}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} \tag{11.23}$$

$${}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} \tag{11.24}$$

مثال: احسب العلاوة الوحيدة لعقد تأمين مختلط بقيمة 15000 frs لفائدة مؤمن لها عمرها 50 سنة. المعطيات الأخرى: فترة التأمين: 12 سنة. القواعد الفنية للعمليات الحسابية: عدد التبديلات في الملحق بنسبة فائدة 3%.

الحل

العلاوة الوحيدة لهذه الخدمة تكتب على النحو التالي:

$$UP = 15'000A_{50:\overline{12}|} = \frac{M_{50}-M_{62}+D_{62}}{D_{50}}$$

وهو ما يعطي في النهاية:

$$15'000 \times \frac{8'557{,}43-7'746{,}65+14'702{,}83}{21'967{,}02} = 10'34\ frs$$

(11.2.3) التبديلات على شخصين

أعداد التبديلات على شخصين تعرف على النحو التالي:

$$C_{xy} = d_{xy}v^{\frac{x+y}{2}+1} \tag{11.25}$$

$$M_{xy} = C_{xy} + C_{x+1y+1} + C_{ww} = \sum_{t=0}^{w-x} C_{x+ty+t} \qquad (11.26)$$

(11.3) جدول التبديلات

تبدأ جداول التبديلات عادة برقم أولي يساوي 100000 شخص بعمر صفر سنة رغم وجود احتمال الوفاة في عمر صفر سنة، لكن أي رقم آخر أولي يمكن أن يأخذ مكانه في هذا الجدول. حيث لو كان لدى مؤسسة تأمينية عملاء تتجاوز أعمارهم جميعا الثلاثين سنة فذلك لا يمنع المؤسسة من الاعتماد على جدول تبديلات يبدأ من عمر 30 سنة بـ 5000 شخص مثلا. وذلك لا يمكنه أن يؤثر على نتائج القيم الحالية.

يوجد عرف إضافي في التبديلات على شخصين. حيث إن العبارة $v^x l_x l_y$ عادة تكون كبيرة الحجم في كتابتها لذلك نعوضها بالعبارة $10^{-5} v^x l_x l_y$ إذا كان عدد الأشخاص يساوي 100000 (10^{-5}). وهذا يجعل العبارة أقل حجما وتقترب من حجم القيم l_y أو x .

في النهاية لا بد من التذكير بأن جدول التبديلات على شخصين يجب أن يصمم بالإشارة إلى فارق السن بين مؤمنين لهما. وإنشاء الجدول يصبح سهلا جدا باستخدام برنامج الجداول الإلكترونية إكسل. حيث يكفي التزود باحتمالات الوفاةq_x وq_y لكل الأعمار.

المثال التالي يبين كيفية إدخال القواعد في الخلايا الأولى لإنشاء جدول التبديلات بنسبة فائدة 3% وذلك بالاستعانة ببرنامج الجداول الإلكترونية إكسل. قيم l_x تأخذ من جدول الوفاة المرفق بالملحق.

تبديلات الحياة

D	C	B	A	
Nx	Dx	lx	x	1
=SUM(C2:C$110)	=B2*1.03^-A2	100000	0	2
=SUM(C3:C$110)	=B3*1.03^-A3	99246	1	3
=SUM(C4:C$110)	=B4*1.03^-A4	99183	2	4

تبديلات الوفاة

D	C	B	A	
Mx	Cx	lx	x	1
=SUM(C2:C$110)	=(B2-B3)*1.03^-(A2+1)	100000	0	2
=SUM(C3:C$110)	=(B3-B4)*1.03^-(A3+1)	99246	1	3
=SUM(C4:C$110)	=(B4-B5)*1.03^-(A4+1)	99183	2	4

ملاحظة: الأعمدة C, D, E, F يمكن نسخها بأكملها إلى أسفل في عملية واحدة. بعد التدرب قليلا على كتابة القوانين يمكن إنشاء جدول تبديلات بسرعة فائقة.

(11.4) تمارين

1- اكتب قانون العلاوة الوحيدة ثم احسب القيمة المناسبة لتأمين رأس مال في حالة الوفاة خلال السنة لمؤمن له عمره 20 سنة وذلك باستخدام أعداد التبديلات المرفق بالملحق. علما بأن رأس المؤمن هو: 80000 €.

2- اكتب قانون العلاوة الوحيدة ثم احسب القيمة المناسبة لتأمين رأس مال في حالة الوفاة لمدى الحياة لمؤمن له عمره 20 سنة وذلك باستخدام أعداد التبديلات المرفقة بالملحق، علما بأن رأس المؤمن هو: 80000 €.

3- استخدم جدول التبديلات المرفق بالملحق لحساب القيمة الحالية لدخل عمري ما قبل العد قيمته 48000 frs يصرف إلى مؤمن لها عمرها 45 سنة طالما بقيت على قيد الحياة.

4- استخدم جدول التبديلات المرفق بالملحق لحساب القيمة الحالية لدخل عمري ما قبل العد قيمته 4000 frs شهريا يصرف إلى مؤمن لها عمرها 45 سنة طالما بقيت على قيد الحياة.

5- ينص عقد تأمين على الحياة أن تصرف مؤسسة التأمين مبلغا قدره 15000 € إذا توفيت المؤمن لها وعمرها 28 سنة قبل بلوغها سن 62 أو إذا بقيت على قيد الحياة في سن 62. حرر واحسب العلاوة الوحيدة (UP) لهذا العقد باستخدام أعداد التبديلات في الملحق.

6- باستخدام جدول التبديلات في الملحق، احسب القيمة الحالية لدخل عمري سنوي ما بعد العد قيمته 4000 € يصرف لمؤمن له عمره 40 سنة لمدة أربع سنوات طالما بقي على قيد الحياة.

7- يوجب عقد التأمين على صرف مبلغ 10000 فرنك إذا توفي المؤمن له وعمره حاليا 30 سنة قبل بلوغه سن الأربعين و20000 فرنك إذا توفي بين الأربعين والخمسين و15000 فرنك إذا بقي على قيد الحياة في سن الخمسين. احسب العلاوة الوحيدة لهذا العقد باستخدام أعداد التبديلات في الملحق.

8- المطلوب توصيف نوعية التغطية الممثلة لكل من العبارات التالية:

(أ) $1'000\left(\frac{C_{43}}{D_{43}}\right)$ €.

(ب) $1'000\left(\frac{C_{43}+C_{44}+C_{45}+C_{46}}{D_{43}}\right)$ €.

(جـ) $2'000\left(\frac{N_{65}-N_{75}}{D_{20}}\right)$ €.

(د) $2'000\left(\frac{N_{65}}{D_{20}}\right)$ €.

(هـ) $5'000\left(\frac{M_{65}}{D_{20}}\right)$ €.

(و) $15'000\left(\frac{M_{25}-M_{50}+D_{50}}{D_{25}}\right)$ €.

(ز) $€\ 1'500\left(\frac{D_{65}}{D_{20}}\right)$.

9- احسب العبارات التالية مستعينا بأعداد التبديلات في الملحق (المؤمن له رجل):

(أ) $\ddot{a}_{55}$.

(ب) $a_{55:\overline{15}|}$.

(جـ) $\ddot{a}_{75:\overline{15}|}$.

(د) $\ddot{a}^{(12)}_{75:\overline{15}|}$.

(هـ) $A_{25:\overline{40}|}$.

(و) $A_{25:\overline{1}|}$.

10- اشرح العلاقة التالية باستخدام أعداد التبديلات:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|} = 1 - {}_nE_x$$

11- إذا علمت أن: $i = 4\%, N_{x+2} = 36'433, N_{x+1} = 38'528, N_x = 40'713$, أوجد قيمة q_x.

12- ■ أبرم مؤمن له يبلغ من العمر 30 سنة عقد تأميني مع مؤسسة تأمينات لتأمين مؤقت عند الوفاة إلى حين بلوغه سن 65 عاما. وقد دفع في مقابل ذلك علاوة وحيدة تقدر بـ813,3853' frs.أوجد رأس المال المؤمن باستخدام أعداد التبديلات في الملحق؟

13- ■ تعاقد مؤمن له عمره 30 عاما مع شركة تأمين قصد تأمين مبلغ 40000 € لمدة 25 عاما وأبرم العقد في صورة تأمين مختلط. أوجد العلاوة الوحيدة المطلوب دفعها من المؤمن له إذا افترضنا أن المؤمن أضاف نسبة 2% من رأس المال المؤمن في مقابل مصروفات إدارية سنوية طالما المؤمن له باق على قيد الحياة خلال مدة التعاقد. حرر ثم احسب العلاوة الوحيدة لهذا العقد باستخدام أعداد التبديلات في الملحق.