الباب الثاني

الرياضيات الاكتوارية

الفصل السابع

الدوال البيومترية

Fonctions Biomètriques

في هذا الفصل سوف يتم تعريف قواعد الاحتمالات الضرورية للقيام بالعمليات الأكتوارية، حيث إن الرياضيات الأكتوارية تجمع بين الرياضيات المالية وحساب الاحتمالات، فتسديد الالتزامات الناتجة عن استثمار رأس مال لم يعد مؤكدا كما هو الحال في الرياضيات المالية بل مرتبط ببقاء الشخص على قيد الحياة، كما أن المدة التي يتم أثناءها صرف دخل ليست مؤكدة فهي مرهونة بحياة أو وفاة المؤمن له، فالمستحقات تصبح متغيرات عشوائية والقيم الحالية تتحول إلى توقعات رياضية.

لمزيد من المعلومات حول الاحتمالات يمكن للقارئ الرجوع إلى نظريات الاحتمالات التي وقع التطرق إليها في الفصل السابع عشر.

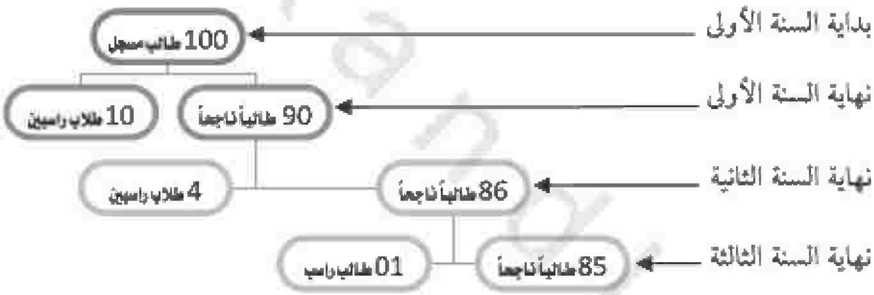
(7.1) احتمال الوفاة واحتمال البقاء على قيد الحياة

يمكن مقارنة الاحتمالات الرئيسية المستخدمة في العمليات الأكتوارية بالمثال التالي:

مثال: ليكن لدينا مدرسة مكونة من 100 طالب مسجلين في الصف الأول: هذه المؤسسة التعليمية التي لا تسمح بالرسوب في أي من فصولها، كانت قد سجلت خلال السنوات الدراسية الثلاث الماضية النتائج التالية:

- 10 طلاب رسبوا في السنة الأولى.
- 4 طلاب رسبوا في السنة الثانية.
- طالب واحد رسب في السنة الثالثة.

هذه الحالة يمكن عرضها على الشكل البياني التالي:

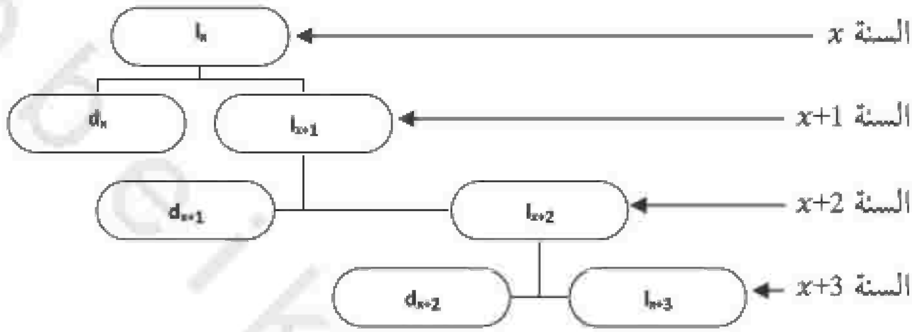


يمكن من خلال هذا الرسم إطلاق سلسلة من الاحتمالات:

- احتمال النجاح في السنة الأولى: $\frac{90}{100}$.
- احتمال الرسوب في السنة الأولى: $\frac{10}{100}$.
- احتمال النجاح في السنة الثانية لطالب مسجل في السنة الأولى: $\frac{86}{100}$.
- احتمال النجاح في السنة الثالثة لطالب مسجل في السنة الثانية: $\frac{85}{100}$.
- احتمال النجاح في السنة الثالثة لطالب مسجل في السنة الأولى: $\frac{85}{100}$.
- احتمال الرسوب في السنة الثالثة لطالب مسجل في السنة الأولى: $\frac{1}{100}$.
- احتمال الرسوب في السنوات الثلاث لطالب مسجل في السنة الأولى:

$$\frac{15}{100} = \frac{100-85}{100} = \frac{10+4+1}{100} .$$

يمكننا الآن تحويل نفس المثال أعلاه إلى العالم الأكتواري، ليصبح الرسم ذاته على النحو التالي:



وفي السياق ذاته للقالب (نجاح/رسوب) سوف نعد بعض الرموز والاحتمالات الأساسية للعمليات الأكتوارية.

الرموز:

x: سن رجل (و y سن امرأة).

l_x: عدد الأفراد الأحياء في سن x.

d_x: عدد الأفراد المتوفين بين السن x والسن $x + 1$.

القيم l_x وd_x تقرأ في جدول حياة (وفاة) الذي سنتطرق إليه في الفصل القادم.

$$\boxed{d_x = l_x - l_{x+1}} \tag{7.1}$$

باستخدام نفس التحليل السابق يمكن إيجاد الاحتمالات التالية:

p_x: احتمال بقاء شخص في السن x على قيد الحياة إلى حين بلوغه السن x+1 .

$$\boxed{p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}} \tag{7.2}$$

q_x: احتمال وفاة شخص (وهو في السن x) بين السن x والسن x+1 .

$$\boxed{q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = 1 - p_x} \tag{7.3}$$

$_2p_x$: احتمال بقاء شخص في السن x على قيد الحياة إلى حين بلوغه السن x+2.

$$_2p_x = p_x \times p_{x+1} = \frac{l_{x+1}}{l_x}\frac{l_{x+2}}{l_{x+1}} = \frac{l_{x+2}}{l_x}$$

$_np_x$: احتمال بقاء شخص في السن x على قيد الحياة إلى حين بلوغه السن x+n.

$$\boxed{_np_x = p_x \times p_{x+1} \times \dots = \frac{l_{x+n}}{l_x}} \quad (7.4)$$

$_{1|}q_x$: احتمال وفاة شخص (وهو في السن x) بين السن x+1 و السن x+2.

$$_{1|}q_x = p_x \times q_{x+1} = \frac{d_{x+1}}{l_x}$$

$_{n|}q_x$: احتمال وفاة شخص (وهو في السن x) بين السن x+n و السن x+n+1.

$$\boxed{_{n|}q_x = \; _np_x \times q_{x+n} = \frac{d_{x+n}}{l_x}} \quad (7.5)$$

$_nq_x$: احتمال وفاة شخص (وهو في السن x) خلال الـ n سنوات القادمة.

$$\boxed{_nq_x = 1 - \; _np_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}} \quad (7.6)$$

مفاهيم تكميلية:

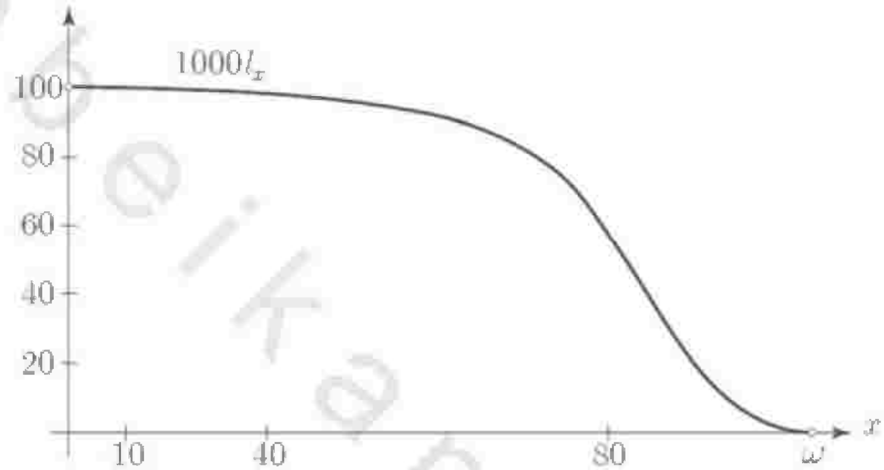
α: أصغر سن مشاهد في جدول الوفاة (انظر الفصل القادم) يقترن باحتمال وفاة غير صفري. في الغالب تبتدئ جداول الوفاة بعدد عشوائي $l_\alpha = 100'000$. كما تبدأ جداول المؤمن لهم بالأعداد $\alpha = 10$; أو 15 أو 20، بينما جداول التعداد السكاني تبدأ بـ: $\alpha = 0$.

ω: آخر سن في الجدول يمكن أن نجد فيه أحياء.

$$\boxed{l_x = d_x + d_{x+1} + \dots + d_\omega = \sum_{u=x}^{\omega} d_u} \quad (7.7)$$

$$\boxed{l_{x+1} = l_x\,(1 - q_x)} \quad (7.8)$$

ملاحظة: الرسم البياني التالي يوضح أن سلسلة الأرقام $l_\omega;\dots;l_1;_0$ تمثل سلسلة واحد لواحد تنازلية وتسمى **ترتيب الأحياء.**



مثال: استخدم جدول الوفاة المتواجد بالملحق لإيجاد الاحتمالات التالية:

(أ) احتمال أن يبقى رجل في سن 20 على قيد الحياة إلى حين بلوغه سن 60.

(ب) احتمال أن يتوفى رجل في سن 20 قبل بلوغه سن 60.

(جـ) احتمال أن يتوفى رجل في سن 20 عند بلوغه سن 60.

(د) احتمال أن يتوفى رجل في سن 20 عندما يتراوح سنه بين 60 و70.

الحل نحتاج إلى الأرقام التالية لإيجاد الحل $_{20} = 98'439$ ، $l_{60} =$ $86'312$ ، $l_{70} = 71'040$ ، $d_{60} = l_{60} - l_{61} = 86312 - 85288$.

(أ) $_{40}p_{20} = \frac{l_{60}}{l_{20}} = \frac{86312}{98439} = 0.8768$.

(ب) $_{40}q_{20} = \frac{l_{20} - l_{60}}{l_{20}} = \frac{98439 - 86312}{98'439} = 0.1232$.

وبالتالي فإن: $_{40}p_{20} + {}_{40}q_{20} = .8768 + 0.1232 = 1$.

(جـ) $ {}_{40|}q_{20} = \frac{d_{60}}{l_{20}} = \frac{1,024}{98,439} = 0.0104$.

(د) $ {}_{40|10}q_{20} = {}_{20}p_{40} \times {}_{10}q_{60} = \frac{l_{60}-l_{70}}{l_{20}} = \frac{86312-71040}{98439} = 0.1551$.

(7.2) توقع الحياة

ليكن لدينا رجل على قيد الحياة في عيد ميلاده رقمx . عدد السنوات المتبقية في حياته هو متغير عشوائي يمكننا احتساب التوقع الرياضي له (انظر الفقرة 17.3.3). إذا أهملنا الأجزاء من السنة فإن هذا التوقع يساوي:

$$e_x = 0 \times q_x + 1 \times {}_{1|}q_x + 2 \times {}_{2|}q_x + \cdots + (\omega - x) \times {}_{\omega-x|}q_x$$
$$e_x = \frac{1}{l_x}\left(0 \times d_x + 1 \times d_{x+1} + 2 \times d_{x+2} + \cdots + (\omega - x) d_\omega\right)$$

ويمكن كتابة العبارة أيضا:

$$e_x = \frac{1}{l_x}\left(l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots + l_\omega\right)$$

كذلك يمكننا اختزال العبارة على النحو التالي (وهو ما يسمى **توقع الحياة المختزل**).

$$\boxed{e_x = \frac{1}{l_x}\sum_{t=1}^{\omega-x} l_{x+t}} \qquad (7.9)$$

أما إذا بدأنا بالجمع انطلاقا من صفر فإننا نحصل على **توقع الحياة الكلي**:

$$\boxed{\ddot{e}_x = \frac{1}{l_x}\sum_{t=0}^{\omega-x} l_{x+t}} \qquad (7.10)$$

غالبية جداول الوفاة تعرف المتوسط بين توقع الحياة المختزل وتوقع الحياة الكلي وهو ما يعرف **متوسط توقع الحياة**:

$$\boxed{\mathring{e}_x = \ddot{e}_x - 0.5 = e_x + 0.5} \qquad (7.11)$$

ملاحظة: المقادير d_x،l_x،q_x،p_x و $\overset{o}{e}_x$ تسمى القيم البيومترية. الجدول الذي يحتوى هذه القيم لجميع الأعمار يسمى جدول الوفاة. وهذا الجدول يمكن إعداده بسهولة حيث يكفي معرفة القيم x وكذلك القواعد (7.1) و (7.3) و (7.8) و (7.9).

معدلات توقع الحياة لبعض الدول:

البلد	الرجال	السيدات
اليابان	78	85
السويد	77	82
سويسرا	77	82
أستراليا	77	82
كندا	76	81
إيطاليا	76	82
أسبانيا	75	82
فرنسا	75	83
ألمانيا	74	81
الولايات المتحدة	74	79
يوغسلافيا	70	75
تونس	69	73
البرازيل	64	72
النيبال	58	58
نيجيريا	50	51
سيرا ليون	37	39

المصدر: تقرير الأمم المتحدة لسنة 2000.

(7.2.1) الاحتمالات على شخصين

ليكن لدينا x وy أعمار الشخصين (المؤمن لهما) في اللحظة التي بدأ فيها عقد التأمين نافذا. نتحدث عن انحلال الزوجين إذا حدثت الوفاة الأولى. الاحتمالات الرئيسية التي نعترضها لهذين الشخصين هي:

${}_np_{xy}$:احتمال أن يبقى الزوجان على قيد الحياة بعد n سنة.

$$ {}_np_{xy} = {}_np_x + {}_np_y = \frac{l_{x+n}}{l_x}\frac{l_{y+n}}{l_y} \tag{7.12} $$

${}_{|n}q_{xy}$:احتمال أن يتوفى أحد الزوجين خلال الـ n سنة القادمة.

$$ {}_{|n}q_{xy} = 1 - {}_np_{xy} = \frac{l_xl_y - l_{x+n}l_{y+n}}{l_xl_y} \tag{7.13} $$

${}_{n|}q_{xy}$:احتمال وفاة أحد الزوجين في السنة بعد nسنة.

$$ {}_{n|}q_{xy} = \frac{l_{x+n}l_{y+n} - l_{x+n+1}l_{y+n+1}}{l_xl_y} \tag{7.14} $$

ملاحظات:

الرموز التالية نجدها في بعض المؤلفات:

$$ l_{xy}=l_xl_y \text{ و } d_{xy}=l_{xy} - l_{x+1:y+1} = l_xl_y - l_{x+1}l_{y+1} $$

عند حساب الاحتمالات للوفاة في حالة الشخصين من الأفضل تعريف السن النهائي ω على الطريقة التالية:

$$ \omega = \text{MIN}\,(\omega_x, \omega_y) \tag{7.15} $$

حيث ω_x: السن النهائي للشخص x.

وω_y: السن النهائي للشخص y.

مثال: تعاقد زوجان $x=30$ و$y=35$ مع مؤسسة تأمينية. العقد يقضي بدفع مبلغ 100000 ريال بعد عشر سنوات إذا كان أحد الزوجين أو الاثنين مع بعض ما زالا على قيد الحياة. أوجد هذا الاحتمال باستخدام جدول الوفاة الموجود في الملحق.

الحل

بالنظر إلى قاعدة اتحاد حادثين (أو قانون الجمع- راجع الفقرة (17.3.2).

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P = \underbrace{{}_{10}P_{30}}_{M} + \underbrace{{}_{10}P_{35}}_{W} \quad - \underbrace{{}_{10}P_{30}}_{M} + \underbrace{{}_{10}P_{35}}_{W}$$

وهو ما يمكن كتابته على النحو التالي:

$$P = \frac{l_{40}}{l_{30}} + \frac{l_{45}}{l_{35}} - \frac{l_{40}}{l_{30}}\frac{l_{45}}{l_{35}} = \frac{95{,}257}{96{,}850} + \frac{97{,}181}{98{,}154} - \frac{95{,}257}{98{,}850} \times \frac{97{,}181}{98{,}154} = 0.99979$$

(7.3) تمارين

1- ما معنى الرمز: ${}_{8}P_{42}$ ؟

2- ما هو الرمز الذي يمكن استبداله بـ: $\frac{l_{65}-l_{75}}{l_{65}}$؟

3- دي موفر (عالم الرياضيات الفرنسي 1667–1754) كان قد أعد القاعدة التالية لحساب العبارة l_x: $l_x = -x + 86$. معرفا بذلك السن ω في عمر 85 سنة.

(أ) استخدم هذه القاعدة لحساب d_xو d_{x+t}. ماذا تستنتج؟

(ب) احسب التوقع المختزل للحياةe_x.

4- ■ أنت مطالب بتقدير التكلفة الحالية لتمويل جراية عمرية في الحين (جراية مدفوعة فوريا مادام المؤمن له على قيد الحياة) تقدر بـ24000 يورو سنويا لمؤمن له كبير في السن يبلغ اليوم 59 سنة. استخدم نسبة فائدة تساوي 4%

وجدول الوفاة الموجود في الملحق، كيف يمكنك تقدير هذه القيمة بافتراض أنك لا تعلم القواعد المتعلقة بحساب الجرايات العمرية (الفصل التاسع من هذا الكتاب).

5- احسب التوقع المختزل للحياة ومتوسط توقع الحياة لشخص عمره 90 سنة، من خلال المعطيات التالية:

x	l_x	x	l_x
90	21	95	5
91	15	96	3
92	12	97	1
93	9	98	0
94	7	--	--

6- اكتب القواعد ثم احسب الاحتمالات التالية باستخدام جدول الوفاة في الملحق:

(أ) احتمال أن يعيش رجل سنة أخرى وهو في سن العشرين.

(ب) احتمال أن تعيش امرأة إلى سن 62 وهي حاليا عمرها 30 سنة.

(ج) احتمال أن تتوفى امرأة قبل بلوغها سن 62 وهي حاليا عمرها 30 سنة.

(د) احتمال أن يعيش رجلان مدة عشر سنوات علما بأن الأول عمره 30 والثاني 40 سنة.

(هـ) احتمال وفاة أحد الرجلين خلال العشر سنوات القادمة علما بأن أعمارهما هي على التوالي 30 و40 سنة.

7- مؤسسة تأمينية لديها 660 عميل أعمارهم 35 سنة وينتظر أن يحصلوا جميعهم على رأس مال في حال بلوغهم سن 65 سنة. باستخدام جدول الوفاة في الملحق ما هو عدد المؤمن لهم الذين من المحتمل أن يحصلوا على المبلغ في سن 65 سنة؟

8- ينص عقد التأمين على الحياة لزوجين بأن يتم دفع مبلغ مالي للسيدة بركلاز (y=35) أو السيد فاذر (x=37) في حال بقاء أحدهما على قيد الحياة بعد 20 سنة. احسب احتمال حدوث ذلك باستخدام جدول الوفاة الموجود في الملحق.

9- ما هو احتمال أن يتوفى رجل عمره 20 سنة عند بلوغه سن السبعين أو سن الثمانين؟ اكتب القاعدة فقط.

10- ■ جدول الوفاة البلجيكي (HS 68/72)تم تعديله باستخدام قاعدة ماكهام Makeham (خبير أكتواري إنكليزي (1827–1891) التالية: $p_x = sg^{e^x(e-1)}$ حيث المعاملات المدرجة في القاعدة تبلغ:

$$s = 0.999407846, g = 0.99953439, e = 1.105046035$$

(أ) أوجد باستخدام هذه القاعدة احتمال وفاة شخص بعد سنة وهو في سن 30؟

(ب) دائما حسب هذه القاعدة، ما هو عمر رجل يقدر احتمال بقائه على قيد الحياة بعد سنة 0.700685؟

11- ■ التعريفة التجميعية السويسرية *GRM 80* وقع تعديلها للقيم $x \geq 58$ باستخدام قانون باركس *Perks* (أكتواري إنكليزي 1902–1970) التالي:

$$1000q_x = \frac{C_0 + C_1 C^{x-65}}{1 + C_2 C^{x-65}}$$

حيث قيم المعاملات هي:

$$C_0 = 3.159, C_1 = 13.4, C_2 = 0.018, C = 1.1169$$

(أ) حسب هذه القاعدة، ما هو احتمال وفاة رجل في سن الستين بعد سنة؟

(ب) دائما حسب نفس القاعدة، ما هو العمر الذي يبلغ عنده احتمال وفاة رجل بعد سنة 0.1678؟

12- استخدم القاعدة التالية: $l_x = 10'000\sqrt{100 - x}$ حيث $0 \le x \le 100$، لإيجاد المقادير التالية:

(أ) ${}_{17}P_{19}$.

(ب) ${}_{15}q_{36}$.

(ج) ${}_{15|13}q_{36}$.

(د) $\mathring{e}_{36}$.

13- استخدم القاعدة: $l_x = 1'000\left(1 - \frac{x}{120}\right)$، لإيجاد المقادير التالية:

(أ) l_0.

(ب) l_{120}.

(ج) d_{33}.

(د) ${}_{30}q_{20}$.

14- إذا كانت: $p_x = 0.95$ مهما كانت قيمة x، أوجد:

(أ) p_{20} . (ب) ${}_{2}q_{30}$.

15- استخدم القاعدة: $l_x = 100'000(2 - 0.007x - 0.0007x^2)$ ، أكمل الجدول الآتي:

العمر x	l_x	d_x
0		
1		
2		
3		

16- أكمل الجدول الآتي:

العمر x	q_x	l_x	d_x
90	1/3	3000	
91	2/5		
92	1/2		
93	2/3		
94	4/5		
95	1		
96			

17- أكمل الجدول الآتي:

العمر x	l_x	d_x	p_x	q_x
0	'1000	100		
1				
2	750		.80	
3				
4	300			.60
5				
6	0			

18- ■إليك قاعدة مواقر التالية: $l_x = 100 - x$

ليكن لدينا شخصين عمرهما على التوالي 90 و 95 سنة يتبعان جدول الوفاة المذكور. أوجد احتمال ألا يتوفى الشخصان في نفس السنة.