الفصل الثامن

جداول الوفاة

Tables de Mortalitè

تكمن أهمية جدول الوفاة في الدور الذي تمثله بالنسبة للمؤمن على الحياة في وضع القواعد اللازمة لحساب التسعيرة والعلاوة. لإعداد جدول للوفاة يجب قياس معدلات الوفاة. فإذا أردنا - إذن - أن نتعرف على معدلات الوفاة في مجتمع ما، فبالإمكان الاعتماد على آخر تعداد عام للسكان بالإضافة إلى دفاتر الحالة المدنية.الأرقام الأولية التي نحصل عليها من خلال هذا التقييم للوفاة ترسم الصورة الأولية لمعطيات قابلة للتغيير، لذلك فهي أرقام لابد من تعديلها باستخدام بعض الطرق الرياضية التي سنتطرق إليها لاحقا.

يتكون جدول الوفاة أساسا من الاحتمالات السنوية للوفاة المستخرجة مباشرة من المقاييس المعدلة للوفاة.

فإذا كان لدينا مثلا 1000 رجل في سن 43 سنة وتبين لنا بعد سنة أن 3 منهم قد توفوا قبل بلوغهم سن 44 سنة، فإن احتمال وفاة سنوية لرجل في سن 43 تساوي 0.003 أو 3 بالألف.

(8.1) جداول الوفيات

يبين جدول الوفيات تطور معدل الوفيات النظرية لمجموعة (مغلقة) من الأشخاص عبر الزمن والتي تستخلص من الوفيات الفعلية المشاهدة على مجموعة سكانية محددة. وتشير جداول الوفيات إلى جانب عدد الوفيات السنوي لكل سن إلى عدد الأشخاص الباقين على قيد الحياة، وبالتالي يتعين تسميتها جدول الحياة أيضا. عموما، هذه الجداول تتضمن قيما بيومترية أخرى، كاحتمال الحياة وعدد التبديلات... إلخ

(8.1.1) جداول الأجيال

لإعداد هذه الجداول لابد من تحديد مجموعة من الأشخاص مولودين في سنة محددة ومتابعتهم سنة تلو الأخرى وتسجيل كل الوفيات إلى حين انقراض كافة المجموعة. وهي طريقة سهلة نظريا لكنها شبه مستحيلة عمليا لأنها تتطلب متابعة حياة جيل كامل. بالإضافة إلى أن فترة المتابعة كبيرة بدرجة تجعل من النتائج بعد تجميعها لا تمثل الواقع.

(8.1.2) جداول السكان

لإيجاد معدلات الوفيات في جداول السكان ننطلق من منظمة جماعية معرفة من خلال توزيع أفرادها حسب السن في تاريخ التعداد، ثم نحسب عدد الوفيات في مختلف الأعمار التي نجدها في الإحصاءات العامة للسكان والتي تقابل متوسط عدد الوفيات المسجلة في سنة التعداد وعدد الوفيات في السنة التالية لها. كذلك يجب الأخذ في الاعتبار الزيادة أو النقص في عدد السكان الناتجة عن حركة الهجرة بين الدول لكي تكون النتائج مطابقة تماما للواقع.

(8.1.3) جداول المؤمن لهم أو الخبرة

هي جداول خاصة بشركات التأمين وتعتمد على المشاهدات المتعلقة بعملائهم أو تلك المتعلقة بعملاء شركات التأمين في الدولة بأكملها، أو لمجموعة

من الدول التي تسجل معدلات وفيات متشابهة. وتتمثل عملية إعداد الجدول في مشاهدة الأشخاص المعرضين للخطر وعدد الوفيات في كل سنة ولمختلف الأعمار، ويجب التمييز بين الجداول التالية:

- جداول مطبقة على أفراد لتأمينات الحياة.
- جداول مطبقة على أفراد لتأمينات الوفاة.

الجداول الأولى تحتوي على احتمالات وفيات أقل من تلك المسجلة في جداول السكان بينما تحتوى الجداول الثانية على احتمالات وفيات أعلى من تلك المسجلة في جداول السكان. وهذا التباين يفسره الاختيار الذي يحدده أصحاب المعاشات أو المؤمن لهم عند تعاقدهم مع مؤسسات التأمين. هذه الجداول تتضمن - إذن - هوامش للوفاة.

كما تحتوي الجداول الثانية على نوع آخر من الجداول: جداول التحديد، حيث تبين لمؤسسات التأمين أن الوفيات عند المؤمن لهم الذين قاموا بالفحص الطبي عند التعاقد هي الأقل في السنوات الأولى من الوفيات عند المؤمن لهم الذين تم إعفاؤهم من الفحص الطبي. وهو ما أدى بشركات التأمين إلى إنشاء جداول محددة تحتوي على احتمالات أساسها العمر وكذلك عدد السنوات السابقة للتأمين.

(8.1.4) الجداول المحتملة

تعتمد هذه الجداول على تطور معدلات الوفيات في المستقبل على عكس الجدول الكلاسيكي، فهي تمكن من حساب عقود المعاشات بمزيد من الدقة والأمان، حيث يتم إيجادها عبر تمديدها للتقييم المسجل في وفيات السكان العام. وهو ما يجنب المؤمن من اللجوء إلى زيادة رأس مال الاحتياطي بسبب شيخوخة

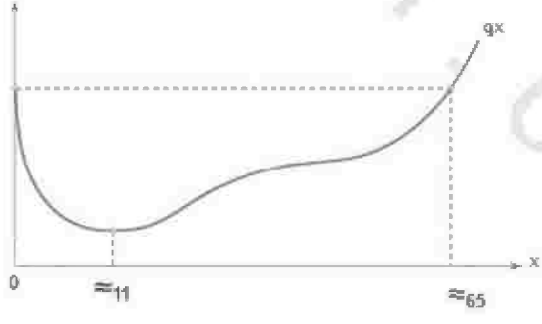
المجتمع. وتكمن الصعوبة في التعامل مع هذه الجداول في وجود جدول لكل سنة ميلاد للمؤمن لهم، كما تبقى هذه الجداول صالحة لسنة فقط. ولتسهيل عمل الأكتواريين في هذا المجال تم إنشاء جداول موحدة مستخرجة من الجداول المحتملة.

كمثال على ذلك في فرنسا حيث تم إنشاء جدول موحد (TPRV 93) ليأخذ مكان مجموعة من الجداول المحتملة. وهذا الجدول يمثل جدولا مكتملا لجيل 1950 حيث يقوم المؤمن بتعديله عبر تطبيق فارق عمري يحسب بحسب العمر الفعلي للمؤمن له.

(8.2) العوامل المؤثرة

(8.2.1) العمر

هو العامل الأكثر تأثيرا في حساب الاحتمالات السنوية للوفاة، فهو يقوم بالتالي بدور مهم في حساب التأمينات على الحياة، وتتغير الاحتمالات السنوية للوفاة حسب العمر بالطريقة التالية:



(8.2.2) الجنس

عموما معدلات الوفيات عند الإناث أقل من معدلات الوفيات عند الذكور وخاصة للأعمار القريبة من 20 سنة.

لفترات طويلة من الزمن تم اعتماد جدول للوفيات حسب الجنس. واعتبارا لمبدأ المساواة بين الجنسين (توجيهات الاتحاد الأوروبي) فإن الأمور تتجه شيئا فشيئا لاعتماد جدول موحد للجنسين.

(8.2.3) الزمن

الاحتمالات السنوية للوفاة في أيامنا هذه أصبحت أقل بكثير من مثيلاتها في بداية القرن الماضي، وهذا الأمر راجع أساسا إلى تطور الطب والنظافة والوقاية من الحوادث... إلخ. وسمي هذا الانخفاض بالتراجع القرني للوفيات. بمرور الزمن، أصبح التراجع ينعكس إيجابيا على توقعات الحياة. في سويسرا، مثلا ارتفعت توقعات الحياة من 50 سنة في بداية القرن الماضي إلى 80 سنة اليوم.

(8.2.4) أسباب أخرى

من الأسباب الأخرى نذكر تأثير المكان (بمعدلات وفيات أقل عادة عند بلدان الجزء الشمالي من الكرة الأرضية)، والحالة المدنية (بمعدلات وفيات أعلى عند المطلقين عادة) وأخيرا تأثير المهنة الذي دفع ببعض مؤسسات التأمين التي تقدم إليها عملاء ذوو مهن تكتسي بعض الخطورة إلى:

- رفض التعاقد (حالة قصوى).
- التعاقد مع إدراج بنود احترازية في العقد.
- التعاقد بشروط مالية عالية.

(8.3) طرق التعديل

(8.3.1) مقدمة

إذا قمنا بإدراج رسم بياني للاحتمالات السنوية للوفيات حسب العمر كما هي مشاهدة (الرسم المبين أسفل)، نستنتج أن منحنى القيم الأولية لهذه الوفيات ليس منتظما بل هو ينطوي على حركات فجائية ونتوءات. ويرجع ذلك

إلى العدد القليل للمشاهدات المتوفرة من ناحية وإلى مختلف الأسباب الأخرى التي تحدد التغييرات العشوائية للوفيات من ناحية أخرى (المكان، نمط الحياة، بيئة العمل ...إلخ). ورغم هذه التغييرات العشوائية فإن الوفيات، كمجموعة في حد ذاتها، تظهر اتجاها أساسيا واضحا، سبق الحديث عنه، وهذا الاتجاه يتضح أكثر عندما تكون مجموعات الأفراد المشاهدة لوفياتها ولبقائها على قيد الحياة أكبر وأكثر تجانسا. فإذا أردنا أن نعطي للوفيات صورة منصفة (وفية)، يتم من خلالها استبعاد الحوادث الراجعة للصدفة، فالمطلوب هو استخدام الطرق والوسائل المناسبة التي يمكن أن نعبر عنها نظريا بالتعديل أو التنعيم.

يجب أن تتضمن طرق التعديل شرطين أساسيين: التعديل يجب أن يكون له منحنى منضبط (تنعيم) دون وجود نقاط شاذة بعيدة جدا أو كثيرة، كذلك فإن القيم المعدلة يجب أن تضمن لفترة مشاهدة محددة صورة أمينة إلى أقصى حد ممكن للواقع (أمانة). يوجد طرق مختلفة للتعديل:

التعديل البياني

المشكلة تتمثل في إيجاد منحنى يكون أقرب ما يكون للأرقام الأولية التي تمثل سلسلة نقاط. تقرأ معدلات الوفاة بعد ذلك لكل عمر على هذا المنحنى.

التعديل الميكانيكي

القيم المعدلة تساوي المتوسط المرجح بعدد من المعدلات الإجمالية التي تسبق وتلحق مباشرة العمر. الطرق الأكثر استخداما وانتشارا هي طريقة Wittestein وطريقة Woolhouse وطريقة Karup

الرموز:

$\overline{q}_x$: إجمالي الاحتمال السنوي للوفاة.

q_x : الاحتمال السنوي المعدل للوفاة.

التعديل التحليلي

التعديل هنا يتم من خلال دالة تحليلية. نورد فيما يلي قاعدتين تحليليتين:

- قاعدة ماكهام Makeham.
- قاعدة المفاتيح بنقاط تقاطعية.

(8.3.2) قاعدة ماكهام Makeham

تكتب القاعدة على النحو التالي:

$$l_x = ks^x g^{e^x}$$

ولتعديلها (تنعيمها) نستخدم القاعدة:

$$q_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = 1 - sg^{c^x(c-1)} \qquad (8.1)$$

المطلوب هو إيجاد قيم المعاملات c,g,s. بينما المعلمة k هي قيمة ثابتة أولية في الجدول (مثلا k=100'000). يوجد أساسا طريقتان للحل: طريقة التكرار لنيوتن ورافسن (Newton-Raphson) وهي تتجاوز محتوى هذا الكتاب وطريقة كنج وهاردي (King-Hardy) السهلة والتي نورد فيما يلي طريقة استخدامها.

للتمكن من القيام بتعديل باستخدام هذه الطريقة يجب أن يتوفر عدد من الأرقام من أضعاف الرقم 3. نضع إذا:

$$t = \frac{x_n - x_1 + 1}{3}$$

حيث x_1 تمثل أول عمر مشاهد و x_n هي آخر عمر مشاهد. إذا عملنا أن $p_x = 1 - q_x$ يمكننا حساب القيم التالية داخل المجالات الثلاث:

$$\overline{S}_1 = \sum_{x=x_1}^{x_1+t-1} log\overline{p}_x ; \overline{S}_2 = \sum_{x=x_1+t}^{x_1+2t-1} log\overline{p}_x ; \overline{S}_3 = \sum_{x=x_1+2t}^{x_1+2t-1} log\overline{p}_x$$

نحسب بعد ذلك القيم المساعدة التالية:

$$a = \frac{\overline{S}_1\overline{S}_3 - \overline{S}_2^2}{t\,(\overline{S}_1 + \overline{S}_3 - 2\overline{S}_2)} ; \; c = \sqrt[t]{\frac{\overline{S}_3 - \overline{S}_2}{\overline{S}_2 - \overline{S}_1}} ; \; b = \frac{(c-1)\,(\overline{S}_2 - \overline{S}_1)}{c^{x_1}\,(c^t-1)^2}$$

وأخيرا:

$$s = 10^a, \; g = 10^{\frac{b}{c-1}}$$

وهو ما يمكننا من إيجاد قاعدة ماكهام:

$$q_x = 1 - sg^{c^x\,(c-1)}$$

ملاحظة: دالة ماكهام هي دالة واحد لواحد، ذلك يعني أنها لا تستطيع أن تمثل سلاسل الأرقام الصحيحة المتزايدة أو سلاسل الأرقام الصحيحة المتناقصة.

مثال:

عدل إجمالي احتمالات الوفاة الستة التالية باستخدام قاعدة ماكهام:

i	x_i	$\overline{q}_{x_i}$	$\overline{p}_{x_i}$
1	20	.00410	.99590
2	21	.00440	.99560
3	22	.00520	.99480
4	23	.00580	.99420
5	24	.00610	.99390
6	25	.00630	.99370

الحل

$$x_1 = 20;\ x_n = 25;\ t = \frac{25-20+1}{3} = 2$$

نحسب بعد ذلك:

$$\overline{S}_1 = \sum_{x=20}^{21} log\overline{p}_x = -0.00369938$$

$$\overline{S}_2 = \sum_{x=22}^{23} log\overline{p}_x = -0.004790465$$

$$\overline{S}_3 = \sum_{x=24}^{25} log\overline{p}_x = -0.00540202$$

وهذا يمكننا من احتساب القيم المساعدة التالية:

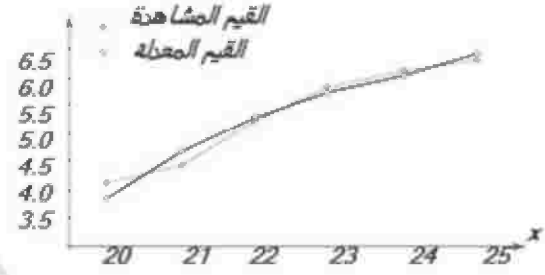
$$a = \frac{\overline{S}_1\overline{S}_3 - \overline{S}_2^2}{t\left(\overline{S}_1 + \overline{S}_3 - 2\overline{S}_2^2\right)} = -0.003090974$$

$$c = \sqrt{\frac{\overline{S}_3 - \overline{S}_2}{\overline{S}_2 - \overline{S}_1}} = 0.748666616$$

$$b = \frac{(c-1)\,(\overline{S}_2 - \overline{S}_1)}{c^{20}\,(c^2-1)^2} = 0.463900683$$

أي: $s = 10^a = 0.992908037$ و $g = 10^{\frac{b}{c-1}} = 0.014264012$ وهذه القيم نضعها في المعادلة: $q_x = 1 - sg^{\,x(c-1)}$. وهو ما يمكّن من احتساب القيم المعدلة التالية:

x	q_x
20	.003840
21	.004660
22	.005270
23	.005730
24	.006070
25	.006330



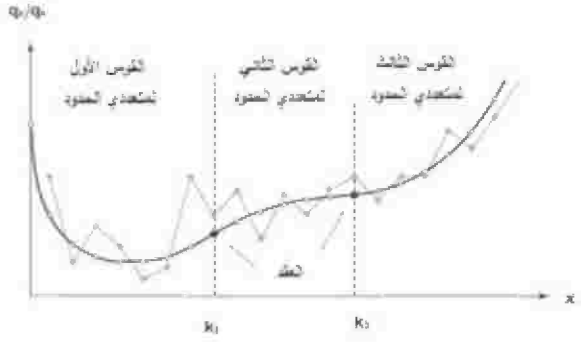
(8.3.3) طريقة المفاتيح بنقاط تقاطعية

تتطلب هذه الطريقة بعض المعلومات الرياضية المتعلقة بحساب المصفوفات. يمكن للقارئ مراجعة الفقرة 17.5 من هذا الكتاب حول المفاهيم الأساسية في حساب المصفوفات. تعتمد الطريقة على قاعدة صغرى المربعات، فهي بالتالي تعميم لطريقة الانحدار ولكنها مطبقة على متعددي الحدود بدرجات أعلى ومحددة بشروط (نقاط تقاطعية أو عقد).

وهذا يؤدي إلى وضع أقواس لمتعددي الحدود أو المفاتيح (من الدرجة الأولى أو الثانية أو حتى الثالثة) المترابطة ببعضها عبر الشروط الإضافية للعقد. وهذه الشروط هي:

اتصال متعددي الحدود ذوي الدرجات التي تزيد عن واحد: ميل وتقعر مماثل.

وهو ما يمكن تمثيله على النحو التالي:



للتسهيل سوف يتم اختيار أعداد صحيحة فقط لنقاط التقاطع ...k_1 ; k_2 ; k_3 ;.

الرموز:

n: عدد المشاهدات.

d: درجة الأقواس(d =1 أو2 أو 3 في الغالب).

z: عدد النقاط التقاطعية (3 أو 4 كأقصى حد).

إذا عرفنا z على أنه عدد النقاط التقاطعية أي يوجد لدينا $z+1$ مجال، يمكننا تعريف $z+1$ معادلة لكل مجال على النحو التالي:

$$q_x^{(i)} = q_x^{(0)} + \sum_{i=1}^{z} c_{d+i+1}\,(x-k_i)^d \qquad (8.2)$$

معادلة الأقواس للمجال الأول يمكن تحريرها كما يلي:

$$q_x^{(i)} = c_1 + c_2x + c_3x^2 + \cdots + c_{d+1}x^d = \sum_{i=0}^{d} c_{i+1}x^i$$

المعامل c_1 ،c_2،c_3،...نجدها باستخدام المعادلة التالية:

$$C = (A^TA)^{-1}A^TQ \qquad (8.3)$$

$$Q_{n,1} = \begin{pmatrix} \overline{q}_{x_1} \\ \overline{q}_{x_2} \\ \vdots \\ \overline{q}_{x_n} \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad C_{d+z+1,1} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{d+z+1} \end{pmatrix}$$

المصفوفة $A_{n,d+z+1}$ تكتب كالآتي:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^d & (x_1-k_1)_+^d & (x_1-k_2)_+^d & \dots & (x_1-k_z)_+^d \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^d & (x_2-k_1)_+^d & (x_2-k_2)_+^d & \dots & (x_2-k_z)_+^d \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^d & (x_3-k_1)_+^d & (x_3-k_2)_+^d & \cdots & (x_3-k_z)_+^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^d & (x_n-k_1)_+^d & (x_n-k_2)_+^d & \dots & (x_n-k_z)_+^d \end{pmatrix}$$

حيث:

$$(x_i - x_j)_+^d = \begin{cases} (x_i - x_j)^d & \text{إذا} \quad x_i - x_j > 0 \\ 0 & \text{إذا} \quad x_i - x_j \geq 0 \end{cases}$$

ملاحظة:

- إذا كانت $d = 1, z = 0$ فذلك ينتج انحدار خطي.
- إذا كانت $d = 2, z = 0$ فذلك ينتج انحدار تربيعي.

مثال: نريد تنعيم 5 قيم إجمالية عشوائية باستخدام طريقة المفاتيح الخطية تحتوي على نقطة تقاطع في $x = 6$. ليكن لدينا الجدول التالي:

i	x	$\overline{q}_x$
1	3	2
2	4	6
3	6	3
4	8	4
5	10	7

لدينا المعطيات التالية: $n = 5, d = 1$ (أقواس خطية) و $z = 1$ (نقطة تقاطع واحدة عند $x = 6$).

القيم المعدلة تظهر في متعددي الحدود التالية:

$$q_x = \begin{cases} q_x^{(0)} & x \leq 6 \\ q_x^{(1)} & x > 6 \end{cases}$$

تكتب المعادلة لكل مجال على النحو التالي:

$$q_x^{(0)} = c_1 + c_2 x; \quad q_x^{(1)} = c_1 + c_2 x + c_3 (x - 6)$$

نستخدم المعادلة التالية لإيجاد المعامل c_1, c_2, c_3:

$$C = (A^T A)^{-1} A^T Q$$

وبذلك نحصل على:

$$\overline{Q}_{5,1}=\begin{pmatrix}2\\6\\3\\4\\7\end{pmatrix}, A_{5,3}=\begin{pmatrix}1 & x_1 & (x_1-k_1)_+\\1 & x_2 & (x_2-k_1)_+\\1 & x_3 & (x_3-k_1)_+\\1 & x_4 & (x_4-k_1)_+\\1 & x_5 & (x_5-k_1)_+\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\1 & 4 & 0\\1 & 6 & 0\\1 & 8 & 2\\1 & 10 & 4\end{pmatrix}$$

وأخيرا إذا استخدمنا القاعدة (8.3) نجد:

$$C_{3,1}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}3.03\\0.11\\0.57\end{pmatrix}$$

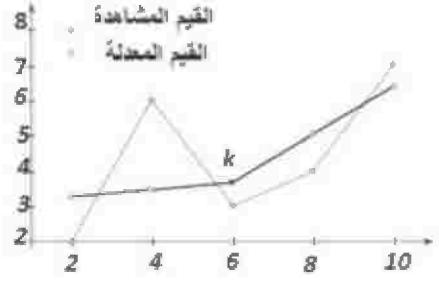
وبذلك تكتب المعادلات النهائية على النحو التالي:

$$q_x^{(0)}=3.03+0.11x \quad \text{عندما } x\le 6$$

$$q_x^{(1)}=3{,}03+0.11x+0.57\,(x-6) \quad \text{عندما } x>6$$

وبالتالي فإن القيم المعدلة سوف تصبح كالآتي:

t	x	$\overline{q}_x$	q_x
1	2	2	.253
2	4	6	.473
3	6	3	.693
4	8	4	.055
5	10	7	.416



(8.3.4) طريقة المتوسطات المتحركة

الأسلوب بشكل عام: نقوم بتجميع عدد فردي من المشاهدات (3 كحد أدنى) من خلال مجموعة من المشاهدات. احتمال الوفاة q_x يمكن صياغته في صورة القيم الإجمالية المتتالية وعددها k+12 التالية: $q_{x-k}, q_{x-k+1}, \cdots, q_x, \cdots, q_{x+k}$ اكتب المعادلة هنا.

بشكل عام نكتب:

$$q_x = \alpha(-k)\bar{q}_{x-k} + \alpha(-k+1)\bar{q}_{x-k+1} + \cdots + \alpha(k)\bar{q}_{x+k}$$

حيث: $\alpha(-k) + \cdots + \alpha(k) = 1$ و $\alpha(-k) = \alpha(k)$

فيما يلي القاعدتان المستخرجتان من طريقة المتوسطات المتحركة والمستخدمتان في الرياضيات الأكتوارية:

قاعدة ويتستاين Wittstein

يتم التعديل من خلال هذه القاعدة على 5 قيم متتالية$(k = 2)$

$$q_x = 0.2\bar{q}_{x-2} + 0.2\bar{q}_{x-1} + 0.2\bar{q}_x + 0.2\bar{q}_{x+1} + 0.2\bar{q}_{x+2} \qquad (8.4)$$

قاعدة كاروب Karup

يتم التعديل من خلال هذه القاعدة على 19 قيمة متتالية$(k = 19)$

$$\begin{aligned} q_x = {} & -0.0032\bar{q}_{x-9} - 0.0096\bar{q}_{x-8} - 0.0144\bar{q}_{x-7} 0.0128\bar{q}_{x-6} \\ & +0.0336\bar{q}_{x-5} + 0.0848\bar{q}_{x-4} + 0.1392\bar{q}_{x-3} + 0.1824\bar{q}_{x-2} \\ & +0.2\bar{q}_x \\ & +0.1824\bar{q}_{x+1} + 0.1392\bar{q}_{x+2} + 0.0848\bar{q}_{x+3} + 0.0336\bar{q}_{x+4} \\ & -0.0128\bar{q}_{x+6} - 0.0144\bar{q}_{x+7} - 0.0096\bar{q}_{x+8} - 0.0032\bar{q}_{x+9} \end{aligned} \qquad (8.5)$$

ملاحظة: تمتاز الطرق الميكانيكية بسهولتها، حيث إنه يمكن تصميمها داخل جدول وهذا ينطبق كليا على هذه الطريقة ولكن مساوئها تتمثل في الآتي:

- بصفتها متوسط مرجح فهي تقلل من أثر التغيرات الأساسية للدالة x.
- عدم قدرتها على تعديل القيم الشاذة في الجدول.

مثال: قم بتنعيم الاحتمالات الإجمالية للوفاة التالية باستخدام قاعدة Wittstein:

x	$\overline{q}_x$
1	2
2	4
3	6
4	3
5	8
6	6
7	9
8	8
9	10
10	8

الحل: باستخدام القاعدة نحصل على:

$$q_3 = 0.2\overline{q}_1 + 0.2\overline{q}_2 + 0.2\overline{q}_3 + 0.2\overline{q}_4 + 0.2\overline{q}_5 = 4.6$$

$$q_4 = 0.2\overline{q}_2 + 0.2\overline{q}_3 + 0.2\overline{q}_4 + 0.2\overline{q}_5 + 0.2\overline{q}_6 = 5.4$$

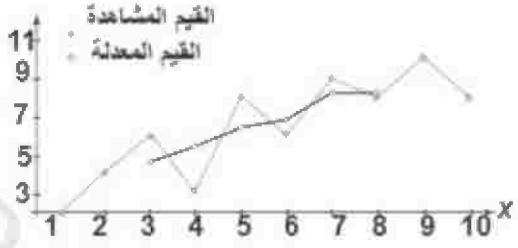
$$q_5 = 0.2\overline{q}_3 + 0.2\overline{q}_4 + 0.2\overline{q}_5 + 0.2\overline{q}_6 + 0.2\overline{q}_7 = 6.4$$

$$q_6 = 0.2\overline{q}_4 + 0.2\overline{q}_5 + 0.2\overline{q}_6 + 0.2\overline{q}_7 + 0.2\overline{q}_8 = 6.8$$

$$q_7 = 0.2\overline{q}_5 + 0.2\overline{q}_6 + 0.2\overline{q}_7 + 0.2\overline{q}_8 + 0.2\overline{q}_9 = 8.2$$

$$q_8 = 0.2\overline{q}_6 + 0.2\overline{q}_7 + 0.2\overline{q}_8 + 0.2\overline{q}_9 + 0.2\overline{q}_{10} = 8.2$$

وهو ما يمكننا تمثيله من خلال الرسم البياني الآتي:



(8.4) تمارين

1- قم بتعديل القيم المشاهدة التالية باستخدام قاعدة ماكهام Makeham ثم حمل النتائج على رسم بياني:

i	المشاهدة	المعدلة
1	2	
2	6	
3	5	
4	4	
5	9	
6	10	

2- قم بتعديل القيم المشاهدة التالية باستخدام قاعدة ماكهام Makeham ثم حمل النتائج على رسم بياني:

i	المشاهدة	المعدلة
1	2	
2	6	
3	5	
4	4	
5	9	
6	4	
7	8	
8	6	
9	12	

3- ■ إذا علمت أن $p_{30} = 0.998, p_{45} = 0.994, p_{60} = 0.977$ ، استخدم قاعدة ماكهام Makeham لإيجاد قيم المعلمات: s, g, c.

4- قم بتعديل القيم المشاهدة الثلاثة التالية باستخدام قاعدة ماكهام Makeham ثم حل النتائج على رسم بياني:

x_i	$f(x_i)$
1	4
2	2
3	7

5- تطورت أرباح إحدى الشركات خلال السنوات التسع الأخيرة على النحو التالي (بملايين يورو):

السنة	1996	1997	1998	1999	2000
الأرباح	2	5	2	5	3

السنة	2001	2002	2003	2004
الأرباح	9	12	10	18

(أ) أوجد التعديل الخطي دون استخدام نقاط التقاطع.

(ب) مثل القيم المشاهدة والمعدلة داخل رسم بياني.

(جـ) حسب هذه الطريقة ما هو الربح المنتظر خلال سنة 2005.

6- (نفس معطيات السؤال رقم 5). في تحليل معمق لنتائج الشركة تبين أن تطور الأرباح خلال الخمس سنوات الأولى كان بطيئا، بينما سجلت الشركة سرعة في الأرباح خلال السنوات التي تليها. وهو ما يؤدي إلى القيام بتعديل خطي مع وجود نقطة تقاطع عند سنة 2000.

(أ) اعتمادا على هذه الطريقة، مثل القيم المشاهدة والمعدلة داخل رسم بياني.

(ب)ما هو الربح المنتظر حسب هذه الطريقة دائما؟

7- (نفس معطيات السؤال رقم 5). تقرر في الأخير تعديل جميع القيم باستخدام طريقة الانحدار التربيعي بدون نقاط تقاطعية:

(أ) اعتمد هذه الطريقة، لتمثل القيم المشاهدة والمعدلة داخل رسم بياني.

(ب)ما هو الربح المنتظر حسب هذه الطريقة دائما؟

8- يتوقع من الطريق السريعة المزمع إنشاؤها أن تمر بجانب المدن المبينة في الرسم البياني أدناه. يجب أن يكون مسار الطريق السريعة مضبوطا، من أجل ذلك تم الاعتماد على نموذج التعديل التربيعي مع نقطة تقاطعية في سيمبا فيل Sympaville. الأرقام محسوبة بالكيلو متر.

مثل القيم المعدلة بيانيا: