الفصل الخامس

تحليل أنظمة النطاق الزمني

(٥,١) المقدمة والأهداف

الهدف الأساسي من تصميم الأنظمة هو أن تستجيب بالطريقة الصحيحية. ولذلك يجب أن نكون قادرين على حساب هذه الاستجابة للنظام لأي إشارة دخل. هناك العديد من الطرق للوصول لهذا الهدف كما سنرى خلال هذا الكتاب. لقد رأينا مسبقاً كيف نحسب استجابة أي نظام موصوف بمعادلة تفاضلية، أو معادلة فرقية عن طريق حساب الحل الكلي لهذه المعادلات مع الشروط الابتدائية لها. في هذا الفصل سنفترض طريقة بديلة تسمى طريقة الالتفاف convolution، وسنوضح أنه، لأي نظام LTI، إذا علمنا استجابة لوحدة النبضة التي تحدث عند الزمن t=0 أو n=0، فإن هذه الاستجابة تصف النظام بالكامل وتسمح لنا أن نحسب استجابته لأي دخل آخر.

أهداف الفصل

١- تقديم طرق لإيجاد استجابة أي نظام LTI لوحدة نبضة تحدث عند الزمن t=0 أو n=0.

٢- فهم وتطبيق الالتفاف، وهو طريقة لإيجاد استجابة أنظمة LTI لأي إشارة دخل اختيارية لكل من الأنظمة المستمرة زمنياً والمتقطعة زمنياً.

(٥,٢) الأزمنة المستمرة

استجابة النبضة

لقد رأينا طرقاً مختلفة لإيجاد حلول المعادلات التفاضلية التي تصف الأنظمة. الحل الكلي يكون مجموع الحل المتجانس والحل الخاص. الحل المتجانس يكون مجموعاً خطياً من القيم المميزة. الحل الخاص يعتمد على شكل دالة الدخل أو دالة التعزيز. على الرغم من أن هذه الطرق تعمل جيداً، فإن هناك طريقة أكثر نظامية لمعرفة كيف

تستجيب الأنظمة لإشارات الدخل وهذه الطريقة تؤدي إلى فهم جيد للخواص المهمة للأنظمة، هذه الطريقة تسمى الالتفاف.

تعتمد طريقة الالتفاف لإيجاد استجابة نظام LTI مستمر زمنياً على فكرة بسيطة وهي : إذا كنا نستطيع إيجاد طريقة للتعبير عن أي إشارة كمجموع خطي من دوال بسيطة، فإننا نستطيع باستخدام أساسيات الخطية والثبات الزمني أن نوجد الاستجابة لهذه الإشارة كمجموع خطي لاستجابات النظام لهذه الدوال البسيطة. إذا كنا نستطيع إيجاد استجابة أي نظام LTI لوحدة نبضة تحدث عند الزمن t=0، وإذا كنا نستطيع التعبير عن هذه الإشارة كمجموع خطي من وحدات النبضة، فإننا نستطيع إيجاد الاستجابة لهذه الإشارة. لذلك فإن استخدام طريقة الالتفاف تبدأ بفرض أن الاستجابة لوحدة النبضة التي تحدث عند الزمن t=0 تكون أصلاً معلومة، أو تم حسابها. سنفترض أن هذه الاستجابة تسمى استجابة النبضة h(t). لذلك فإن المطلوب الأول عند استخدام طريقة الالتفاف لحساب استجابة أي نظام هي أن نحدد، أو نحسب استجابة النبضة له عن طريق تطبيق وحدة نبضة $\delta(t)$ تحدث عند الزمن t=0. هذه النبضة في الحقيقة تحقن النظام بطاقة إشارة ثم تنتهي. بعد حقن هذه الطاقة في النظام، فإن النظام يستجيب لها بإشارة خرج تتحدد بالخواص الديناميكية لهذا النظام.

إننا نستطيع في الأساس أن نوجد استجابة النبضة تجريبيا عن طريق تطبيق وحدة النبضة كدخل للنظام. ولكن حيث إنه لا يمكن الحصول على وحدة نبضة حقيقية، فإن هذه النبضة من الممكن أن تكون تقريبية فقط. أيضاً، فإنه عمليا، يكون تقريب وحدة النبضة عبارة نبضة ذات ارتفاع عالٍ جدا تستمر لفترة زمنية قصيرة جدا. في الحقيقة، فإنه لأي نظام طبيعي حقيقي، فإن النبضة ذات الارتفاع العالي جداً من الممكن أن تأخذ النظام إلى حالة عدم خطية للاستجابة، وبالتالي فإن الاستجابة التجريبية المقاسة من الممكن أن تكون غير دقيقة. هناك طرق أخرى أقل مباشرة ولكنها أكثر عملية لتحديد استجابة النبضة تجريبياً.

إذا كان لدينا وصف حسابي للنظام، فإننا نستطيع إيجاد استجابة النبضة تحليلياً. المثال التالي يوضح بعض الطرق لإيجاد استجابة النبضة لنظام موصوف بمعادلة تفاضلية.

مثال ٥,١

استجابة النبضة لنظام مستمر زمنياً 1

احسب استجابة النبضة h(t) لنظام مستمر زمنياً موصوف بالمعادلة التفاضلية التالية :

$$y'(t) + ay(t) = x(t) \qquad \text{(5.1)}$$

المعادلة رقم (٥,١)

حيث x(t) تمثل الإثارة للنظام، و y(t) هي استجابة النظام لهذه الإثارة.

يمكننا إعادة كتابة المعادلة (٥,١) للحالة الخاصة التي تكون فيها النبضة هي الإثارة للنظام :

$$h'(t) + ah(t) = \delta(t)$$ المعادلة رقم (٥.٢)

الطريقة #1

حيث إن استجابة النظام الوحيدة هي وحدة النبضة عند الزمن $t=0$، والنظام سببي، فإننا نعلم أن استجابة النبضة للأزمنة قبل $t=0$ ستكون صفراً. معنى ذلك، أن $h(t)=0$ عندما $t<0$. الحل المتجانس للأزمنة $t>0$ سيكون على الصورة Ke^{-at}، وهذا هو شكل استجابة النبضة عندما $t>0$ لأنه في هذا المدى الزمني لا يكون النظام مثاراً. بذلك أصبحنا الآن نعرف شكل استجابة النبضة قبل الزمن $t=0$ وبعد الزمن $t=0$. كل ما يتبقى الآن هو معرفة ما يحدث عند الزمن $t=0$. المعادلة التفاضلية (٥.١) يجب تحقيقها عند كل الأزمنة. بمعنى، $h'(t) + ah(t)$ يجب أن تكون وحدة نبضة تحدث عند الزمن $t=0$. يمكننا أن نحدد ما يحدث عند $t=0$ عن طريق تكامل الطرفين في المعادلة (٥.٢) من $t=0^-$ حتى $t=0^+$، بمعنى زمن متناهي الصغر قبل وبعد الزمن صفر.

تكامل $h'(t)$ هو ببساطة $h(t)$. ونحن نعلم أنها عند الزمن $t=0^-$ تكون صفراً، وعند الزمن $t=0^+$ تكون K، وعلى ذلك يمكن كتابة :

$$\underbrace{h(0^+)}_{=k} - \underbrace{h(0^-)}_{=0} + a\int_{0^-}^{0^+} h(t)dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt = 1$$ المعادلة رقم (٥.٣)

الحل المتجانس يطبق لكل الأزمنة $t>0$، ولكن عندما $t=0$ فإنه يجب اعتبار الحل الخاص في هذه الحالة ؛ لأن النبضة تدفع النظام عند هذا الزمن. القاعدة العامة لصورة الحل الخاص للمعادلة التفاضلية تكون مجموعاً خطياً للدالة المؤثرة وكل تفاضلاتها الفريدة. الدالة المؤثرة هي وحدة النبضة، ووحدة النبضة لها عدد لا نهائي من التفاضلات، الثنائي، والثلاثي، وهكذا، وكلها مجتمعة تحدث عند الزمن $t=0$ تماما. ولذلك، حتى يمكننا بيان سبب تكّون النبضة وكل تفاضلاتها لا يمكن أن تمثل في الحل، فإنه علينا أن نعتبرها إمكانية لذلك. إذا كانت $h(t)$ لا تحتوي نبضة أو تفاضلاتها الأعلى الأحادية عند $t=0$، فإن :

$$.\int_{0^-}^{0^+} e^{-at}dt = K\int_{0}^{0^+} e^{-at}dt = \left(-\frac{K}{a}\right)\left(\underbrace{e^{-0^+} - e^{-0}}_{=0}\right) = 0$$

إذا كانت $h(t)$ بها نبضة أو تفاضلاتها العليا عند الزمن $t=0$، فإن التكامل قد لا يساوي صفراً. إذا كانت $h(t)$ تمثل نبضة، أو تفرداً بدرجة عالية عند الزمن $t=0$، فإن $h'(t)$، التي تظهر في الجانب الأيسر من المعادلة (٥.٢)، يجب أن تحتوي التفاضلات الثنائية أو الدرجات الأعلى. حيث إنه لا توجد تفاضلات ثنائية، أو درجات أعلى على الجانب الأيمن من المعادلة (٥.٢)، فإن المعادلة لا يمكن تحقيقها. ولذلك، ففي هذا المثال، نعلم أنه لا توجد نبضة، أو درجات أعلى من التفاضل في $h(t)$ عند $t=0$، ولذلك فإن $\int_{0^-}^{0^+} h(t)dt = 0$، وشكل استجابة النبضة هو $Ke^{-at}u(t)$،

ومن المعادلة (٥.٣) فإن: $h(0^+)=Ke^{-a(0+)}=K=1$. إن هذه تمثل الشرط الابتدائي الذي نحتاجه لإيجاد صورة عددية للحل المتجانس الذي يتم تطبيقه عند الزمن $t=0$. وبالتالي فإن الحل الكلي سيكون $h(t)=e^{-at}u(t)$. دعنا نحقق هذا الحل عن طريق التطبيق في المعادلة التفاضلية التالية:

$$h'(t) + ah(t) = e^{-at}\delta(t) - ae^{-at}u(t) + ae^{-at}u(t)=\delta(t)$$

أو باستخدام خاصية التكافؤ للنبضة :

$$e^{-at}\delta(t)=e^{0}\delta(t)=\delta(t)$$ اختبر ذلك

الطريقة #2

طريقة أخرى لحساب استجابة النبضة هي عن طريق حساب استجابة النظام لنبضة مربعة عرضها w وارتفاعها 1/w وتبدأ عند الزمن $t=0$، وبعد أن نوجد الحل نجعل w تقترب من الصفر. مع اقتراب w من الصفر، فإن النبضة المربعة تقترب من وحدة النبضة عند $t=0$ وتقترب الاستجابة للنبضة المربعة من الاستجابة لوحدة النبضة.

باستخدام أساسيات خاصية الخطية، فإن الاستجابة للنبضة المربعة هي مجموع الاستجابة لخطوة ارتفاعها 1/w عند الزمن $t=0$، والاستجابة لخطوة أخرى ارتفاعها -1/w عند الزمن $t=w$. معادلة الدخل هي $x(t)=u(t)$:

$$h'_{-1}(t) + ah_{-1}(t)=u(t)$$ المعادلة رقم (٥,٤)

الرمز h_{-1} لاستجابة الخطوة يتبع المنطق نفسه مثل الترميز المنتظم للدوال الأحادية. الرمز الجانبي يوضح عدد التفاضلات لاستجابة النبضة. في هذه الحالة هناك 1- تفاضلات أو بمعنى آخر تكامل واحد للذهاب من الاستجابة لوحدة النبضة إلى الاستجابة لوحدة الخطوة. الاستجابة الكلية عندما $t>0$ لوحدة الخطوة تساوي $h_{-1}(t)=Ke^{-at}+1/a$. إذا كانت $h_{-1}(t)$ بها انقطاع عند $t=0$، فإن $h'_{-1}(t)$ يجب أن تحتوي على نبضة عند الزمن $t=0$. ولذلك، فحيث إن $x(t)$ تمثل وحدة خطوة، التي لا تحتوي على وحدة نبضة، فإن $h_{-1}(t)$ يجب أن تكون مستمرة عند الزمن $t=0$، وإلا فإن المعادلة (٥.٤) من الممكن أن تكون غير صحيحة. أيضاً، حيث أن $h_{-1}(t)$ تساوي صفراً لكل قيم الزمن السالبة، وهي مستمرة عند $t=0$، فإنها يجب أيضاً أن تكون صفراً عند $t=0^+$. وعلى ذلك فإن :

$h_{-1}(0^+)=0=Ke^{0}+1/a$ وهذا يؤدي إلى $K=-1/a$

و $h_{-1}(t)=(1/a)(1-e^{-at})$ لكل الأزمنة $t>0$. بتجميع ذلك مع حقيقة أن $h_{-1}(t)=0$ لكل الأزمنة $t<0$، نحصل على الحل عند كل الأزمنة كما يلي :

باستخدام الخطية

$$h_{-1}(t) = \frac{1-e^{-at}}{a}$$

$$h_{-1}(t-w) = \frac{1-e^{-a(t-w)}}{a}u(t-w)$$

وعلى ذلك فالاستجابة للنبضة المربعة الموصوفة مسبقاً سيكون :

$$h_p(t) = \frac{(1-e^{at})u(t)-(1-e^{-a(t-w)})u(t-w)}{aw}$$

بجعل w تؤول إلى الصفر ،

$$h(t) = \lim_{w\to 0} h_p(t) = \lim_{w\to 0} \frac{(1-e^{at})u(t)-(1-e^{-a(t-w)})u(t-w)}{aw}$$

وهذه صورة غير محددة ، لذلك لا بد من استخدام قانون لوبيتال L'Hopital لتحقيقها :

$$\lim_{w\to 0} h_p(t) = \lim_{w\to 0} \frac{\frac{d}{dw}((1-e^{at})u(t)-(1-e^{-a(t-w)})u(t-w))}{\frac{d}{dw}(aw)}$$

$$\lim_{w\to 0} h_p(t) = \lim_{w\to 0} \frac{\frac{d}{dw}(-(1-e^{-a(t-w)})u(t-w))}{a}$$

$$\lim_{w\to 0} h_p(t) = -\lim_{w\to 0} \frac{(1-e^{-a(t-w)})(-\delta(t-w))-ae^{-a(t-w)}u(t-w)}{a}$$

$$\lim_{w\to 0} h_p(t) = -\frac{(1-e^{at})(-\delta(t))-ae^{-at}u(t)}{a} = -\frac{-ae^{-at}u(t)}{a} = e^{-at}u(t)$$

وعلى ذلك فاستجابة النبضة ستكون $h(t)=e^{-at}u(t)$ كما سبق.

$$a_N y^{(N)}(t) + a_{N-1} y^{(N-1)}(t) + \ldots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_M x^{(M)}(t) + b_{M-1} x^{(M-1)}(t) + \ldots + b_1 x'(t) + b_0 x(t)$$ المعادلة رقم (٥.٥)

وهذه يمكن كتابتها كما يلي :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k X^{(k)}(t)$$

الاستجابة $h(t)$ لوحدة النبضة يجب أن يكون لها صورة دالية بحيث :

١- عند تفاضلها عدد من المرات ، حتى التفاضل رقم N ، فإن كل هذه التفاضلات يجب أن تتوافق مع التفاضلات المقابلة لها لوحدة النبضة حتى التفاضل رقم M عند الزمن $t=0$ ، و

٢- الجمع الخطي لكل تفاضلات $h(t)$ يجب أن تؤول إلى الصفر لكل قيم الزمن $t\neq 0$.

المطلوب ٢ تم تحقيقه بالحل على الصورة $y_h(t)u(t)$ حيث $y_h(t)$ هي الحل المتجانس للمعادلة (٥.٥). لتحقيق المطلوب ١ قد نحتاج لإضافة دالة أخرى ، أو دوال على $y_h(t)u(t)$. افترض الثلاث أحوال التالية :

الحالة الأولى $M<N$

تفاضلات المعادلة $y_h(t)u(t)$ تحقق كل الدوال الأحادية الضرورية للتوافق مع النبضة والتفاضلات للنبضة على الجانب الأيمن ولا حاجة لإضافة عناصر أخرى.

الحالة الثانية $M=N$

نحتاج فقط لإضافة عنصر نبضة على الصورة $K_\delta \delta(t)$.

الحالة الثالثة $M>N$

التفاضل رقم N للدالة التي أضفناها إلى $y_h(t)u(t)$ يجب أن تحتوي عنصراً يتوافق مع التفاضل رقم M لوحدة النبضة. وعلى ذلك فإن الدالة التي أضيفت يجب أن تكون على الصورة :

$$K_{M-N}u_{M-N}(t) + K_{M-N-1}u_{M-N-1}(t) + \ldots + \underbrace{k_0 u_0(t)}_{=\delta(t)}$$

كل التفاضلات الأخرى لوحدة النبضة ستؤخذ في الحسبان عن طريق تفاضل صورة الحل $y_h(t)u(t)$ العديد من المرات.

الحالة 1 هي الحالة الأكثر شيوعاً عملياً والحالة ٣ نادرة عمليا.

مثال ٢, ٥

استجابة النبضة لنظام مستمر زمنياً ٢

احسب استجابة النبضة لنظام يوصف بالمعادلة التالية : $y'(t) + ay(t)=x'(t)$.

استجابة النبضة يجب أن تحقق ما يلي :

$$h'(t) + ah(t)=\delta'(t) \qquad \text{المعادلة رقم (٥,٦)}$$

أعلى تفاضل يكون هو نفسه لكل من الإثارة والاستجابة. صورة استجابة النبضة تكون على الصورة التالية : $h(t) =Ke^{-at}u(t) + K_\delta\delta(t)$ ، وتفاضلها الأول يكون على الصورة :

$$h'(t)=Ke^{-at}\delta(t) - aKe^{-at}u(t) + K_\delta\delta'(t)$$

بتكامل المعادلة (٥,٦) من $t=0^-$ حتى $t=0^+$ نحصل على :

$$\underbrace{h(0^+)}_{=k} - \underbrace{h(0^-)}_{=0} + a\int_{0^-}^{0^+}[Ke^{-at}u(t) + K_\delta\delta(t)]dt = \underbrace{\delta(0^+)}_{=0} - \underbrace{\delta(0^-)}_{=0}$$

$$K + aK\int_0^{0^+} e^{-at}dt + aK_\delta \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt}_{=1} = 0$$

$$K + aK\left[\frac{e^{-at}}{-a}\right]_0^{0^+} + aK_\delta = K - K\underbrace{\left[e^{0^+} - e^{0}\right]}_{=0} + aK_\delta = 0$$

أو $K+aK_\delta=0$. بتكامل(٥,٦) من $-\infty$ حتى t وبعدها من $t=0^-$ حتى $t=0^+$ نحصل على :

$$\int_{0^-}^{0^+} dt\int_{-\infty}^{t}\left[K\delta(\lambda) - aKe^{-a\lambda}u(\lambda) + K_\delta\delta'(\lambda)\right]d\lambda$$
$$+\int_{0^-}^{0^+} dt\int_{-\infty}^{t}\left[Ke^{-a\lambda}u(\lambda) + K_\delta\delta(\lambda)\right]d\lambda = \int_{0^-}^{0^+} dt\int_{-\infty}^{t}\delta'(\lambda)d\lambda$$

$$\int_{0^-}^{0^+}[Ku(t) + K(e^{-at} - 1)u(t) + K_\delta\delta(t)]dt + \underbrace{\frac{K}{a}\int_{0^-}^{0^+}(1 - e^{-at})u(t)dt}_{=0}$$

$$+K_\delta \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} u(t)dt}_{=0} = \int_{0^-}^{0^+} dt \int_{-\infty}^{t} \delta'(\lambda)d\lambda$$

$$\int_{0^+}^{0^-} [Ke^{-at}u(t) + K_\delta\delta(t)]\,dt = \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt}_{=u(0+)-u(0-)}$$

$$\frac{K}{a}\underbrace{[1-e^{-at}]_0^{0^+}}_{=0} + K_\delta\left[\underbrace{u(0^+)}_{=1} - \underbrace{u(0^{-+})}_{=0}\right] = 1 \rightarrow K_\delta = 1 \rightarrow K = -a$$

ولذلك فإن استجابة النبضة ستكون $h(t)=\delta(t)-ae^{-at}u(t)$. دعنا نختبر ذلك عن طريق التعويض في المعادلة (٥,٦) :

$$\delta'(t) - a\,e^{-at}\delta(t) + a^2\,e^{-at}u(t) + a[\delta(t)-ae^{-at}u(t)]=\delta'(t)$$
$$= e^0\delta(t)=\delta(t)$$

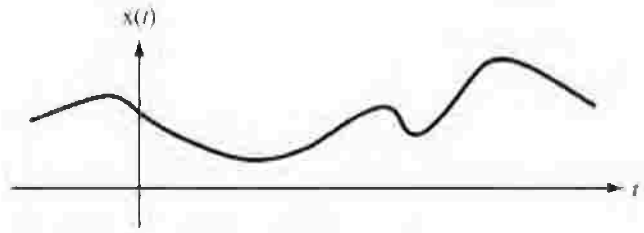
وبالتالي :

$$\delta'(t)=\delta'(t)$$

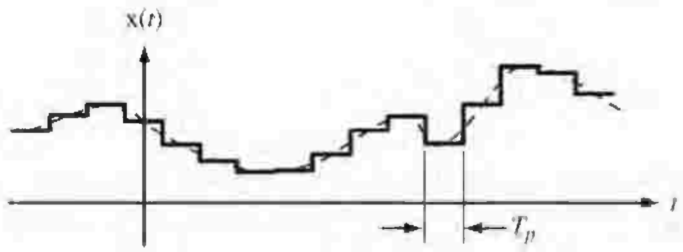
الالتفاف في الزمن المستمر

الاستنتاج

بمجرد معرفة استجابة النبضة لأي نظام، يمكننا إيجاد طريقة لحساب استجابته لأي إشارة دخل عامة. افترض أن لدينا نظاماً تمت إثارته بإشارة الدخل $x(t)$ كما في شكل (٥,١). كيف يمكننا حساب هذه الاستجابة؟ يمكننا حساب استجابة تقريبية عن طريق تقريب هذه الإشارة كتتابع من النبضات المربعة المتجاورة التي كلها لها العرض نفسه T_p كما في شكل (٥,٢).



شكل رقم (٥,١) إشارة اختيارية



شكل رقم (٥,٢) تقريب للدالة الاختيارية في صورة نبضات مربعة متجاورة.

الآن يمكننا (تقريباً) حساب الاستجابة للإشارة الأصلية كمجموع للاستجابات لكل هذه النبضات المربعة، كل منها تؤثر على حدة. حيث إن كل النبضات مستطيلة ولها العرض نفسه ، فإن الفرق بين هذه النبضات سيكون فقط في زمن حدوث هذه النبضات، وارتفاع كل واحدة من هذه النبضات. ولذلك، ستكون الاستجابة لكل هذه النبضات لها الشكل نفسه فيما عدا التأخير الزمني بمقدار معين الذي يأخذ في الحسبان زمن حدوث كل نبضة، والضرب في كمية ثابتة تأخذ في الاعتبار مقدار ارتفاع كل نبضة. يمكننا أن نجعل هذا التقريب جيداً بقدر الإمكان عن طريق استخدام عدد أكبر من النبضات، وكل منها يكون لها زمن أقل. بالاختصار، فإن مشكلة حساب استجابة نظام LTI لأي إشارة اختيارية تصبح مشكلة تجميع الاستجابات لصورة دالة معروفة، ولكنها بها تأخير زمني معين ومضروبة في ثابت معين.

باستخدام الدالة المربعة، فإن وصف تقريب الدالة الاختيارية يمكن كتابته الآن بصورة تحليلية. إرتفاع كل نبضة هو قيمة الإشارة الأصلية عند الزمن المحدد لمركز، أو منتصف عرض هذه النبضة. على ذلك يمكن كتابة هذا التقريب كما يلي :

$$x(t) \cong \cdots + x(-T_p)rect\left(\frac{1+T_p}{T_p}\right) + x(0)rect\left(\frac{t}{T_p}\right) + x(T_p)rect\left(\frac{t-T_p}{T_p}\right) + \cdots$$

$$x(t) \cong \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_p)\, rect\left(\frac{t-nT_p}{T_p}\right)$$ المعادلة رقم (٥,٧)

لنفترض أن الاستجابة لنبضة واحدة عرضها T_p ومساحتها تساوي الوحدة مركزها عند الزمن $t=0$ هي $h_p(t)$ تسمى استجابة وحدة النبضة. وحدة النبضة هي $(1/T_p)rect(1/T_p)$. وعلى ذلك يمكننا كتابة المعادلة (٥,٧) بدلالة النبضات المزاحة زمنياً كما يلي :

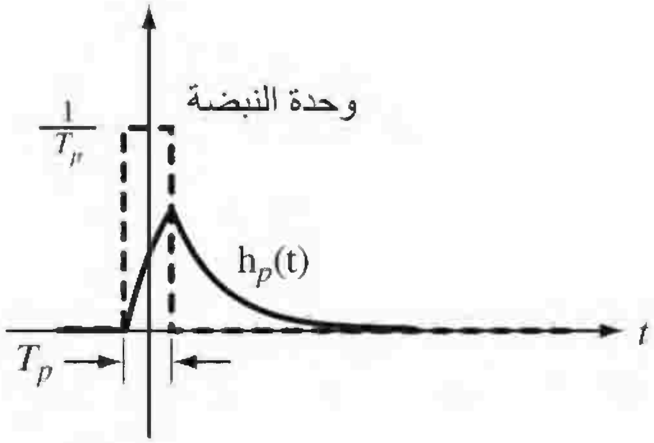
$$x(t) \cong \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_p\, x(nT_p) \underbrace{\frac{1}{T_p} rect\left(\frac{t-nT_p}{T_p}\right)}_{\text{وحدة النبضة المزاحة}}$$ المعادلة رقم (٥,٨)

باستدعاء خاصيتي الخطية والثبات الزمني، فإن الاستجابة لكل واحدة من هذه النبضات يجب أن تكون الاستجابة لوحدة النبضة $h_p(t)$، محجمة بالمقدار $T_p x(nT_p)$، ومزاحة زمنياً من نقطة أصل الزمن بالكمية نفسها مثل النبضة المقابلة لها. وعلى ذلك فإن الاستجابة المقربة ستكون على الصورة :

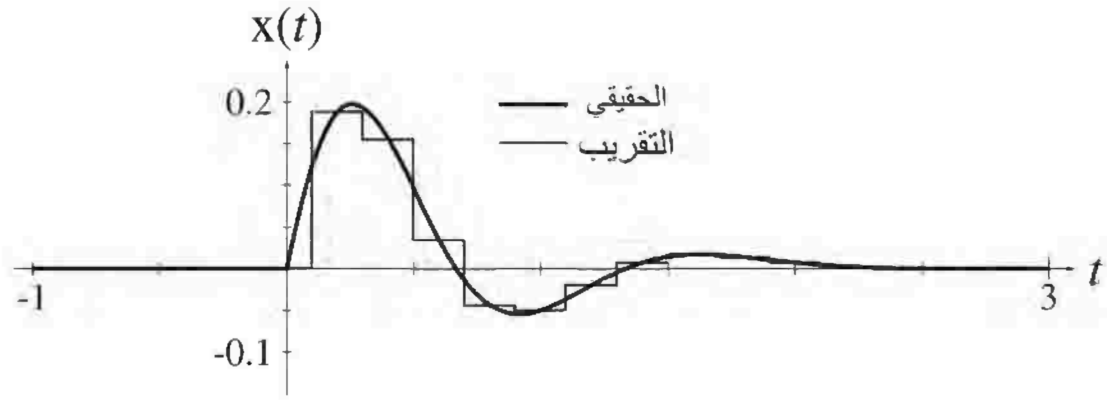
$$y(t) \cong \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_p x(nT_p) h_p(t-nT_p)$$ المعادلة رقم (٥,٩)

سنفترض توضيحاً لذلك، سنفترض أن استجابة وحدة النبضة $h_p(t)$ هي الاستجابة للمرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة المبين في شكل (٥,٣). افترض أن إشارة الدخل $x(t)$ هي الشكل الموجي المتواصل في شكل (٥,٤)، والذي تم تقريبه بتتابع من النبضات كما هو مبين.

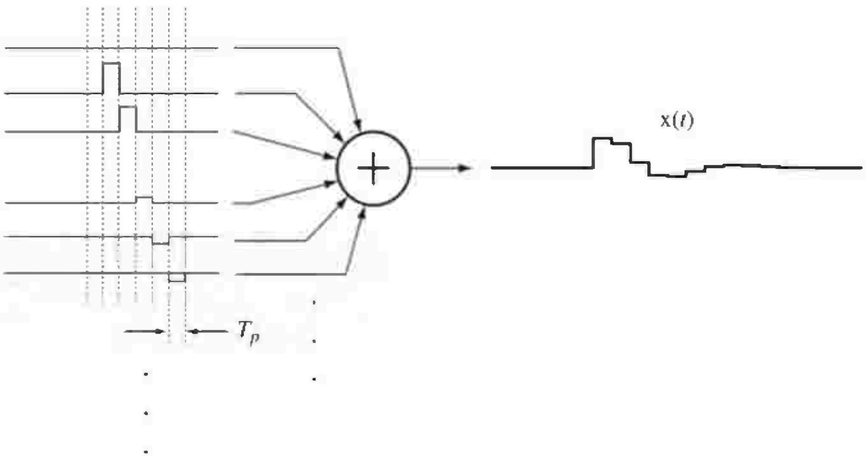
في شكل (٥،٥) تم فصل النبضات ثم جمعها لتحقيق التقريب.



شكل رقم (٥,٣) استجابة وحدة النبضة للمرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة.



شكل رقم (٥.٤) x(t) المقربة والحقيقية.



شكل رقم (٥,٥) تقربب x(t) كمجموع من النبضات المنفردة.

حيث إن مجموع النبضات المنفردة هو التقريب x(t)، فإن الاستجابة التقريبية يمكن حسابها عن طريق تطبيق الدخل المقرب x(t) على النظام. ولكن حيث إن النظام هو نظام LTI، فإنه يمكننا بدلا من ذلك استخدام أساسيات نظرية التجميع وتطبيق النبضات واحدة بعد الأخرى على النظام. وعلى ذلك فإن هذه الاستجابات يمكن تجميعها لتكوين الاستجابة الكلية المقربة للنظام كما في شكل (٥,٦).

شكل (٥,٧) يبين إشارة الدخل المقربة للنظام، واستجابة وحدة النبضة، واستجابة وحدة النبضة واستجابات النظام الحقيقية والمقربة، بفرض عرض النبضة يساوي 0.2 ثانية. مع تقليل عرض النبضة، فإن التقريب يصبح أفضل كما في شكل (٥,٨). مع عرض نبضة يساوي 0.1 ثانية، يصبح عرض النبضة الحقيقي والمقرب من الصعب التفريق بينهما كما هو موضح على هذا التدريج.

بمراجعة اساسيات الرياضيات، ومن مفهوم قانون المستطيل في التكامل، نجد أن التكامل لمتغير حقيقي يمكن تحديده بأنه نهاية للمجموع كما يلي :

$$\int_a^b g(x)dx = \lim_{\Delta x\to 0} \sum_{n=a/\Delta x}^{b/\Delta x} g(n\Delta x)\Delta x$$ المعادلة رقم (٥,١٠)

سنقوم بتطبيق المعادلة (٥,١٠) على مجموع النبضات واستجابة النبضة في المعادلات (٥,٨) و (٥,٩) مع تقارب عرض النبضة من الصفر. كلما أصبح عرض النبضة T_p أصغر، فإن تقريب كل من الإثارة والاستجابة يصبح أفضل. في النهاية عندما تقترب T_p من الصفر، فإن المجموع يصبح تكاملاً ويصبح التقريب حقيقياً. في الحدود نفسها ، فإن وحدة النبضة $(1/T_p)\mathrm{rect}(1/T_p)$ تقترب من وحدة النبضة. مع اقتراب T_p من الصفر فإن النقط الزمنية nT_p يقترب بعضها من بعض. في النهاية فإن الإزاحة الومنية المتقطعة nT_p تتداخل في صورة إزاحات مستمرة. من المفضل (والمعروف) أن نسمي هذه الإزاحة الزمنية المستمرة τ. بتغيير اسم كمية الإزاحة الزمنية nT_p إلى τ، وحساب النهاية مع اقتراب T_p من الصفر، فإن عرض النبضة T_p يقترب من التفاضل dτ وتصبح الإثارة كما يلي :

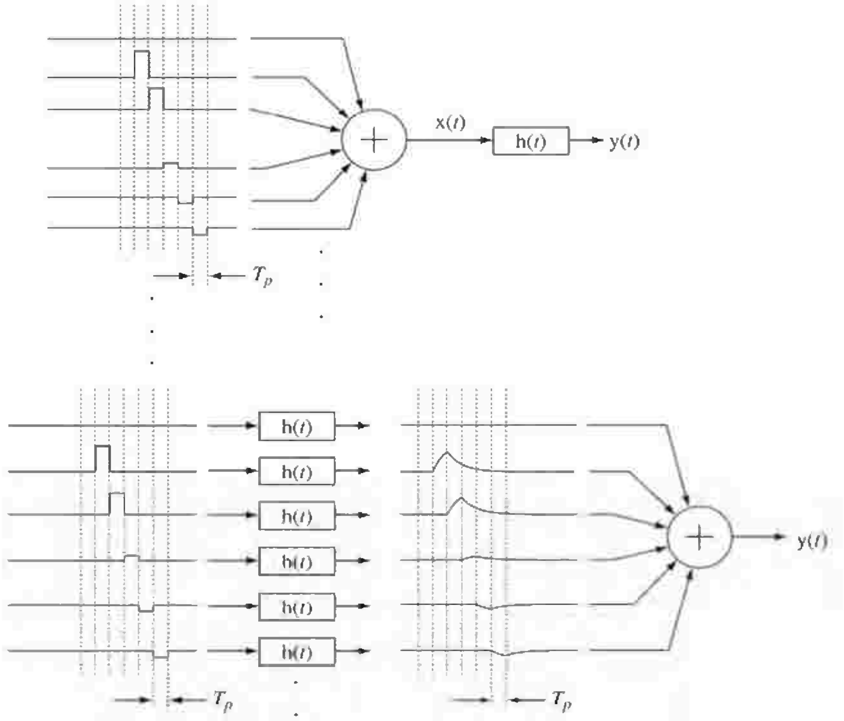
$$\underbrace{x(t)}_{} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty}}_{\int} \underbrace{T_p}_{d\tau}\, x\underbrace{(nT_p)}_{(\tau)}\, \underbrace{\frac{1}{T_p} rect\left(\frac{1-nT_p}{T_p}\right)}_{\delta(t-\tau)}$$

وأيضاً :

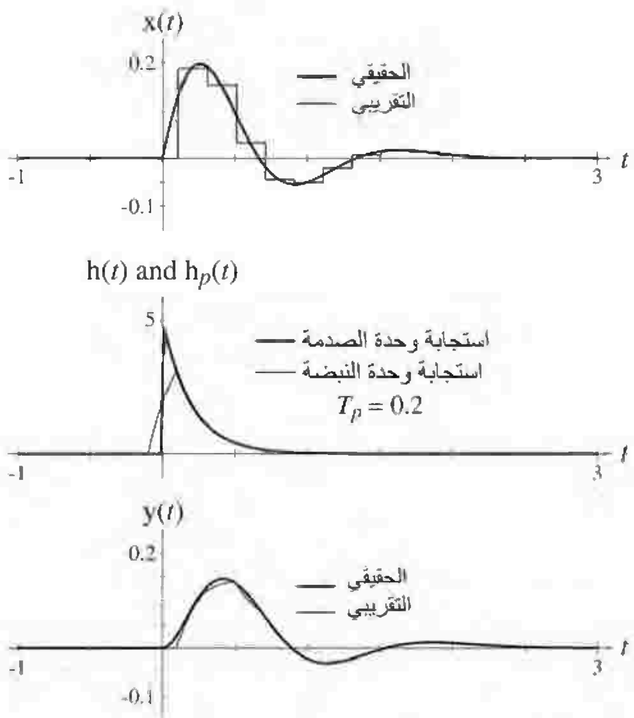
$$\underbrace{y(t)}_{} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty}}_{\int} \underbrace{T_p}_{d\tau}\, x\underbrace{(nT_p)}_{(\tau)}\; \underbrace{h_p(t-nh_p)}_{\delta(t-\tau)}$$

ولذلك ففي النهاية فإن هذه المجاميع تصبح تكاملات على الصورة التالية :

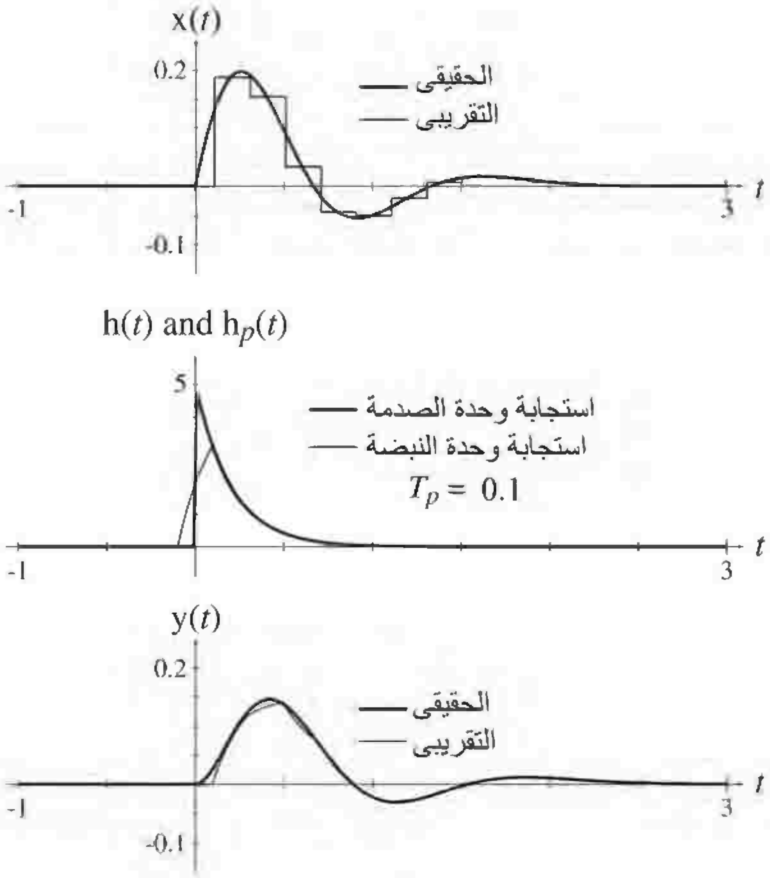
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$ المعادلة رقم (٥,١١)



شكل رقم (٥,٦) تطبيق الخطية ونظرية التجميع لإيجاد الاستجابة التقريبية للنظام.



شكل رقم (٥,٧). الإثارة الحقيقية والتقريبية، واستجابة وحدة النبضة، واستجابة وحدة النبضة، واستجابة النظام الحقيقية والتقريبية باعتبار Tp=0.2



شكل رقم (٥,٨). الإثارة الحقيقية والتقريبية، واستجابة وحدة النبضة، واستجابة وحدة النبضة، واستجابة النظام الحقيقية والتقريبية باعتبار Tp=0.1

وأيضاً :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{-\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$ المعادلة رقم (٥,١٢)

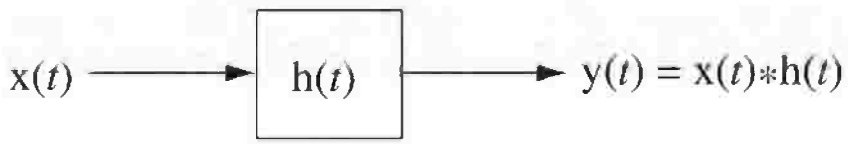
حيث استجابة وحدة النبضة $h_p(t)$ تقترب من استجابة وحدة النبضة $h(t)$ (في العادة يطلق عليها استجابة النبضة) للنظام. التكامل في المعادلة (٥.١١) يتم تحقيقه بالتعويض بخاصية العينة للنبضة. التكامل في المعادلة (٥,١٢) يسمى التكامل اللاتفافي. يتم بيان عملية الالتفاف بين دالتين بالرمز * كما يلي :

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{-\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$ المعادلة رقم (٥,١٣)

طريقة أخرى للحصول على التكامل الالتفافي هي أن نبدأ من المعادلة (٥,١١)، التي تنتج مباشرة من خاصية العينة للنبضة. الكمية التي يتم تكاملها في المعادلة (٥,١١) هي وحدة النبضة عند $t=\tau$ وشدتها هي $x(\tau)$. حيث إنه، وبالتعريف، فإن $h(t)$ هي الاستجابة لوحدة النبضة $\delta(t)$، وحيث إن النظام متجانس وثابت زمنياً، فإن الاستجابة لـ $x(\tau)\delta(t-\tau)$ يجب أن تكون $x(\tau)h(t-\tau)$. وعلى ذلك فباستدعاء خاصية التجميع، فإنه إذا كان $x(t) = \int_{-\infty}^{-\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$، يمثل تكامل (نهاية التجميع) قيم x، فإن :

$y(t) = \int_{-\infty}^{-\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$، يمثل تكاملاً لقيم y كاستجابة لقيم x المقابلة. هذا الاستنتاج أكثر تجريدا وفلسفة وأقصر كثيراً من الاستنتاج السابق وتطبيقاً رائعاً لخواص النظم LTI، وخاصية العينة لوحدة النبضة.

تعتبر استجابة النبضة لنظم الـ LTI وصفاً مهماً جداً لطريقة استجابة هذه الأنظمة، لأنه بمجرد تحديد هذه الاستجابة، فإن الاستجابة لأي إشارة دخل اختيارية يمكن حسابها. يمكن توضيح عملية الالتفاف في رسم صندوقي كما في شكل (٥،٩).



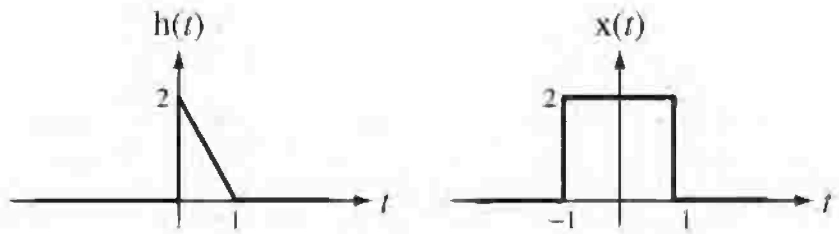
شكل رقم (٥،٩) رسم صندوقي توضيحي لعملية الالتفاف.

أمثلة بيانية وتحليلية على عملية الالتفاف

الصورة الرياضية العامة لعملية الالتفاف هي كما يلي:

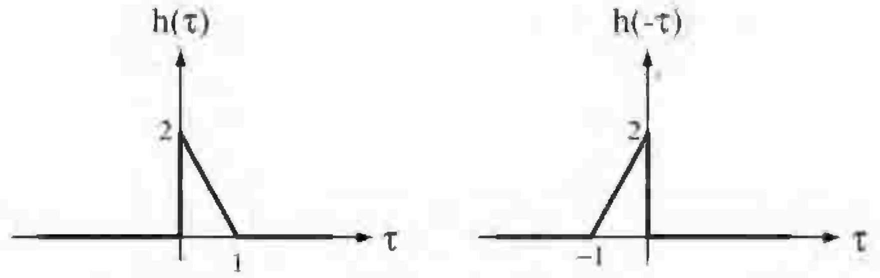
$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{-\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

إن مثالا بيانيا على العمليات المتضمنة في التكامل الالتفافي سيساعد جدا في فهم هذه العملية. افترض أن h(t) و x(t) هما الدالتان الموضحتان في شكل (٥،١٠).

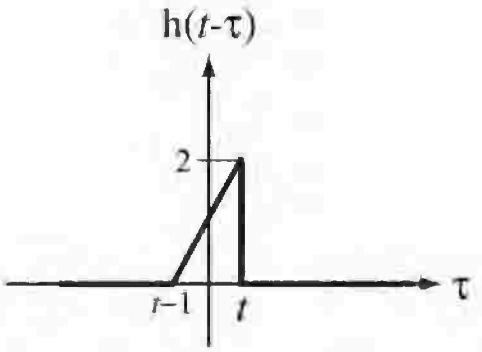


شكل رقم (٥،١٠) الدالتان المطلوب إجراء عملية الالتفاف عليهما.

هذه الاستجابة الصدمية h(t) ليست استجابة مثالية لنظام خطي عملي، ولكنها ستستخدم فقط لبيان عملية الالتفاف. الكمية المطلوب تكاملها في عملية الالتفاف هي x(τ)h(t-τ). ما هي h(t-τ)؟ إنها دالة في المتغيرين t و τ. حيث إن متغير التكامل في عملية الالتفاف هو τ، فإننا يجب أن نعتبر h(t-τ) على أنها دالة في **τ** لكي نرى كيف سنجري هذا التكامل. يمكننا أن نبدأ ذلك برسم h(τ) وبعد ذلك نرسم h(-τ) مع **τ** كما في شكل (٥،١١).



شكل رقم (٥,١١) رسم h(τ) و h(-τ) مع τ.



شكل رقم (٥,١٢) رسم h(-τ) مع τ.

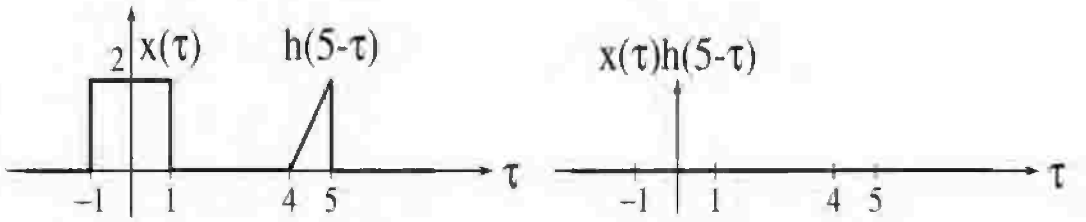
إن إضافة t في h(t-τ) يزيح الدالة بمقدار t من الوحدات ناحية اليمين كما في شكل (٥,١٢). إن التحول من h(τ) إلى h(t-τ) يمكن وصفه على أنه عمليتي إزاحة وتحجيم وتعاقبتين :

$$h(\tau) \xrightarrow{\tau\to-\tau} h(-\tau) \xrightarrow{\tau\to\tau-t} h\big(-(\tau-t)\big) = h(t-\tau)$$

إذا قمنا بالتعويض عن t تساوي τ في h(t-τ) سنحصل على h(0). من التحديد الأولي للدالة h(t) سنرى أن هذه نقطة عدم اتصال حيث h(t) تنتقل من 0 إلى 1. إنها النقطة نفسها على h(t-τ). قم بعمل الشيء نفسه لـ τ=t-1 لترى إن كانت ستعمل أم لا.

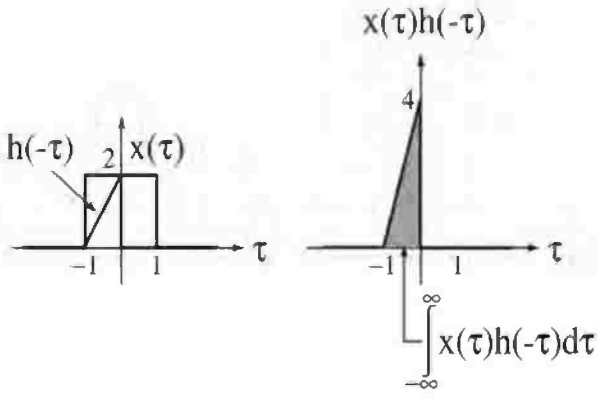
واحد من الالتباسات الشائعة هو أن ننظر إلى التكامل ولا نفهم ماذا يعني التكامل من τ=-∞ حتى τ=+∞. حيث إن t ليست هي متغير التكامل، فإنها ستكون كما لو كانت كمية ثابتة أثناء عملية التكامل. ولكنها تعتبر المتغير في الدالة النهائية التي ستنتج من عملية الالتفاف. فكر في عملية الالتفاف على أنها خطوتان عامتان متعقبتان. أولاً افترض قيمة لـ t، نفذ عملية التكامل واحصل على النتيجة. بعد ذلك افترض قيمة أخرى لـ t وكرر العملية نفسها. كل عملية تكامل تعطي نقطة واحدة على منحنى يصف الدالة النهائية. كل نقطة على المنحنى y(t) سيتم حسابها عن طريق إيجاد المساحة تحت حاصل الضرب x(τ)h(t-τ).

تصور حاصل الضرب x(τ)h(t-τ)، إنه يعتمد على ما هي قيمة t. لمعظم قيم t فإن الأجزاء التي لا تساوي الصفر في الدالتين لا يتطابقان وسيكون حاصل الضرب يساوي صفراً. (إن ذلك لا يماثل تماماً استجابات النبضة الحقيقية لأنها في العادة لا تكون محدودة الزمن. استجابات النبضة الحقيقية للأنظمة المستقرة تبدأ في العادة عند زمن معين وتقترب من الصفر مع اقتراب t من الما لانهاية).ولكن لبعض قيم الزمن t فإن قيم الدالتين التي لا تساوي صفر يتطابقان وسيكون هناك مساحة لا تساوي الصفر تحت منحنى حاصل ضربهما. افترض t=5 و t=0. عندما t=5، فإن الأجزاء التي لا تساوي الصفر في كل من الدالتين x(τ) و h(5-τ) لا تتطابقان وسيكون حاصل الضرب يساوي صفراً كما في شكل (٥.١٣).



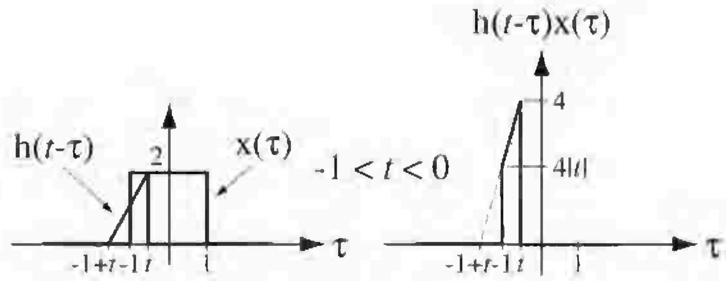
شكل رقم (٥,١٣) استجابة النبضة، وإشارة الدخل، وحاصل ضربهما عندما t=5.

عندما t=0، فإن الأجزاء غير الصفرية في الدالتين x(τ) و h(0-τ) يتطابقان وسيكون حاصل ضربهما لا يساوي الصفر كما في شكل (٥.١٤).



شكل رقم (٥,١٤) استجابة النبضة، وإشارة الدخل، وحاصل ضربهما عندما t=0.

لكل قيم -1<t<0 فإن الالتفاف للدالتين سيكون ضعف مساحة الدالة h (التي تساوي ١) ناقص مساحة المثلث الذي عرضه |t| وارتفاعه 4|t| كما في شكل (٥.١٥).

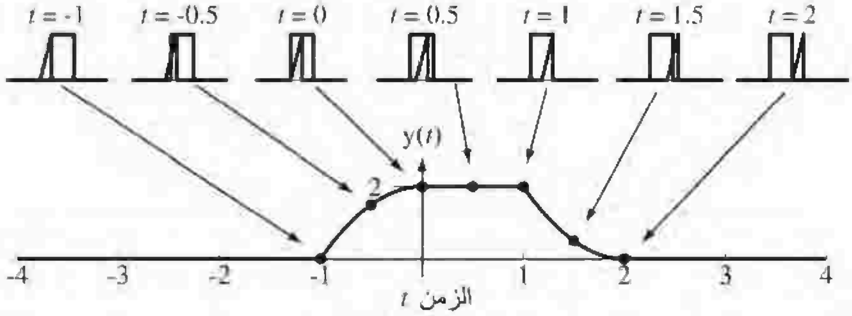


شكل رقم (٥,١٥) حاصل ضرب h(t-τ) و x(τ) عندما -1<t<0.

ولذلك فإن قيمة دالة الالتفاف في هذا المدى للـ t :

$$y(t)=2-(1/2)(-t)(-4t)=2(1-t^2), \qquad -1<t<0$$

لكل قيم 0<t<1 فإن التفاف الدالتين سيكون هو القيمة الثابتة 2. لقيم 1<t<2 ، سيكون التفاف الدالتين هو المساحة تحت المثلث الذي عرض قاعدته هو (2-t) وارتفاعه هو (8-4t) ، وعلى ذلك فإن $y(t)=(1/2)(2-t)(8-4t)=2(2-t)^2$. الدالة النهائية موضحة في شكل (٥,١٦).



شكل رقم (٥,١٦) الالتفاف للدالة x(t) مع الدالة h(t) .

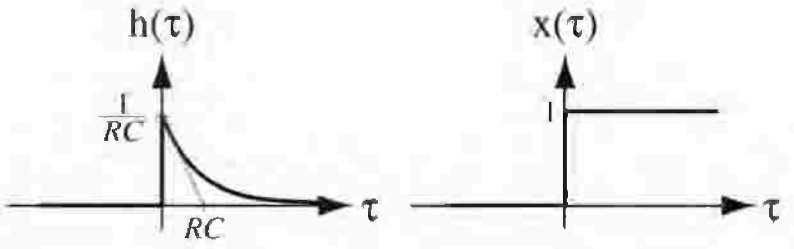
كتمرين أكثر عملية دعنا الآن نحسب استجابة وحدة الخطوة لمرشح RC منفذ للترددات المنخفضة باستخدام الالتفاف. إننا نعرف من التحليلات المسبقة بأن الإجابة ستكون $v_{out}(t)=(1-e^{-t/TC})u(t)$. في البداية نحتاج لحساب استجابة النبضة. المعادلة التفاضلية هي :

$$RCv'_{out}(t)+v_{out}(t)=v_{in}(t) \rightarrow RC\,h'(t)+h(t)=\delta(t)$$

صورة استجابة النبضة ستكون $h(t)=Ke^{-t/RC}u(t)$. بالتكامل مرة واحدة من 0^- حتى 0^+ نحصل على :

$$RC\left[h(0^+)-\underbrace{h(0^-)}_{=0}\right]+\underbrace{\int_{0^-}^{0^+}h(t)\,dt}_{=0}=\underbrace{u(0^+)}_{=1}-\underbrace{u(0^-)}_{=0} \rightarrow h(0^+)=1/RC$$

وبالتالي فإن $1/RC=K$ و $h(t)=(1/RC)e^{-t/RC}u(t)$ كما في شكل (٥,١٧).



شكل رقم (٥,١٧) استجابة النبضة والإثارة لمرشح RC منفذ للترددات المنخفضة.

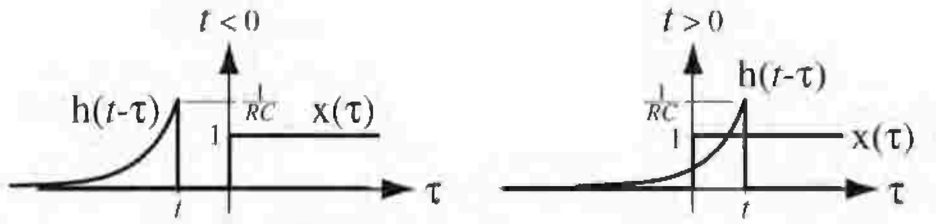
وبالتالي فإن الاستجابة $v_{out}(t)$ لوحدة الخطوة $v_{in}(t)$ ستكون $v_{out}(t)=v_{in(t)}*h(t)$ أو :

$$v_{out}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v_{in}(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\frac{e^{-(t-\tau)/RC}}{RC}u(t-\tau)d\tau$$

نستطيع جعل التكامل أبسط عن طريق ملاحظة أن أول وحدة خطوة $u(\tau)$ مما يجعل نتيجة التكامل صفر لكل القيم السالبة لـ τ، ولذلك يمكننا كتابة ما يلي :

$$v_{out}(t) = \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-(t-\tau)/RC}}{RC}u(t-\tau)d\tau$$

افترض تأثير وحدة الخطوة الأخرى. حيث أننا نكامل على مدى τ من صفر حتى ما لانهاية، إذا كانت t سالبة، فإنه لأي قيمة لـ τ في هذا المدى ستكون وحدة الخطوة تساوي صفراً كما في شكل (٥,١٨). لذلك فإنه لقيم t السالبة، فإن $v_{out}(t)=0$. لقيم t الموجبة ستكون وحدة الخطوة $u(t-\tau)$ واحد لكل قيم $\tau<t$ وصفر لكل فيم $\tau>t$. ولذلك، فإنه لقيم t الموجبة يمكننا كتابة ما يلي :



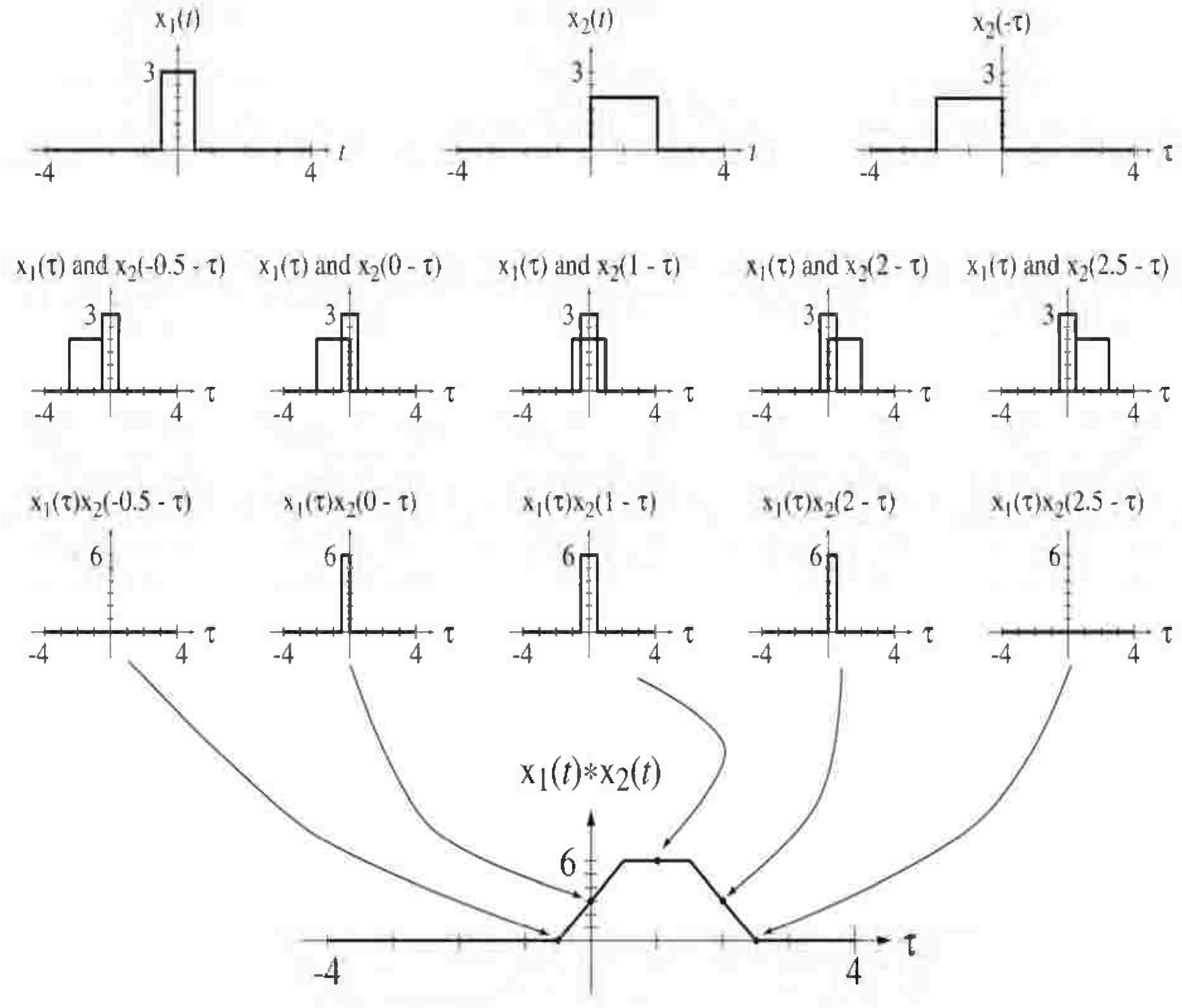
شكل رقم (٥,١٨) العلاقة بين دالتين تشكلان حاصل الضرب في التكامل الالتفافي لقيم t الموجبة والسالبة.

$$v_{out}(t) = \int_{0}^{t} \frac{e^{-(t-\tau)/RC}}{RC}d\tau = \left[e^{-(t-\tau)/RC}\right]_{0}^{t} = 1 - e^{-t/RC},\ \ t > 0$$

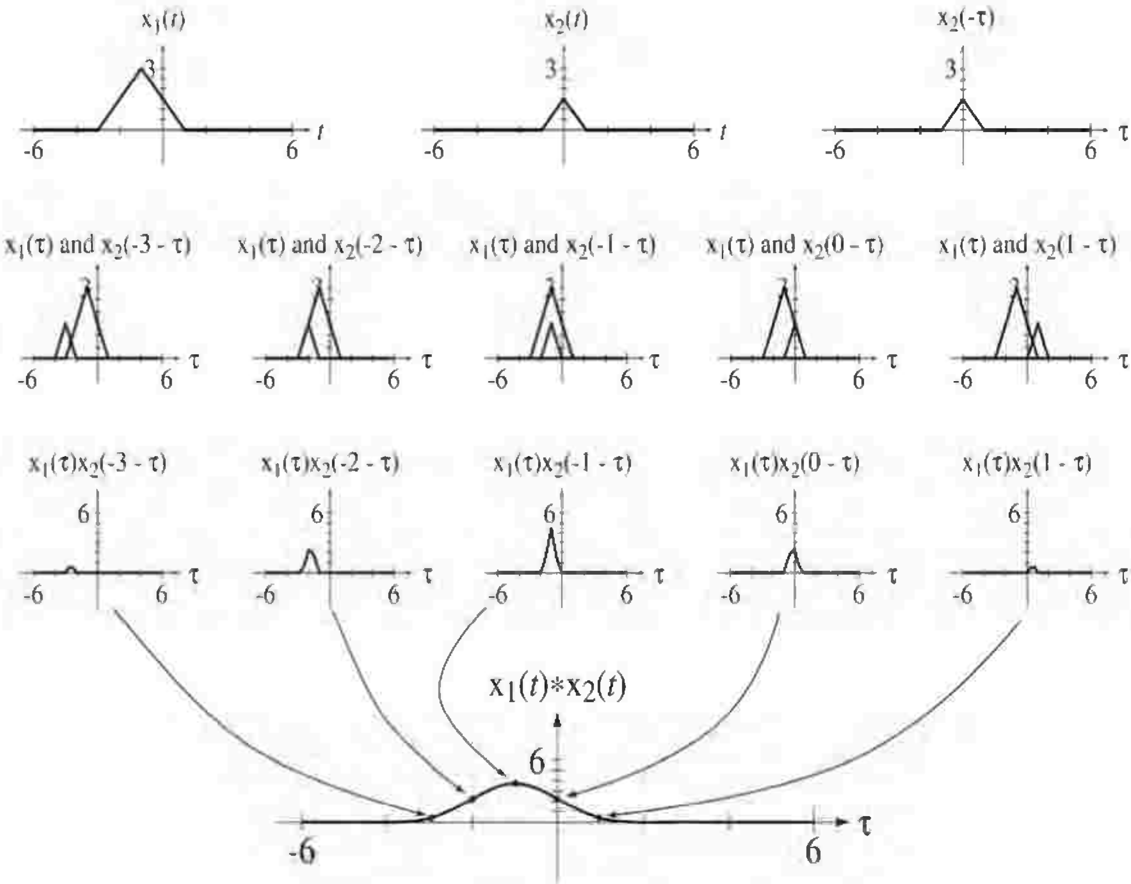
بضم نتائج قيم t السالبة والموجبة تصبح الاستجابة، $v_{out}(t)=(1-e^{-t/RC})u(t)$.

شكل (٥,١٩) وشكل (٥,٢٠) يوضحان مثالين آخرين على الالتفاف. في كل حالة يقدم الصف الأعلى الدالتين $x_1(t)$ و $x_2(t)$ المطلوب التفافهم والصورة المقلوبة من الدالة الثانية $x_2(-\tau)$، وهي $x(t-\tau)$ بعد وضع $t=0$، والتي تمثل الصورة المقلوبة ولم تزح حتى الآن. في الصف الثاني توجد الدالتان المشتملتان في التكامل الالتفافي وهما $x_1(\tau)$ و $x_2(t-\tau)$ مرسومتان مع τ لخمسة اختيارات لـ t، توضحان إزاحة الدالة الثانية $x_2(t-\tau)$ مع تغير t. في الصف الثالث

يوجد حاصل الضرب $x_1(\tau)x_2(t-\tau)$ في التكامل الالتفافي عند الأزمنة نفسها. في الأسفل يوجد المخطط الذي يوضح التفاف الدالتين الأصليتين مع أسهم ونقاط صغيرة توضح قيم الالتفاف عند الخمس قيم للزمن، وهي نفسها تمثل المساحات $\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$ تحت حاصل الضرب عند هذه النقط.



شكل رقم (٥,١٩) الالتفاف لنبضتين مستطيلتين.



شكل رقم (٥,٢٠) الالتفاف لنبضتين مثلثتين.

خواص الالتفاف

إحدى العمليات التي تظهر دائماً في تحليل الإشارات والأنظمة هي الالتفاف بين أي إشارة مع النبضة كما يلي:

$$x(t) * A\delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)A\delta(t-\tau-t_0)d\tau$$

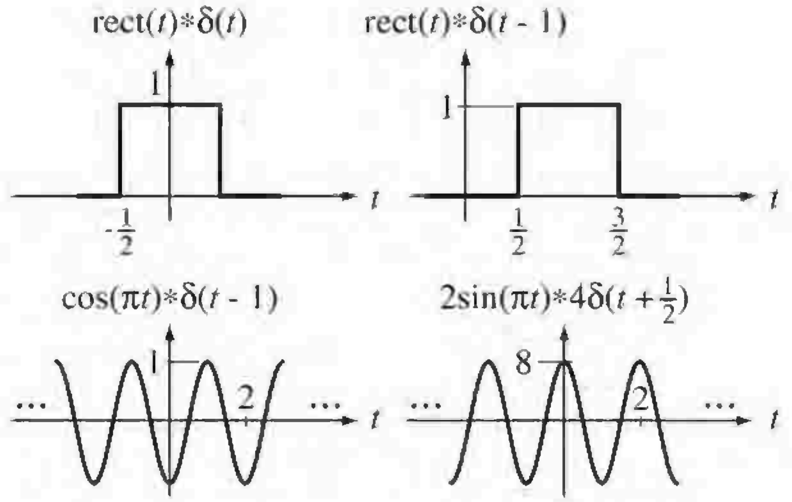
يمكننا استخدام خاصية العينة للنبضة لتحقيق هذا التكامل. متغير التكامل هو τ، وحيث إن النبضة تحدث في المتغير τ عندما $t-\tau-t_0=0$ أو $\tau=t-t_0$، فإن :

$$x(t)*A\delta(t-t_0)=Ax(t-t_0)$$ المعادلة رقم (٥,١٤)

وهذه نتيجة مهمة جداً وستظهر العديد من المرات في التمارين والمواضيع الأخرى (انظر شكل (٥,٢١)).

إذا عرفنا الدالة $g(t)=g_0(t)*\delta(t)$، فإن الصورة المزاحة زمنياً $g(t-t_0)$ يمكن التعبير عنها في الصورتين البديلتين التاليتين :

$g(t-t_0)=g_0(t-t_0)*\delta(t)$ أو $g(t-t_0)=g_0(t)*\delta(t-t_0)$



شكل رقم (٥,٢١) أمثلة على الالتفاف مع الصدمات.

ولكن ليست الصورة $g_0(t-t_0)*\delta(t-t_0)$. بدلاً من ذلك، $g_0(t-t_0)*\delta(t-t_0)=g(t-2t_0)$. هذه الخاصية ليست ححقيقية فقط عند الالتفاف مع الصدمات، ولكن مع أي دالة. إزاحة أي واحدة من الدالتين اللتين يتم إجراء الالتفاف عليهما (ولكن ليس الاثنان) يزيح نتيجة الالتفاف بالكمية نفسها.

خواص التبادلية commutativity، والترابطية associativity، والتوزيع distributivity، والتفاضل، والتحجيم scaling لعملية الالتفاف كلها تم استنتاجها في الملحق ج ووضع ملخص لها هنا كما يلي :

التبادلية	$x(t)*y(t)=y(t)*x(t)$
الترابطية	$(x(t)*y(t))*z(t)=x(t)*(y(t)*x(t))$
التوزيع	$(x(t)+y(t))*z(t)=x(t)*z(t)+y(t)*z(t)$
إذا كانت $y(t)=x(t)*h(t)$، فإن :	
خاصية التفاضل	$y'(t)=x'(t)*h(t)=x(t)*h'(t)$
خاصية المساحة	مساحة y = (مساحة x) × (مساحة h)
خاصية التحجيم	$y(at)=\|a\|\ x(at)*h(at)$

بفرض أن التفاف $x(t)$ مع $h(t)$ هو $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)h(\tau)\,d\tau$. لنفترض أن $x(t)$ كانت محدودة، بمعنى $|x(t-\tau)|<B$ لكل قيم τ حيث B تعتبر حداً أعلى محدد، فإن مقدار التكامل الالتفافي سيكون :

$$|y(t)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)h(\tau)\,d\tau\right|$$

باستخدام حقيقة أن مقدار تكامل أي دالة يكون أقل من أو يساوي تكامل مقدار هذه الدالة :

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx\right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |g(x)|\, dx$$

وأن مقدار حاصل ضرب دالتين يساوي حاصل ضرب مقدار كل من الدالتين، بمعنى $|g(x)h(x)|=|g(x)||h(x)|$، ولذلك يمكننا كتابة ما يلي :

$$|y(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t-\tau)||h(\tau)|d\tau$$

وحيث إن مقدار $x(t-\tau)$ يكون أقل من B لأي قيمة لـ τ، فإن :

$$|y(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t-\tau)||h(\tau)|d\tau < \int_{-\infty}^{\infty} B|h(\tau)|\, d\tau$$

أو :

$$|y(t)| < B\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau$$

ولذلك فإن التكامل الالتفافي يتقارب إذا كان $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt$ محدوداً، أو بمعنى آخر إذا كانت الدالة h(t) قابلة للتكامل تماما. وحيث إن الالتفاف تبادلي، فإنه يمكننا أن نقول إنه إذا كانت h(t) محدودة، فإن شرط التقارب سيصبح أن تكون x(t) قابلة للتكامل تماما.

لكي يكون التكامل الالتفافي متقارباً، فإن الإشارتين اللتين يتم عليهما الالتفاف يجب أن تكون كل منهما محدودة وعلى الأقل أن تكون واحدة منهما قابلة للتكامل التام.

مثال ٥,٣

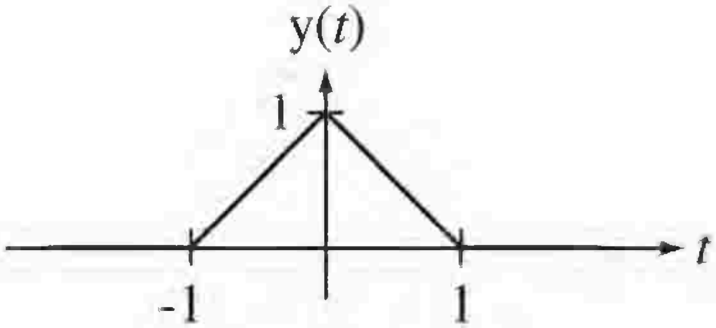
إلتفاف دالتين مستطيلتبن

احسب الالتفاف y(t) لوحدتين مستطيلتين x(t)=rect(t) و h(t)=rect(t).

هذا الالتفاف يمكن إجراؤه مباشرة باستخدام التكامل الالتفافي، أو تحليلياً، أو بيانياً. ولكن يمكننا استعراض خاصية التفاضل لتجنب التكامل الصريح :

$$y(t)=x(t)*h(t)\rightarrow y''(t)*h'(t)$$
$$y''(t)=[\delta(t+1/2)-\delta(t-1/2)]*[\delta(t+1/2)-\delta(t-1/2)]$$
$$y''(t)=\delta(t+1)-2\delta(t)+\delta(t-1)$$
$$y'(t)=u(t+1)-2u(t)+u(t-1)$$
$$y(t)=ramp(t+1)-2ramp(t)+ramp(t-1)$$

انظر شكل (٥,٢٢).

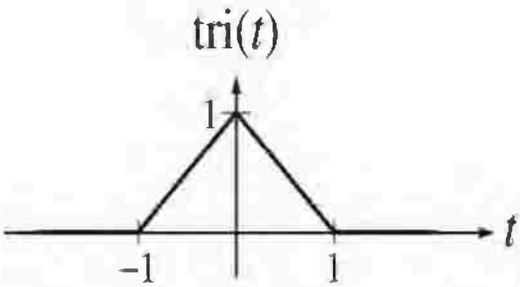


شكل رقم (٥,٢٢) إلتفاف وحدتين مربعتين.

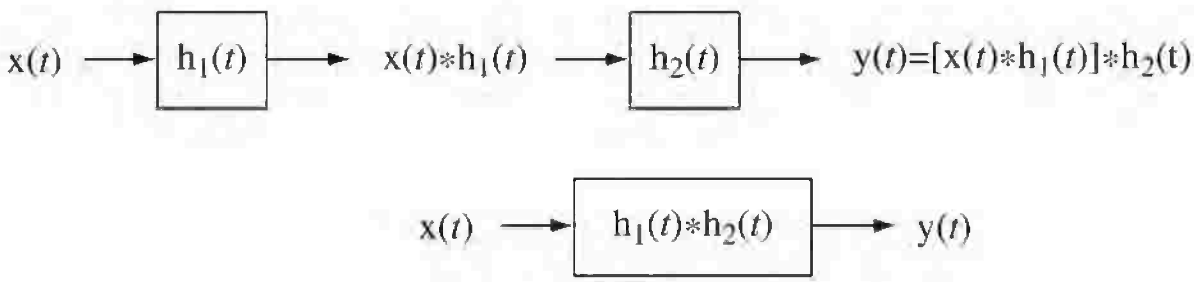
نتيجة التفاف اثنين من الوحدات المستطيله في مثال ٥,٣ من الأهمية بمكان بحيث يتم إعطاؤها اسماً نرجع إليها به في المستقبل. إنها تسمى الدالة المثلثة كما في شكل (٥,٢٣).

$$tri(t) = \begin{cases} 1-|t|, & |t|<1 \\ 0, & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

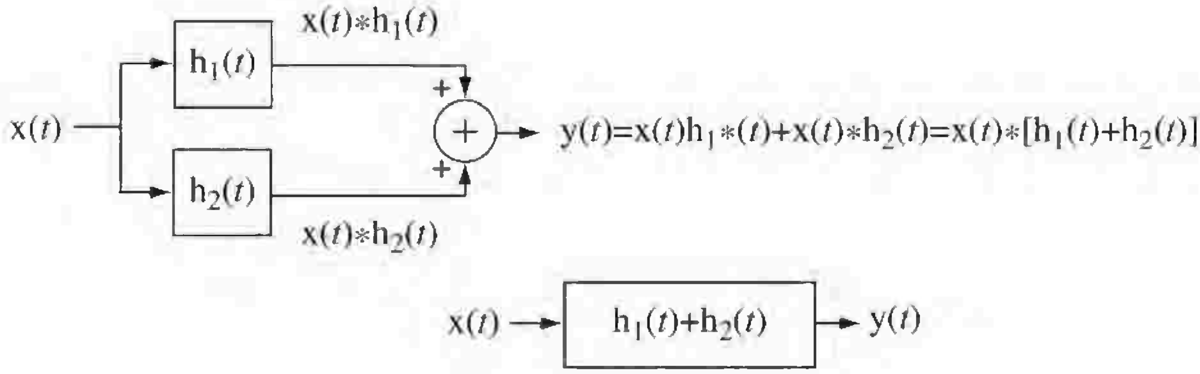
إنها تسمى مثلث الوحدة ؛ لأن قمة ارتفاعها ومساحتها كل منهما يساوي واحداً.



شكل رقم (٥,٢٣) دالة وحدة المثلث.



شكل رقم (٥,٢٤) توصيل متوالٍ لنظامين.



شكل رقم (٥,٢٥) توصيل توازٍ لنظامين.

توصيلات الأنظمة

يوجد توصيلتان شائعتان للأنظمة وهما التوصيل المتوالي، والتوصيل المتوازي كما في شكل (٥,٢٤) وشكل (٥,٢٥).

باستخدام خاصية الترابط للالتفاف فإنه يمكننا توضيح أن التوصيل على التوالي لنظامين يمكن اعتبارهما كنظام واحد تكون استجابة النبضة له هي الالتفاف لاستجابة النبضة لكل من النظامين. وباستخدام خاصية التوزيع للالتفاف فإنه يمكننا أن نوضح أن التوصيل على التوازي لنظامين يمكن اعتبارهما كنظام واحد تكون استجابته الصدمية مجموع استجابتي النبضة لكل من النظامين.

استجابة الخطوة واستجابة النبضة

في اختبارات الأنظمة الحقيقية، فإنه في العادة يتم اختبار أي نظام باستخدام بعض الإشارات القياسية التي تكون سهلة في توليدها التي لا تدفع النظام إلى الدخول في عدم الخطية. واحدة من الإشارات التي من هذا النوع هي دالة الخطوة. استجابة أي نظام LTI لوحدة الخطوة هي :

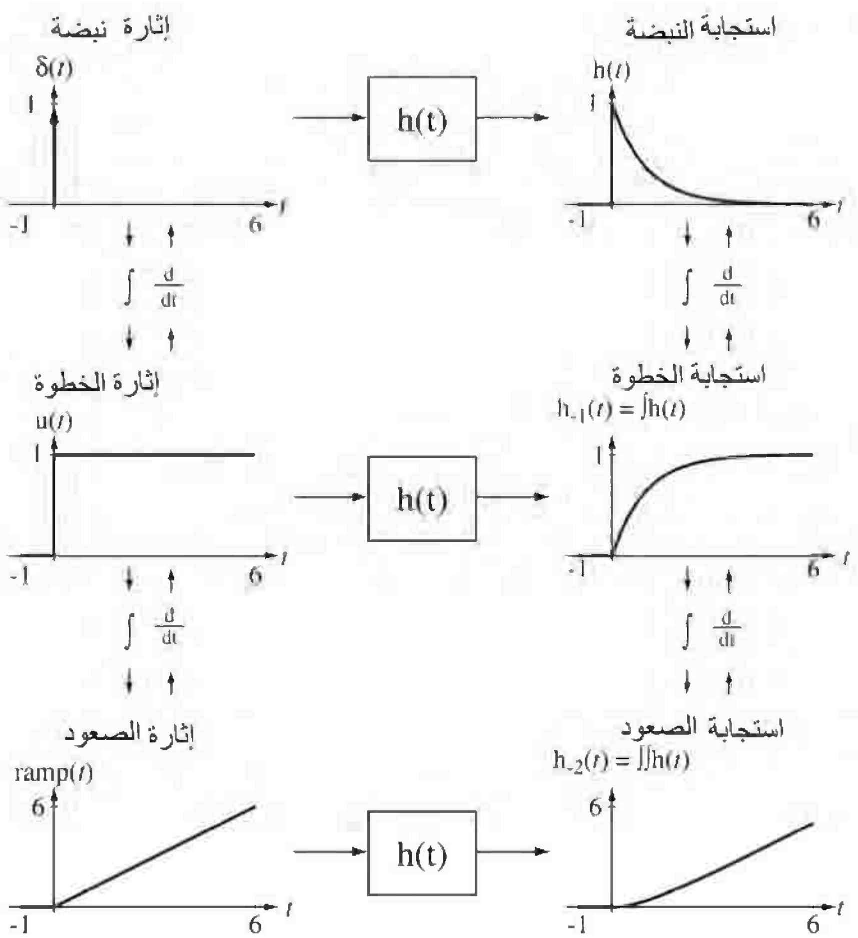
$$h_{-1}(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau$$

إن ذلك يثبت أن استجابة أي نظام LTI مثار بوحدة خطوة تساوي تكامل استجابة النبضة، لذلك فإنه يمكننا القول بأنه طالما أن وحدة الخطوة هي تكامل النبضة، فإن الاستجابة لوحدة الخطوة ستكون تكامل استجابة وحدة النبضة. في الحقيقة فإن هذه العلاقة محققة ليس فقط لإثارات النبضة، ووحدة الخطوة فقط، ولكن لأي إثارة أخرى. إذا تم تغيير أي إثارة إلى تكاملها، فإن الاستجابة تتغير أيضاً إلى تكاملها. يمكننا أيضاً أن نغير هذه العلاقات

بطريقة عكسية لنقول إنه حيث إن التفاضل الأول هو معكوس التكامل، فإنه إذا تم تغيير الإثارة إلى تفاضلها الأول، فإن الاستجابة تتغير أيضاً إلى تفاضلها الأول كما في شكل (٥،٢٦).

الاستقرار واستجابة النبضة

لقد تم تحديد الاستقرار عموماً في فصل ٤ عن طريق القول بأن النظام المستقر يكون له إشارة خرج محددة كاستجابة لأي إشارة دخل محددة. يمكننا الآن إيجاد طريقة لتحديد إذا كان أي نظام مستقراً أم لا عن طريق فحص استجابته الصدمية. لقد أثبتنا مسبقاً أن الالتفاف لإشارتين يتقارب إذا كانت كل منهما محددة وواحدة منهما على الأقل قابلة للتكامل. استجابة أي نظام y(t) للدخل x(t) هي y(t)=x(t)*h(t). على ذلك، فإذا كانت x(t) محددة فإنه يمكننا القول بأن y(t) تكون محددة إذا كانت h(t) قابلة تماماً للتكامل. بمعنى، أن التكامل $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt$ يكون محدداً.



شكل رقم (٥،٢٦) العلاقة بين التكاملات والتفاضلات والاستجابات لأي نظام LTI.

أي نظام مستمر زمنياً يكون مستقر BIBO إذا كانت استجابته الصدمية قابلة تماماً للتكامل.

الإثارة الأسية المركبة ودالة العبور

افترض النظام LTI المستقر الذي يمكن وصفه بالمعادلة التفاضلية التالية :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k x^{(k)}(t)$$ المعادلة رقم (٥,١٥)

حيث :

١- حيث a و b كلها ثوابت

٢- الرمز $x^{(k)}(t)$ يعني التفاضل رقم k لـ x(t) بالنسبة للزمن ، وإذا كانت k سالبة فإن ذلك يعني تكاملاً بدلاً من التفاضل.

بعد ذلك سنفترض الإثارة في صورة أس مركب على الصورة $x(t)=Xe^{st}$ حيث X و s يكونان قيمتين مركبتين على العموم، وهذا الوصف للإثارة يكون محققا عند كل الأزمنة. حل المعادلة التفاضلية سيكون مجموع الحل المتجانس والحل الخاص. هذا النظام سيكون مستقراً، ولذلك فإن القيم المميزة ستكون بها أجزاء حقيقية سالبة وسيقترب الحل المتجانس من الصفر مع مرور الزمن. سنفترض أيضاً أن النظام كان يعمل بهذه الإثارة لزمن شبه لا نهائي، ولذلك فإن الحل المتجانس يكون قد تدني إلى الصفر فعلاً ويصبح الحل الكلي الآن هو الحل الخاص فقط.
الصورة الدالية للحل الخاص تتكون من تجميع خطي لدوال الإثارة والتفاضلات الأحادية لها. حيث إن تفاضل الأس سيكون أساً آخر بالشكل نفسه ، وستكون الاستجابة y(t) على الصورة $y(t)=Ye^{st}$ حيث Y ثابت مركب. وعلى ذلك، ففي المعادلة التفاضلية يكون التفاضل رقم k على الصورة $x^{(k)}(t)=s^kXe^{st}$ وأيضاً $y^{(k)}(t)=s^kYe^{st}$، ويمكن كتابة المعادلة (٥,١٥) على الصورة :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k s^k Y e^{st} = \sum_{k=0}^{M} b_k s^k X e^{st}$$

هذه المعادلة لم تعد معادلة تفاضلية بمعاملات حقيقية. لقد أصبحت الآن معادلة جبرية بمعاملات مركبة.
المعاملات Xe^{st} و Ye^{st} يمكن أخذها خارج عملية التجميع لتصبح المعادلة على الصورة :

$$Ye^{st} \sum_{k=0}^{N} a_k s^k = Xe^{st} \sum_{k=0}^{M} b_k s^k$$

النسبة بين الاستجابة والإثارة ستصبح على الصورة :

$$\frac{Ye^{st}}{Xe^{st}} = \frac{Y}{X} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}$$

وهي نسبة بين حدود في المتغير s تسمى الدالة المنطقية، أو المعقولة rational function، وهي تمثل دالة العبور للنظام :

$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \cdots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$ المعادلة رقم (٥,١٦)

وبالتالي ستكون الاستجابة على الصورة $Ye^{st}=H(s)Xe^{st}$، أو $y(t)=H(s)x(t)$.

بالنسبة للأنظمة التي من هذا النوع يمكن كتابة دالة العبور مباشرة من المعادلة التفاضلية. إذا كانت المعادلة التفاضلية تصف النظام، فإن دالة العبور تفعل الشيء نفسه. تعتبر دالة العبور مفهوماً أساسياً في الإشارات، والأنظمة وسنستخدم هذا المفهوم في العديد من المرات في الموضوعات المقبلة. يمكننا أيضاً حساب الاستجابة لأي إثارة أسية مركبة باستخدام الالتفاف. الاستجابة $y(t)$ لأي نظام LTI استجابة النبضة له هي $h(t)$ والإثارة له هي $x(t)=Xe^{st}$ ستكون :

$$y(t) = h(t) * Xe^{st} = X\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = Xe^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

بمساواة صورتي $y(t)$ نحصل على :

$$H(s)Xe^{st} = Xe^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \rightarrow H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

والتي تبين كيف تتعلق دالة العبور مع استجابة النبضة. حيث إن كل من استجابة النبضة ودالة العبور يميزان تماما أي نظام LTI، فإنهما يجب أن يتعلقا مع بعضهما بعضاً بصورة فريدة. التكامل $\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$ سنعود إليه مرة أخرى في الفصل ٨ وسيتم تحديده على أنه تحويل لابلاس لـ $h(t)$.

الاستجابة الترددية

المتغير s في الأس المركب يكون عموما له قيمة مركبة أيضاً. سنفترض هذه القيمة على الصورة $s=\sigma+j\omega$ حيث σ هي الجزء الحقيقي و ω هي الجزء التخيلي. في الحالة الخاصة عندما تكون $\sigma=0$، فإن $s=j\omega$، ويصبح الأس المركب e^{st} دالة جيبية مركبة $e^{h\omega t}$ وتصبح دالة العبور للنظام $H(s)$ هي الاستجابة الترددية $H(j\omega)$. الدالة $e^{j\omega t}$ تسمى الجيب المركب لأنه عن طريق قاعدة أويلر يمكن كتابة $e^{j\omega t}=\cos(\omega t)+j\sin(\omega t)$ وهي صورة مجموع جيب تمام حقيقي وجيب تخيلي، وكل منهما دالة في التردد الزاوي ω. في المعادلة $Ye^{st}=H(s)Xe^{st}$ بوضع $s=j\omega$ يمكن كتابة ما يلي :

$$Ye^{j\omega t} = |Y|e^{j\measuredangle Y}e^{j\omega t} = H(j\omega)Xe^{j\omega t} = |H(j\omega)|e^{j\measuredangle H(j\omega)}|X|e^{j\measuredangle X}e^{j\omega t}$$

بالقسمة على $e^{j\omega t}$ يمكن كتابة ما يلي :

$$|Y|e^{j\measuredangle Y} = |H(j\omega)||X|e^{\wedge}(j(\measuredangle H(j\omega)+\measuredangle X))$$

بمساواة المقادير في الطرفين نجد أن $|Y|=|H(j\omega)||X|$ وبمساواة الزوايا $\measuredangle Y=\measuredangle H(j\omega)+\measuredangle X$. الدالة $H(j\omega)$ تسمى الاستجابة الترددية للنظام لأنه عند أي تردد زاوي ω إذا عرفنا مقدار وزاوية الإثارة ومقدار وزاوية الاستجابة الترددية، فإنه يمكن حساب مقدار وزاوية الاستجابة.

لقد أوضحنا في الفصل ٤، باستخدام أساسيات الخطية ونظرية التجميع، أنه إذا تم تطبيق الإثارة $x(t)$ على أي نظام وأعطت الاستجابة $y(t)$، فإن الجزء الحقيقي من $x(t)$ يتسبب في الجزء الحقيقي من $y(t)$، والجزء التخيلي من $x(t)$ يتسبب في الجزء التخيلي من $y(t)$. ولذلك إذا كانت الإثارة الحقيقية لأي نظام هي $x(t)=A_x\cos(\omega t+\theta_x)$ فإن استجابة أي نظام لإثارة على الصورة :

$$x_c(t)=A_x\cos(\omega t+\theta_x)+jA_x\sin(\omega t+\theta_x)=A_xe^{j(\omega t+\theta x)}$$

ستكون على الصورة :

$$y_c(t)=A_y\cos(\omega t+\theta_y)+jA_y\sin(\omega t+\theta_y)=A_ye^{j(\omega t+\theta y)}$$

ويمكننا أن نعتبر أن الجزء الحقيقي $y(t)=A_y\cos(\omega t+\theta_y)$ هو الاستجابة للجزء الحقيقي $x(t)=A_x\cos(\omega t+\theta_x)$.

باستخدام العلاقة $|Y|=|H(j\omega)||X|$ و $\measuredangle Y=\measuredangle H(j\omega)+\measuredangle X$ نحصل على ما يلي :

$$\theta_y=\measuredangle H(j\omega)+\theta_x \quad \text{و} \quad A_y=|H(j\omega)|A_x,$$

مثال ٥,٤

دالة العبور والاستجابة الترددية

نظام LTI موصوف بالمعادلة التفاضلية التالية :

$$y''(t) + 3000y'(t) + 2x10^6y(t)=2x10^6x(t)$$

(أ) احسب دالة العبور لهذا النظام

للمعادلة التفاضلية التي على الصورة : $\sum_{k=0}^{N} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k x^{(k)}(t)$ نجد أن $N=2$ و $M=0$ و $a_0=2x10^6$ و $a_1=3000$ و $b_0=2x10^6$، ولذلك فإن دالة العبور له ستكون على الصورة :

$$H(s) = \frac{2x10^6}{s^2+3000s+2x10^6}$$

(ب) إذا كانت $x(t)=Xe^{j400\pi t}$ و $y(t)=Ye^{j400\pi t}$، و $X=3e^{j3\pi/2}$، احسب مقدار وزاوية Y.

الاستجابة الترددية ستكون :

$$H(j\omega) = \frac{2x10^6}{(j\omega)^2+3000(j\omega)+2x10^6} = \frac{2x10^6}{2x10^6-\omega^2+j3000\omega}$$

التردد الزاوي هو $\omega=400$، ولذلك :

$$H(j400\pi) = \frac{2x10^6}{2x10^6-(400\pi)^2+j3000x400\pi} = 0.5272e^{-j1.46}$$

$$|Y|=|H(j400\pi)|x3=0.5272x3=1.582$$
$$\measuredangle Y=\measuredangle H(j400\pi)|+\pi/2=0.1112 \text{ radians}$$

(ج) إذا كانت $x(t)=8\cos(200\pi t)$ و $y(t)=A_y\cos(200\pi t+\theta_y)$، احسب A_y و θ_y.

باستخدام :

$A_y=|H(j200\pi)|A_x$ و $\theta_y=\measuredangle H(j200\pi)+\theta_x$ فإن :

$$\theta_y=-0.8654+0=-0.8654 \text{ radians} \quad \text{و} \quad A_x=0.8078x8=6.4625$$

مثال ٥,٥

الاستجابة الترددية لنظام مستمر زمنياً

نظام مستمر زمنياً يمكن وصفه بالمعادلة التفاضلية التالية :

$$y''(t) + 5y'(t) + 2y(t) =3x''(t)$$

احسب وارسم مقدار وزاوية الاستجابة الترددية لهذا النظام.

المعادلة التفاضلية العامة تكون على الصورة :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k x^{(k)}(t)$$

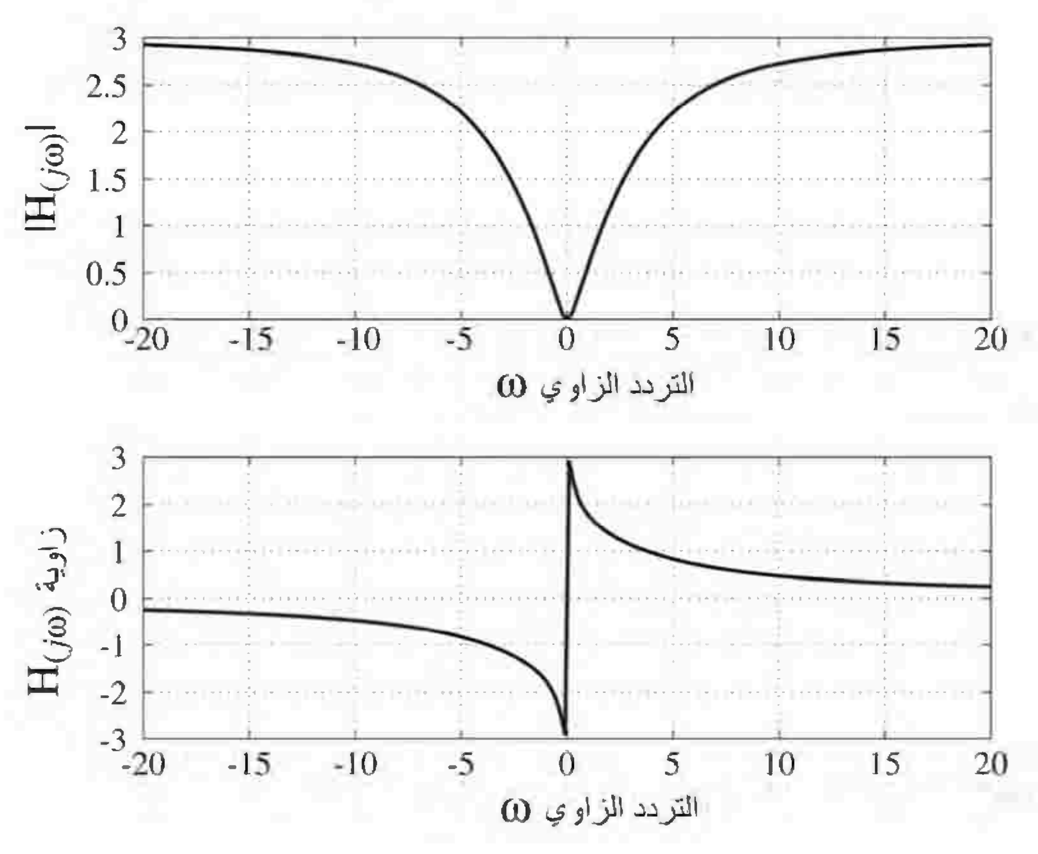
نجد أن $N=M=2$ و $a_2=1$ و $a_1=5$ و $a_0=2$ و $b_2=3$ و $b_1=0$ و $b_0=0$. ولذلك فإن دالة العبور له ستكون على الصورة :

$$H(s) = \frac{b_2 s^2+b_1 s+b_0}{a_2 s^2+a_1 s+a_0} = \frac{3s^2}{s^2+5s+2}$$

للحصول على الاستجابة الترددية نستبدل s بـ jω كما يلي :

$$H(j\omega) = \frac{3(j\omega)^2}{(j\omega)^2+5(j\omega)+2}$$

انظر شكل (٥.٢٧)



شكل رقم (٥.٢٧) مقدار وزاوية الاستجابة الترددية.

شكل (٥,٢٧) تم رسمه باستخدام برنامج ماتلاب التالي :

```
ωmax = 20; % مقدار أكبر تردد زاوي للرسم
dw = 0.1 ; % المسافة بين الترددات في الرسم
w = [−wmax:dw:wmax]’; % متجه الترددات الزاوية في الرسم
% حساب الاستجابة الترددية
H = 3*(j*ω).^2./((j*ω).^2 j*5*ω 2);
% رسم والتعليق على الاستجابة الترددية
subplot(2,1,1); p = plot(ω, abs(H),‘k’); set(p,‘LineWidth’,2);
grid on ;
xlabel(‘Radian frequency, {\omega}’,‘FontSize’,18,‘FontName’,’Times’);
ylabel(‘|H({\itj}{\omega})|’,‘FontSize’,18,‘FontName’,‘Times’);
subplot(2,1,2); p = plot(ω,angle(H),‘k’); set(p,’LineWidth’,2);
grid on;
xlabel(‘Radian frequency, {\omega}’,‘FontSize’,18,‘FontName’,‘Times’);
ylabel(‘Phase of
 H({\itj}{\omega})’,‘FontSize’,18,‘FontName’,‘Times’);
```

(٥,٣) الأزمنة المتقطعة

استجابة النبضة

تماماً كما كان الحال لأنظمة الزمن المستمر، فإن هناك طريقة التفاف لأزمنة الزمن المتقطع، وهي تسلك مسلكاً مكافئاً لنظيرتها في الأزمنة المستمرة. إنها تعتمد على معرفة استجابة النبضة للنظام، والتعامل مع إشارة الدخل كمجموع خطي من الصدمات وبعد ذلك يتم جمع الاستجابات لكل هذه الصدمات.

مهما كانت إشارة الدخل المتقطعة زمنياً معقدة، فإنها تكون تتابعاً من الصدمات. إذا استطعنا أن نحسب استجابة أي نظام LTI لوحدة نبضة تحدث عند n=0، فإنه يمكننا حساب الاستجابة لأي إشارة أخرى. لذلك فإن استخدام طريقة الالتفاف تبدأ بافتراض أن الاستجابة لوحدة النبضة التي تحدث عند n=0 قد تم حسابها فعلا، ولذلك سنسمي استجابة النبضة h[n].

لحساب استجابة النبضة للنظام، سنطبق وحدة النبضة δ[n] التي تحدث عند n=0 وستكون هي الإثارة الوحيدة للنظام. هذه النبضة تضع طاقة الإشارة في النظام وبعد ذلك تنتهي. بعد حقن طاقة النبضة في النظام فإنه يستجيب بإشارة تحدد بناء على خواص هذا النظام الديناميكية.

في حالة أنظمة الزمن المستمر، فإن التطبيق العملي الحقيقي للنبضة لتحديد استجابة النبضة كان يمثل مشكلة لأسباب عملية. ولكن في حالة أنظمة الأزمنة المتقطعة، فإن هذه الطريقة تكون أكثر معقولية، لأن النبضة في الزمن المتقطع تعتبر دالة حقيقية متقطعة زمنياً وهي في هذه الحالة بسيطة.

إذا كان لدينا وصف رياضي للنظام، فإنه يمكننا حساب استجابة النبضة له تحليلياً. سنفترض أولاً النظام الموصوف بالمعادلة الفرقية التالية :

$$a_0y[n]+a_1y[n-1]+\ldots+a_Ny[n-N]=x[n] \quad \text{المعادلة رقم (٥,١٧)}$$

ليست هذه أشهر صور المعادلات الفرقية التي تصف نظام LTI متقطع زمنياً ولكنها تعتبر مكاناً جيداً نبدأ منه لأنه من تحليل هذا النظام، يمكننا أن نستمر لإيجاد الاستجابات الصدمية لأنظمة أكثر عمومية. هذا النظام سببي وLTI. لإيجاد الاستجابة الصدمية، نفترض أن الإثارة x[n] هي وحدة نبضة عند n=0. وعلى ذلك يمكننا إعادة كتابة المعادلة (٥,١٧) في هذه الحالة الخاصة :

$$a_0h[n]+a_1h[n-1]+\ldots+a_Nh[n-N]=\delta[n]$$

سنفترض أن النظام لم تتم إثارته بأي شيء قبل n=0، وأن الاستجابة h[n] ستكون صفراً لكل قيم t السالبة، بمعنى أن h[n]=0 لكل قيم n<0، وأن النظام في حالته الصفرية قبل n=0. لكل الأزمنة بعد n=0، فإن x[n] تكون صفراً أيضاً وسيكون حل المعادلة الفرقية هو الحل المتجانس. كل ما نحتاجه لإيجاد الحل المتجانس بعد n=0 هو عدد N من الشروط الابتدائية التي يمكننا استخدامها لتحقيق عدد N من الثوابت في هذا الحل المتجانس. نحتاج لشرط ابتدائي لكل درجة من درجات المعادلة الفرقية. يمكننا في العادة إيجاد هذه الشروط الابتدائية عن طريق التكرار. يمكن في العادة وضع المعادلة الفرقية لأي نظام سببي في صورة تكرارية تكون فيها الاستجابة تجميعاً خطياً للإثارة الحالية والاستجابات السابقة كما يلي :

$$h[n]=\frac{\delta[n]-a_1h[n-1]-,,,,-a_Nh[n-N]}{a_0}$$

وعلى ذلك يمكننا إيجاد حل متجانس صحيح محقق لكل قيم n≥0. هذا الحل، مع حقيقة أن h[n]=0 لكل قيم n<0 يكون الحل الكلي، وهو استجابة النبضة. إن تطبيق النبضة على أي نظام تحقق ببساطة بعض الشروط الابتدائية ويعود النظام بعدها لحالة الاستقرار السابقة (إذا كان النظام مستقراً).

سنفترض الآن نظاماً أكثر عمومية موصوفاً بالمعادلة الفرقية على الصورة :

$$a_0y[n]+a_1y[n-1]+\ldots+a_Ny[n-N]=b_0x[n]+b_1x[n-1]+\ldots+b_Mx[n-M]$$

أو

$$\sum_{k=0}^{N}a_ky[n-k]=\sum_{k=0}^{M}b_kx[n-k]$$

حيث النظام مفترض أنه LTI، فإنه يمكننا إيجاد استجابة النبضة عن طريق إيجاد استاجابات النبضة لأنظمة موصوفة بالمعادلات الفرقية التالية :

$$a_0y[n]+a_1y[n-1]+\ldots+a_Ny[n-N]=b_0x[n]$$
$$a_0y[n]+a_1y[n-1]+\ldots+a_Ny[n-N]=b_1x[n-1]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_0y[n]+a_1y[n-1]+\ldots+a_Ny[n-N]=b_Mx[n-M]$$
المعادلة رقم (٥,١٨)

وبعد ذلك يتم تجميع كل هذه الاستجابات. حيث إن هذه المعادلات هي نفسها فيما عدا الشدة وزمن الحدوث لكل نبضة، فإن استجابة النبضة الكلية تكون ببساطة مجموع استجابات النبضة لهذه الأنظمة التي في المعادلة(٥.١٨)، محجمة ومؤخرة بطريقة مناسبة. لذلك فاستجابة النبضة للنظام العام ستكون على الصورة :

$$H[n]=b_0h_1[n]+b_1h_1[n-1]+\ldots+b_Mh_1[n-M]$$

حيث $h_1[n]$ هي استجابة النبضة التي تم إيجادها من قبل.

مثال ٥,٦

استجابة النبضة لنظام

احسب استجابة النبضة لنظام موصوف بالمعادلة الفرقية التالية :

$$8y[n]+6y[n-1]=x[n]$$ المعادلة رقم (٥,١٩)

إذا كانت الإثارة هي نبضة.

$$8h[n]+6h[n-1]=\delta[n]$$

هذه المعادلة تصف نظام سببياً، لذلك $h[n]=0$ لكل قيم $n<0$. يمكننا إيجادالاستجابة الأولية لوحدة النبضة عند $n=0$ من المعادلة (٥,١٩) :

n	x[n]	h[n-1]	h[n]
0	1	0	1/8

لكل قيم $n\geq0$ يكون الحل متجانساً وعلى الصورة $K_h(-3/4)^n$. ولذلك فإن $h[n]=K_h(-3/4)^nu[n]$. بتطبيق الشروط الأولية نحصل على، $h[0]=1/8=K_h$. وعلى ذلك فاستجابة النبضة لهذا النظام ستكون على الصورة $h[n]=(1/8)(-3/4)^nu[n]$.

مثال ٥,٧

استجابة النبضة لنظام

أوجد استجابة النبضة $h[n]$ لنظام موصوف بالمعادلة الفرقية التالية :

$$5y[n]+2y[n-1]-3y[n-2]=x[n]$$ المعادلة رقم (٥.٢٠)

هذه المعادلة تصف نظاماً سببياً، وعلى ذلك فإن $h[n]=0$ لكل قيم $n<0$. يمكننا إيجاد أول استجابتين لوحدة نبضة عند $n=0$ من المعادلة (٥,٢٠) :

n	x[n]	h[n-1]	h[n]
0	1	0	1/5
1	0	1/5	-2/25

القيم المميزة هي -1 و 0.6. وعلى ذلك فإن استجابة النبضة ستكون $h[n]=(K_1(-1)^n+K_2(0.6)^n)u[n]$. الآن يمكن حساب الثوابت :

$$\begin{cases} h[0] = K_1 + K_2 = \frac{1}{5} \\ h[1] = -K_1 + 0.6K_2 = -2/25 \end{cases} \rightarrow K_1 = 0.125, K_2 = 0.075$$

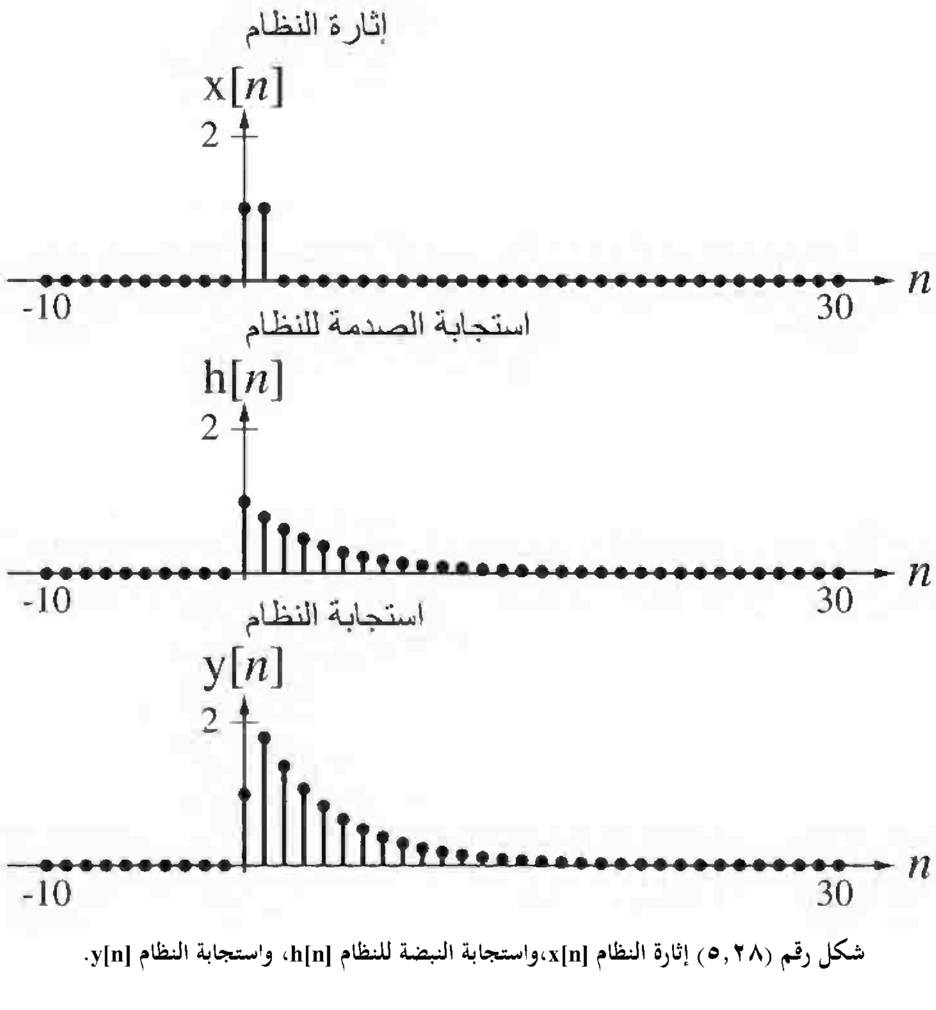
وستكون استجابة النبضة على الصورة :

$$h[n]=(0.125(-1)^n + 0.075(0.6)^n)u[n]$$

الالتفاف في الزمن المتقطع

الاستنتاج

لكى نوضح الالتفاف في الزمن المتقطع، سنفترض أن نظام LTI تمت إثارته بالإشارة $x[n]=\delta[n]+\delta[n-1]$ وسنفترض أن استجابة النبضة لهذا النظام هي $h[n]=(0.7788)^n u[n]$ كما في شكل (٥,٢٨).



شكل رقم (٥,٢٨) إثارة النظام x[n]،واستجابة النبضة للنظام h[n]، واستجابة النظام y[n].

تتكون الإثارة لأي نظام متقطع زمنياً من تتابع من الصدمات التي لها شدة مختلفة وتحدث عند أزمنة مختلفة. ولذلك، فإنه باستدعاء خاصيتي الخطية والثبات الزمني، فإن استجابة النظام LTI ستكون مجموع كل الاستجابات المنفردة لهذه الصدمات المنفردة. وحيث أننا نعلم استجابة النظام لوحدة نبضة منفردة تحدث عند t=0، فإنه يمكننا إيجاد الاستجابات الأخرى عن طريق الإزاحة والتحجيم المناسبين لاستجابة وحدة النبضة.

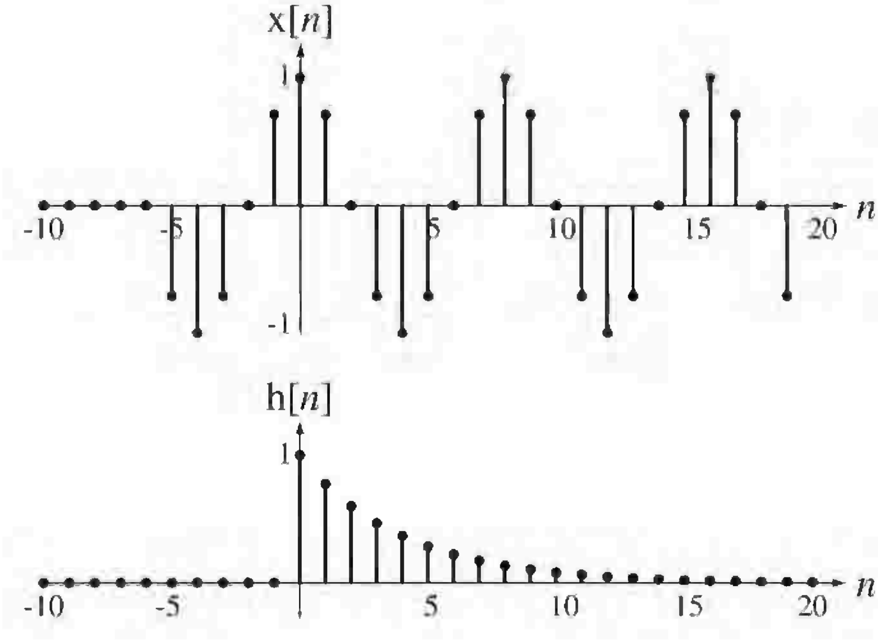
في المثال كانت أول نبضة لا تساوي الصفر تحدث عند n=0، وشدتها تساوي واحداً. لذلك فإن النظام سيستجيب لهذه النبضة باستجابته الصدمية الصحيحة. النبضة الثانية التي لا تساوي الصفر تحدث عند n=1 وشدتها تساوي واحداً أيضاً. لذلك فإن استجابة النظام لهذه النبضة ستكون هي استجابة النبضة مؤخرة بوحدة زمنية واحدة. ولذلك باستخدام خاصية التجميع والثبات الزمني للنظام ال LTI، فإن استجابة النظام للإثارة $x[n]=\delta[n]+\delta[n-1]$ ستكون :

$$y[n]=(0.7788)^n u[n] + (0.7788)^{n-1} u[n-1]$$

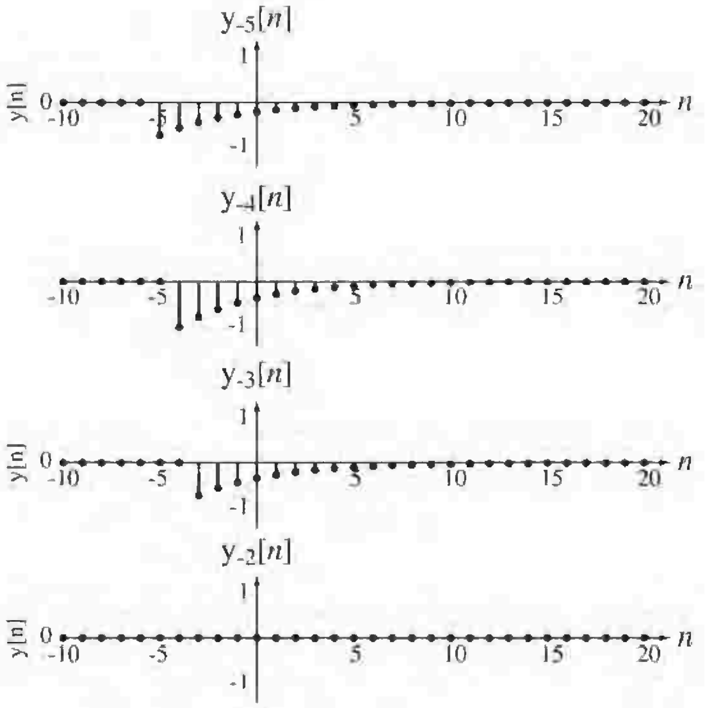
انظر شكل (٥,٢٨).

افترض الإثارة الآن هي $x[n]=2\delta[n]$. على ذلك، فحيث إن النظام هو نظام LTI والإثارة هي نبضة بشدة تساوي ٢ تحدث عند الزمن n=0، فإنه بخاصية تجانس النظام ال LTI فإن استجابة النظام ستكون ضعف استجابته الصدمية، بمعنى $y[n]=1(0.7788)^n u[n]$.

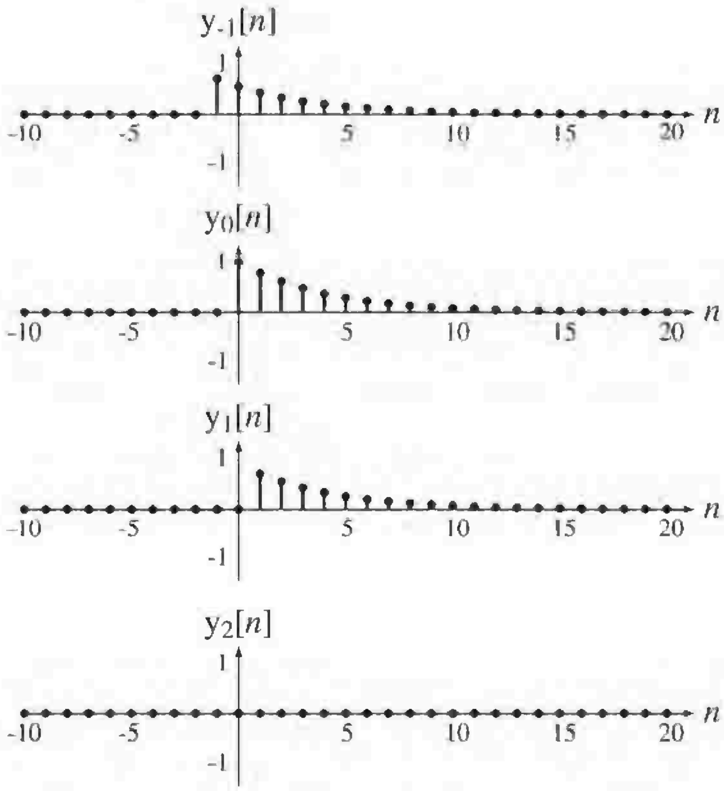
الآن افترض أن الإثارة ستكون كالموضحة في شكل (٥,٢٩) بينما تظل الاستجابة الصدمية للنظام كما هي. الاستجابة للأربع صدمات التي تبدأ عند n=-5 تم رسمها كما في شكل (٥,٣٠).



شكل رقم (٥,٢٩) إشارة جيب مطبقة عند n=-5 والاستجابة الصدمية للنظام



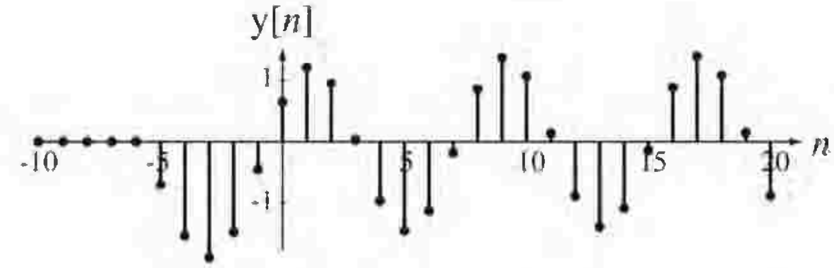
شكل رقم (٥,٣٠) استجابات النظام للصدمات x[-5] و x[-4] و x[-3] و x[-2]



شكل رقم (٥,٣١) استجابات النظام للصدمات x[-1] و x[0] و x[1] و x[2]

شكل (٥.٣١) يوضح الاستجابات للأربع صدمات التالية.

عندما نضيف كل الاستجابات لكل الصدمات سنحصل على الاستجابة الكلية للنظام لكل الإثارات المدخلة له كما في شكل (٥.٣٢).



شكل رقم (٥،٣٢) الاستجابة الكلية للنظام

لاحظ وجود الاستجابة العابرة الابتدائية، ولكن النظام يستقر على الشكل الجيبي بعد القليل من الوحدات الزمنية. الاستجابة المعززة لأي نظام LTI مستقر مثار بموجة جيبية يكون موجة جيبية أخرى بالتردد نفسه ولكنها تكون عموماً بمقدار مختلف وزاوية مختلفة.

لقد رأينا بيانياً ماذا حدث. الآن نريد أن نرى ماذا حدث تحليلياً. يمكن كتابة الاستجابة الكلية للنظام كما يلي :

$$y[n]= \dots x[-1]h[n+1]+x[0]h[n]+x[1]h[n-1]+ \dots$$

أو

$$\boxed{y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]} \qquad \text{المعادلة رقم (٥،٢١)}$$

النتيجة في المعادلة (٥،٢١) تسمى الجمع الالتفافي لإيجاد استجابة النظام.

هذه المعادلة تقول في كلمات أن قيمة الاستجابة y عند أي زمن متقطع n يمكن حسابها عن طريق جمع كل حواصل ضرب الإثارة x عند الأزمنة المتقطعة m في الاستجابة h عند الأزمنة المتقطعة n-m لكل قيم m من سالب ما لانهاية حتى موجب ما لانهاية. معنى ذلك أنه لإيجاد استجابة النظام لأي إثارة اختيارية فسنحتاج فقط لمعرفة استجابة النظام الصدمية. بالنسبة لنظام LTI، تكون استجابة النبضة له وصف كامل لكيفية استجابته لأي إشارة اختيارية. وعلى ذلك يمكننا أن نتخيل أنه لاختبار أي نظام، فإننا نطبق عليه نبضة ونقوم بتسجيل استجابته لهذه النبضة. يمكننا بمجرد معرفة هذه الاستجابة حساب الاستجابة لأي إشارة اختيارية. إن هذه تعتبر طريقة في منتهي القوة. في تحليل الأنظمة علينا فقط أن نحل المعادلة الفرقية للنظام لأبسط إشارة دخل غير مساوية للصفر، وهي وحدة النبضة، وبعد ذلك يمكننا حساب الاستجابة لأي إشارة عامة باستخدام الالتفاف.

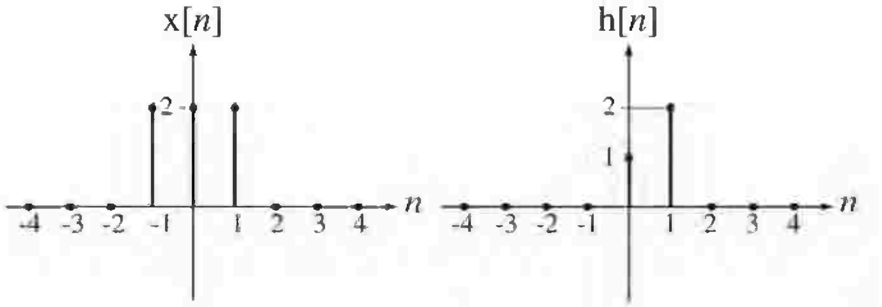
قارن التكامل الالتفافي للإشارات المستمرة زمنياً مع المجموع الالتفافي للإشارات المتقطعة زمنياً :

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] \quad \text{و} \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

في كل حالة يتم عكس إحدى الإشارتين وإزاحتها وبعد ذلك يتم ضربها في الإشارة الأخرى. في حالة الإشارات المستمرة زمنياً، يتم تكامل الضرب لإيجاد المساحة الكلية تحت حاصل الضرب. وفي حالة الإشارات المتقطعة زمنياً يتم تجميع حاصل الضرب لإيجاد القيمة الكلية لحاصل الضرب.

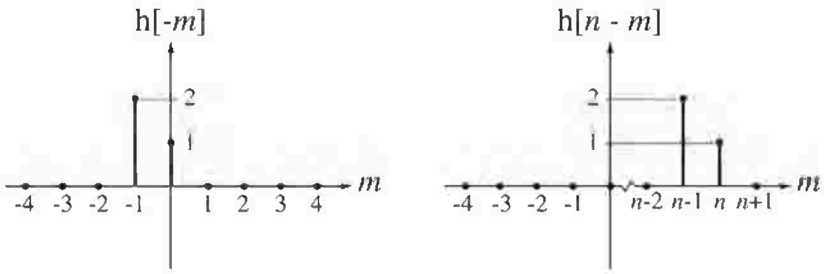
أمثلة بيانية وأخرى رياضية على الالتفاف

على الرغم من التحديد الكامل لعملية الالتفاف عن طريق المعادلة (٥,٢١)، فإنه من المفيد أن نستكشف بعض المفاهيم البيانية التي تساعد في إجراء عملية الالتفاف. الدالتان اللتان سيتم ضربهما تم تجميعهما على المدى $-\infty<m<\infty$ هما $x[m]$ و $h[n-m]$. لتوضيح فكرة الالتفاف بيانياً سنفترض أن $x[n]$ و $h[n]$ سيكونان دوال بسيطة كالموضحة في شكل (٥,٣٣).



شكل (٥,٣٣) إثنان من الدوال.

حيث إن مؤشر الجمع في المعادلة (٥,٢١) هو m، فإن الدالة $h[n-m]$ يجب اعتبارها كدالة في المتغير m بغرض إجراء التجميع في المعادلة (٥,٢١). من وجهة النظر هذه، يمكننا أن نتخيل أن الدالة $h[n-m]$ يتم توليها عن طريق تحويلين، $m\to-m$، والذي يغير الدالة $h[m]$ إلى الدالة $h[-m]$، وبعد ذلك $m\to m-n$، التي تغير الدالة $h[-m]$ إلى $h[-(m-n)]=h[n-m]$. التحويل الأول $m\to-m$ يكون معكوس الدالة $h[m]$ في الزمن المتقطع، والتحويل الثاني $m\to m-n$ يزيح الدالة التي تم عكسها بمقدار عدد n من الوحدات الزمني ناحية اليمين كما في شكل (٥,٣٤).



شكل (٥,٣٤) الدالتان $h[-m]$ و $h[n-m]$ مع الزمن.

الآن يمكننا أن نحصل على نتيجة الالتفاف كما يلي : $y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]$، والعملية التي ترسم نتيجة الالتفاف y[n] مع n هي بأن نقوم بفرض قيمة n ونقوم بإجراء العملية : $y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]$ لهذه القيمة n ثم نرسم النتيجة العددية الوحيدة y[n] عند هذه القيمة n، ثم نكرر العملية نفسها لكل قيمة ـ n. في كل مرة نختار قيمة جديدة n فإن الدالة h[n.m] يتم إزاحتها للموضع الجديد، و x[m] تظل في موضعها نفسه لأنه لا توجد n في x[m] ويكون المجموع $\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]$ هو ببساطة مجموع حواصل الضرب x[m] و h[n-m] لهذه القيم المختارة n. شكل (٥،٣٥) يوضح هذه العملية.

لكل قيم n غير الممثلة في شكل (٥،٣٥)، تكون y[n]=0، ولذلك يمكننا الآن رسم y[n] كما هو موضح في شكل (٥،٣٦).

من الشائع جداً في التدريبات الهندسية أن تكون كل من الإشارتين اللتين ستجرى عليهما عملية الالتفاف أن تكونا صفراً قبل زمن محدد. افترض أن x تساوي صفراً قبل $n=n_x$ وأن h تساوي صفراً قبل $n=n_h$، المجموع الالتفافي سيكون :

$$x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]$$

وحيث إن x تساوي صفراً قبل $n=n_x$ فإن كل عناصر المجموع لقيم $m<n_x$ ستكون أصفارا ويمكننا كتابة ما يلي :

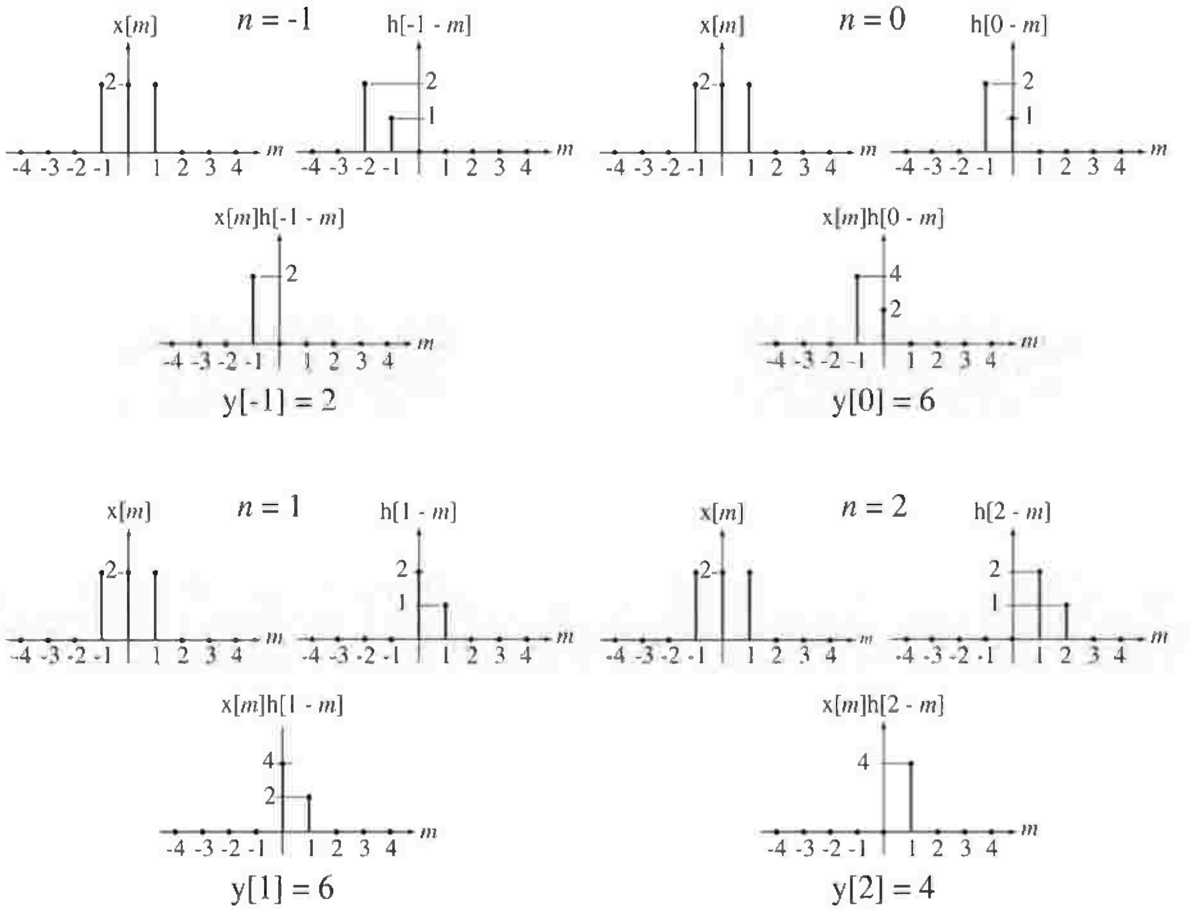
$$x[n] * h[n] = \sum_{m=n_x}^{\infty} x[m]h[n-m]$$

أيضاً، عندما $n-m<n_h$ فإن كل عناصر الـ h ستكون أصفاراً، وهذا سيضع حداً أعلى للـ m وهو $n-n_h$، ويمكننا كتابة ما يلي :

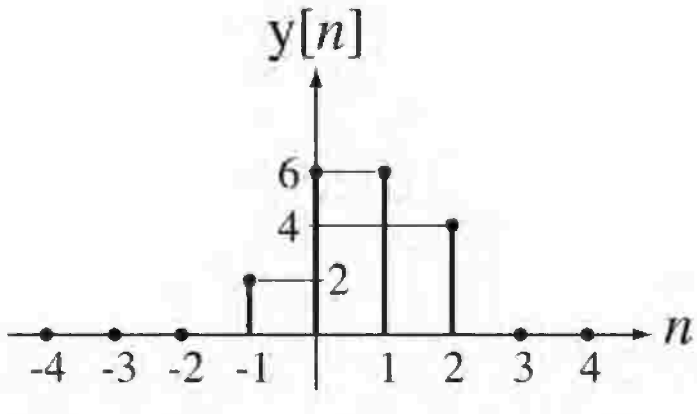
$$x[n] * h[n] = \sum_{m=n_x}^{n-n_h} x[m]h[n-m]$$

لقيم n التي تحقق $n-n_h<n_x$، فإن حد الجمع الأدنى يكون أكبر من حد الجمع الأعلى وستكون نتيجة الالتفاف تساوي صفراً. ولذلك فإنه يكون أكثر دقة أن نقول إن نتيجة الالتفاف ستكون على الصورة :

$$x[n] * h[n] = \begin{cases} \sum_{m=n_x}^{n-n_h} x[m]h[n-m], & n-n_h \geq n_x \\ 0 & n-n_h < n_x \end{cases}$$



شكل رقم (٥,٣٥) y[n] لقيم n تساوي 1- و 0 و 1 و 2.



شكل رقم (٥,٣٦) شكل يوضح y[n].

مثال ٥,٨

استجابة مرشح المتوسط المتحرك الرقمي

مرشح المتوسط المتحرك الرقمي له الاستجابة الصدمية على الصورة التالية :

h[n]=(u[n]-u[n-N])/N

احسب استجابة هذا المرشح عندما N=8 و x[n]=cos(2πn/16). بعد ذلك غير الإثارة إلى x[n]=cos(2πn/8) واحسب الاستجابة الجديدة.

باستخدام الالتفاف ستكون الاستجابة كما يلي :

y[n]=x[n]*h[n]=cos(2πn/16)*(u[n]-u[n-8])/8

بتطبيق تعريف المجموع الالتفافي :

$$y[n]=\frac{1}{8}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\cos(\frac{2\pi m}{16})(u[n-m]-u[n-m-8])$$

تأثير دالتي وحدة الخطوة هو للحد من مدى الجمع في المعادلة السابقة ليصبح على الصورة :

$$y[n]=\frac{1}{8}\sum_{m=n-7}^{n}\cos(\frac{2\pi m}{16})$$

باستخدام الدالة المثلثية $\cos(x)=\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$ يمكن كتابة المعادلة السابقة على الصورة :

$$y[n]=\frac{1}{16}\sum_{m=n-7}^{n}\left(e^{j2\pi m/16}+e^{-j2\pi m/16}\right)$$

بوضع q=m-n+7 يمكن كتابة :

$$y[n]=\frac{1}{16}\sum_{q=0}^{7}\left(e^{j2\pi(q+n-7)/16}+e^{-j2\pi(q+n-7)/16}\right)$$

$$y[n]=\frac{1}{16}\left(e^{j2\pi(n-7)/16}\sum_{q=0}^{7}e^{j2\pi q/16}+e^{-j2\pi(n-7)/16}\sum_{q=0}^{7}e^{-j2\pi q/16}\right)$$

مجموع المتوالية الهندسية ذات الـ N من العناصر تعطي بالمعادلة :

$$\sum_{n=0}^{N-1}r^n=\begin{cases}N, & r=1\\ \frac{1-r^N}{1-r}, & r\neq 1\end{cases}$$

هذه المعادلة تعمل مع أي قيمة مركبة للـ r. ولذلك، بتجميع هذه المتواليات الهندسية التي طول كل منها ٨ نحصل على :

$$y[n]=\frac{1}{16}\left(e^{j\pi(n-7)/8}\frac{\overbrace{1-e^{j\pi}}^{=2}}{1-e^{j\pi/8}}-e^{-j\pi(n-7)/8}\frac{\overbrace{1-e^{j\pi}}^{=2}}{1-e^{-j\pi/8}}\right)$$

بتبسيط هذه المعادلة :

$$y[n] = \frac{1}{8}\left(\frac{e^{j\pi(n-7)/8}}{1-e^{j\pi/8}} + \frac{e^{-j\pi(n-7)/8}}{1-e^{-j\pi/8}}\right) = \frac{1}{8}\frac{\cos\left(\frac{\pi(n-7)}{8}\right) - \cos\left(\frac{\pi(n-8)}{8}\right)}{1-\cos(\frac{\pi}{8})}$$

بعد ذلك باستخدام دورية جيب التمام ، فإن $\cos(\pi(n-8)/8)=\cos(\pi n/8)$ نحصل على :

$$y[n]=1.6421[\cos(\pi(n-7)/8)+\cos(\pi n/8)]$$

الآن بوضع $x[n]=\cos(2\pi n/8)$ ، فإن العملية ستكون أساساً كما هي ، فيما عدا دورة جيب التمام. ستكون النتيجة كما يلي :

$$y[n]=x[n]*h[n]=\cos(2\pi n/8)*(u[n]-u[n-8])/8$$

$$y[n] = \frac{1}{16}\sum_{m=n-7}^{n}\left(e^{j2\pi m/8} + e^{-j2\pi m/8}\right)$$

$$y[n] = \frac{1}{16}\left(e^{j2\pi(n-7)/8}\sum_{q=0}^{7} e^{j2\pi q/8} + e^{-j2\pi(n-7)/8}\sum_{q=0}^{7} e^{-j2\pi q/8}\right)$$

$$y[n] = \frac{1}{16}\left(e^{j\pi(n-7)/4}\frac{1-e^{j2\pi}}{1-e^{j2\pi/8}} + e^{-j\pi(n-7)/4}\,\frac{1-e^{-j2\pi}}{1-e^{-j2\pi/8}}\right) = 0$$

لأن $e^{j2\pi}=e^{-j2\pi}=1$.

إذا كان زمن حساب المتوسط في مرشح المتوسط المتحرك يساوي تماماً رقماً صحيحاً من دورة الجيب ، فإن الاستجابة ستكون صفراً لأن القيمة المتوسطة لأي جيب على أي عدد صحيح من الدورات تكون صفراً ، وإلا فإن الاستجابة لا تساوي الصفر في أي حالة أخرى.

خواص الالتفاف

يتم التعبير عن الالتفاف في الأزمنة المتقطعة ، مثله في ذلك مثل الأزمنة المستمرة ، بالعلامة * كما يلي :

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]$$ المعادلة رقم (٥,٢٢)

خواص الالتفاف في الالتفاف في الأزمنة المتقطعة مشابهة تماماً لخواصة في الأزمنة المستمرة :

$$\boxed{x[n]*A\delta[n-n_0]=Ax[n-n_0]}$$ المعادلة رقم (٥,٢٣)

$$\boxed{y[n-n_0]=x[n]*h[n-n_0]=x[n-n_0]h[n]}$$ المعادلة رقم (٥,٢٤)

خواص التبادلية، والارتباطية، والتوزيعية، والفرق، والمجموع، للمجموع الالتفافي كلها مثبتة في ملحق الويب ج وتم تلخيصها فيما يلي :

خاصية التبادلية	$x[n]*y[n]=y[n]x[n]$
خاصية الارتباطية	$(x[n]*y[n])*z[n]=x[n]*(y[n]*z[n])$
خاصية التوزيع	$(x[n]+y[n])*z[n]=x[n]*z[n]+y[n]*z[n]$
إذا كانت $y[n]=x[n]*h[n]$ فإن :	
خاصية الفرق	$y[n]-y[n-1]=x[n]*(h[n]-h[n-1])$
خاصية المجموع	مجموع y = (مجموع x) × (مجموع h)

لكي يتقارب المجموع الالتفافي، فإن كل من الإشارتين اللتين يتم إجراء الالتفاف عليهما يجب أن تكونا محدودتين وعلى الأقل تكون واحدة منهما لها مجموع تام ومحدود.

الالتفاف العددي

الالتفاف العددي في الزمن المتقطع : ماتلاب به الأمر conv الذي يقوم بحساب المجموع الالتفافي. الصورة العامة لهذا الأمر هي y=conv(x,h)، حيث كل من x و h هما متجهان من القيم من الإشارتين المتقطعتين زمنياً، و y هي متجه يحتوي قيم التفاف الإشارتين x و h. بالطبع فإن ماتلاب لا يمكنه حساب مجموع لا نهائي كما هو موضح بالمعادلة (٥,٢٢). يمكن فقط لماتلاب أن يحسب التفاف الإشارات المحددة زمنياً، ويجب أن يحتوي المتجهين x و h كل القيم غير الصفرية للإشارات التي تمثلها. (يمكن أيضاً أن تحتوي أصفاراً زائدة إذا ما طلب ذلك). إذا كان زمن العنصر الأول في الإشارة x هو n_{x0} وزمن أول عنصر في الإشارة h هو n_{h0}، فإن زمن أول عنصر في y سيكون $n_{x0}+n_{h0}$.

إذا كان زمن آخر عنصر في x هو n_{xl}، وزمن آخر عنصر في h هو n_{hl}، فإن زمن آخر عنصر في y سيكون $n_{xl}+n_{hl}$. سنفترض طول الإشارة x هو $n_{xl}-n_{x0}+1$ وطول الإشارة h هو $n_{hl}-n_{h0}+1$. وعلى ذلك فإن y ستمتد في المدى $n_{x0}+n_{h0}\le n\le n_{xl}+n_{hl}$ وسيكون طولها هو :

$$n_{xl}+n_{hl}-(n_{x0}+n_{h0})+1=\underbrace{n_{xl}-n_{x0}+1}_{x\text{ طول }}+\underbrace{n_{hl}-n_{h0}+1}_{\text{h طول}}-1$$

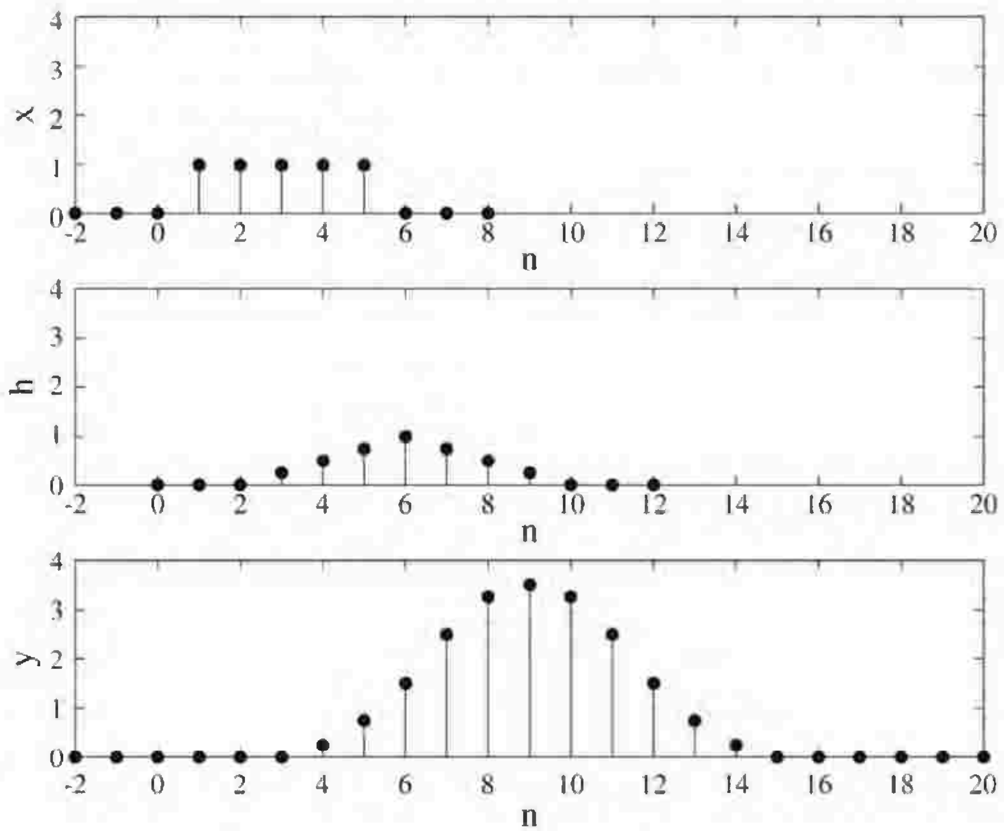
وعلى ذلك فإن طول y يساوي مجموع طولي كل من x و h ناقص واحد.

مثال ٥,٩

حساب المجموع الالتفافي باستخدام ماتلاب

لنفترض أن x[n]=u[n-1]-u[n-6] و h[n]=tri((n-6)/4). احسب المجموع الالتفافي x[n]*h[n] باستخدام الدالة conv في ماتلاب.

الإشارة x[n] محدودة في المدى $1 \le n \le 5$ و h[n] محدودة في المدى $3 \le n \le 9$. وعلى ذلك فإن أي متجه يصف x[n] يجب أن يكون طوله ٥ عناصر على الأقل، وأي متجه يصف h[n] يجب أن يكون طوله ٧ عناصر على الأقل. دعنا نضع بعض الأصفار الإضافية، ونحسب الالتفاف ونرسم الإشارتين والتفافهما باستخدام برنامج ماتلاب الذي تم توضيح خرجه كما في شكل (٥,٣٧).



شكل رقم (٥,٣٧) الإثارة، واستجابة النبضة، والاستجابة للنظام باستخدام الدالة conv في ماتلاب.

```
nx = -2:8 ; nh = 0:12; % x, h وضع المتجهين
x = usD(n-1) - usD(n-6); % x حساب قيمة المتجه
h = tri((nh-6)/4); % h حساب قيمة المتجه
y = conv(x,h); % حساب قيمة التفاف المتجهين
%
% وضع قيمة المتجه y المتقطع زمنياً
%
ny = (nx(1) nh(1)) (0:(length(nx) length(nh) - 2)) ;
%
% رسم النتيجة
%
subplot(3,1,1) ; stem(nx,x,'k','fi lled');
xlabel('n') ; ylabel('x'); axis([-2,20,0,4]);
subplot(3,1,2) ; stem(nh,h,'k','fi lled') ;
xlabel('n') ; ylabel('h'); axis([-2,20,0,4]);
subplot(3,1,3) ; stem(ny,y,'k','fi lled');
xlabel('n') ; ylabel('y'); axis([-2,20,0,4]);
```

الالتفاف العددي المستمر زمنياً

عند هذه النقطة يظهر سؤال طبيعي ، حيث إنه لا توجد دالة في ماتلاب تقوم بإجراء التكامل الالتفافي ، هل يمكننا إجراء التكامل الالتفافي باستخدام بالستخدام الدالة conv ؟ الإجابة القصيرة ، أو المباشرة هي لا. ولكن إذا كان من الممكن أن نقبل بعض التقريب (والمهندسون عادة يمكنهم ذلك) ، فإن الإجابة الأطول ستكون نعم تقريباً. يمكننا أن نبدأ بالتكامل الالتفافي كما يلي :

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

بتقريب كل من x(t) و h(t) بتتابع من المستطيلات التي عرضها (الزمني) هو Ts :

$$x(t) \cong \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nTs)rect\left(\frac{t-nTs-Ts/2}{Ts}\right)$$

و :

$$h(t) \cong \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nTs)rect\left(\frac{t-nTs-Ts/2}{Ts}\right)$$

وعلى ذلك فهذا التكامل يمكن تقريبه عند النقاط الزمنية المتقطعة كما يلي :

$$y(nTs) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mTs)h(n-m)Ts)Ts$$

وذلك يمكن التعبير عنه كمجموع التفافي كما يلي :

$$y(nTs) = Ts\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] = T_s x[n] * h[n]$$ المعادلة رقم (٥,٢٥)

حيث $x[n]=x(nTs)$ و $h[n]=h(nTs)$ ، ويمكن تقريب التكامل الالتفافي بمجموع التفافي تحت الشروط نفسها كما هو الحال في الدالة conv لإجراء الالتفاف. لكي يتقارب التكامل الالتفافي ، فإن x(t) أو h(t) أو كليهما يجب أن تكون إشارة طاقة. بفرض أن x(t) كانت لا تساوي الصفر في الفترة المحدودة $n_{x0}\le t\le n_{x1}Ts$ ، و h(t) أيضاً لا تساوي الصفر في الفترة $n_{h0}\le t\le n_{h1}Ts$ ، فإن y(t) ستكون غير مساوية للصفر في الفترة $(n_{x0}+n_{h0})Ts\le n<(n_{x1}+n_{h1})Ts$ وقيم $T_s x[n]*h[n]$ يمكن إيجادها باستخدام الدالة conv ستغطي هذا المدى. للحصول على تقريب جيد لنتائج الالتفاف فإن Ts يجب اختيارها بحيث إن الدالتين x(t) و h(t) لن تتغيرا كثيرا في هذه الفترة.

مثال ٥.١٠

رسم التفاف إشارتين مستمرتين زمنياً باستخدام الدالة conv في ماتلاب

ارسم الالتفاف y(t)=tri(t)*tri(t).

على الرغم من أن هذا الالتفاف يمكن إجراؤه تحليليا ، إلا أنه سيكون مملاً ، لذلك فإنه مرشح جيد للالتفاف التقريبي باستخدام الطرق العددية ، وبالتحديد الدالة conv في ماتلاب. ميل هاتين الدالتين يكون إما سالباً ، أو موجباً. للحصول على تقريب دقيق بدرجة معقولة ، فإننا سنختار الزمن بين هذه العينات ليكون 0.01 ثانية ، مما يعني أن الدالة لن تغير قيمتها بأكثر من 0.01 بين أي عينتين متجاورتين. على ذلك من المعادلة (٥,٢٥) يمكننا كتابة ما يلي :

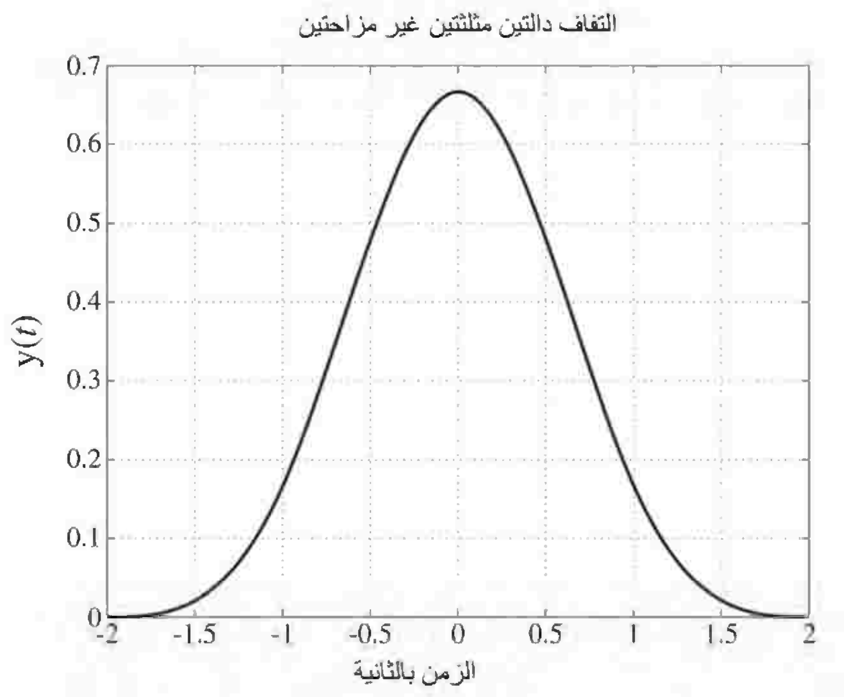
$$y(0.01n) \cong 0.01 \sum_{m=-\infty}^{\infty} tri(0.01m)tri(0.01(n-m))$$

الحدود على الأجزاء التي لا تساوي الصفر لهاتين الدالتين هي $-1\le t<1$ ، التي يتم ترجمتها إلى حدود على الإشارات المقابلة المتقطعة زمنياً إلى $-100\le n<100$. برنامج ماتلاب الذي سيجري هذا التقريب سيكون كما يلي :

```
% برنامج لإجراء التقريب المتقطع زمنياً للالتفاف دالتين مثاثتين
% حساب الالتفاف
Ts = 0.01; % الزمن بين العينات
nx = [-100:99]' ; nh _ nx ; % المتجهان المقطعان زمنياً للإشارتين
x = tri(nx*Ts) ; h = tri(nh*Ts) ; % توليد الإشارتين
ny = [nx(1)nh(1):nx(end)nh(end)]'; % المتجه المتقطع للنتيجة
y = Ts*conv(x,h) ; % إجراء الالتفاف
% الرسم والتعليق
```

```
p = plot(ny*Ts,y,'k') ; set(p,'LineWidth',2); grid on ;
xlabel('Time, {\itt} (s)','FontName','Times','FontSize',18) ;
ylabel('y({\itt})','FontName','Times','FontSize',18) ;
title('Convolution of Two Unshifted Unit Triangle Functions',...
'FontName','Times','FontSize',18);
set(gca,'FontName','Times','FontSize',14);
```

انظر الرسم الموضح في شكل (٥,٣٨).



شكل (٥,٣٨) تقريب الالتفاف المستمر زمنياً باستخدام الطرق العددية.

هذه النتائج البيانية تتوافق بدرجة كبيرة مع الحل التحليلي التالي :

$$y(t) = (1/6)\begin{bmatrix}(t+2)^3u(t+2) - 4(t+2)^3u(t+1) + 6t^3u(t) \\ -4(t-1)^3u(t-1) + (t-2)^3u(t-2)\end{bmatrix}$$

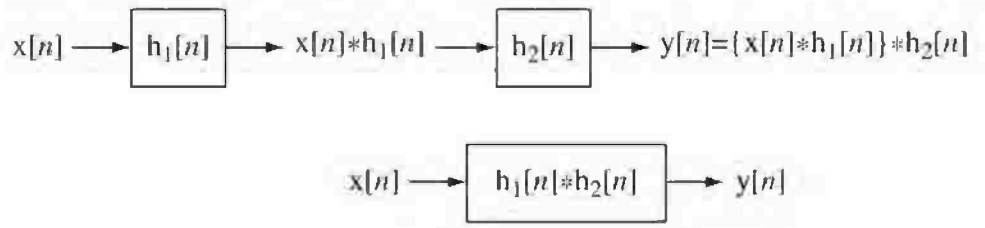
الاستقرار ودالة النبضة

لقد تم تحديد الاستقرار على وجه العموم في الفصل ٤ عن طريق القول بأن النظام المستقر يعطي إشارة خرج محددة عند إثارته بأي إشارة دخل محددة. يمكننا الآن أن نجد طريقة لتحديد إذا كان نظاماً ما مستقراً أم لا ، عن طريق فحص استجابته الصدمية. إن التفاف أي إشارتين يتقارب إذا كانت كل من الإشارتين محددة وعلى الأقل واحدة منهما يكون لها مجموع محدد. استجابة أي نظام y[n] للإشارة x[n] هي y[n]=x[n]*h[n]. إذا كانت x[n] محددة فإن y[n] ستكون محددة إذا كانت h[n] لها مجموع محدد (وبالتالي فإنها تكون محددة). بمعنى آخر إذا كان $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|$ محدداً.

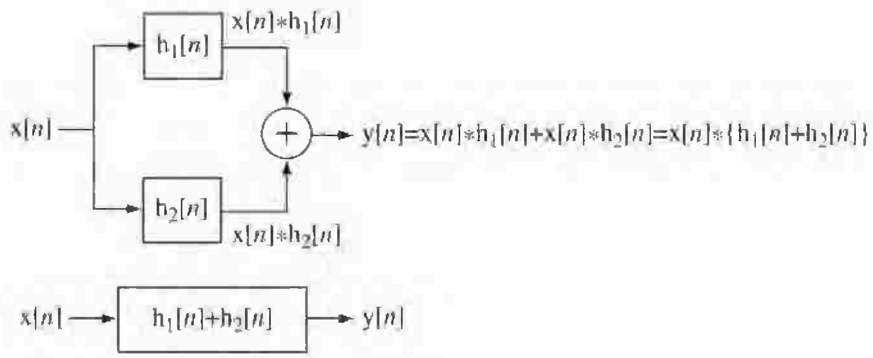
يكون أي نظام مستقراً BIBO إذا كانت استجابته الصدمية لها مجموع محدد.

توصيلات الأنظمة

هناك اثنان من التوصيلات الشائعة بين الأنظمة وهي التوصيل على التوالي والتوصيل على التوازي كما هو مبين في شكل(٥,٣٩) وشكل (٥,٤٠).



شكل رقم (٥,٣٩) التوصيل على التوالي لنظامين.



شكل رقم (٥,٤٠) التوصيل على التوازي لنظامين.

باستخدام خاصية الترابط للالتفاف يمكننا أن نبين أن التوصيل على التوالي لنظامين يمكن اعتباره كنظام واحد له استجابة نبضة تساوي التفاف استجابتي النبضة لكل من النظامين. باستخدام خاصية التوزيع للالتفاف يمكننا أن نبين أن التوصيل المتوازي لنظامين يمكن اعتباره كنظام واحد له استجابة نبضة تساوي مجموع استجابتي النبضة لكل من النظامين.

استجابة وحدة الخطوة واستجابة النبضة

استجابة أي نظام LTI تساوي التفاف الإثارة لهذا النظام مع استجابة النبضة له :

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]$$

افترض أن الإثارة ستكون تتابع وحدة وسنفترض أن الاستجابة لوحدة التتابع سنرمز لها بالرمز $h_{-1}[n]$، وبالتالي يمكننا كتابة :

$$h_{-1}[n] = u[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m]h[n-m] = \sum_{m=0}^{\infty} h[n-m]$$

بفرض q=n-m، بالتالي فإن :

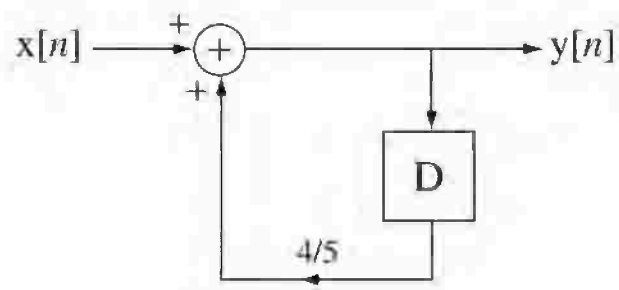
$$h_1[n] = \sum_{q=n}^{-\infty} h[q] = \sum_{q=-\infty}^{n} h[q]$$

وعلى ذلك فاستجابة أي نظام LTI متقطع زمنياً مثار بوحدة تتابع تساوي تراكم استجابته الصدمية. تماما مثلما أن وحدة التتابع تساوي تراكم استجابة النبضة، فإن الاستجابة لوحدة التتابع تساوي تراكم استجابة النبضة لهذا النظام. الرمز الجانبي في $h_{-1}[n]$ توضح عدد الفروق. في هذه الحالة يوجد 1- فرق، أو بمعنى آخر يوجد تراكم في الانتقال من استجابة النبضة إلى استجابة وحدة التتابع. هذه النتيجة تكون محققة لأي إثارة. إذا تغيرت أي إثارة إلى التراكم الخاص بها، فإن الاستجابة أيضاً تتغير إلى التراكم لهذه الإشارة، وإذا تغيرت الإثارة للفرق العكسي الأول، فإن الاستجابة تتغير أيضاً للفرق العكسي الأول لها.

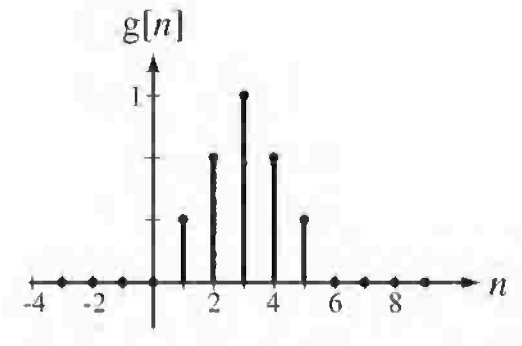
مثال ٥,١١

حساب استجابة نظام باستخدام الالتفاف

أوجد الاستجابة للنظام الموضح في شكل (٥,٤١) للإثارة الموضحة في شكل (٥,٤٢).



شكل رقم (٥,٤١) النظام المطلوب إيجاد استجابته.



شكل رقم (٥،٤٢) الإثارة لهذا النظام.

نريد أولاً أن نوجد استجابة النبضة لهذا النظام. يمكننا إيجادها باستخدام الطرق التي تم تقديمها مسبقاً، ولكن في هذه الحالة حيث إننا أوجدنا استجابتها لوحدة التتابع كالتالي : $h_{-1}[n]=[5-4(4/5)^n]u[n]$ (انظر الفصل ٤ الجزء الخاص بخواص الأنظمة المقطعة زمنياً)، فإننا نستطيع إيجاد استجابة النبضة على أنها الفرق العكسي الأول لاستجابة وحدة الخطوة كالتالي : $h[n]=h_{-1}[n]-h_{-1}[n-1]$، بتجميع المعادلات نحصل على :

$$h[n]= [5-4(4/5)^n]u[n]- [5-4(4/5)^{n-1}]u[n-1]$$

$$h[n]= \underbrace{5(u[n] - u[n - 1])}_{=\delta[n]} -4(4/5)^{n-1}[(4/5)u[n]-u[n-1]]$$

$$h[n]= \underbrace{5\delta[n] - 4(4/5)n\delta[n]}_{=\delta[n]} + (4/5)nu[n - 1]$$

$$h[n]=(4/5)^n u[n]$$

الآن كل ما يبقى هو إجراء عملية الالتفاف. يمكننا عمل ذلك باستخدام برنامج ماتلاب التالي :

```
% برنامج للتحقق من الالتفاف في الزمن المتقطع
nx = -5:15 ; % وضع متجه الإثارة المتقطع زمنياً
x = tri((n-3)/3; % توليد متجه إشارة الإثارة
nh = 0:20 ; % وضع متجه استجابة النبضة المتقطع
% توليد متجه استجابة النبضة
h = ((4/5).^nh).*usD(nh);
% حساب أزمنة البداية والنهاية للنظام
% متجه الاستجابة من متجهي الإثارة واستجابة النبضة
nymin = nx(1) nh(1); nymax = nx(length(nx)) length(nh);
ny = nymin:nymax-1;
```

% توليد متجه الاستجابة عن طريق التفاف الإثارة واستجابة النبضة

```
y = conv(x,h);
```

% رسم الإثارة واستجابة النبضة واستجابة النظام كلهم على المحور الزمني للمقارنة نفسi

% رسم الإثارة

```
subplot(3,1,1); p = stem(nx,x,'k','fi lled');
set(p,'LineWidth',2,'MarkerSize',4);
axis([nymin,nymax,0,3]);
xlabel('n'); ylabel('x[n]');
```

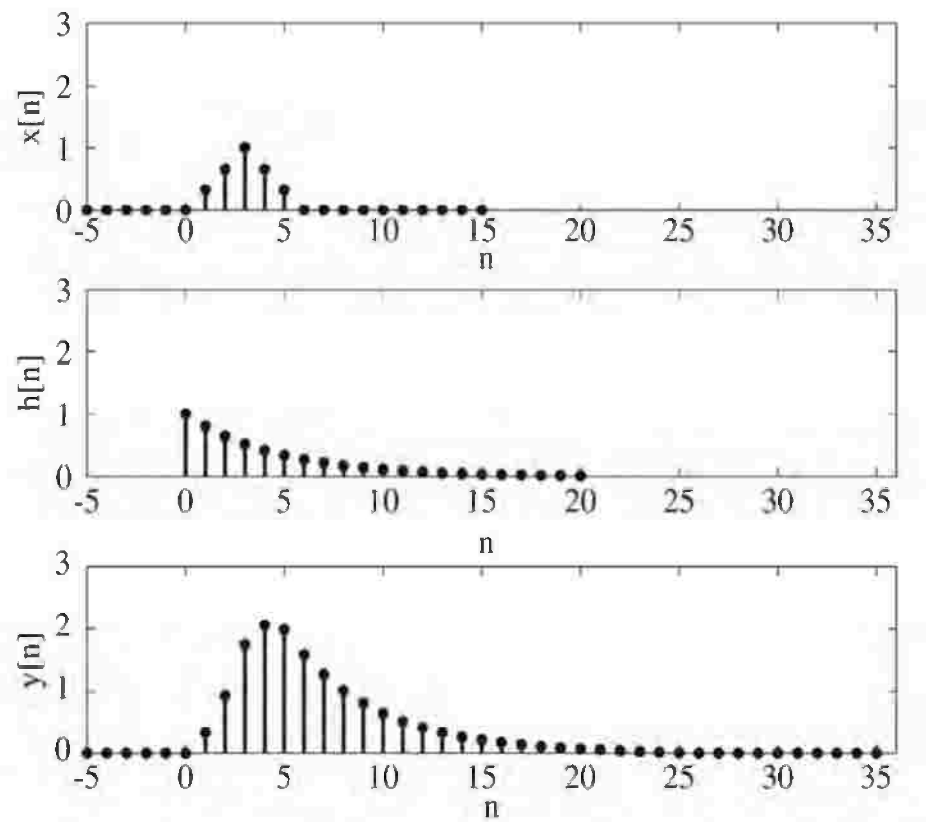
% رسم استجابة النبضة

```
subplot(3,1,2); p = stem(nh,h,'k','fi lled');
set(p,'LineWidth',2,'MarkerSize',4);
axis([nymin,nymax,0,3]);
xlabel('n'); ylabel('h[n]');
```

% رسم استجابة النظام

```
subplot(3,1,3); p _ stem(ny,y,'k','fi lled');
set(p,'LineWidth',2,'MarkerSize',4);
axis([nymin,nymax,0,3]);
xlabel('n'); ylabel('y[n]');
```

الثلاث إشارات تم رسمها باستخدام ماتلاب كما في شكل (٥,٤٣).



شكل رقم (٥,٤٣) الإثارة، واستجابة النبضة، واستجابة النبضة للنظام.

الإثارة الأسية المركبة ودالة العبور

في التدريبات الهنسية يكون الوصف الأكثر شيوعاً للأنظمة المتقطعة زمنياً هو المعادلة الفرقية، أو معادلة النظام الفرقية. افترض أن الصورة العامة لمعادلة النظام الفرقية تكون على الصورة :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$ المعادلة رقم (٥,٢٦)

تتسبب الإثارة الأسية المركبة في استجابة أسية مركبة في الأنظمة المستمرة زمنياً و الشيء نفسه يكون حقيقياً مع الأنظمة المتقطعة زمنياً. ولذلك، إذا كانت $x[n]=Xz^n$، فإن $y[n]$ ستكون على الصورة $y[n]=Yz^n$ حيث كل من X و Y عبارة عن ثوابت مركبة. وعلى ذلك ففي المعادلة الفرقية التالية :

$$y[n-k]=z^{-k}Yz^n \quad و \quad x[n-k]=Xz^{n-k} = z^{-k}Xz^n$$

وبالتالي فإن المعادلة (٥- ٢٦) يمكن كتابتها كما يلي :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y z^n = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X z^n$$

وبالتالي فإن كل من Xz^n و Yz^n يمكن أخذهم كمشتركات كما يلي :

$$Yz^n \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = Xz^n \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة :

$$\frac{Yz^n}{Xz^n} = \frac{Y}{X} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

هذه النسبة Y/X هي نسبة بين كثيرتي حدود في المتغير z. إنها تمثل دالة العبور للأنظمة المتقطعة زمنياً ويرمز لها عادة بالرمز H(z). بمعنى :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}}$$ المعادلة رقم (٥,٢٧)

وبالتالي فإن $y[n]=Yz^n=H(z)Xz^n=H(z)x[n]$. بذلك يمكن كتابة دالة العبور مباشرة من المعادلة الفرقية، وإذا كانت المعادلة الفرقية تصف النظام، فإن دالة العبور تكون كذلك واصفة للنظام. بضرب البسط والمقام في المعادلة (٥,٢٧) في z^N يمكن التعبير عن H(z) بطريقة بديلة :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = z^{N-M} \frac{b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \cdots + b_{M-1} z + b_M}{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \cdots + a_{N-1} z + a_N}$$ المعادلة رقم (٥,٢٨)

الصورتان السابقتان متكافئتان ولكن كل واحدة منهما تكون أكثر مناسبة لمواقف معينة.

يمكننا أيضاً إيجاد استجابة النظام باستخدام الالتفاف. الاستجابة y[n] لنظام LTI له استجابة النبضة h[n] لإثارة أسية مركبة $x[n]=Xz^n$ يمكن كتابتها على الصورة :

$$y[n] = h[n] * Xz^n = X \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] z^{n-m} = Xz^n \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] z^{-m}$$

بمساواة صورتي الاستجابة :

$$H(z)Xz^n = Xz^n \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] z^{-m}$$

التي منها يمكن كتابة :

$$H(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]z^{-m}$$

التي توضح العلاقة بين دالة العبور واستجابة النبضة لنظام LTI متقطع زمنياً. المجموع $\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]z^{-m}$ تسمى تحويل z لـ h[n] كما سنرى في الفصل ٩.

الاستجابة الترددية

المتغير z في الأس المركب z^n يكون عامة مركب القيمة. افترض الحالة الخاصة التي يكون فيها المتغير z محدوداً بدائرة الوحدة في المستوى المركب بحيث إن |z|=1. بذلك فإن z يمكن التعبير عنها كما يلي : $z=e^{j\Omega}$ حيث Ω هي متغير حقيقي يمثل التردد الزاوي في الزمن المتقطع، و z^n تصبح $e^{j\Omega n}$، والتي تمثل جيباً مركباً في الزمن المتقطع $e^{j\Omega}=\cos(\Omega)+j\sin(\Omega)$، وتصبح دالة العبور للنظام هي التردد الزاوي للنظام $H(e^{j\Omega})$. من$Yz^n=H(z)Xz^n$، وبوضع $z=e^{j\Omega}$ يمكن كتابة ما يلي :

$$Ye^{j\Omega n} = |Y|e^{j\measuredangle Y}e^{j\Omega n} = H(e^{j\Omega})Xe^{j\Omega n} = \left|H(e^{j\Omega})\right|e^{j\measuredangle H(e^{j\Omega})}e^{j\Omega n}|X|e^{j\measuredangle X}e^{j\Omega n}$$

بالقسمة على $e^{j\Omega n}$ نحصل على :

$$|Y|e^{j\measuredangle Y} = \left|H(e^{j\Omega})\right||X|e^{j(\measuredangle H(e^{j\Omega})+\measuredangle X)}$$

بمساواة المقادير نحصل على $|Y|=|H(e^{j\Omega})||X|$، وبمساواة الزوايا نحصل على $\measuredangle Y=\measuredangle H(e^{j\Omega})+\measuredangle X$. الدالة $H(e^{j\Omega})$ تسمى الاستجابة الترددية للنظام؛ لأنه عند أي تردد زاوي Ω، إذا كنا نعرف مقدار وزاوية الإثارة ومقدار وزاوية الاستجابة الترددية، فإنه يمكننا إيجاد مقدار وزاوية الاستجابة.

كما كان الأمر حقيقياً بالنسبة للأنظمة المستمرة زمنياً، إذا تم تطبيق الإثارة المركبة x[n] لأي نظام وتسبب ذلك في استجابة y[n]، فإن الجزء الحقيقي من x[n] يتسبب في الجزء الحقيقي من الاستجابة y[n]، والجزء التخيلي من الإثارة x[n] يتسبب في الجزء التخيلي من الاستجابة y[n]. ولذلك، إذا كانت الإثارة الحقيقية لأي نظام هي $x[n]=A_x\cos(\Omega n+\theta_x)$، فإنه يمكننا إيجاد استجابة النظام لأي إثارة على الصورة :

$$x_C[n]=A_x\cos(\Omega n+\theta_x)+jA_x\sin(\Omega n+\theta_x)=A_xe^{j(\Omega n+\theta x)}$$

كما يلي :

$$y_C[n]=A_y\cos(\Omega n+\theta_y)+jA_y\sin(\Omega n+\theta_y)=A_xe^{j(\Omega n+\theta y)}$$

ويمكننا أن نأخذ الجزء الحقيقي $y[n]=A_y\cos(\Omega n+\theta_y)$ على أنه الاستجابة للجزء الحقيقي من الاستجابة $x[n]=A_x\cos(\Omega n+\theta_x)$. وباستخدام $|Y|=|H(j\omega)||X|$ و $\measuredangle Y=\measuredangle H(j\omega)+\measuredangle X$ نحصل على :

$$\theta_y=\measuredangle H(e^{j\Omega})+\theta_x \quad و \quad A_y=|H(e^{j\Omega})|A_x$$

مثال ٥,١٢

دالة العبور والاستجابة الترددية

نظام LTI موصوف بالمعادلة الفرقية التالية :

y[n]-).75y[n-1]+0.25y[n-2]=x[n]

(أ) احسب دالة العبور

بالنسبة للمعادلة الفرقية التي على الصورة $\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$ ، و N=2 و M=0 و a_0=0.25 و a_1=-0.75 و a_2=1 و b_0=1 ، يمكننا كتابة دالة العبور على الصورة :

$$H(z) = \frac{1}{z^2 - 0.75z + 0.25}$$

(ب) إذا كانت $x[n]=Xe^{j0.5n}$ و $y(t)=Ye^{j0.5n}$ و $X=12e^{-j\pi/4}$ ، احسب مقدار وزاوية Y.

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{(e^{j\Omega})^2 - 0.75(e^{j\Omega}) + 0.25} = \frac{1}{e^{j2\Omega} - 0.75e^{j\Omega} + 0.25}$$

التردد الزاوى هو Ω=0.5، ولذلك :

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{e^{j} - 0.75(e^{j/2}) + 0.25} = 2.001e^{-j1.303}$$

$$|Y|=|H(e^{j0.5})|x12=2.001x12=24.012$$

$$\measuredangle Y=\measuredangle H(e^{j0.5})-\pi/4=-1.3032-\pi/4=-2.0886 \text{ radisns}$$

(ج) إذا كانت $x[n]=25\cos(2\pi n/5)$ و $y[n]=A_y\cos(2n/5+\theta_y)$ ، احسب A_y و θy.

$$A_y=|H(e^{j\pi/9})|A_x=1.2489x25=31.2225$$

$$\theta_y = \measuredangle H(e^{j2\pi/5}) + \theta_x = 2.9842 + 0 = 2.9842\, radians$$

(٥,٤) ملخص النقاط المهمة

١- كل نظام LTI يكون موصوفاً تماماً باستجابته الصدمية

٢- استجابة أي نظام LTI لأي إشارة دخل اختيارية يمكن إيجادها عن طريق التفاف إشارة الدخل مع الاستجابة الصدمية للنظام.

٣- الاستجابة الصدمية لنظامين LTI موصلين على التوالي تساوي التفاف الاستجابة الصدمية لكل من النظامين مع بعضهما بعضاً.

٤- الاستجابة الصدمية لنظامين LTI موصلين على التوازي تساوي مجموع الاستجابة الصدمية لكل من النظامين.

٥- أي نظام LTI مستمر زمنياً يكون مستقراً لـ BIBO إذا كانت استجابته الصدمية يمكن تكاملها؟

٦- أي نظام LTI متقطع زمنياً يكون مستقراً (BIBO) إذا كانت استجابته الصدمية يمكن جمعها.

تمارين مع الإجابات

(في كل تمرين ، تكون الإجابات مدونة بصورة عشوائية)

الزمن المستمر

استجابة النبضة

١- احسب استجابة النبضة للأنظمة الموصوفة بالمعادلات التالية :

(أ) $y'(t)+5y(t)=x(t)$

(ب) $y''(t)+6y'(t)+4y(t)=x(t)$

(ج) $2y'(t)+3y(t)=x'(t)$

(د) $4y'(t)+9y(t)=2x(t)+x'(t)$

الإجابة : $h(t)=1(1/16)e^{-9t/4}u(t)+(1/4)\delta(t)$ ، $e^{-5t}u(t)-(3/4)e^{-3t/2}u(t)+(1/2)\delta(t)$

، $0.2237(e^{-0.76t}-e^{-5.23t})u(t)$

الالتفاف

٢- إذا كانت $x(t)=2tri(t/4)*\delta(t-2)$ فأوجد قيمة :

(أ) $x(1)$

(ب) $x(-1)$

الإجابة : 3/2 ، ½

٣- إذا كانت $x(t)=-5rect(t/2)*(\delta(t+1)+\delta(t))$ فأوجد قيمة :

(أ) $x(1/2)$

(ب) $x(-1/2)$

(ج) $x(-5/2)$

الإجابة: 10- و 0 و 5-

٤- احسب قيم هذه الدوال

(أ) إذا كانت $g(t)=4\sin(\pi t/8)*\delta(t-4)$ فاحسب $g(-1)$.

(ب) إذا كانت $g(t)=-5rect((t+4)/2)*\delta(3t)$ فاحسب $g(1)=g(-4)$.

الإجابة : 3.696- و 5/3

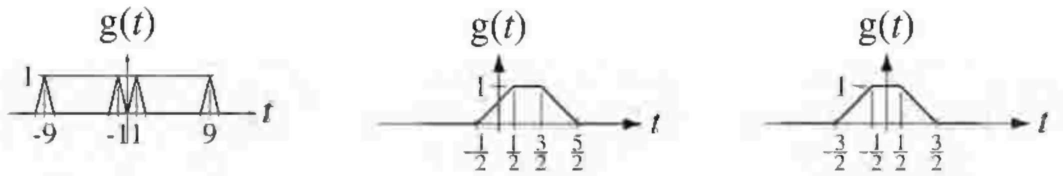
٥- ارسم $g(t)$ في كل مما يأتي :

(أ) $g(t)=rect(t)*rect(t/2)$

(ب) $g(t)=rect(t-1)*rect(t/2)$

(ج) g(t)=[rect(t-5)+rect(t+2)]*[rect(t-4)+rect(t+4)]

الإجابة :



شكل رقم (ت-٥).

٦- ارسم الدوال التالية :

(أ) $g(t)=\text{rect}(4t)$

(ب) $g(t)=\text{rect}(4t)*4\delta(t)$

(ج) $g(t)=\text{rect}(4t)*4\delta(t-2)$

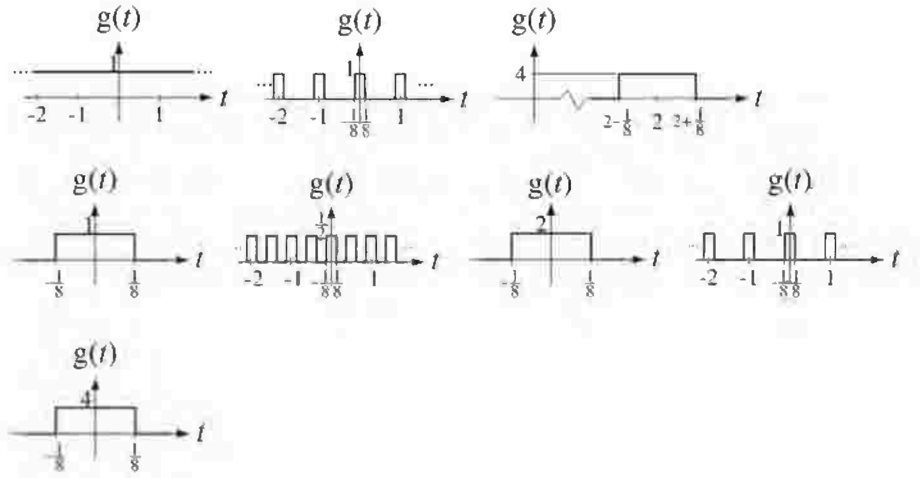
(د) $g(t)=\text{rect}(4t)*4\delta(2t)$

(ه) $g(t)=\text{rect}(4t)*\delta_1(t)$

(و) $g(t)=\text{rect}(4t)*\delta_1(t-1)$

(ز) $g(t)=(1/2)\text{rect}(4t)*\delta_{1/2}(t)$

(ح) $g(t)=(1/2)\text{rect}(t)*\delta_{1/2}(t)$



شكل رقم (ت-٦).

٧- ارسم الدوال التالية :

(أ) $g(t)=\text{rect}(t/2)*[\delta(t+2)-\delta(t+1)]$

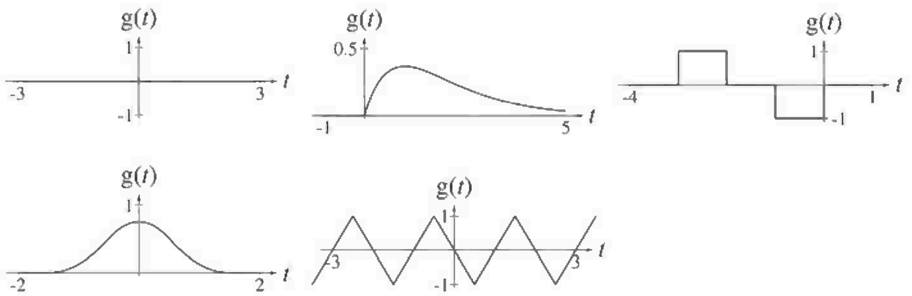
(ب) $g(t)=\text{rect}(t)*\text{tri}(t)$

(ج) $g(t)=e^{-t}u(t)*e^{-t}u(t)$

(د) $g(t)=[\text{tri}(2(t+1/2))-\text{tri}(2(t-1/2))]*\delta_2(t)$

(ه) $g(t)=[\text{tri}(2(t+1/2))-\text{tri}(2(t-1/2))]*\delta_1(t)$

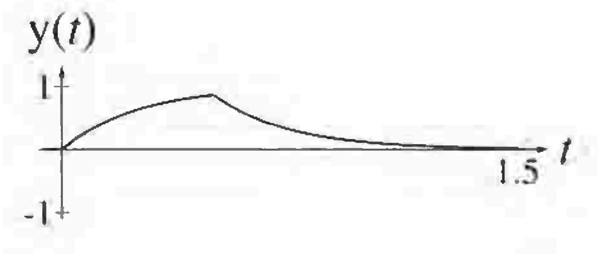
الإجابة :



شكل رقم (ت-٧)

٨- نظام له استجابة النبضة التالية $h(t)=4e^{-4t}u(t)$. احسب وارسم استجابة النظام للدخل $x(t)=rect(2(t-1/4))$.

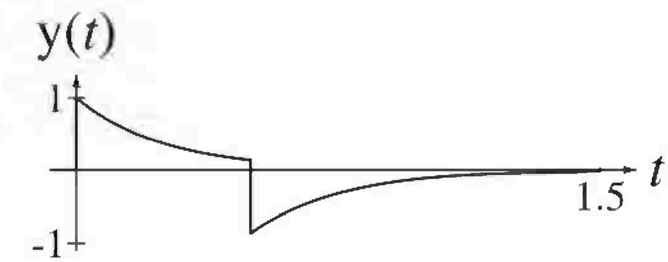
الإجابة :



شكل رقم (ت-٨)

٩- غير استجابة النبضة في تمرين ٨ إلى $h(t)=\delta(t)-4e^{-4t}u(t)$ واحسب وارسم استجابة النظام للدخل $x(t)=rect(2(t-1/4))$.

الإجابة :

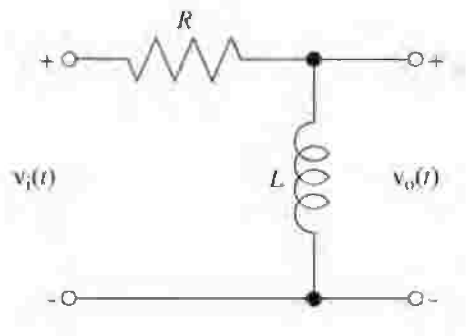


شكل رقم (ت-٩)

١٠- للدائرة المبينة في شكل (ت-١٠)، إشارة جهد الدخل هي $v_i(t)$ وإشارة جهد الخرج هي $v_o(t)$:

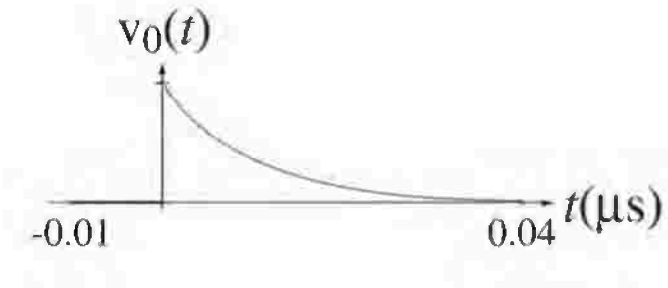
(أ) احسب استجابة النبضة بدلالة R و L.

(ب) إذا كانت $R=10k\Omega$ و $L=100\mu H$ فارسم استجابة وحدة الخطوة.



شكل رقم (ت-١٠)

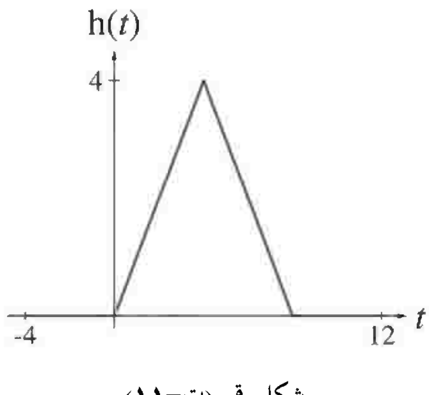
الإجابة : $\delta(t)-(R/L)e^{-tR/L}$



شكل رقم (ج.ت-١٠)

١١- نظامان لهما استجابتا النبضة التاليتان $h_1(t)=u(t)-u(t-4)$ و $h_2=rect((t-2)/4)$. إذا تم توصيل هذين النظامين على التوالي فارسم الاستجابة $y(t)$ للنظام الكلي للدخل $x(t)=\delta(t)$.

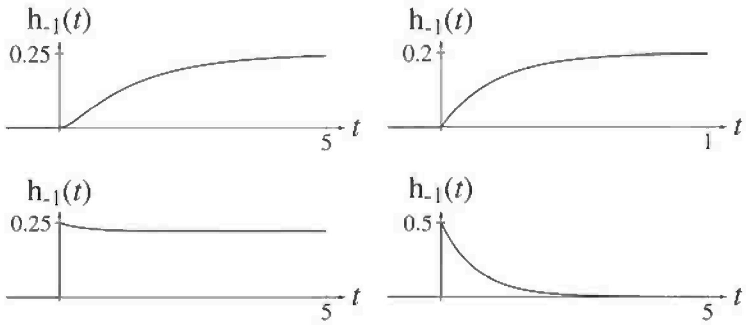
الإجابة :



شكل رقم (ت-١١)

١٢- ارسم استجابات الأنظمة في تمرين ١ لوحدة الخطوة.

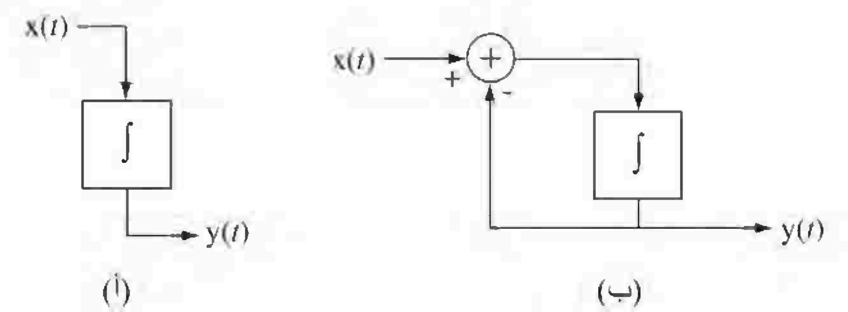
الإجابة :



شكل رقم (ت-١٢).

الاستقرار

١٣- أوجد استجابات النبضة للنظامين الموضحين في شكل (ت- ١٣). هل هذان النظامان مستقران BIBO أم لا ؟

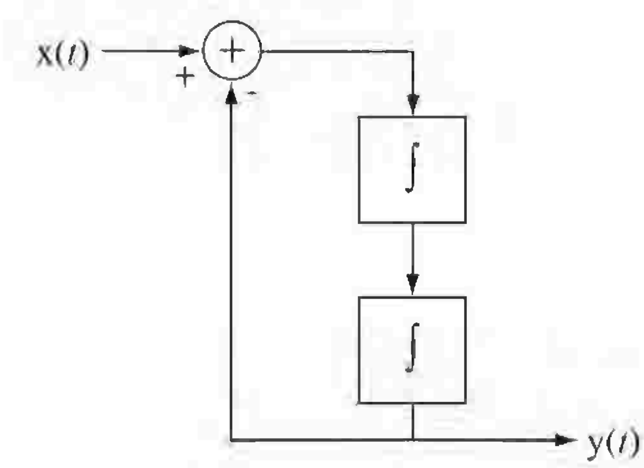


شكل رقم (ت-١٣) نظامان للتكامل الأحادي.

الإجابة :

واحد من النظامين مستقر (BIBO)، وواحد غير مستقر (BIBO).

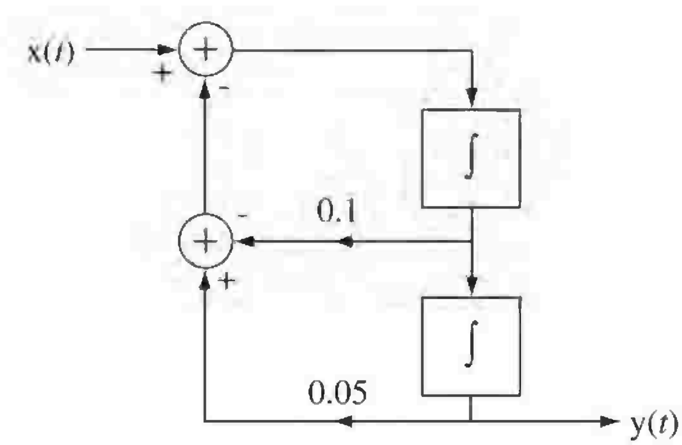
١٤- أوجد استجابة النبضة للنظام في شكل (ت-١٤). هل هذا النظام مستقر (BIBO)؟



شكل رقم (ت–١٤) نظام تكامل مزدوج.

الإجابة : النظام غير مستقر BIBO.

١٥- أوجد استجابة النبضة للنظام الموضح في شكل (ت–١٥) وتحقق من استقراره BIBO.



شكل رقم (ت–١٥) نظام بتكاملين

الإجابة :

$4.589e^{0.05t}\sin(0.2179t)u(t)$ ، والنظام غير مستقر BIBO

الزمن المتقطع

استجابة النبضة

١٦- أوجد استجابة النبضة لكل نظام من النظم الموصوفة في المعادلات التالية :

(أ) $y[n]=x[n]-x[n-1]$

(ب) $25y[n]+6y[n-1]+y[n-2]=x[n]$

(ت) $4y[n]-5y[n-1]+y[n-2]=x[n]$

(ث) $2y[n]+6y[n-2]=x[n]-x[n-2]$

الإجابة : $\delta[n]-\delta[n-1]$ ، $[1/3-(1/12)(1/4)^n]u[n]$ ،

$h[n]=\cos(2.214n+0.644)/[20(5)^n]$ ، $(\sqrt{3}/2)\cos(\pi n/2)(u[n]+u[n-2])$

الالتفاف

١٧- أوجد القيم العددية للدوال التالية :

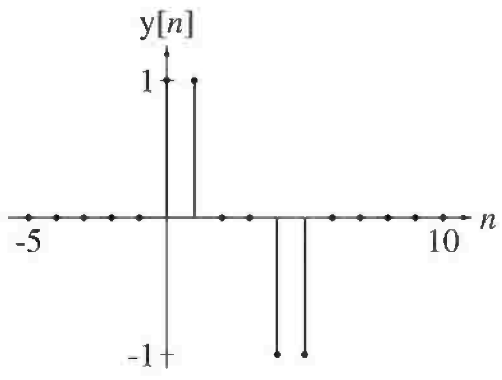
(أ) إذا كانت $g[n]=10\cos(2\pi n/12)*\delta[n+8]$ ، فاحسب $g[4]$

(ب) إذا كانت $g[n]=(u[n+2]-u[n-3])*(\delta[n-1]-2\delta[n-2])$ ، فاحسب $g[2]$

الإجابة : 1- و 10

١٨- ارسم الالتفاف التالي $y[n]=x[n]*h[n]$ حيث $x[n]=u[n]-u[n-4]$ و $h[n]=\delta[n]-\delta[n-2]$.

الإجابة :



شكل رقم (ت–١٨)

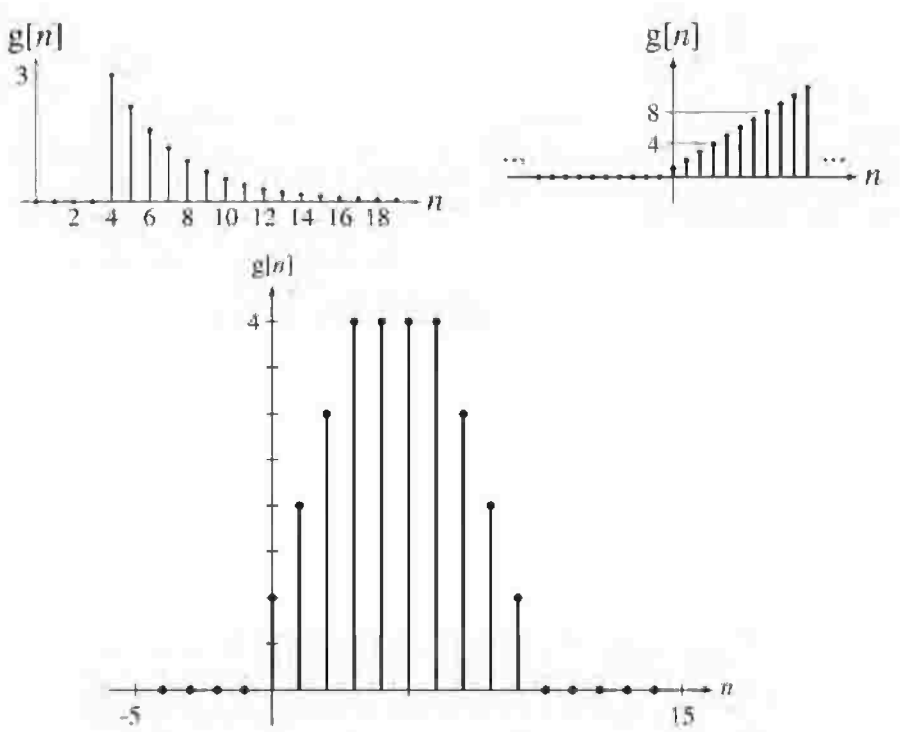
١٩- ارسم $g[n]$ وأوجد الحل الرياضي، وقارن الحل الرياضي مع النتائج التي يمكن أن تحصل عليها من استخدام أمر ماتلاب conv لإجراء عمليات الالتفاف التالية :

(أ) $g[n]=u[n]*u[n]$

(ب) $g[n]=3\delta[n-4]*(3/4)^n u[n]$

(ت) $g[n]=(u[n]-u[n-7])*(u[n]-u[n-4])$

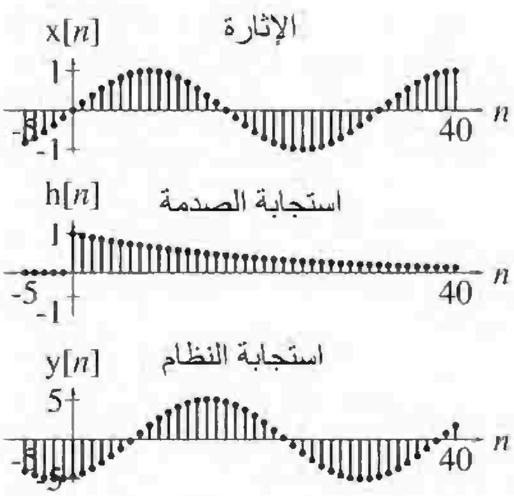
الإجابة :



شكل رقم (ت–١٩).

٢٠– افترض الإثارة $x[n]=\sin(2\pi n/32)$ واستجابة النبضة $h[n]=(0.95)^n u[n]$ أوجد صورة مغلقة للاستجابة $y[n]$ وارسم هذه الاستجابة.

الإجابة :



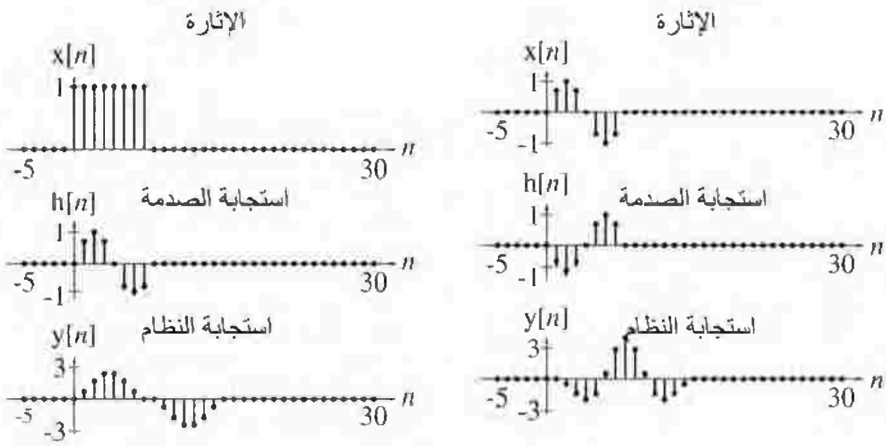
شكل رقم (ت–٢٠).

٢١- افترض الإثارة x[n]، واستجابة النبضة h[n]، استخدم ماتلاب لرسم استجابة النظام y[n] في كل مما يأتي :

(أ) x[n]=u[n]-u[n-8]، و h[n]=sin(2πn/8)(u[n]-u[n-8])

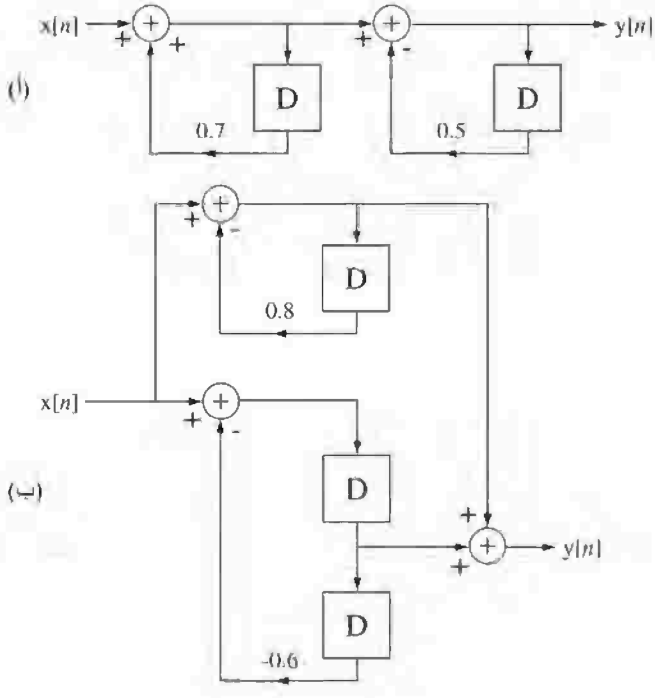
(ب) x[n]=sin(2πn/8)(u[n]-u[n-8])، و h[n]=-sin(2πn/8)(u[n]-u[n-8])

الإجابة :

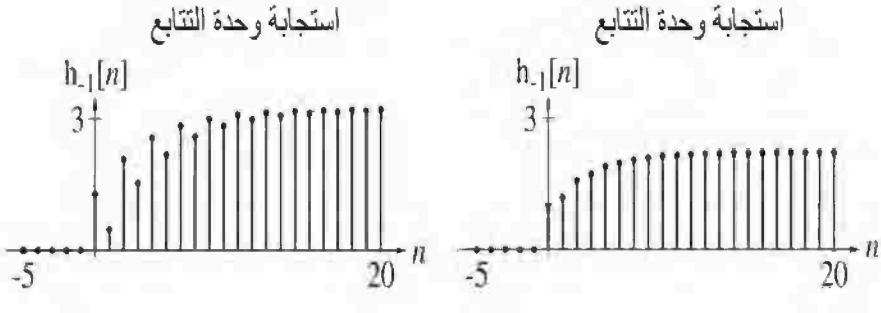


شكل رقم (ج ت-٢١)

٢٢- أوجد وارسم استجابة وحدة التتابع للأنظمة الموجودة في شكل (ت- ٢٢).



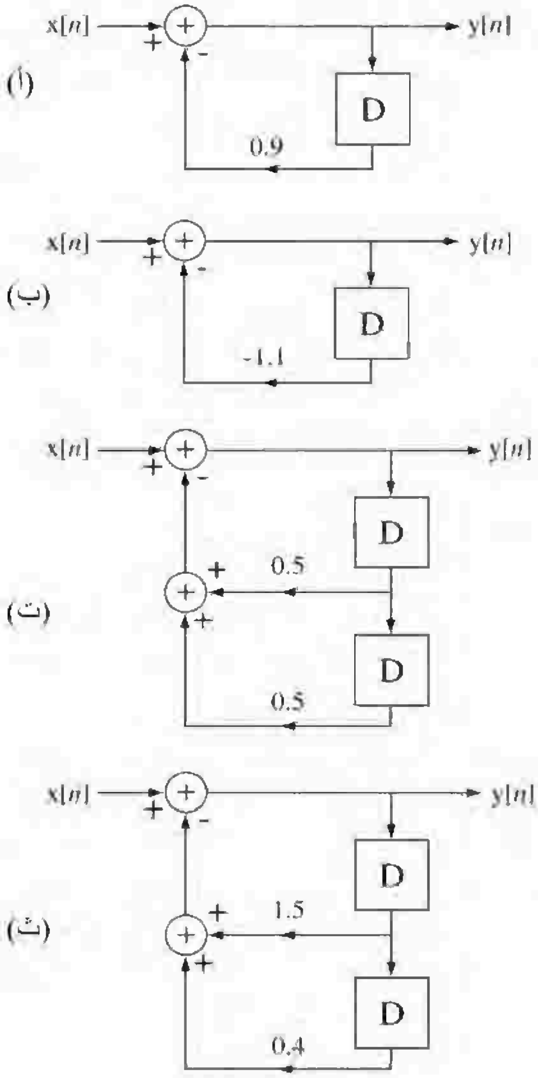
شكل رقم (ت-٢٢).



شكل رقم (ج.ت-٢٢).

الاستقرار

٢٣- أي واحد من الأنظمة الموضحة في شكل (ت- ٢٣) يكون مستقراً (BIBO) ؟



شكل رقم (ت-٢٣).

الإجابة : اثنان مستقران واثنان غير مستقرين

تمارين بدون إجابة

الزمن المستمر

استجابة النبضة

٢٤- أوجد استجابة النبضة للأنظمة الموصوفة بالمعادلات التالية :

(أ) $4y''(t)=2x(t)-x'(t)$

(ب) $y''(t)+9y(t)=-6x'(t)$

(ج) $-y''(t)+3y'(t)=3x(t)+5x''(t)$

٢٥- نبضة جهد مربعة تبدأ عند الزمن $t=0$، وعرضها 2 ثانية ، وارتفاعها 0.5V استخدمت لإثارة مرشح RC منفذ للترددات المنخفضة فيه $R=10k\Omega$ و $C=100\mu F$.

(أ) ارسم الجهد على المكثف مع الزمن

(ب) غير عرض النبضة إلى 0.2 ثانية وارتفاعها إلى 5V وأعد الجزء (أ)

(ج) غير عرض النبضة إلى 2 ميللي ثانية وارتفاعها إلى 500V وأعد الجزء (أ)

(د) غير عرض النبضة إلى 2 ميكروثانية وارتفاعها إلى 500kV وأعد الجزء (أ)

اعتماداً على هذه النتائج ، ماذا سيحدث من وجهة نظرك إذا افترضنا أن جهد الدخل أصبح وحدة نبضة؟

الالتفاف

٢٦- دالة مستمرة زمنياً لا تساوي الصفرعلى مدى معاملها من 0 حتى 4. تم التفاف هذه الدالة مع دالة أخرى لا تساوي الصفر على مدى معاملها من 1- حتى 3-. ما هو المدى الذي يكون فيه التفاف الدالتين لا يساوي الصفر.

٢٧- ما هي الدالة التي عند التفافها مع الدالة $-2\cos(t)$ تعطي $6\sin(t)$ ؟ (هناك أكثر من إجابة صحيحة)

٢٨- ارسم الدوال التالية :

(أ) $g(t)=3\cos(10\pi t)*4\delta(t+1/10)$

(ب) $g(t)=\mathrm{tri}(2t)*\delta_1(t)$

(ج) $g(t)=2[\mathrm{tri}(2t)-\mathrm{rect}(t-1)]*\delta_2(t)$

(د) $g(t)=8[\mathrm{tri}(t/4)\delta_1(t)]*\delta_8(t)$

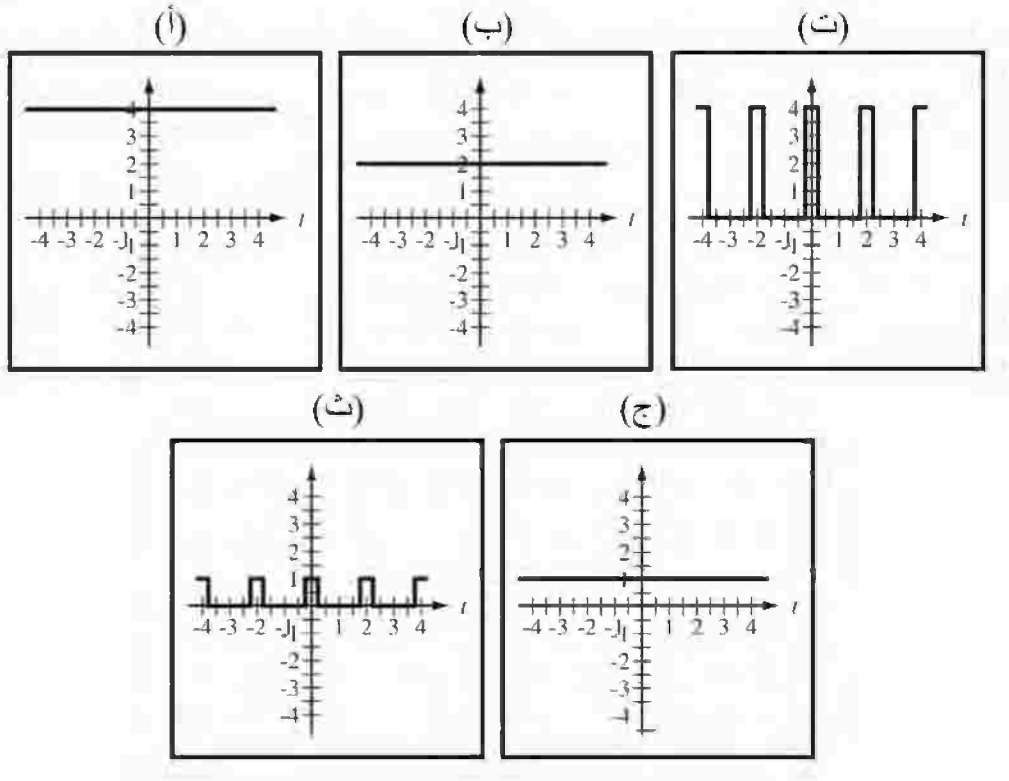
(ه) $g(t)=e^{-2t}u(t)*[\delta_4(t)-\delta_4(t-2)]$

٢٩- لكل رسم في شكل (ت- ٢٩) إختر الإشارة ، أو الإشارات المقابلة من المجموعة $x_1(t)$ حتى $x_8(t)$. (الإشارة المقابلة من الممكن ألا تكون واحدة من الاختيارات A حتى E).

$x_1(t)=\delta_2(t)*\mathrm{rect}(t/2)$

$x_2(t)=4\delta_2(t)*\mathrm{rect}(t/2)$

$x_3(t)=(1/4)\delta_{1/2}(t)*rect(t/2)$
$x_4(t)=\delta_{1/2}(t)*rect(t/2)$
$x_5(t)=\delta_2(t)*rect(2t)$
$x_6(t)=4\delta_2(t)*rect(2t)$
$x_7(t)=(1/4)\delta_{1/2}(t)*rect(2t)$
$x_8(t)=\delta_{1/2}(t)*rect(2t)$



شكل رقم (ت-٢٩)

٣٠- احسب متوسط طاقة كل واحدة من الإشارات التالية :

(أ) $x(t)=4rect(t)*\delta_4(t)$

(ب) $x(t)=4tri(t)*\delta_4(t)$

٣١- وضح أن خاصية المساحة وخاصية التحجيم للتكامل الالتفافي يكونان متفقين عن طريق إيجاد المساحة لـ $x(at)*h(at)$ ومقارنتها مع مساحة الـ $x(t)*h(t)$.

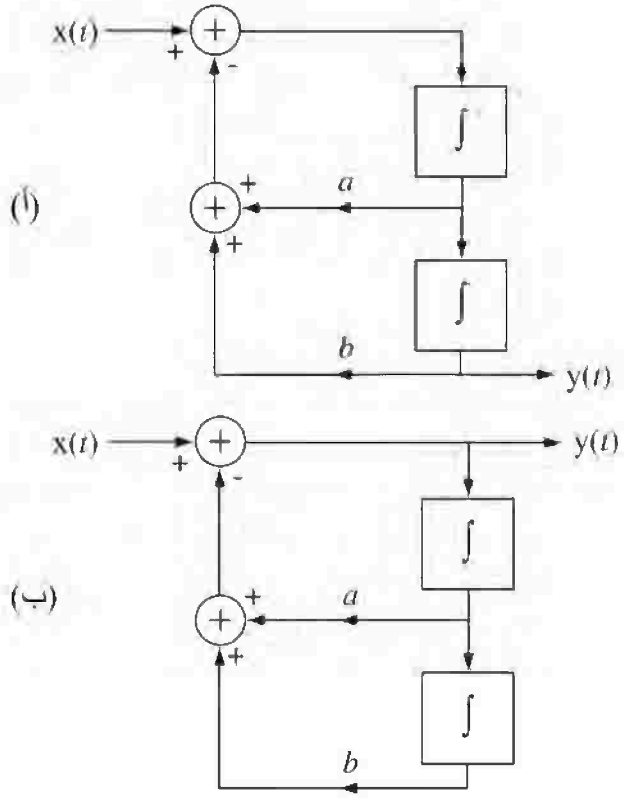
٣٢- التفاف الدالة $g(t)$ مع المزدوج يمكن كتابته كما يلي :

$$g(t) * u_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)u_1(t-\tau)d\tau$$

بإجراء التكامل بالتجزئ وضح أن $g(t)*u_1(t)=g'(t)$.

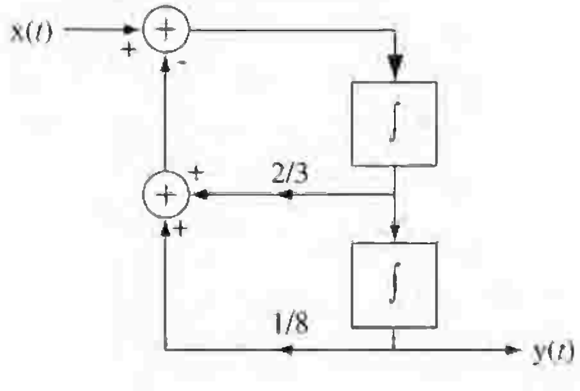
الاستقرار

٣٣- اكتب المعادلة التفاضلية للأنظمة الموضحة في شكل (ت- ٣٣)، وأوجد استجابة النبضة لكل منها وحدد إذا كان النظام مستقراً أم لا ؟. لكل نظام a=0.5 و b=-0.1.



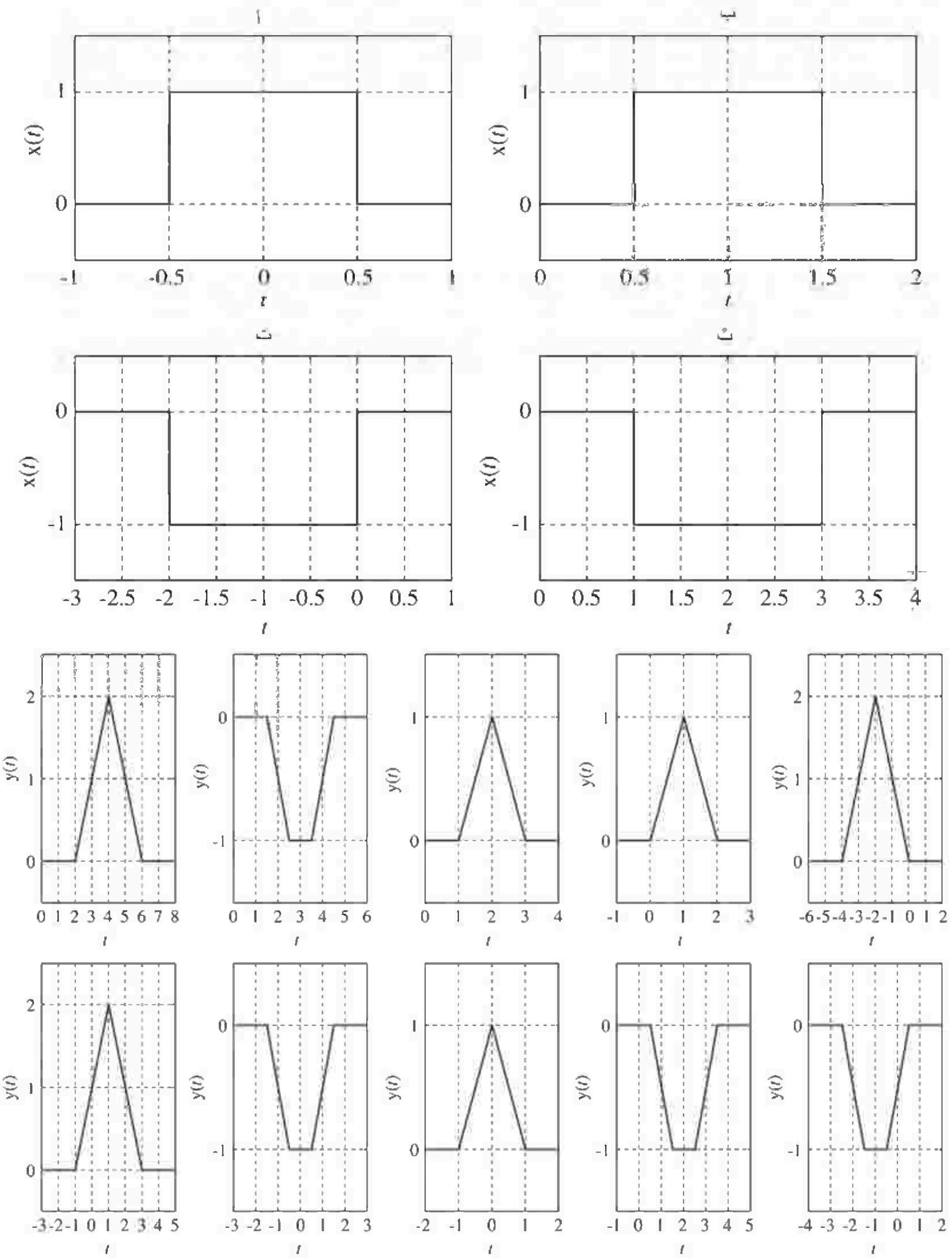
شكل رقم (ت-٣٣)

٣٤- أوجد استجابة النبضة للنظام الموضح في شكل (ت- ٣٤) وتحقق من استقراره BIBO ؟



شكل رقم (ت-٣٤) نظام مكون من تكاملين.

٣٥- هذه الدوال الأربع المستطيلة الأربعة تم التفافها كأزواج (بما في ذلك التفاف هذا المستطيل مع نفسه). الالتفافات موضحة أسفل. لكل التفاف، حدد أي الدوال المستطيلة تم التفافها لتعطي كل شكل.

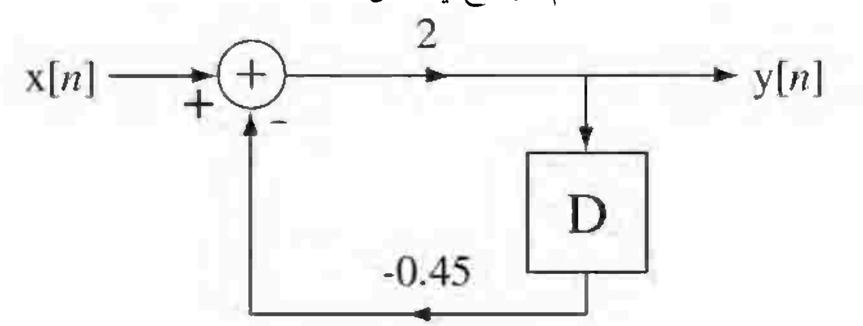


شكل رقم (ت–٣٥).

الزمن المتقطع

استجابة النبضة

٣٦- أوجد استجابة النبضة h[n] للنظام الموضح في شكل (ت- ٣٦).



شكل رقم (ت-٣٦) الرسم الصندوقي للنظام.

٣٧- أوجد استجابة النبضة للنظام الموصوف بالمعادلات التالية :

(أ) 3y[n]+4y[n-1]+y[n-2]=x[n]+x[n-1]

(ب) (5/2)y[n]+6y[n-1]+10y[n-2]=x[n]

الالتفاف

٣٨- ارسم g[n] وتحقق من رسمك باستخدام الدالة conv في ماتلاب في كل مما يأتي :

(أ) $g[n]=(u[n+1]-u[n-2])*\sin(2\pi n/9)$

(ب) $g[n]=(u[n+2]-u[n-3])*\sin(2\pi n/9)$

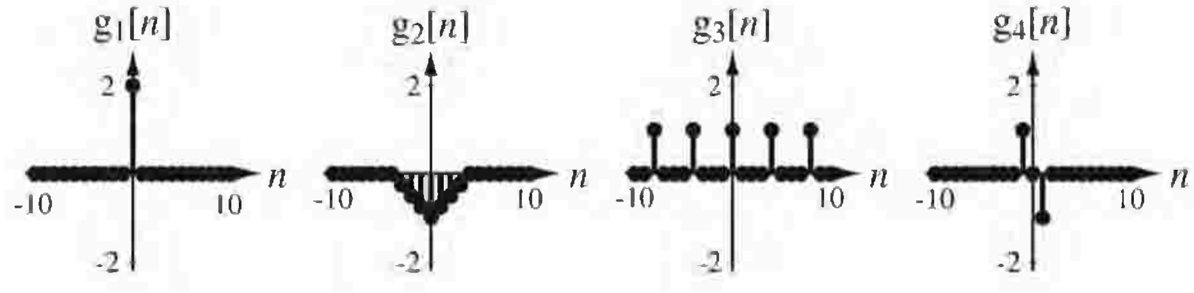
(ج) $g[n]=(u[n+4]-u[n-5])*\sin(2\pi n/9)$

(د) $g[n]=(u[n+3]-u[n-4])*(u[n+3]-u[n-4])*\delta_{14}[n]$

(ه) $g[n]=(u[n+3]-u[n-4])*(u[n+3]-u[n-4])*\delta_{7}[n]$

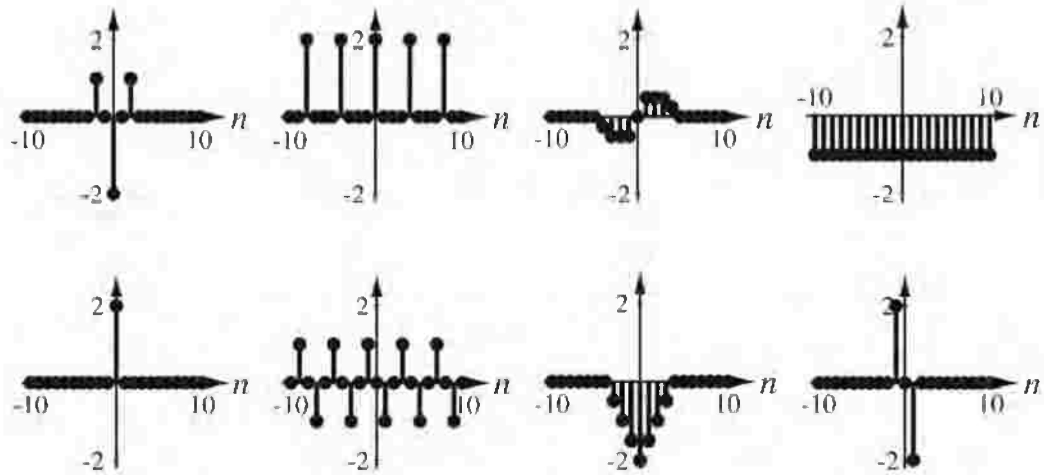
(و) $g[n]=2\cos(2\pi n/7)*(7/8)^n u[n]$

٣٩- افترض أشكال الدوال ١ حتى ٤ في شكل (ت- ٣٩- ١)، وافق كل تعبير التفافي a حتى j مع واحدة من الدوال a حتى h في شكل (ت- ٣٩- ٢) (إذا كان هناك توافق).



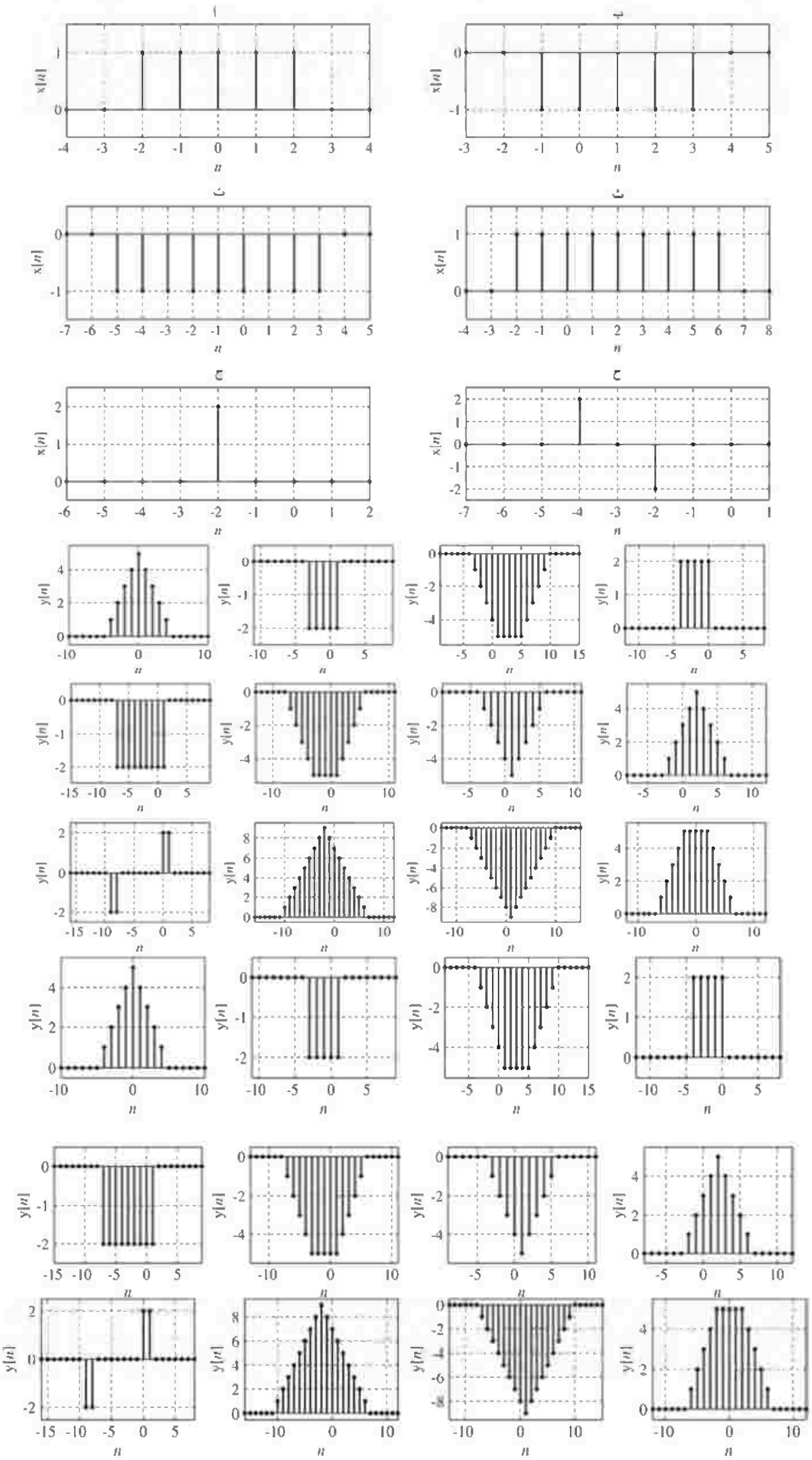
شكل رقم (ت-٣٩-١).

(a) $g_1[n]*g_1[n]$ (b) $g_2[n]*g_2[n]$ (c) $g_3[n]*g_3[n]$ (d) $g_4[n]*g_4[n]$
(e) $g_1[n]*g_2[n]$ (f) $g_1[n]*g_3[n]$ (g) $g_1[n]*g_4[n]$ (h) $g_2[n]*g_3[n]$
(i) $g_2[n]*g_4[n]$ (j) $g_4[n]*g_3[n]$



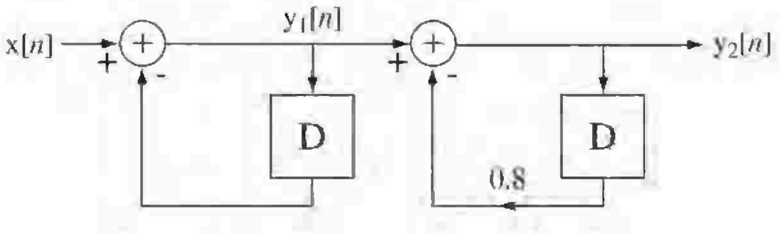
شكل رقم (ت-٣٩-٢)

٤٠- أول ٦ أشكال هي ليست إشارات متقطعة زمنياً مطلوب إجراء الالتفاف عليها. (كل إشارة تساوي صفراً خارج المدى الموضح في الرسم). فيما يلي ١٢ نتيجة لعملية الالتفاف على أزواج من هذه الإشارات (بما في ذلك التفاف كل إشارة مع نفسها). لكل نتيجة من نتائج الالتفاف حدِّد أي زوج من الإشارات تم عمل الالتفاف عليهما لتعطي هذه النتيجة؟



شكل رقم (ت-٤٠)

٤١- أوجد استجابة النبضة للأنظمة الجانبية الموضحة في شكل (ت- ٤١) وبعد ذلك قم بإجراء عملية الالتفاف عليها لإيجاد استجابة النبضة للتوصيل على التوالي للنظامين معاً.



شكل رقم (ت-٤١) توصيل على التوالي لنظامين.

٤٢- بفرض الإثارة x[n] واستجابة النبضة h[n]، أوجد تعبير مغلق لاستجابة النظام y[n] وارسم هذه الاستجابة.

(أ) $x[n]=u[n]$ و $h[n]=n(7/8)^n u[n]$

ملاحظة فاضل بالنسبة ل r $\sum_{n=0}^{N-1} r^n = \begin{cases} \frac{1-r^N}{1-r}, & r \neq 1 \\ N, & r = 1 \end{cases}$

(ب) $x[n]=u[n]$ و $h[n]=(4/7)\delta[n]-(-3/4)^n u[n]$

الاستقرار

٤٣- لقد تمت إثارة نظام بوحدة انحدار متقطعة زمنياً والاستجابة كانت غير محدودة. من هذه الحقائق وحدها من الممكن أن نحدد إذا كان النظام سيكون مستقراً (BIBO) أم لا. لماذا؟

٤٤- لقد تمت إثارة نظام بدالة وحدة التتابع وكانت استجابته هي $K(1-\alpha^n)$.

(أ) إذا كانت K=-2 و α=1.1 فهل النظام مستقر (BIBO)؟

(ب) إذا كانت K=2 و α=-1.1 فهل النظام مستقر (BIBO)؟

٤٥- إستجابة النبضة لأحد الأنظمة كانت صفراً لكل الأزمنة السالبة، وللأزمنة n≥0 تكون تتابعاً متذبذباً كالتالي ... ,1, -1, 1, -1, 1, -1 مستمراً إلى ما لانهاية، فهل هذا النظام مستقر؟