الباب الرابع

مواضيع إضافية في الرياضيات

- **الفصل السادس عشر: المعادلات، الأسات، اللوغاريتمات، المتواليات**
- **الفصل السابع عشر: الجمع، الاستيفاء الداخلي، الاحتمالات، المصفوفات**

الفصل السادس عشر

المعادلات، الأسات، اللوغاريتمات، المتواليات

Equations, Puissances, Logarithmes, Progressions

(16.1) المعادلات

في الرياضيات المالية نتعامل مع المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد ومجهولين وكذلك المعادلات من الدرجة الثانية. بينما البحث عن معدلات الأداء يؤدي إلى المعادلات من درجات أعلى من 2. هذه المعادلات سيتم تناولها بأكثر تفصيل في الفصل القادم.

(16.1.1) المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

في المعادلات من الدرجة الأولى لمجهول واحد نسعى لعزل المجهول في طرف من المعادلة وترك العبارات الأخرى في الطرف الآخر من المعادلة. نفترض أن القارئ يمتلك القدرة على التعامل مع القواعد الأساسية لاستخدام الكسور والاختزالات... إلخ ولنتذكر القاعدتين التاليتين:

(أ) عندما نحول عبارة من طرف إلى طرف آخر لا بد من تغيير الإشارة.

مثال: $x - 2 = 7$ تعني أن $x = 9$ أو $x = 7 + 2$

(ب) إذا قسمنا أحد أطراف المعادلة برقم غير صفري يجب تقسيم الطرف الآخر بنفس الرقم. مثال: $3x = 12$ تعني أن $x = 4$ أو $x = \frac{12}{3}$

بعض الأمثلة المحلولة:

مثال رقم (1): أوجد حل المعادلة التالية:

$$3x - 10'000 = x + 20'000$$

الحل

$3x - 10'000 = x + 20'000$	المعادلة الأصلية
$2x - 10'000 = 20'000$	تحويل المجهول إلى الطرف الأيسر
$2x = 30'000$	تحويل 10000 إلى الطرف الأيمن
$\frac{2x}{2} = \frac{30'000}{2}$	تقسيم الطرفين على 2

وهو ما يعطينا في الأخير: $x = 15'000$

مثال رقم (2): أوجد حل المعادلة التالية:

$$P \cdot a_{\overline{n}|} = 30'000 \cdot A_{x:\overline{n}|} + P$$

الحل

$P \cdot a_{\overline{n}|} = 30'000 \cdot A_{x:\overline{n}|} + P$	المعادلة الأصلية
$P \cdot a_{\overline{n}|} - P = 30'000 \cdot A_{x:\overline{n}|}$	تحويل إلى الطرف الأيسر
$P(a_{\overline{n}|} - 1) = 30'000 \cdot A_{x:\overline{n}|}$	إظهار
$\frac{P(a_{\overline{n}|} - 1)}{a_{\overline{n}|} - 1} = \frac{30'000 \cdot A_{x:\overline{n}|}}{a_{\overline{n}|} - 1}$	قسمة الطرفين على $a_{\overline{n}|} - 1$

وهو ما يعطينا في الأخير: $P = \frac{30'000 \cdot A_{x:\overline{n}|}}{a_{\overline{n}|} - 1}$

مثال رقم (3): أوجد حل المعادلة التالية:

$$P\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \beta P\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

الحل

$$\begin{aligned}
P\ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \beta P\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{n}} \\
P\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta PC\ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{n}|} \\
P\ddot{a}_{x:\overline{n}|}(1-\beta) &= A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{n}|} \\
\frac{P\ddot{a}_{x:\overline{n}|}(1-\beta)}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}(1-\beta)} &= \frac{A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}(1-\beta)}
\end{aligned}$$

وهو ما يعطينا في الأخير: $P = \frac{A_{x:\overline{n}|}+\alpha+\gamma\ddot{a}_{x:\overline{n}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}(1-\beta)}$

(16.1.2) المعادلات من الدرجة الأولى بمجهولين

تسمى كذلك نظم المعادلات الخطية، توجد عدة طرق لحل هذه النظم، سوف نستخدم في هذه الفقرة طريقة التبديل التي يمكن تعميمها إلى نظم معادلات خطية لعدد من المعادلات والمجاهيل.

الطريقة تتمثل في عزل أحد المجاهيل في إحدى المعادلات والتعويض عنه في بقية المعادلات التي عددها $n-1$. في حالة نظم المعادلات المتكونة من معادلتين ومجهولين يكفي أن نعزل مجهولا واحدا في إحدى المعادلتين ونعوض عن قيمته في المعادلة الأخرى. وهذه بعض الحلول لنظم المعادلات الخطية.

مثال رقم (1): أوجد حل النظام التالي:

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ 3x - y = 25 \end{cases}$$

الحل

$y = 15 - x$ عزل في المعادلة الأولى

$3x - (15 - x) = 25$ تعويض في المعادلة الثانية

$3x - 15 + x = 25$ حذف الأقواس

$4x = 40$ تجميع

$x = 10$ اختزال

يكفي بعد ذلك أن نعوض عن x في المعادلة الأولى أو الثانية لكي نجد $y = 5$

مثال رقم (2): أوجد قيمتي استثمارين: الأول يوفر 4% والثاني 5% والاثنان معا يوفران عائدا يقدر بـ400 € سنويا. أما إذا عكسنا الاستثمارين ووضعنا الاستثمار الأول بدلا من الثاني والثاني بدلا من الأول فسنحصل على عائد يساوي 410 €. أوجد قيمة كل من الاستثمارين؟

الحل

لنرمز إلى مبلغ الاستثمار الأول الذي يوفر 4% (0.04) وقيمة الاستثمار الثاني الذي يوفر 5% (0.05). نستطيع كتابة نظام المعادلات الخطي لهذه المسألة كالآتي:

$$\begin{cases} 0,04x + 0,05y &= 400 \\ 0,05x + 0,04y &= 410 \end{cases}$$

$0,05y = 400 - 0,04x$ عزل $0,05y$ في المعادلة الأولى

$y = 8'000 - 0,8x$ تقسيم الطرفين على 0,05

$0,05x + 0,04(8'000 - 0,8x) = 410$ تعويض عن y في المعادلة الثانية

$0,05x + 320 - 0,032x = 410$ فك الأقواس

$0,018x = 90$ تجميع

$x = 5'000$ اختزال

وبما أن $y = 8'000 - 0,8x$ ينتج عنه $y = 8'000 - 0,8 \times 5'000$

فالمبلغان المستثمران هما: 5000 € و4000 €.

(16.1.3) المعادلة من الدرجة الثانية

تندرج المعادلات من الدرجة الثانية في الرياضيات المالية وأساسا في المسائل التي يطلب فيها البحث عن نسبة الفائدة أو معدل الإيرادات.

تأخذ المعادلة من الدرجة الثانية بشكل عام الصورة التالية:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0} \qquad (16.1)$$

يوجد جذران لهذه المعادلة في حالة وجود حل $(b^2 - 4ac \geq 0)$:

$$\boxed{x_1; x_2 = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \qquad (16.2)$$

مثال رقم (1): أوجد حل المعادلة التالية:

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

الحل

بما أن فالمعادلة لها جذران هما:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{5+\sqrt{1}}{4} = \frac{6}{4} = 1,5$$

و

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{5-\sqrt{1}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

فالحل هو إذا: $x = 1$ و $x = 1,5$

مثال رقم (2): إذا علمت أن $r = i + 1$ احسب نسبة الفائدة i التي تحقق المعادلة التالية:

$$352 = 100r + 200r^2$$

الحل

نكتب أولا المعادلة في شكلها المعتاد: $\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$

أي $200r^2 + 100r - 352 = 0$

بمـا أن $b^2 - 4ac = 100^2 - 4 \times 200 \times (-352) = 291'600 > 0$

فالمعادلة لها جذران هما:

$$r_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-100+\sqrt{291'600}}{400} = \frac{440}{400} = 1{,}1$$

و

$$r_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-100-\sqrt{291'600}}{400} = \frac{-640}{400} = -1{,}6$$

وبما أن نسبة الفائدة يجب أن تكون موجبة فالنسبة التي نبحث عنها هي $i = r - 1$ ، أي $i = 0{,}1$ أو 10%.

(16.2) الأسات والجذور

حساب الأسات يتواجد بقوة في الرياضيات المالية والأكتوارية وخاصة عند حساب معدلات الخصم وعمليات التحويل إلى رأس المال (الرسملة).

القواعد

إذا كانت $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ فإن: $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ مرة}}$

الجدول التالي يلخص أهم القوانين حول الأسات:

$a^0 = 1$	$a^{-1} = \frac{1}{a}$	$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$
$a^p a^q = a^{p+q}$	$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$	$(a^p)^q = a^{pq}$
$a^p b^p = (ab)^q$	$\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p$	$\sqrt[p]{a} = a^{1/p}$

ولدينا كذلك: $a^{1/2} = \sqrt{a}$

مثال رقم (1): أوجد ما يلي:

$$1,02^4 \times 1,02^7$$

الحل

$$1,02^4 \times 1,02^7 = 1,02^{(4+7)} = 1,02^{11} = 1,24$$

مثال رقم (2): احسب العبارة التالية:

$$\frac{(1+i)^5}{(1+i)^4}$$

الحل

$$\frac{(1+i)^5}{(1+i)^4} = (1+i)^{5-4} = (1+i)^1 = 1+i$$

مثال رقم (3): أوجد العبارة التالية:

$$\frac{v^{x+t-1}}{v^{x+1}}$$

الحل

$$\frac{v^{x+t-1}}{v^{x+1}} = v^{x+t-1-(x+1)} = v^{x+t-1-x-1} = v^{t-2}$$

مثال رقم (4): اكتب العبارة التالية من دون المقام:

$$NPV = \frac{C_1}{1+i} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(1+i)^n} + \frac{V_n}{(1+i)^n} - V_0$$

الحل

$$NPV = C_1\,(1+i)^{-1} + C_2(1+i)^{-2} + \cdots + C_n(1+i)^{-n} + V_n(1+i)^{-n} - V_0$$

(16.3) اللوغاريتم والأسس

يندرج استخدام اللوغاريتم والأسس عندما يكون المجهول موجودا في الأس مثال.

القواعد

الدالة $f(x) = ln(x)$ هي اللوغاريتم الطبيعي للمتغير x وهي معرفة عندما تكون $x > 0$.

الدالة $f(x) = log(x)$ هي اللوغاريتم العشري للمتغير x وهي كذلك معرفة عندما تكون $x > 0$.

الدالة $f(x) = e^x$ هي الأس الطبيعي للمتغير x وهي معرفة عند جميع القيم التي يأخذها المتغير x .

قيمة الرمز e هي : $2,718281 ...$

دالة الأس الطبيعي هي الدالة العكسية لدالة اللوغاريتم الطبيعي حيث إن: $e^{lnx} = x$ أو $\ln(e^x) = x$ عندما تكون $x > 0$.

الدالة $f(x) = 10^x$ هي الدالة العكسية لدالة اللوغاريتم العشري في x، وهو ما يمكننا من كتابة العلاقات التالية:

$$y = \log(x) \Leftrightarrow 10^y = x \text{ و } y = \ln(x) \Leftrightarrow e^y = x$$

خصائص

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$	$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$	$\ln(a^p) = p\ln a$
$e^a e^b = e^{a+b}$	$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$	$(e^a)^p = e^{ap}$

مثال رقم (1): أوجد قيمة x في المعادلة التالية:

$$10 = 3^x$$

الحل

$10 = 3^x$ المعادلة الأصلية

$ln(10) = ln(3^x)$ تحويل الطرفين إلى اللوغاريتم

$ln(10) = xln(3)$ خصائص اللوغاريتم

$x = \frac{ln(10)}{ln(3)}$ التقسيم على

الحل هو إذا: $\frac{ln(10)}{ln(3)} = 2,0959$

مثال رقم (2): دالة رأس المال المحولة تربط بين القيمة المستقبلية (C_n) وكل من القيمة الحالية (C_0) وعدد الفترات (n) ومعامل رأس المال (r) وذلك من خلال العلاقة التالية:

$$C_n = C_0 r^n$$

استخرج قيمة n في كل من C_0 وC_n وr :

الحل

$C_n = C_0 r^n$ المعادلة الصلية

$\frac{C_n}{C_0} = r^n$ القسمة على C_0

$ln(\frac{C_n}{C_0}) = ln(r^n)$ التحويل إلى لوغاريتم

$ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right) = nln(r)$ خاصية اللوغاريتم

$\frac{ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right)}{ln\ (r)} = n$ القسمة على $ln(r)$

الحل هو إذا: $\frac{ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right)}{ln(r)}$

(16.4) المتواليات

تتواجد المتواليات خاصة في إعداد القواعد المالية للإيرادات (الدخل).

(16.4.1) المتواليات العددية

تمثل المتسلسلة:

10 8 6 4 2

متوالية عددية نعرف من خلالها:

- الحد الأول في المتوالية وهو: 2 ($a_1 = 2$).
- الحد الخامس والأخير في المتوالية وهو: 10 ($a_5 = 10$).
- أساس المتوالية هو:2 (R=2).

خواص المتوالية العددية (عدد حدودها يساوي n)

$a_n = a_1 + (n-1)R$	$a_n = a_{n-1} + R$
$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$	

مثال رقم (1): أوجد الحد العاشر والحد رقم n للمتوالية العددية التالية:

14 11 8 2

الحل

$Q_1 = 8$ الحد الأول

$R = 11 - 8 = 3$ أساس المتوالية= $a_2 - a_1$

$a_{10} = a_1 + (10-1)R = 8 + 9 \times 3 = 35$ الحد العاشر

أما الحد رقم n فهو يساوي:

$a_n = a_1 + (n-1)R$ استخراج الحد رقم n في الحد الأول

$a_n = 8 + (n-1)3$

$a_n = 8 + 3n - 3$ فك الأقواس

$a_n = 5 + 3n$ اختزال

مثال رقم (2): وزع مبلغ وقدره 15000 € على 5 موظفين وتم التوزيع بحيث يكون هناك بـ500 € بين كل موظف وموظف آخر.أوجد المبلغ الذي يحصل عليه الموظف الأول؟

الحل

$a_5 = a_1 + (5-1) \times 500$	استخراج الحد الخامس في الحد الأول
$a_5 = a_1 + 2'000$	فك الأقواس
$a_1 + a_2 + \cdots + a_5 = 15'000$	المبلغ الموزع
$\frac{5\,(a_1+a_5)}{2} = 15'000$	القاعدة في صورة أخرى
$\frac{5\,(a_1+(a_1+2'000))}{2} = 15'000$	التعويض عن قيمة a_5
$a_1 + (a_1 + 2'000) = 6'000$	الضرب بـ $^2/_5$
$a_1 = 2'000$	اختزال

الموظف الأول يحصل بذلك على 2000 €

(16.4.2) المتواليات الهندسية

المتسلسلة التالية:

2 4 8 16 32

تمثل متوالية هندسية نعرف من خلالها:

- الحد الأول في المتوالية وهو: 2 $(a_1 = 2)$.
- الحد الخامس والأخير في المتوالية وهو: 32 $(a_5 = 32)$.
- أساس المتوالية هو:2 (R=2).

خواص المتوالية الهندسية (عدد حدودها يساوي n)

$a_n = a_{n-1}R$	$a_n = a_1 R^{n-1}$
$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \frac{1-R^n}{1-R}$ avec $R \neq 1$	
Si $\mid R \mid < 1$ alors $a_1 + a_2 + \cdots = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1}{1-R}$	

مثال رقم (1): أوجد مجموع الحدود للمتوالية الهندسية التالية:

$$\underbrace{1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^{n-1}}_{n\text{عنصر}}$$

الحل

$$a_1 = 1 \quad R = v$$

مجموع الحدود لمتوالية هندسية يساوي:

$$a_1 \frac{1-R^n}{1-R} = \frac{1-v^n}{1-v}$$

بما أن: $d = v - 1$ فإن:

مجموع الحدود للمتوالية الهندسية = $\frac{1-v^n}{d}$

وهذه العبارة تمثل القيمة الحالية لدخل مؤكد ما قبل العد: $\ddot{a}_{\overline{n|}} = \frac{1-v^n}{d}$

مثال رقم (2): أوجد القيمة الحالية لدخل عمري ما بعد العد:

$$a_{\overline{\infty|}} = v + v^2 + v^3 + \cdots$$

الحل

$$a_1 = v \, R = v$$

مجموع الحدود (لعدد لانهائي) لمتوالية هندسية يساوي:

$$\frac{a_1}{1-R} = \frac{v}{1-v}$$

بما أن: $d = 1 - v$ فإن:

مجموع الحدود للمتوالية الهندسية $= \frac{}{d} = \frac{\frac{1}{1+i}}{\frac{i}{1+i}} = \frac{1}{1+i} \times \frac{1+i}{i} = \frac{1}{i}$

وهذه العبارة ليست سوى القيمة الحالية لدخل عمري في نهاية الفترة:

$$a_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{i}$$